

# Végtelen gráfok színezési kérdései

## Akadémiai székfoglaló

Komjáth Péter

2011 március 23

- Erdős Pál
- Hajnal András
- Saharon Shelah

*Kromatikus szám*: a legkisebb számosság, ahány színnel a gráfnak van jó színezése. Jelölés:  $\text{Chr}(X)$

**Tétel.** (Galvin-K): A kiválasztási axióma ekvivalens azzal, hogy minden gráfnak van kromatikus száma.

*Kromatikus szám*: a legkisebb számosság, ahány színnel a gráfnak van jó színezése. Jelölés:  $\text{Chr}(X)$

**Tétel.** (Galvin-K): A kiválasztási axióma ekvivalens azzal, hogy minden gráfnak van kromatikus száma.

**Tétel.** (Erdős–de Bruijn) Ha  $n$  természetes szám és az  $X$  gráf minden véges részgráfja  $n$  színnel jól színezhető, akkor  $X$  is.

**Tétel.** (Blanche Descartes) Minden  $n = 2, 3, \dots$ -re van véges,  $n$ -kromatikus,  $C_3$ -nélküli gráf.

**Tétel.** (Erdős–Rado) Ha  $\kappa$  végtelen számosság, van  $C_3$ -nélküli  $X$  gráf,  $|X| = 2^\kappa$ , amire  $\text{Chr}(X) > \kappa$ .  
Lehet  $|X| = \kappa^+$  is.

**Tétel.** (Erdős) Ha  $n, k$  természetes számok, akkor van  $X$  (véges) gráf amire  $\text{Chr}(X) > n$  és  $X$  nem tartalmaz  $C_3, C_4, \dots, C_k$ -t.

**Tétel.** (Blanche Descartes) Minden  $n = 2, 3, \dots$ -re van véges,  $n$ -kromatikus,  $C_3$ -nélküli gráf.

**Tétel.** (Erdős–Rado) Ha  $\kappa$  végtelen számosság, van  $C_3$ -nélküli  $X$  gráf,  $|X| = 2^\kappa$ , amire  $\text{Chr}(X) > \kappa$ .  
Lehet  $|X| = \kappa^+$  is.

**Tétel.** (Erdős) Ha  $n, k$  természetes számok, akkor van  $X$  (véges) gráf amire  $\text{Chr}(X) > n$  és  $X$  nem tartalmaz  $C_3, C_4, \dots, C_k$ -t.

**Tétel.** (Blanche Descartes) Minden  $n = 2, 3, \dots$ -re van véges,  $n$ -kromatikus,  $C_3$ -nélküli gráf.

**Tétel.** (Erdős–Rado) Ha  $\kappa$  végtelen számosság, van  $C_3$ -nélküli  $X$  gráf,  $|X| = 2^\kappa$ , amire  $\text{Chr}(X) > \kappa$ .  
Lehet  $|X| = \kappa^+$  is.

**Tétel.** (Erdős) Ha  $n, k$  természetes számok, akkor van  $X$  (véges) gráf amire  $\text{Chr}(X) > n$  és  $X$  nem tartalmaz  $C_3, C_4, \dots, C_k$ -t.



**Tétel.** (Erdős–Hajnal) Ha az  $X$  gráfban nincs  $C_4$  (vagy bármilyen páros hosszúságú kör), akkor  $\text{Chr}(X) \leq \aleph_0$ .

**Tétel.** (Erdős–Hajnal) Ha  $\kappa$  számosság,  $n$  természetes szám, akkor van  $X$  gráf, ami nem tartalmaz  $C_3, C_5, \dots, C_{2n+1}$ -et és  $\text{Chr}(X) > \kappa$ .

**Tétel.** (Erdős–Hajnal) Ha az  $X$  gráfban nincs  $C_4$  (vagy bármilyen páros hosszúságú kör), akkor  $\text{Chr}(X) \leq \aleph_0$ .

**Tétel.** (Erdős–Hajnal) Ha  $\kappa$  számosság,  $n$  természetes szám, akkor van  $X$  gráf, ami nem tartalmaz  $C_3, C_5, \dots, C_{2n+1}$ -et és  $\text{Chr}(X) > \kappa$ .

**Definíció.** (Erdős-Hajnal) Ha  $X$  gráf, akkor sorozatszám,  $\text{Col}(X)$  a legkisebb  $\mu$  számosság, amire igaz, hogy  $V(X)$ -nek van olyan  $<$  jólrendezése, amiben minden csúcs  $< \mu$  kisebb csúcsba van bekötve.

Ekkor  $X$   $\mu$  színnel kiszínezhető,  $<$  szerinti transzfinit rekurzióval, tehát  $\text{Chr}(X) \leq \text{Col}(X)$ .

**Tétel.** (Erdős-Hajnal) Ha  $\text{Col}(X) > \aleph_0$ , akkor  $X$ -ben van  $C_4$ , sőt minden  $C_{2k}$ , sőt minden  $n$ -re  $K_{n, \aleph_1}$ .

**Definíció.** (Erdős-Hajnal) Ha  $X$  gráf, akkor sorozatszám,  $\text{Col}(X)$  a legkisebb  $\mu$  számosság, amire igaz, hogy  $V(X)$ -nek van olyan  $<$  jólrendezése, amiben minden csúcs  $< \mu$  kisebb csúcsba van bekötve.

Ekkor  $X$   $\mu$  színnel kiszínezhető,  $<$  szerinti transzfinit rekurzióval, tehát  $\text{Chr}(X) \leq \text{Col}(X)$ .

**Tétel.** (Erdős-Hajnal) Ha  $\text{Col}(X) > \aleph_0$ , akkor  $X$ -ben van  $C_4$ , sőt minden  $C_{2k}$ , sőt minden  $n$ -re  $K_{n, \aleph_1}$ .

**Definíció.** (Erdős-Hajnal) Ha  $X$  gráf, akkor sorozatszám,  $\text{Col}(X)$  a legkisebb  $\mu$  számosság, amire igaz, hogy  $V(X)$ -nek van olyan  $<$  jólrendezése, amiben minden csúcs  $< \mu$  kisebb csúcsba van bekötve.

Ekkor  $X$   $\mu$  színnel kiszínezhető,  $<$  szerinti transzfinit rekurzióval, tehát  $\text{Chr}(X) \leq \text{Col}(X)$ .

**Tétel.** (Erdős-Hajnal) Ha  $\text{Col}(X) > \aleph_0$ , akkor  $X$ -ben van  $C_4$ , sőt minden  $C_{2k}$ , sőt minden  $n$ -re  $K_{n, \aleph_1}$ .

Kötelező gráf: ami minden  $X$ -ben, amire  $\text{Col}(X) > \aleph_0$ , előfordul. Mik a kötelező gráfok?

**Tétel.** (K) Megadható olyan megszámlálható  $\Delta$  és  $\aleph_1$  számosságú  $\Gamma$  gráf, hogy  $\Delta$  a legnagyobb megszámlálható kötelező gráf és  $\Gamma$  a legnagyobb kötelező gráf.

Kötelező gráf: ami minden  $X$ -ben, amire  $\text{Col}(X) > \aleph_0$ , előfordul. Mik a kötelező gráfok?

**Tétel.** (K) Megadható olyan megszámlálható  $\Delta$  és  $\aleph_1$  számosságú  $\Gamma$  gráf, hogy  $\Delta$  a legnagyobb megszámlálható kötelező gráf és  $\Gamma$  a legnagyobb kötelező gráf.

**Tétel.** (Erdős–Hajnal) Ha  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor minden páros gráf megjelenik  $X$ -ben és minden véges nempáros gráf kihagyható.

Mik a kötelező véges gráfcsaládok?

**Tétel.** (Erdős–Hajnal–Shelah, Thomassen) Ha  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor  $X$  valamilyen  $n$ -re tartalmazza  $C_{2n+1}, C_{2n+3}, \dots$  mindegyikét.



**Tétel.** (Erdős–Hajnal) Ha  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor minden páros gráf megjelenik  $X$ -ben és minden véges nempáros gráf kihagyható.

Mik a kötelező véges gráfcsaládok?

**Tétel.** (Erdős–Hajnal–Shelah, Thomassen) Ha  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor  $X$  valamilyen  $n$ -re tartalmazza  $C_{2n+1}, C_{2n+3}, \dots$  mindegyikét.

**Tétel.** (Erdős–Hajnal) Ha  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor minden páros gráf megjelenik  $X$ -ben és minden véges nempáros gráf kihagyható.

Mik a kötelező véges gráfcsaládok?

**Tétel.** (Erdős–Hajnal–Shelah, Thomassen) Ha  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor  $X$  valamilyen  $n$ -re tartalmazza  $C_{2n+1}, C_{2n+3}, \dots$  mindegyikét.

Ha  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$  legyen  $f_X$  a következő függvény.  
 $f_X(n)$  a legkisebb,  $X$ -beli  $n$ -kromatikus részgráf csúcsainak száma. Erdős–de Bruijn miatt  $f_X(n)$  mindig definiált és nyilván  $f_X(n) \geq n$ . Tehát  $f_X \rightarrow \infty$ .

**Kérdés.** (Erdős–Hajnal) Tarthat-e  $f_X$  végtelenhez tetszőlegesen gyorsan?

**Tétel.** (Shelah) Konzisztens, hogy minden  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  függvényhez van  $X$  gráf, mire  $\text{Chr}(X) = \aleph_1$  és  $f_X(n) \geq f(n)$  ( $n \geq 3$ ).

Ha  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$  legyen  $f_X$  a következő függvény.  
 $f_X(n)$  a legkisebb,  $X$ -beli  $n$ -kromatikus részgráf csúcsainak száma. Erdős–de Bruijn miatt  $f_X(n)$  mindig definiált és nyilván  $f_X(n) \geq n$ . Tehát  $f_X \rightarrow \infty$ .

**Kérdés.** (Erdős–Hajnal) Tarthat-e  $f_X$  végtelenhez tetszőlegesen gyorsan?

**Tétel.** (Shelah) Konzisztens, hogy minden  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  függvényhez van  $X$  gráf, mire  $\text{Chr}(X) = \aleph_1$  és  $f_X(n) \geq f(n)$  ( $n \geq 3$ ).

Ha  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$  legyen  $f_X$  a következő függvény.  
 $f_X(n)$  a legkisebb,  $X$ -beli  $n$ -kromatikus részgráf  
 csúcsainak száma. Erdős–de Bruijn miatt  $f_X(n)$   
 mindig definiált és nyilván  $f_X(n) \geq n$ . Tehát  
 $f_X \rightarrow \infty$ .

**Kérdés.** (Erdős–Hajnal) Tarthat-e  $f_X$  végtelenhez  
 tetszőlegesen gyorsan?

**Tétel.** (Shelah) Konzisztens, hogy minden  
 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  függvényhez van  $X$  gráf, mire  
 $\text{Chr}(X) = \aleph_1$  és  $f_X(n) \geq f(n)$  ( $n \geq 3$ ).

**A Taylor–sejtés** (Taylor, Erdős–Hajnal–Shelah) Ha  $X$  gráf, amire  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor minden  $\lambda$  számosságra van olyan  $Y$  gráf, aminek ugyanazok a véges részgráfjai, mint  $X$ -nek és  $\text{Chr}(Y) > \lambda$ .

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy van olyan  $X$  gráf, amire  $|X| = \text{Chr}(X) = \aleph_1$  és ha  $Y$  olyan gráf, aminek minden véges részgráfja előfordul  $X$ -ben, akkor  $\text{Chr}(Y) \leq \aleph_2$ .

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy ha  $\text{Chr}(X) \geq \aleph_2$ , akkor van tetszőlegesen nagy kromatikus számú  $Y$  gráf, aminek ugyanazok a véges részgráfjai, mint  $X$ -nek.

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy van olyan  $X$  gráf, amire  $|X| = \text{Chr}(X) = \aleph_1$  és ha  $Y$  olyan gráf, aminek minden véges részgráfja előfordul  $X$ -ben, akkor  $\text{Chr}(Y) \leq \aleph_2$ .

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy ha  $\text{Chr}(X) \geq \aleph_2$ , akkor van tetszőlegesen nagy kromatikus számú  $Y$  gráf, aminek ugyanazok a véges részgráfjai, mint  $X$ -nek.



Az Erdős-de Bruijn jelenség nem igaz a sorozatszámra (Erdős-Hajnal), de

**Tétel.** (K) Ha  $n$  természetes szám és  $\text{Col}(X) = n + 1$ , akkor  $X$ -nek van olyan  $Y$  részgráfja, amire  $\text{Col}(Y) = n$ .

Mi a helyzet a kromatikus számmal?

Ha  $\text{Chr}(X) \geq n$ , akkor van  $Y$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = n$ .

Ha  $\text{Chr}(X) \geq \aleph_0$ , akkor van  $Y$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = \aleph_0$ .

Az Erdős-de Bruijn jelenség nem igaz a sorozatszámra (Erdős-Hajnal), de

**Tétel.** (K) Ha  $n$  természetes szám és  $\text{Col}(X) = n + 1$ , akkor  $X$ -nek van olyan  $Y$  részgráfja, amire  $\text{Col}(Y) = n$ .

Mi a helyzet a kromatikus számmal?

Ha  $\text{Chr}(X) \geq n$ , akkor van  $Y$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = n$ .

Ha  $\text{Chr}(X) \geq \aleph_0$ , akkor van  $Y$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = \aleph_0$ .

Az Erdős-de Bruijn jelenség nem igaz a sorozatszámra (Erdős-Hajnal), de

**Tétel.** (K) Ha  $n$  természetes szám és  $\text{Col}(X) = n + 1$ , akkor  $X$ -nek van olyan  $Y$  részgráfja, amire  $\text{Col}(Y) = n$ .

Mi a helyzet a kromatikus számmal?

Ha  $\text{Chr}(X) \geq n$ , akkor van  $Y$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = n$ .

Ha  $\text{Chr}(X) \geq \aleph_0$ , akkor van  $Y$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = \aleph_0$ .

Az Erdős-de Bruijn jelenség nem igaz a sorozatszámra (Erdős-Hajnal), de

**Tétel.** (K) Ha  $n$  természetes szám és  $\text{Col}(X) = n + 1$ , akkor  $X$ -nek van olyan  $Y$  részgráfja, amire  $\text{Col}(Y) = n$ .

Mi a helyzet a kromatikus számmal?

Ha  $\text{Chr}(X) \geq n$ , akkor van  $Y$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = n$ .

Ha  $\text{Chr}(X) \geq \aleph_0$ , akkor van  $Y$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = \aleph_0$ .

Az Erdős-de Bruijn jelenség nem igaz a sorozatszámra (Erdős-Hajnal), de

**Tétel.** (K) Ha  $n$  természetes szám és  $\text{Col}(X) = n + 1$ , akkor  $X$ -nek van olyan  $Y$  részgráfja, amire  $\text{Col}(Y) = n$ .

Mi a helyzet a kromatikus számmal?

Ha  $\text{Chr}(X) \geq n$ , akkor van  $Y$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = n$ .

Ha  $\text{Chr}(X) \geq \aleph_0$ , akkor van  $Y$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = \aleph_0$ .

Galvin kérdése: a kromatikus szám rendelkezik-e a Darboux-tulajdonsággal: igaz-e, hogy ha  $\text{Chr}(X) = \lambda$  és  $\kappa < \lambda$ , akkor van  $Y \subseteq X$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = \kappa$ ?

Feltehető, hogy  $\aleph_0 < \kappa$ .

**Tétel.** (Galvin) Ha  $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} < 2^{\aleph_2}$ , akkor van  $X$  gráf, amire  $\text{Chr}(X) > \aleph_1$ , de nincs pontosan  $\aleph_1$ -kromatikus *feszített* részgráfja.

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy van  $\aleph_2$  számosságú,  $\aleph_2$ -kromatikus gráf, aminek nincs pontosan  $\aleph_1$ -kromatikus részgráfja.

Galvin kérdése: a kromatikus szám rendelkezik-e a Darboux-tulajdonsággal: igaz-e, hogy ha  $\text{Chr}(X) = \lambda$  és  $\kappa < \lambda$ , akkor van  $Y \subseteq X$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = \kappa$ ?

Feltehető, hogy  $\aleph_0 < \kappa$ .

**Tétel.** (Galvin) Ha  $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} < 2^{\aleph_2}$ , akkor van  $X$  gráf, amire  $\text{Chr}(X) > \aleph_1$ , de nincs pontosan  $\aleph_1$ -kromatikus *feszített* részgráfja.

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy van  $\aleph_2$  számosságú,  $\aleph_2$ -kromatikus gráf, aminek nincs pontosan  $\aleph_1$ -kromatikus részgráfja.

Galvin kérdése: a kromatikus szám rendelkezik-e a Darboux-tulajdonsággal: igaz-e, hogy ha  $\text{Chr}(X) = \lambda$  és  $\kappa < \lambda$ , akkor van  $Y \subseteq X$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = \kappa$ ?

Feltehető, hogy  $\aleph_0 < \kappa$ .

**Tétel.** (Galvin) Ha  $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} < 2^{\aleph_2}$ , akkor van  $X$  gráf, amire  $\text{Chr}(X) > \aleph_1$ , de nincs pontosan  $\aleph_1$ -kromatikus *feszített* részgráfja.

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy van  $\aleph_2$  számosságú,  $\aleph_2$ -kromatikus gráf, aminek nincs pontosan  $\aleph_1$ -kromatikus részgráfja.



Galvin kérdése: a kromatikus szám rendelkezik-e a Darboux-tulajdonsággal: igaz-e, hogy ha  $\text{Chr}(X) = \lambda$  és  $\kappa < \lambda$ , akkor van  $Y \subseteq X$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) = \kappa$ ?

Feltehető, hogy  $\aleph_0 < \kappa$ .

**Tétel.** (Galvin) Ha  $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} < 2^{\aleph_2}$ , akkor van  $X$  gráf, amire  $\text{Chr}(X) > \aleph_1$ , de nincs pontosan  $\aleph_1$ -kromatikus *feszített* részgráfja.

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy van  $\aleph_2$  számosságú,  $\aleph_2$ -kromatikus gráf, aminek nincs pontosan  $\aleph_1$ -kromatikus részgráfja.

Ha  $X$  gráf, legyen

$$I(X) =$$

$$\{\text{Chr}(Y) : Y \text{ feszített részgráf } X\text{-ben}\} - \{0, 1, \dots, \aleph_0\}.$$

Ekkor  $I(X)$  zárt és ha  $\lambda \in I(X)$  szinguláris, akkor  $\lambda \in I(X)'$ .

Továbbá, ha az  $A$   $\aleph_0$ -nál nagyobb számosságokból álló nemüres halmaz rendelkezik e két tulajdonsággal, akkor van olyan számosságokat megőrző forszolás, ami ad egy  $X$  gráfot, amire  $I(X) = A$ .

Ha  $X$  gráf, legyen

$$I(X) =$$

$$\{\text{Chr}(Y) : Y \text{ feszített részgráf } X\text{-ben}\} - \{0, 1, \dots, \aleph_0\}.$$

Ekkor  $I(X)$  zárt és ha  $\lambda \in I(X)$  szinguláris, akkor  $\lambda \in I(X)'$ .

Továbbá, ha az  $A$   $\aleph_0$ -nál nagyobb számosságokból álló nemüres halmaz rendelkezik e két tulajdonsággal, akkor van olyan számosságokat megőrző forszolás, ami ad egy  $X$  gráfot, amire  $I(X) = A$ .

Ha  $X$  gráf, legyen

$$I(X) =$$

$$\{\text{Chr}(Y) : Y \text{ feszített részgráf } X\text{-ben}\} - \{0, 1, \dots, \aleph_0\}.$$

Ekkor  $I(X)$  zárt és ha  $\lambda \in I(X)$  szinguláris, akkor  $\lambda \in I(X)'$ .

Továbbá, ha az  $A$   $\aleph_0$ -nál nagyobb számosságokból álló nemüres halmaz rendelkezik e két tulajdonsággal, akkor van olyan számosságokat megőrző forszolás, ami ad egy  $X$  gráfot, amire  $I(X) = A$ .

Ha  $X$  gráf, legyen

$$S(X) = \{\text{Chr}(Y) : Y \text{ részgráf } X\text{-ben}\} - \{0, 1, \dots, \aleph_0\}.$$

Ekkor, ha  $\lambda \in S(X)$  szinguláris számosság, akkor  $\lambda \in S(X)'$  és ha  $\lambda \in S(X)'$  szinguláris, akkor  $\lambda \in S(X)$ .

De reguláris számosságoknál  $S(X)$  nem feltétlenül zárt:

**Tétel.** (K) Ha mérhető számosság létezése konzisztens, akkor az is, hogy van olyan  $X$  gráf, amelyre  $S(X)$  nem zárt egy reguláris számosságnál.

Ha  $X$  gráf, legyen

$$S(X) = \{ \text{Chr}(Y) : Y \text{ részgráf } X\text{-ben} \} - \{0, 1, \dots, \aleph_0\}.$$

Ekkor, ha  $\lambda \in S(X)$  szinguláris számosság, akkor  $\lambda \in S(X)'$  és ha  $\lambda \in S(X)'$  szinguláris, akkor  $\lambda \in S(X)$ .

De reguláris számosságoknál  $S(X)$  nem feltétlenül zárt:

**Tétel.** (K) Ha mérhető számosság létezése konzisztens, akkor az is, hogy van olyan  $X$  gráf, amelyre  $S(X)$  nem zárt egy reguláris számosságnál.

Ha  $X$  gráf, legyen

$$S(X) = \{ \text{Chr}(Y) : Y \text{ részgráf } X\text{-ben} \} - \{0, 1, \dots, \aleph_0\}.$$

Ekkor, ha  $\lambda \in S(X)$  szinguláris számosság, akkor  $\lambda \in S(X)'$  és ha  $\lambda \in S(X)'$  szinguláris, akkor  $\lambda \in S(X)$ .

De reguláris számosságoknál  $S(X)$  nem feltétlenül zárt:

**Tétel.** (K) Ha mérhető számosság létezése konzisztens, akkor az is, hogy van olyan  $X$  gráf, amelyre  $S(X)$  nem zárt egy reguláris számosságnál.

Ha  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor van olyan összefüggő  $Y$  részgráfja, amire  $\text{Chr}(Y) > \aleph_0$ . (Valamelyik összefüggő komponens.)

**Tétel.** (K) Ha  $n$  véges,  $X$  gráf, amire  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor van  $n$ -összefüggő  $Y \subseteq X$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) > \aleph_0$  és  $Y$ -ban minden pont foka  $> \aleph_0$ .



Ha  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor van olyan összefüggő  $Y$  részgráfja, amire  $\text{Chr}(Y) > \aleph_0$ . (Valamelyik összefüggő komponens.)

**Tétel.** (K) Ha  $n$  véges,  $X$  gráf, amire  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor van  $n$ -összefüggő  $Y \subseteq X$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) > \aleph_0$  és  $Y$ -ban minden pont foka  $> \aleph_0$ .

Ha  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor van olyan összefüggő  $Y$  részgráfja, amire  $\text{Chr}(Y) > \aleph_0$ . (Valamelyik összefüggő komponens.)

**Tétel.** (K) Ha  $n$  véges,  $X$  gráf, amire  $\text{Chr}(X) > \aleph_0$ , akkor van  $n$ -összefüggő  $Y \subseteq X$  részgráf, amire  $\text{Chr}(Y) > \aleph_0$  és  $Y$ -ban minden pont foka  $> \aleph_0$ .

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy minden  $\aleph_1$  számosságú,  $\aleph_1$ -kromatikus gráf tartalmaz  $\aleph_1$ -kromatikus,  $\aleph_0$ -összefüggő részgráfot.

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy van olyan  $\aleph_1$ -kromatikus,  $\aleph_1$  számosságú gráf, amely nem tartalmaz  $\aleph_1$  számosságú  $\aleph_0$ -összefüggő részgráfot.

**Probléma.** (Erdős-Hajnal) Igaz-e, hogy minden  $> \aleph_0$ -kromatikus gráf tartalmaz  $\aleph_0$ -összefüggő részgráfot?

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy minden  $\aleph_1$  számosságú,  $\aleph_1$ -kromatikus gráf tartalmaz  $\aleph_1$ -kromatikus,  $\aleph_0$ -összefüggő részgráfot.

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy van olyan  $\aleph_1$ -kromatikus,  $\aleph_1$  számosságú gráf, amely nem tartalmaz  $\aleph_1$  számosságú  $\aleph_0$ -összefüggő részgráfot.

**Probléma.** (Erdős-Hajnal) Igaz-e, hogy minden  $> \aleph_0$ -kromatikus gráf tartalmaz  $\aleph_0$ -összefüggő részgráfot?

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy minden  $\aleph_1$  számosságú,  $\aleph_1$ -kromatikus gráf tartalmaz  $\aleph_1$ -kromatikus,  $\aleph_0$ -összefüggő részgráfot.

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy van olyan  $\aleph_1$ -kromatikus,  $\aleph_1$  számosságú gráf, amely nem tartalmaz  $\aleph_1$  számosságú  $\aleph_0$ -összefüggő részgráfot.

**Probléma.** (Erdős-Hajnal) Igaz-e, hogy minden  $> \aleph_0$ -kromatikus gráf tartalmaz  $\aleph_0$ -összefüggő részgráfot?

Egy  $(V, X)$  gráf  $\text{List}(X)$  *lista-kromatikus száma* a legkisebb  $\mu$  számosság, amire igaz, hogy ha  $F(v)$  tetszőleges halmaz, amire  $|F(v)| = \mu$  ( $v \in V$ ) akkor van  $f$  jó színezés amire  $f(v) \in F(v)$  ( $v \in V$ ).

**Lemma.** Minden  $X$  gráfra teljesül a  $\text{Chr}(X) \leq \text{List}(X) \leq \text{Col}(X)$  egyenlőtlenség.

Egy  $(V, X)$  gráf  $\text{List}(X)$  *lista-kromatikus száma* a legkisebb  $\mu$  számosság, amire igaz, hogy ha  $F(v)$  tetszőleges halmaz, amire  $|F(v)| = \mu$  ( $v \in V$ ) akkor van  $f$  jó színezés amire  $f(v) \in F(v)$  ( $v \in V$ ).

**Lemma.** Minden  $X$  gráfra teljesül a  $\text{Chr}(X) \leq \text{List}(X) \leq \text{Col}(X)$  egyenlőtlenség.

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy  $\aleph_1$  számosságú gráfokra  $\text{List}(X) = \aleph_1 \iff \text{Chr}(X) = \aleph_1$ .

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy  $\aleph_1$  számosságú gráfokra  $\text{List}(X) = \aleph_1 \iff \text{Col}(X) = \aleph_1$ .



**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy  $\aleph_1$  számosságú gráfokra  $\text{List}(X) = \aleph_1 \iff \text{Chr}(X) = \aleph_1$ .

**Tétel.** (K) Konzisztens, hogy  $\aleph_1$  számosságú gráfokra  $\text{List}(X) = \aleph_1 \iff \text{Col}(X) = \aleph_1$ .