Végtelen gráfok színezési kérdései

Akadémiai székfoglaló

Komjáth Péter

2011 március 23

- Erdős Pál
- Hajnal András
- Saharon Shelah

Kromatikus szám: a legkisebb számosság, ahány színnel a gráfnak van jó színezése. Jelölés: $\mathrm{Chr}(X)$

Tétel. (Galvin-K): A kiválasztási axióma ekvivalens azzal, hogy minden gráfnak van kromatikus száma.

Kromatikus szám: a legkisebb számosság, ahány színnel a gráfnak van jó színezése. Jelölés: $\mathrm{Chr}(X)$

Tétel. (Galvin-K): A kiválasztási axióma ekvivalens azzal, hogy minden gráfnak van kromatikus száma.

Tétel. (Erdős–de Bruijn) Ha n természetes szám és az X gráf minden véges részgráfja n színnel jól színezhető, akkor X is.

Tétel. (Blanche Descartes) Minden $n = 2, 3, \ldots$-re van véges, n-kromatikus, C_3-nélküli gráf.

Tétel. (Erdős–Rado) Ha κ végtelen számosság, van C_3-nélküli X gráf, $|X| = 2^\kappa$, amire $\mathrm{Chr}(X) > \kappa$. Lehet $|X| = \kappa^+$ is.

Tétel. (Erdős) Ha n, k természetes számok, akkor van X (véges) gráf amire $\mathrm{Chr}(X) > n$ és X nem tartalmaz $C_3, C_4, \ldots, C_k$-t.

Tétel. (Blanche Descartes) Minden $n = 2, 3, \ldots$-re van véges, n-kromatikus, C_3-nélküli gráf.

Tétel. (Erdős–Rado) Ha κ végtelen számosság, van C_3-nélküli X gráf, $|X| = 2^\kappa$, amire $\mathrm{Chr}(X) > \kappa$. Lehet $|X| = \kappa^+$ is.

Tétel. (Erdős) Ha n, k természetes számok, akkor van X (véges) gráf amire $\mathrm{Chr}(X) > n$ és X nem tartalmaz $C_3, C_4, \ldots, C_k$-t.

Tétel. (Blanche Descartes) Minden $n = 2, 3, \dots$-re van véges, n-kromatikus, C_3-nélküli gráf.

Tétel. (Erdős–Rado) Ha κ végtelen számosság, van C_3-nélküli X gráf, $|X| = 2^\kappa$, amire $\mathrm{Chr}(X) > \kappa$. Lehet $|X| = \kappa^+$ is.

Tétel. (Erdős) Ha n, k természetes számok, akkor van X (véges) gráf amire $\mathrm{Chr}(X) > n$ és X nem tartalmaz $C_3, C_4, \dots, C_k$-t.

Tétel. (Erdős–Hajnal) Ha az X gráfban nincs C_4 (vagy bármilyen páros hosszúságú kör), akkor $\mathrm{Chr}(X) \leq \aleph_0$.

Tétel. (Erdős–Hajnal) Ha κ számosság, n természetes szám, akkor van X gráf, ami nem tartalmaz $C_3, C_5, \ldots, C_{2n+1}$-et és $\mathrm{Chr}(X) > \kappa$.

Tétel. (Erdős–Hajnal) Ha az X gráfban nincs C_4 (vagy bármilyen páros hosszúságú kör), akkor $\mathrm{Chr}(X) \leq \aleph_0$.

Tétel. (Erdős–Hajnal) Ha κ számosság, n természetes szám, akkor van X gráf, ami nem tartalmaz $C_3, C_5, \ldots, C_{2n+1}$-et és $\mathrm{Chr}(X) > \kappa$.

Definíció. (Erdős-Hajnal) Ha X gráf, akkor sorozatszáma, $\mathrm{Col}(X)$ a legkisebb μ számosság, amire igaz, hogy $V(X)$-nek van olyan $<$ jólrendezése, amiben minden csúcs $<\mu$ kisebb csúcsba van bekötve.

Ekkor X μ színnel kiszínezhető, $<$ szerinti transzfinit rekurzióval, tehát $\mathrm{Chr}(X) \leq \mathrm{Col}(X)$.

Tétel. (Erdős-Hajnal) Ha $\mathrm{Col}(X) > \aleph_0$, akkor X-ben van C_4, sőt minden C_{2k}, sőt minden n-re $K_{n,\aleph_1}$.

Definíció. (Erdős-Hajnal) Ha X gráf, akkor sorozatszáma, $\mathrm{Col}(X)$ a legkisebb μ számosság, amire igaz, hogy $V(X)$-nek van olyan $<$ jólrendezése, amiben minden csúcs $< \mu$ kisebb csúcsba van bekötve.

Ekkor X μ színnel kiszínezhető, $<$ szerinti transzfinit rekurzióval, tehát $\mathrm{Chr}(X) \leq \mathrm{Col}(X)$.

Tétel. (Erdős-Hajnal) Ha $\mathrm{Col}(X) > \aleph_0$, akkor X-ben van C_4, sőt minden C_{2k}, sőt minden n-re $K_{n,\aleph_1}$.

Definíció. (Erdős-Hajnal) Ha X gráf, akkor sorozatszáma, $\mathrm{Col}(X)$ a legkisebb μ számosság, amire igaz, hogy $V(X)$-nek van olyan $<$ jólrendezése, amiben minden csúcs $< \mu$ kisebb csúcsba van bekötve.

Ekkor X μ színnel kiszínezhető, $<$ szerinti transzfinit rekurzióval, tehát $\mathrm{Chr}(X) \leq \mathrm{Col}(X)$.

Tétel. (Erdős-Hajnal) Ha $\mathrm{Col}(X) > \aleph_0$, akkor X-ben van C_4, sőt minden C_{2k}, sőt minden n-re $K_{n,\aleph_1}$.

Kötelező gráf: ami minden X-ben, amire $\mathrm{Col}(X) > \aleph_0$, előfordul. Mik a kötelező gráfok?

Tétel. (K) Megadható olyan megszámlálható Δ és $\aleph_1$ számosságú Γ gráf, hogy Δ a legnagyobb megszámlálható kötelező gráf és Γ a legnagyobb kötelező gráf.

Kötelező gráf: ami minden X-ben, amire $\mathrm{Col}(X) > \aleph_0$, előfordul. Mik a kötelező gráfok?

Tétel. (K) Megadható olyan megszámlálható Δ és $\aleph_1$ számosságú Γ gráf, hogy Δ a legnagyobb megszámlálható kötelező gráf és Γ a legnagyobb kötelező gráf.

Tétel. (Erdős–Hajnal) Ha $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor minden páros gráf megjelenik X-ben és minden véges nempáros gráf kihagyható.

Mik a kötelező véges gráfcsaládok?

Tétel. (Erdős–Hajnal–Shelah, Thomassen) Ha $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor X valamilyen n-re tartalmazza $C_{2n+1}, C_{2n+3}, \dots$ mindegyikét.

Tétel. (Erdős–Hajnal) Ha $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor minden páros gráf megjelenik X-ben és minden véges nempáros gráf kihagyható.

Mik a kötelező véges gráfcsaládok?

Tétel. (Erdős–Hajnal–Shelah, Thomassen) Ha $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor X valamilyen n-re tartalmazza $C_{2n+1}, C_{2n+3}, \ldots$ mindegyikét.

Tétel. (Erdős–Hajnal) Ha $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor minden páros gráf megjelenik X-ben és minden véges nempáros gráf kihagyható.

Mik a kötelező véges gráfcsaládok?

Tétel. (Erdős–Hajnal–Shelah, Thomassen) Ha $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor X valamilyen n-re tartalmazza $C_{2n+1}, C_{2n+3}, \ldots$ mindegyikét.

Ha $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$ legyen f_X a következő függvény. $f_X(n)$ a legkisebb, X-beli n-kromatikus részgráf csúcsainak száma. Erdős–de Bruijn miatt $f_X(n)$ mindig definiált és nyilván $f_X(n) \geq n$. Tehát $f_X \to \infty$.

Kérdés. (Erdős–Hajnal) Tarthat-e f_X végtelenhez tetszőlegesen gyorsan?

Tétel. (Shelah) Konzisztens, hogy minden $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényhez van X gráf, mire $\mathrm{Chr}(X) = \aleph_1$ és $f_X(n) \geq f(n)$ $(n \geq 3)$.

Ha $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$ legyen f_X a következő függvény. $f_X(n)$ a legkisebb, X-beli n-kromatikus részgráf csúcsainak száma. Erdős–de Bruijn miatt $f_X(n)$ mindig definiált és nyilván $f_X(n) \geq n$. Tehát $f_X \to \infty$.

Kérdés. (Erdős–Hajnal) Tarthat-e f_X végtelenhez tetszőlegesen gyorsan?

Tétel. (Shelah) Konzisztens, hogy minden $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényhez van X gráf, mire $\mathrm{Chr}(X) = \aleph_1$ és $f_X(n) \geq f(n)$ $(n \geq 3)$.

Ha $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$ legyen f_X a következő függvény. $f_X(n)$ a legkisebb, X-beli n-kromatikus részgráf csúcsainak száma. Erdős–de Bruijn miatt $f_X(n)$ mindig definiált és nyilván $f_X(n) \geq n$. Tehát $f_X \to \infty$.

Kérdés. (Erdős–Hajnal) Tarthat-e f_X végtelenhez tetszőlegesen gyorsan?

Tétel. (Shelah) Konzisztens, hogy minden $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényhez van X gráf, mire $\mathrm{Chr}(X) = \aleph_1$ és $f_X(n) \geq f(n)$ $(n \geq 3)$.

A Taylor–sejtés (Taylor, Erdős–Hajnal–Shelah) Ha X gráf, amire $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor minden λ számosságra van olyan Y gráf, aminek ugyanazok a véges részgráfjai, mint X-nek és $\mathrm{Chr}(Y) > \lambda$.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy van olyan X gráf, amire $|X| = \mathrm{Chr}(X) = \aleph_1$ és ha Y olyan gráf, aminek minden véges részgráfja előfordul X-ben, akkor $\mathrm{Chr}(Y) \leq \aleph_2$.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy ha $\mathrm{Chr}(X) \geq \aleph_2$, akkor van tetszőlegesen nagy kromatikus számú Y gráf, aminek ugyanazok a véges részgráfjai, mint X-nek.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy van olyan X gráf, amire $|X| = \mathrm{Chr}(X) = \aleph_1$ és ha Y olyan gráf, aminek minden véges részgráfja előfordul X-ben, akkor $\mathrm{Chr}(Y) \leq \aleph_2$.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy ha $\mathrm{Chr}(X) \geq \aleph_2$, akkor van tetszőlegesen nagy kromatikus számú Y gráf, aminek ugyanazok a véges részgráfjai, mint X-nek.

Az Erdős-de Bruijn jelenség nem igaz a sorozatszámra (Erdős-Hajnal), de

Tétel. (K) Ha n természetes szám és $\mathrm{Col}(X) = n + 1$, akkor X-nek van olyan Y részgráfja, amire $\mathrm{Col}(Y) = n$.

Mi a helyzet a kromatikus számmal?

Ha $\mathrm{Chr}(X) \geq n$, akkor van Y részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = n$.

Ha $\mathrm{Chr}(X) \geq \aleph_0$, akkor van Y részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = \aleph_0$.

Az Erdős-de Bruijn jelenség nem igaz a sorozatszámra (Erdős-Hajnal), de

Tétel. (K) Ha n természetes szám és $\mathrm{Col}(X) = n + 1$, akkor X-nek van olyan Y részgráfja, amire $\mathrm{Col}(Y) = n$.

Mi a helyzet a kromatikus számmal?

Ha $\mathrm{Chr}(X) \geq n$, akkor van Y részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = n$.

Ha $\mathrm{Chr}(X) \geq \aleph_0$, akkor van Y részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = \aleph_0$.

Az Erdős-de Bruijn jelenség nem igaz a sorozatszámra (Erdős-Hajnal), de

Tétel. (K) Ha n természetes szám és $\mathrm{Col}(X) = n + 1$, akkor X-nek van olyan Y részgráfja, amire $\mathrm{Col}(Y) = n$.

Mi a helyzet a kromatikus számmal?

Ha $\mathrm{Chr}(X) \geq n$, akkor van Y részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = n$.

Ha $\mathrm{Chr}(X) \geq \aleph_0$, akkor van Y részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = \aleph_0$.

Az Erdős-de Bruijn jelenség nem igaz a sorozatszámra (Erdős-Hajnal), de

Tétel. (K) Ha n természetes szám és $\mathrm{Col}(X) = n + 1$, akkor X-nek van olyan Y részgráfja, amire $\mathrm{Col}(Y) = n$.

Mi a helyzet a kromatikus számmal?

Ha $\mathrm{Chr}(X) \geq n$, akkor van Y részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = n$.

Ha $\mathrm{Chr}(X) \geq \aleph_0$, akkor van Y részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = \aleph_0$.

Az Erdős-de Bruijn jelenség nem igaz a sorozatszámra (Erdős-Hajnal), de

Tétel. (K) Ha n természetes szám és $\mathrm{Col}(X) = n + 1$, akkor X-nek van olyan Y részgráfja, amire $\mathrm{Col}(Y) = n$.

Mi a helyzet a kromatikus számmal?

Ha $\mathrm{Chr}(X) \geq n$, akkor van Y részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = n$.

Ha $\mathrm{Chr}(X) \geq \aleph_0$, akkor van Y részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = \aleph_0$.

Galvin kérdése: a kromatikus szám rendelkezik-e a Darboux-tulajdonsággal: igaz-e, hogy ha $\mathrm{Chr}(X) = \lambda$ és $\kappa < \lambda$, akkor van $Y \subseteq X$ részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = \kappa$?

Feltehető, hogy $\aleph_0 < \kappa$.

Tétel. (Galvin) Ha $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} < 2^{\aleph_2}$, akkor van X gráf, amire $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_1$, de nincs pontosan $\aleph_1$-kromatikus *feszített* részgráfja.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy van $\aleph_2$ számosságú, $\aleph_2$-kromatikus gráf, aminek nincs pontosan $\aleph_1$-kromatikus részgráfja.

Galvin kérdése: a kromatikus szám rendelkezik-e a Darboux-tulajdonsággal: igaz-e, hogy ha $\mathrm{Chr}(X) = \lambda$ és $\kappa < \lambda$, akkor van $Y \subseteq X$ részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = \kappa$?
Feltehető, hogy $\aleph_0 < \kappa$.

Tétel. (Galvin) Ha $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} < 2^{\aleph_2}$, akkor van X gráf, amire $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_1$, de nincs pontosan $\aleph_1$-kromatikus *feszített* részgráfja.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy van $\aleph_2$ számosságú, $\aleph_2$-kromatikus gráf, aminek nincs pontosan $\aleph_1$-kromatikus részgráfja.

Galvin kérdése: a kromatikus szám rendelkezik-e a Darboux-tulajdonsággal: igaz-e, hogy ha $\mathrm{Chr}(X) = \lambda$ és $\kappa < \lambda$, akkor van $Y \subseteq X$ részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = \kappa$?
Feltehető, hogy $\aleph_0 < \kappa$.

Tétel. (Galvin) Ha $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} < 2^{\aleph_2}$, akkor van X gráf, amire $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_1$, de nincs pontosan $\aleph_1$-kromatikus *feszített* részgráfja.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy van $\aleph_2$ számosságú, $\aleph_2$-kromatikus gráf, aminek nincs pontosan $\aleph_1$-kromatikus részgráfja.

Galvin kérdése: a kromatikus szám rendelkezik-e a Darboux-tulajdonsággal: igaz-e, hogy ha $\mathrm{Chr}(X) = \lambda$ és $\kappa < \lambda$, akkor van $Y \subseteq X$ részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) = \kappa$?
Feltehető, hogy $\aleph_0 < \kappa$.

Tétel. (Galvin) Ha $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} < 2^{\aleph_2}$, akkor van X gráf, amire $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_1$, de nincs pontosan $\aleph_1$-kromatikus *feszített* részgráfja.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy van $\aleph_2$ számosságú, $\aleph_2$-kromatikus gráf, aminek nincs pontosan $\aleph_1$-kromatikus részgráfja.

Ha X gráf, legyen

$$I(X) =$$

$$\{\mathrm{Chr}(Y) : Y \text{ feszített részgráf } X\text{-ben}\} - \{0, 1, \ldots, \aleph_0\}.$$

Ekkor $I(X)$ zárt és ha $\lambda \in I(X)$ szinguláris, akkor $\lambda \in I(X)'$.

Továbbá, ha az A $\aleph_0$-nál nagyobb számosságokból álló nemüres halmaz rendelkezik e két tulajdonsággal, akkor van olyan számosságokat megőrző forszolás, ami ad egy X gráfot, amire $I(X) = A$.

Ha X gráf, legyen

$$I(X) =$$

$$\{\mathrm{Chr}(Y) : Y \text{ feszített részgráf } X\text{-ben}\} - \{0, 1, \ldots, \aleph_0\}.$$

Ekkor $I(X)$ zárt és ha $\lambda \in I(X)$ szinguláris, akkor $\lambda \in I(X)'$.

Továbbá, ha az A $\aleph_0$-nál nagyobb számosságokból álló nemüres halmaz rendelkezik e két tulajdonsággal, akkor van olyan számosságokat megőrző forszolás, ami ad egy X gráfot, amire $I(X) = A$.

Ha X gráf, legyen

$$I(X) =$$

$$\{\mathrm{Chr}(Y) : Y \text{ feszített részgráf } X\text{-ben}\} - \{0, 1, \ldots, \aleph_0\}.$$

Ekkor $I(X)$ zárt és ha $\lambda \in I(X)$ szinguláris, akkor $\lambda \in I(X)'$.

Továbbá, ha az A $\aleph_0$-nál nagyobb számosságokból álló nemüres halmaz rendelkezik e két tulajdonsággal, akkor van olyan számosságokat megőrző forszolás, ami ad egy X gráfot, amire $I(X) = A$.

Ha X gráf, legyen

$$S(X) = \{\mathrm{Chr}(Y) : Y \text{ részgráf } X\text{-ben}\} - \{0, 1, \ldots, \aleph_0\}.$$

Ekkor, ha $\lambda \in S(X)$ szinguláris számosság, akkor $\lambda \in S(X)'$ és ha $\lambda \in S(X)'$ szinguláris, akkor $\lambda \in S(X)$.

De reguláris számosságoknál $S(X)$ nem feltétlenül zárt:

Tétel. (K) Ha mérhető számosság létezése konzisztens, akkor az is, hogy van olyan X gráf, amelyre $S(X)$ nem zárt egy reguláris számosságnál.

Ha X gráf, legyen

$$S(X) = \{\mathrm{Chr}(Y) : Y \text{ részgráf } X\text{-ben}\} - \{0, 1, \ldots, \aleph_0\}.$$

Ekkor, ha $\lambda \in S(X)$ szinguláris számosság, akkor $\lambda \in S(X)'$ és ha $\lambda \in S(X)'$ szinguláris, akkor $\lambda \in S(X)$.

De reguláris számosságoknál $S(X)$ nem feltétlenül zárt:

Tétel. (K) Ha mérhető számosság létezése konzisztens, akkor az is, hogy van olyan X gráf, amelyre $S(X)$ nem zárt egy reguláris számosságnál.

Ha X gráf, legyen

$$S(X) = \{\mathrm{Chr}(Y) : Y \text{ részgráf } X\text{-ben}\} - \{0, 1, \dots, \aleph_0\}.$$

Ekkor, ha $\lambda \in S(X)$ szinguláris számosság, akkor $\lambda \in S(X)'$ és ha $\lambda \in S(X)'$ szinguláris, akkor $\lambda \in S(X)$.

De reguláris számosságoknál $S(X)$ nem feltétlenül zárt:

Tétel. (K) Ha mérhető számosság létezése konzisztens, akkor az is, hogy van olyan X gráf, amelyre $S(X)$ nem zárt egy reguláris számosságnál.

Ha $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor van olyan összefüggő Y részgráfja, amire $\mathrm{Chr}(Y) > \aleph_0$. (Valamelyik összefüggő komponens.)

Tétel. (K) Ha n véges, X gráf, amire $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor van n-összefüggő $Y \subseteq X$ részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) > \aleph_0$ és Y-ban minden pont foka $> \aleph_0$.

Ha $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor van olyan összefüggő Y részgráfja, amire $\mathrm{Chr}(Y) > \aleph_0$. (Valamelyik összefüggő komponens.)

Tétel. (K) Ha n véges, X gráf, amire $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor van n-összefüggő $Y \subseteq X$ részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) > \aleph_0$ és Y-ban minden pont foka $> \aleph_0$.

Ha $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor van olyan összefüggő Y részgráfja, amire $\mathrm{Chr}(Y) > \aleph_0$. (Valamelyik összefüggő komponens.)

Tétel. (K) Ha n véges, X gráf, amire $\mathrm{Chr}(X) > \aleph_0$, akkor van n-összefüggő $Y \subseteq X$ részgráf, amire $\mathrm{Chr}(Y) > \aleph_0$ és Y-ban minden pont foka $> \aleph_0$.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy minden $\aleph_1$ számosságú, $\aleph_1$-kromatikus gráf tartalmaz $\aleph_1$-kromatikus, $\aleph_0$-összefüggő részgráfot.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy van olyan $\aleph_1$-kromatikus, $\aleph_1$ számosságú gráf, amely nem tartalmaz $\aleph_1$ számosságú $\aleph_0$-összefüggő részgráfot.

Probléma. (Erdős-Hajnal) Igaz-e, hogy minden $> \aleph_0$-kromatikus gráf tartalmaz $\aleph_0$-összefüggő részgráfot?

Tétel. (K) Konzisztens, hogy minden $\aleph_1$ számosságú, $\aleph_1$-kromatikus gráf tartalmaz $\aleph_1$-kromatikus, $\aleph_0$-összefüggő részgráfot.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy van olyan $\aleph_1$-kromatikus, $\aleph_1$ számosságú gráf, amely nem tartalmaz $\aleph_1$ számosságú $\aleph_0$-összefüggő részgráfot.

Probléma. (Erdős-Hajnal) Igaz-e, hogy minden $> \aleph_0$-kromatikus gráf tartalmaz $\aleph_0$-összefüggő részgráfot?

Tétel. (K) Konzisztens, hogy minden $\aleph_1$ számosságú, $\aleph_1$-kromatikus gráf tartalmaz $\aleph_1$-kromatikus, $\aleph_0$-összefüggő részgráfot.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy van olyan $\aleph_1$-kromatikus, $\aleph_1$ számosságú gráf, amely nem tartalmaz $\aleph_1$ számosságú $\aleph_0$-összefüggő részgráfot.

Probléma. (Erdős-Hajnal) Igaz-e, hogy minden $> \aleph_0$-kromatikus gráf tartalmaz $\aleph_0$-összefüggő részgráfot?

Egy (V, X) gráf $\mathrm{List}(X)$ *lista-kromatikus száma* a legkisebb μ számosság, amire igaz, hogy ha $F(v)$ tetszőleges halmaz, amire $|F(v)| = \mu$ $(v \in V)$ akkor van f jó színezés amire $f(v) \in F(v)$ $(v \in V)$.

Lemma. Minden X gráfra teljesül a $\mathrm{Chr}(X) \leq \mathrm{List}(X) \leq \mathrm{Col}(X)$ egyenlőtlenség.

Egy (V, X) gráf $\mathrm{List}(X)$ *lista-kromatikus száma* a legkisebb μ számosság, amire igaz, hogy ha $F(v)$ tetszőleges halmaz, amire $|F(v)| = \mu$ $(v \in V)$ akkor van f jó színezés amire $f(v) \in F(v)$ $(v \in V)$.

Lemma. Minden X gráfra teljesül a $\mathrm{Chr}(X) \leq \mathrm{List}(X) \leq \mathrm{Col}(X)$ egyenlőtlenség.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy $\aleph_1$ számosságú gráfokra $\mathrm{List}(X) = \aleph_1 \iff \mathrm{Chr}(X) = \aleph_1$.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy $\aleph_1$ számosságú gráfokra $\mathrm{List}(X) = \aleph_1 \iff \mathrm{Col}(X) = \aleph_1$.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy $\aleph_1$ számosságú gráfokra $\mathrm{List}(X) = \aleph_1 \iff \mathrm{Chr}(X) = \aleph_1$.

Tétel. (K) Konzisztens, hogy $\aleph_1$ számosságú gráfokra $\mathrm{List}(X) = \aleph_1 \iff \mathrm{Col}(X) = \aleph_1$.