Homológia-elmélet

2012. június 2.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A jegyzet leginkább A. Hatcher Algebraic Topology című könyvén alapul, de felhasználtam J. Moller (www.math.ku.dk/$\sim$ moller) jegyzetét és más forrásokat is.

A homotópia-csoportokat nehéz számolni. Sőt, alig van olyan tér, amelynek minden homotópia-csoportját ismerjük. Ezért fogjuk a kevésbé intuitív, de jobban számolható homológia-csoportokat bevezetni.

Az, hogy a homotópia-csoportok kiszámolása nem egyszerű, H. Hopf egy példájából derült ki az 1920-as években: Az $f : S^3 \to S^2$ *Hopf-leképezést* úgy definiáljuk, hogy minden $s \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ vektorhoz hozzárendeljük a rajta (és az origón) átmenő $[s] \in \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ komplex egyenest. Most belátjuk, hogy $[f] \in \pi_3 S^2$ nem triviális. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik egy $F : D^4 \to S^2$ kiterjesztése f-nek. Ekkor F *felemelhető*, vagyis létezik egy $\tilde{F} : D^4 \to S^3$, hogy $f \circ \tilde{F} = F$ és $\tilde{F}|_{S^3} = \mathrm{Id}_{S^3}$. (ezt később fogjuk bizonyítani). $\tilde{F}$ definiál egy homotópiát Id_{S^3} és egy olyan $g : S^3 \to S^3$ leképezés között, amelynek képe $f^{-1}(s_0)$-ban van. Ez viszont azt jelentené, hogy Id_{S^3} null-homotóp. Később be fogjuk látni, hogy $\pi_3 S^2 \cong \mathbb{Z}$. S^2 összes homotópia-csoportja máig nem ismert.

A homológia valójában korábbi eredetű, már a 19. század algebrai geométerei használták, de mai formáját csak a negyvenes években nyerte el.

2. Szimpliciális homológia

Hasonlóan a felületek Euler-karakterisztikájához egy triangulálható térhez invariánsokat rendelünk. Először egy triangulációhoz rendelünk Abel-csoportokat, aztán belátjuk, hogy a hozzárendelés független a trianguláció választásától.

2.1. Definíció. Standard n-szimplexnek nevezzük a

$$\Delta^n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i e_i : 0 \leq t_i \leq 1,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \subset \mathbb{R}^{n+1} \right\}$$

halmazt, ahol $e_i,\ i = 0, \ldots, n$ jelöli $\mathbb{R}^{n+1}$ bázisvektorait.

Vagyis Δ^0 egy pont, Δ^3 pedig egy tetraéder.

2.2. Definíció. Legyen $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ egy tetszőleges véges halmaz (csúcsok), és legyen $\Lambda \subset \mathcal{P}(V)$ véges részhalmazoknak egy leszálló rendszere, vagyis ha $A \in \Lambda$ és $B \subset A$, akkor $B \in \Lambda$ (az üres-halmaz nem játszik). Λ-t a lapok halmazának hívjuk. (A csúcsok számozása helyett elegendő r egy részbenrendezést megadni V-n, ami a lapokra megszorítva rendezés.) A (V, Λ) párt (véges) *(rendezett) szimpliciális komplexusnak* nevezzük.

Most minden (V, Λ) (röviden Λ) szimpliciális komplexushoz hozzárendelünk egy topologikus teret.

2.3. Definíció. Ha $\lambda \in \Lambda$, akkor

$$\Delta_\lambda := \left\{ \sum_{v\in\lambda} t_v v : 0 \leq t_a \leq 1,\ \sum_{v\in\lambda} t_v = 1, \right\}.$$

(Ha nagyon formálisak akarunk lenni, akkor $\sum_{v\in\lambda} t_v v \in \Delta_\lambda$ egy $f : \lambda \to \mathbb{R}^{n+1}$ függvényt jelöl, ahol $f(v) = t_v$.) A $\lambda \to \{0, \dots, n\}$ egyértelmű rendezéstartó bijekció indukál egy $\Delta_\lambda \to \Delta^n$ bijekciót, ami megad egy topológiát Δ_λ-n. Λ *realizációja*:

$$R(\Lambda) := \coprod_{\lambda\in\Lambda} \Delta_\lambda / \sim,$$

ahol $x = \sum x_a a \sim y = \sum y_b b$, ha $\forall a \in \operatorname{supp} x = \operatorname{supp} y$-ra $x_a = y_a$. Itt $\operatorname{supp} x$ jelöli azon csúcsok halmazát, amihez nem 0 együttható tartozik. A $R(\Lambda)$ halmazt a hányados topológiával látjuk el. Az X topologikus térnek Λ egy *triangulációja*, ha $R(\Lambda) \cong X$. (Pontosabban magát a homeomorfizmust hívjuk triangulációnak.)

Vegyük észre, hogy Λ realizációja nem függ a csúcsok számozásától. (V meg kitalálható Λ-ból, ha nem használunk felesleges csúcsokat, vagyis a V elhagyása a jelölésből korrekt.)

Például S^n egy triangulációja

$$\Lambda := \{A \subset \{0, \dots, n+1\} : |A| \leq n+1\}. \tag{1}$$

2.4. Házi feladat. Adjunk meg egy homeomorfizmust $R(\Lambda)$ és S^n között.

Jelöljük Λ_n-nel a Λ szimpliciális komplexus n-lapjait, vagyis

$$\Lambda_n := \{A \in \Lambda : |A| = n+1\}.$$

Ekkor nem nehéz belátni, hogy hogy egy véges Λ szimpliciális komplexusra a $\sum_i (-1)^i |\Lambda_i|$ *Euler-karakterisztika* csak $R(\Lambda)$-tól függ. Ezt az invariást fogjuk általánosítani. Nyilván a $|\Lambda_i|$ számok nem csak $R(\Lambda)$-tól függnek, ennél ravaszabb konstrukció kell.

2.5. Definíció. Definiáljuk Λ *n-láncait*, mint a Λ n-lapjai által generált szabad Abel-csoportot:

$$C_n(\Lambda) := \left\{ \sum_{f\in\Lambda_n} n_f f : n_f \in \mathbb{N} \right\}.$$

A $\partial_n : C_n(\Lambda) \to C_{n-1}(\Lambda)$ *határleképezést* az n-lapokon definiáljuk, majd lineárisan (homomorfizmusként) kiterjesztjük. Ha $A \in \Lambda_n$, akkor az $A = [v_0, \dots, v_n]$ jelölést is használjuk, ahol a csúcsokat nagyság szerint újraindexeljük.

$$\partial_n [v_0, \dots, v_n] := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n],$$

ahol $\hat{v}_i$ azt jelöli, hogy v_i-t kihagyjuk.

Előjelek nélkül a geometriai jelentés világos lenne: Pl. a $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ tetraéder határa az oldallapjainak összege. Az alábbi lemma igazolja az előjelek bevezetését.

2.6. Lemma. *$\partial_{n-1}\partial_n = 0$, vagyis "a határ határa üres"*

Bizonyítás: Legyen $\sigma = [v_0, \ldots, v_n] \in \Lambda_n$. Ekkor

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n], \text{ és így}$$

$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n] + \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^{j-1} [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_n].$$

Ha a második szummában kicseréljük i-t és j-t, akkor az első szumma negatívját kapjuk. Mivel az n-lapok generálják $C_n(\Lambda)$-t, és a határleképezések homomorfizmusok, a lemmát bebizonyítottuk. □

Az előjelek egyfajta irányítást adnak: Tekintsük a Δ^n standard n-szimplexet, mint $\mathbb{R}^n$ részhalmazát. Egy lap középpontjából a csúcsokba mutató vektorokhoz utolsónak a kifele mutató normálvektort hozzávéve $\mathbb{R}^n$ egy irányítását kapjuk (figyelem, a vektorok sorrendje fontos!). Egy másik irányítást kapunk, ha Δ^n középpontjából a csúcsaiba mutató vektorokat veszem. Könnyű látni, hogy a két irányítás pontosan akkor egyezik megy, ha a lap $+1$ együtthatóval szerepel a határ definíciójában.

Megérkeztünk a homologikus algebra legfontosabb fogalmához: Legyenek a $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ leképezések homomorfizmusok a C_n Abel-csoportok között, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

2.7. Definíció.

1. a $C = (C_n, \partial_n)$ sorozat *lánckomplexus*, ha $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ minden $n \in \mathbb{Z}$-re. (Másképp: a sorozat minden C_n-nél *félig egzakt.*)

2. A $H_n(C) = \mathrm{Ker}(\partial_{n-1})/\mathrm{Im}(\partial_n)$ csoportot a C lánckomplexus n-edik *homológia-csoportjának* hívjuk. $\mathrm{Ker}(\partial_{n-1})$-t Z_n-nel is szokták jelölni, és elemeit *ciklusoknak* hívjuk. $\mathrm{Im}(\partial_n)$-t pedig B_n-nel is szokták jelölni, és elemeit *határoknak* hívjuk.

Az, hogy $\mathrm{Ker}(\partial_{n-1}) \supset \mathrm{Im}(\partial_n)$, következik $\partial_{n-1}\partial_n = 0$-ból. Ha $\mathrm{Ker}(\partial_{n-1}) = \mathrm{Im}(\partial_n)$, akkor a lánckomplexus *egzakt* C_n-nél. Úgy is mondhatjuk, hogy $H_n(C)$ méri, hogy mennyire nem egzakt a sorozat C_n-nél.

A $C(Z) = (\Delta^n, \partial_n)$-t a Z szimpliciális komplexus *szimpliciális lánckomplexusának*, a $H_n(C(Z))$ csoportot pedig a $C(Z)$ lánckomplexus n-edik *szimpliciális homológia-csoportjának* hívjuk. Később látni fogjuk, hogy $H_n(C(Z))$ csak Z realizációjától függ, vagyis az X triangulálható térnek $H_n^{\Delta}(X)$ topologikus invariánsait definiáltuk. Bár a legtöbb tér, amivel találkozni fogunk, triangulálható, de ez a procedúra elég munkás, és nehéz az invariáns tulajdonságait leellenőrizni, ezért módosítani fogunk a definíción. De előtte nézzünk néhány példát.

2.8. Példák.

1. $H_0^\Delta(*) = \mathbb{Z}$, és $H_n^\Delta(*) = 0$ különben.

2. Tekintsük az S^1 körvonal (1)-beli triangulációját. Ekkor a $C(Z)$ lánckomplexus:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_1 \cong \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \cong \mathbb{Z}^3 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

   ahol $\partial_1[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$, $\partial_1[v_0, v_2] = [v_2] - [v_0]$ és $\partial_1[v_1, v_2] = [v_2] - [v_1]$, vagyis $H_0^\Delta(S^1) = \mathbb{Z}\langle v_0 \rangle$, $H_1^\Delta(S^1) = \mathbb{Z}\langle \partial_2[v_0, v_1, v_2] \rangle$, a többi homológia-csoport pedig 0.

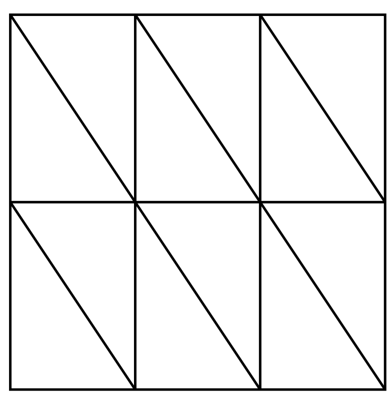
2.9. Házi feladat. *

1. Számoljuk ki a kompakt irányított felületek homológia-csoportjait. (Javaslat: ne keressünk konkrét triangulációt, hanem hasonlítsuk össze az Euler-karakterisztikával).

2. Számoljuk ki az n-dimenziós gömb homológia-csoportjait.

Egy sokaság triangulálásához általában olyan sok szimplex kell, hogy nehéz kiszámolni a homológia-csoportokat.

2.10. Házi feladat. Keressünk minimális lapszámú triangulációt a tórusznak. Mutassuk meg hogy a 1. ábra nem triangulációt ábrázol.



1. ábra. Tórusz nem triangulációja

Ezen lehet segíteni a Δ-*komplexusok* bevezetésével, ahol nem követeljük meg, hogy a csúcsok meghatározzák a lapokat, lásd [Hat,p.102], így például a tórusz realizációja egy két-lapú Δ-komplexusnak. Mi azonban inkább CW-komplexusokkal fogunk számolni, ami még általánosabb. Először azonban definiáljuk a *szinguláris homológiát*, amin rögtön látszik, hogy topologikus invariáns.

3. Szinguláris homológia

3.1. Definíció. Legyen X topologikus tér. Az $f : \Delta^n \to X$ leképezéseket *szinguláris n-szimplexnek* nevezzük, és legyen $C_n(X)$ a szinguláris n-szimplexek által generált szabad Abel-csoport. Vagyis $\sigma \in C_n(X)$ egy véges tartójú $\mathbb{Z}$-értékű függvény a szinguláris n-szimplexeken. $C_n(X)$ elemeit *szinguláris n-láncoknak* hívjuk. Itt is definiálhatunk $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ határ-leképezéseket: A

$$\partial_n(f) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f|[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$$

formula definiálja szinguláris n-szimplexekre, aztán lineárisan kiterjesztjük. (Itt $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$-t a csúcsok rendezés-tartó bijekciója segítségével azonosítjuk a standard $n-1$-szimplex-szel.)

A $C(X) = (C_n(X), \partial_n)$ lánckomplexust (ellenőrizzük, hogy $\partial_{n-1}\partial_n = 0$!) X *szinguláris lánckomplexusának* nevezzük, és a $H_n(X) := H_n(C(X))$ csoportot pedig X n-edik *szinguláris homológia-csoportjának* hívjuk.

A definícióból látszik, hogy $H_n(X)$ topologikus invariáns (l. még a 3.10 Megjegyzést). Később azt is látni fogjuk, hogy egy triangulálható X térre $H_n(X) = H_n^{\Delta}(X)$. Ez persze $H_n^{\Delta}(X)$ triangulációtól való függetlenségét is bizonyítani fogja.

A definícióban $\mathbb{Z}$-t lecserélhetjük egy tetszőleges G Abel-csoportra, így kapjuk a *G-együtthatós homológia* fogalmát.

3.2. Házi feladat.

1. Lássuk be, hogy $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^k$, ahol k az X tér útösszefüggő komponenseinek száma.

2. Lássuk be, hogy $H_0(*) = \mathbb{Z}$, és $H_n(*) = 0$ különben.

Mielőtt a homológia általános tulajdonságait megvizsgálnánk, megelőlegezünk egy módszert, ahogy ki tudjuk számolni a homológia-csoportokat. Ehhez a triangulációnál általánosabb felbontást vezetünk be.

3.1. CW-komplexusok

A CW-, avagy cella-komplexusokat indukcióval definiáljuk.

3.3. Definíció.

1. Egy X^0 diszkrét topologikus teret 0-*dimenziós cella-komplexusnak* hívunk.

2. X^n *n-dimenziós cella-komplexus*, ha $\exists$ X^{n-1} n-1-dimenziós cella-komplexus, és $\varphi_\alpha^n : S^{n-1} \to X^{n-1}$ *ragasztó* leképezések, hogy

$$X^n \cong \left(\coprod_\alpha D_\alpha^n \right) \cup X^{n-1} / \sim,$$

ahol minden $s \in S^{n-1} \subset D_\alpha^n$-ra $s \sim \varphi_\alpha^n(s)$.

3. $X = \bigcup_n X^n$ (végtelen dimenziós) cella-komplexus, ha minden n-re X^n a fenti módon készült X^{n-1}-ből, és X-en a *gyenge topológia* van, azaz $A \subset X$ zárt $\iff$ $A \cap X^n \subset X^n$ zárt minden n-re.

Itt persze lehet még tovább formalizálni, X^n-nek van egy természetes injektív beleképezése X-be, tehát részhalmazának tekinthetjük, és X *n-vázának* hívjuk. Továbbá definiálhatunk $\psi^n_\alpha : D^n_\alpha \to X$ *karakterisztikus leképezéseket.* Az $e^n_\alpha := \psi^n_\alpha(B^n_\alpha) \subset X_n$ részhalmazokat hívjuk (nyílt n-dimenziós) *celláknak*, és definiálhatunk cella-felbontást egy X téren, stb. A CW (closure finite, weak) elnevezés eredetéről lásd [Hat, App].

Nem nehéz látni, hogy egy trianguláció definiál egy cella-felbontást, viszont cellából kevesebb is elég. Ha X és Y véges cella-komplexusok, akkor $X \times Y$ is cella-komplexus, hiszen cellák szorzata cella. Szimpliciális komplexusokra ez bonyolultabb.

3.4. Példák.

1. S^n-hez két cella elég, egy 0- és egy n-dimenziós: $\varphi^n : S^{n-1} \to *$.

2. (HF) A Σ_g g-lyukú felületnek van olyan cella-felbontása, amiben egy 0-, $2g$ darab 1- és egy n-dimenziós cella van. Adjuk meg a φ ragasztó-leképezéseket.

3. Valós projektív terek: Mivel $\mathbb{RP}^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2 \cong D^n/\sim$, ahol a $\mathbb{Z}_2$-hatás az antipodális, a $\sim$ ekvivalencia pedig D^n peremének antipodális pontjait azonosítja. Így indukcióval előállíthatjuk $\mathbb{RP}^n$-nek egy $e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$ cella-felbontását, ahol $\varphi^n : S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ az antipodális pontok azonosítása. Vagyis $\mathbb{RP}^n$ i-váza egy $\mathbb{RP}^i$ ebben a felbontásban.

4. Komplex projektív terek: Hasonlóan a valós esethez, kétféle előállításunk is van: $\mathbb{CP}^n \cong S^{2n+1}/U(1) \cong D^{2n}/\sim$, ahol $U(1)$ az 1 abszolút-értékű komplex számok csoportja, és a $\sim$ ekvivalencia pedig D^n peremén azonosítja az egymás skalárszorosait. A második homeomorfizmus belátásához tekintsük az $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ egységgömb

   $$S^+ = \{v \in S^{2n+1} : v_{n+1} > 0 \text{ valós}\} = \{(w, \sqrt{1-|w|^2}) : w \in \mathbb{C}^n, |w| \leq 1\} = \Gamma_f$$

   alterét, ahol Γ_f az $f(w) = \sqrt{1-|w|^2}$ függvény grafikonja, tehát $S^+ \cong D^{2n}$. Könnyű látni, hogy minden komplex 1-dimenziós lineáris altér metszi S^+-t, és a metszetek éppen a fenti ekvivalencia-osztályokat adják.

   Így megint indukcóval kapjuk $\mathbb{CP}^n$ egy $e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$ cella-felbontását, ahol $\varphi^n : S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ a Hopf-leképezés.

3.2. CW-komplexusok homológia-csoportjai

Ha adott X egy $\{\varphi^n_\alpha\}$ cella-felbontása, akkor ehhez készítünk egy $C^{CW}(X) = (C^{CW}_n(X), \partial_n)$ lánckomplexust, ahol $C^{CW}_n(X) = \mathbb{Z}\langle\varphi^n_\alpha\rangle$ az n-cellák által generált szabad Abel-csoport. A határ-leképezés

$$\partial_n(\varphi^n_\alpha) := \sum_\beta d_{\alpha\beta}\varphi^{n-1}_\beta, \tag{2}$$

ahol $d_{\alpha\beta} = \deg(\varphi^{\alpha\beta})$, és a $\varphi^{\alpha\beta} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ leképezés φ^n_α és a $q^\beta : X^{n-1} \to X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e^{n-1}_\beta) \cong S^{n-1}$ hányados-leképezés kompozíciója. Hasonlóan definiálhatjuk $C^{CW}(X;G)$-t tetszőleges G együttható-csoportra.

A következő tételt később fogjuk bizonyítani:

3.5. Tétel. $C^{CW}(X;G)$ lánckomplexus, és $H_n(C^{CW}(X;G)) \cong H_n(X;G)$.

3.6. Következmény. $H_{2i}(\mathbb{CP}^n) \cong \mathbb{Z}$ ha $0 \le i \le n$, különben 0.

3.7. Házi feladat.

1. Számoljuk ki a gömbök (CW) homológia-csoportjait.
2. Számoljuk ki a valós projektív terek $\mathbb{Z}$- és $\mathbb{Z}_2$-együtthatós homológia-csoportjait használva a 3.4-ben megadott CW-felbontást.
3. Számoljuk ki a Σ_g felületek (CW) homológia-csoportjait.

3.8. Házi feladat. Tegyük fel, hogy X-nek és Y-nak van olyan cella-felbontása, amiben minden cella páros dimenziós. Hogy számolhatjuk ki $H_*(X)$ és $H_*(Y)$-ból $H_*(X \times Y)$-et? Később fogunk látni olyan példát, ahol a fenti azonosság nem teljesül.

3.3. A homológia alaptulajdonságai

Első fontos megfigyelés, hogy a homológia egy *funktor*, vagyis egy $f : X \to Y$ folytonos leképezéshez tudunk a megfelelő homológia-csoportok közti homomorfizmusokat rendelni: Ha $\sigma : \Delta^n \to X$ egy szinguláris n-szimplex X-ben, akkor $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ egy szinguláris n-szimplex Y-ban. Az indukált $H_n(X) \to H_n(Y)$ homomorfizmust f_*-gal, vagy $H_n(f)$-fel jelöljük. Ha jobban megnézzük, a H_* funktort két funktor kompozíciójaként állítjuk elő: C_* a topologikus terek $\mathcal{T}op$ kategóriájából képez a lánckomplexusok $\partial\mathcal{A}$ kategóriájába. $\mathcal{T}op$-ban a morfizmusok a folytonos leképezések, $\partial\mathcal{A}$-ban pedig a *láncleképezések*:

3.9. Definíció. Legyenek $L = (L_n, \partial^L_n)$, $M = (M_n, \partial^M_n)$ lánckomplexusok. Az $\alpha = (\alpha_n)$ homomorfizmus-sorozatot *láncleképezésnek* hívjuk, ha az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial^L_n} & L_n & \xrightarrow{\partial^L_{n-1}} & L_{n-1} & \xrightarrow{\partial^L_{n-2}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n-1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial^M_n} & M_n & \xrightarrow{\partial^M_{n-1}} & M_{n-1} & \xrightarrow{\partial^M_{n-2}} & \cdots
\end{array}$$

Az indukált $C_n(f)$ láncleképezést $f_\#$-gal is jelöljük.

Másrészt van egy funktorunk (amit szintén H_*-gal jelölünk, de ez nem fog fennakadást okozni) $\partial\mathcal{A}$-ból a gradált Abel-csoportok $\mathcal{GA}$ kategóriájába. Ehhez le kell ellenőrizni, hogy egy $\alpha : L \to M$ láncleképezés valóban indukál $H_n(\alpha) : H_n(L) \to H_n(M)$ homomorfizmusokat. Ez *diagram-vadászattal* történik a fenti diagramon: Belátjuk, hogy ha $a \in \mathrm{Ker}\partial^L_{n-1}$, akkor $\alpha(a) \in \mathrm{Ker}\partial^M_{n-1}$, és ha $a \in \mathrm{Im}\partial^L_n$, akkor $\alpha(a) \in \mathrm{Im}\partial^M_n$.

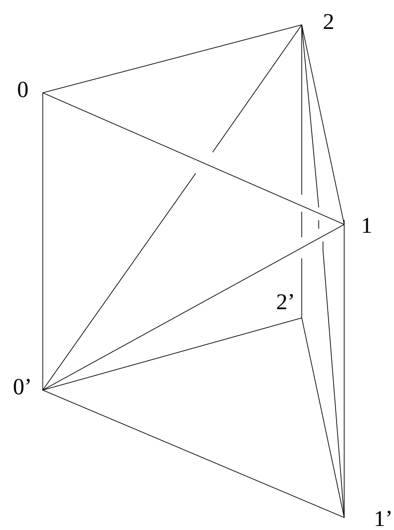
A funktorialitáshoz még a kompozíció-tulajdonságot kell ellenőrizni, amit az olvasóra bízunk.

3.10. Megjegyzés. Mivel funktor, így egy $f : X \to Y$ homeomorfizmus indukál egy $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(X)$ izomorfizmust. Ez a részletes bizonyítása annak, hogy $H_n(X)$ topologikus invariáns. Ennél több is igaz:

3.11. Tétel. Ha $f, g : X \to Y$ homotóp leképezések, akkor $f_* = g_*$

Bizonyítás. Ha $\sigma : \Delta^n \to X$ egy szinguláris szimplex, akkor szeretnénk belátni, hogy $f_\#\sigma$ és $g_\#\sigma$ nem nagyon tér el egymástól. Legyen $F : X \times I \to Y$ a homotópia f és g között. Ekkor az $F_\sigma := F \circ (\sigma \times \mathrm{Id}_I) : \Delta^n \times I \to Y$ leképezésből szeretnénk "láncot kovácsolni". Az ötlet az, hogy bontsuk a $\Delta^n \times I$ hasábot szimplexekre. Nem nehéz ellenőrizni, hogy

$$\Delta^n \times I = \bigcup_{i=0}^{n} [0, 1, \ldots, i, i', \ldots, n'],$$



2. ábra. $\Delta^n \times I$ szimpliciális felbontása

ahol $0, 1, \ldots, n$ a hasáb alapjának, $0', 1', \ldots, n'$ pedig a fedőlapjának a csúcsai, lásd a 2. ábrát az n=2 esetre. Formálisabban most definiálunk $P_F : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ homomorfizmusokat:

$$P_F(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F_\sigma | [0, 1, \ldots, i, i', \ldots, n'].$$

Be fogjuk látni, hogy

$$\partial P_F = g_\# - f_\# - P_F \partial, \tag{3}$$

vagyis P_F egy *lánchomotópia* $f_\#$ és $g_\#$ között.

3.3.1. Algebrai kitérő

3.12. Definíció. Legyenek $\alpha, \beta : L \to M$ láncleképezések az L és M lánckomplexusok között. A $\varphi = (\varphi_n : L_n \to M_{n+1})$ homomorfizmust *lánchomotópiának* hívjuk (α és β között), ha $\partial\varphi = \beta - \alpha \pm \varphi\partial$.

3.13. Állítás. Ha az $\alpha, \beta : L \to M$ láncleképezések lánchomotópok (vagyis van köztük egy φ lánchomotópia), akkor $H_n(\alpha) = H_n(\beta)$.

Valóban, ha $x \in \mathrm{Ker}\partial_n^L$ (vagyis x egy ciklus), akkor

$$\alpha(x) - \beta(x) = \partial\varphi(x) \pm \varphi\partial(x) = \partial\varphi(x),$$

tehát $\alpha(x)$ és $\beta(x)$ csak egy $\mathrm{Im}\partial$-beli elemben (határban) különböznek, így a homológiákon ugyanazt a leképezést indukálják.

Vagyis a 3.11. Tétel bizonyításához elég a (3) egyenlőséget belátni. Az ötlet az, hogy a hasáb határa=alap−fedő+palást:

$$\begin{aligned}\partial P_F(\sigma) = &\sum_{j\le i}(-1)^i(-1)^j F_\sigma|[0,1,\ldots,\hat{j},\ldots,i,i',\ldots,n'] \\ &+ \sum_{j\ge i}(-1)^i(-1)^{j+1} F_\sigma|[0,1,\ldots,i,i',\ldots,\hat{j}',\ldots,n'] \quad \text{és}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_F(\partial\sigma) = &\sum_{j<i}(-1)^{i-1}(-1)^j F_\sigma|[0,1,\ldots,\hat{j},\ldots,i,i',\ldots,n'] \\ &+ \sum_{j>i}(-1)^i(-1)^j F_\sigma|[0,1,\ldots,i,i',\ldots,\hat{j}',\ldots,n'], \quad \text{tehát}\end{aligned}$$

$$\partial P_F(\sigma) + P_F(\partial\sigma) = F_\sigma|[0',1',\ldots,n'] - F_\sigma|[0,1,\ldots,n] = g_\#(\sigma) - f_\#(\sigma). \quad \square$$

3.14. Következmény. A homológia-csoportok homotópia-invariánsok, vagyis ha $X \simeq Y$ akkor $H_n(X) \cong H_n(Y)$.

3.4. Mayer-Vietoris sorozat, relatív homológia-csoportok és kivágás

Ebben a fejezetben, két rokon tételt fogunk belátni, amelyek segítségével már nem triviális terek homológia-csoportjait is ki tudjuk számolni. A Mayer-Vietoris tétel azt mondja el, hogy bizonyos esetekben hogyan számoljuk ki két tér úniójának homológia-csoportjait az eredeti terek homológia-csoportjaiból:

3.15. Tétel. (Mayer-Vietoris sorozat) Tegyük fel, hogy $X = A \cup B = \mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B$. Ekkor létezik egy hosszú egzakt sorozat (HES):

$$\cdots \longrightarrow H_n(A\cap B) \longrightarrow H_n(A)\oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(A\cup B) \longrightarrow H_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \cdots.$$

Láthatjuk, hogy némi szerencse is kell, ahhoz, hogy a Mayer-Vietoris sorozat segítségével ki tudjuk számolni $H_n(A \cup B)$-t.

3.16. Házi feladat. Számítsuk ki $H_i(S^n)$-t a Mayer-Vietoris sorozat segítségével. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$.

Hosszú egzakt sorozatokhoz legtöbbször lánckomplexusok rövid egzakt sorozatából (RES) jutunk:

3.4.1. Algebrai kitérő

3.17. Tétel. Legyen

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

lánckomplexusok RES-a. Ekkor létezik egy HES:

$$\cdots \longrightarrow H_n(L) \xrightarrow{H_i(\alpha)} H_i(M) \xrightarrow{H_i(\beta)} H_i(N) \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(L) \xrightarrow{H_{i-1}(\alpha)} \cdots,$$

ahol $\partial_i[n] = [l]$, ha létezik $m \in M$, hogy $\partial m = \alpha l$.

Bizonyítás: Legyen $x \in N$ ciklus, és $[x] \in H_i(N)$. $\partial_n[x] := [l]$ ha létezik olyan $m \in M_n$, hogy $\partial m = \alpha l$ és $\beta m = x$. Az alábbi, a RES-t definiáló diagramon vadászva ellenőrizhetjük, hogy definíció jó, és valóban egy HES-t kapunk. □

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_n^L"] & L_n \arrow[r, "\partial_{n-1}^L"] \arrow[d, "\alpha_n"] & L_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-2}^L"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_n^M"] & M_n \arrow[r, "\partial_{n-1}^M"] \arrow[d, "\beta_n"] & M_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-2}^M"] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_n^N"] & N_n \arrow[r, "\partial_{n-1}^N"] & N_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-2}^N"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Vegyük észre, hogy valójában egy funktort definiáltunk a RES-ok kategóriájából a HES-ok kategóriájába.

Tehát a Mayer-Vietoris sorozathoz egy RES-t kell találnunk. Jelöljük $C(A) + C(B)$-vel X olyan szinguláris láncait, amelyek olyan szinguláris szimplexek lineáris kombinációi, amelyek vagy A-ba, vagy B-be képződnek. Ekkor van egy

$$0 \longrightarrow C(A \cap B) \xrightarrow{\sigma,-\sigma} C(A) \oplus C(B) \xrightarrow{\sigma+\tau} C(A) + C(B) \longrightarrow 0$$

RES, ami majdnem a Mayer-Vietoris sorozatot indukálja, csak a $H_n(A \cup B)$ csoportok helyett a $H_n\big(C(A) + C(B)\big)$ csoportok vannak.

3.18. Tétel. (Kis láncok) Legyen $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ az X tér fedése úgy, hogy $X = \bigcup_\alpha \mathrm{int} U_\alpha$. Definiáljuk az $\mathcal{U}$-kis láncokat:

$$C^{\mathcal{U}}(X) := \sum_\alpha C(U_\alpha) = \mathrm{Im}\left(\bigoplus_\alpha C(U_\alpha) \xrightarrow{+} C(X)\right).$$

Ekkor az $i : C^{\mathcal{U}}(X) \to C(X)$ inklúzió izomorfizmust indukál a homológiákon:

$$H_n(i) : H_n^{\mathcal{U}}(X) := H_n(C^{\mathcal{U}}(X)) \to H_n(X)$$

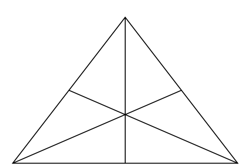
izomorfizmus.

A kis láncok tételének bizonyítása azon az ötleten alapul, hogy egy szinguláris szimplexet kicserélhetünk annak *baricentrikus finomítására* (lásd 4. ábra) anélkül, hogy a homológia-szinten változás történne. Ha elég sokszor iteráljuk a finomítást, akkor már kis láncokat kapunk. A teljes bizonyítást lást pl. [Prop. 2.21. Hatcher] vagy [p 11,Mol]. Itt egy vázlatot adok, a hiányzó részletek reményeim szerint önállóan kitölthetők.

Bizonyításvázlat:

3.4.2. baricentrikus finomítás

A standard n szimplexet $(n+1)!$ kis szimplexre bontjuk. A felbontást indukcióval definiáljuk. A 0-szimplexet nem bontjuk tovább, Tegyük fel, hogy az $n-1$-szimplex felbontása már definiálva van, ekkor Δ^n n-szimplexei legyenek $[b, w_0, \ldots, w_{n-1}]$ alakúak, ahol $[w_0, \ldots, w_{n-1}]$ az egyik $n-1$-lap baricentrikus finomításának egyik szimplexe és b a Δ^n súlypontja vagy *baricentruma.* (Vagyis a lapok kis *szimplexeire emelt b csúcsú kúpok* lesznek Δ^n kis szimplexei.) Ha $\alpha \in C_n(X)$



3. ábra. Δ^2 baricentrikus finomítása

egy szinguláris n-lánc, akkor $B(\alpha)$-val jelöljük a baricentrikus finomítását. (vagyis az α-ban előforduló szinguláris szimplexeket megszorítgatjuk Δ^n finomításának szimplexeire és ezeket összeadjuk.) Könnyű látni, hogy $B : C_n(X) \to C_n(X)$ egy lánc-leképezés.

3.19. Állítás. Minden $\alpha \in C_n(X)$ ciklusra ($\partial\alpha = 0$) az $\alpha - B(\alpha)$ lánc határ.

Bizonyítás: $\Delta^n \times I$-nek indukcióval definiáljuk egy felbontását szimplexekre: $\Delta^n \times \{0\} \cup \partial\Delta^n \times I$ minden szimplexére állítunk egy b csúcsú kúpot, ahol b a $\Delta^n \times \{0\}$ "fedőlap" baricentruma. (Lásd a 4. ábrát $n = 2$-re.) Jelöljük S_i-vel ezeket a szimplexeket. és legyen $T(\sigma) = \sum \pm\sigma \circ \pi|_{S_i}$, ahol $\pi : \Delta^n \times I \to \Delta^n$ a projekció. Az előjelek ügyes megválasztásával elérhető, hogy a

$$\partial T(\alpha) - T\partial(\alpha) = \alpha - B(\alpha)$$

azonosság teljesüljön (vagyis T egy lánc-homotópia B és az identitás között). $\square$

3.20. Állítás. Legyen $\sigma : \Delta^n \to X$ egy szinguláris szimplex. Ekkor létezik N, hogy $B^N(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$, vagyis σ-t elég sokszor finomítva kis láncot kapunk.

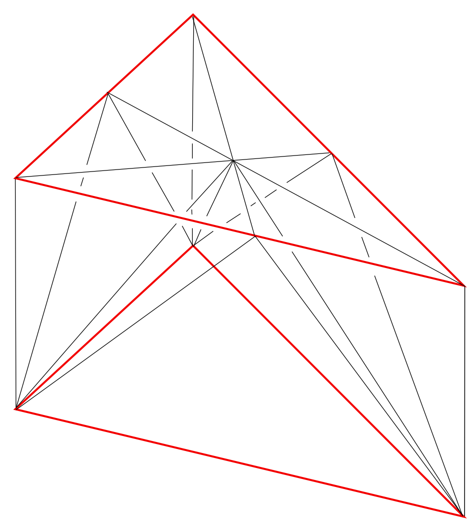
Bizonyítás: Δ^n iterált baricentrikus finomításában a szimplexek átmérője 0-hoz tart ($\left(\frac{n}{n+1}\right)^N \to \infty$), tehát a metrikus Lebesgue lemmából következik az állítás.

3.21. Lemma. *Legyen $f : K \to X$ folytonos, K kompakt metrikus tér, $\mathcal{U}$ az X nyílt fedése. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$, hogy $A \subset K$, $\operatorname{diam}(A) < \varepsilon$ esetén létezik $U \in \mathcal{U}$, hogy $f(A) \subset U$.*

A metrikus Lebesgue lemma hasonlóan bizonyítható, mint a szakaszra vonatkozó Lebesgue lemma. $\square$

Bizonyításvázlat befejezése: Ha $\alpha \in C_n(X)$, akkor 3.20. miatt $\exists\ N$, hogy $B^N(\alpha)$ kis lánc. Ha α még ciklus is, akkor 3.19. miatt csak egy határban tér el $B^N(\alpha)$-tól (homológok), vagyis $H_n(i)[B^N(\alpha)] = [\alpha]$, tehát $H_n(i)$ szürjektív.

Legyen $\beta \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ cklus és tegyük fel, hogy $i\beta = \partial\alpha$ valamilyen $\alpha \in C_{n+1}(X)$-re, vagyis $H_n(i)\beta = 0$. Ekkor 3.20. miatt $\exists\ N$, hogy $B^N(\beta)$ kis lánc. Mivel B lánc-leképezés, így $\partial B^N(\alpha) = B^N(\beta)$. Viszont 3.19-t β-ra alkalmazva látjuk, hogy β is határ, tehát $H_n(i)$ injektív. $\square$



4. ábra. Δ^2 homológ a baricentrikus finomításával

Ezzel a Mayer-Vietoris tételt is bebizonyítottuk. A kivágási tételhez először kiterjesztjük a szinguláris homológia-elméletet térpárokra:

3.22. Definíció. Legyen $X \supset A$. Ekkor a $C(X,A) := C(X)/C(A)$ lánckomplexus elemeit *relatív láncoknak*, a $H_n(X,A) := H_n(C(X,A))$ csoportokat pedig *relatív homológia-csoportoknak* hívjuk. Könnyű ellenőrizni, hogy valójában egy funktort kapunk a térpárok kategóriájából a gradált Abel-csoportok kategóriájába. A relatív homológia-csoportokat sok helyen fogjuk használni, például bizonyos esetekben $H_n(X,A) \cong H_n(X/A)$.

A $0 \to C(A) \to C(X) \to C(X,A) \to 0$ RES indukál egy

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_n} H_n(X) \xrightarrow{j_n} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \tag{4}$$

HES-t, amit az (X,A) pár *relatív homológia HES-ának* nevezünk. Nyilván $H_n(X) = H_n(X,\emptyset)$.

Hasonlóképpen ha $X \supset A \supset B$, akkor a

$$0 \longrightarrow C(A)/C(B) \longrightarrow C(X)/C(B) \longrightarrow C(X)/C(A) \longrightarrow 0$$

RES indukálja az (X,A,B) *hármas homológia HES-át*:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A,B) \longrightarrow H_n(X,B) \longrightarrow H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A,B) \longrightarrow \cdots \tag{5}$$

3.23. Tétel. (Kivágás) Legyen X egy topologikus tér.

1. Tegyük fel, hogy $U \subset A \subset X$. Ha $\overline{U} \subset \mathrm{int}A$ akkor az $(X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ inklúzió izomorfizmust indukál: $H_n(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_n(X,A)$.

2. Tegyük fel, hogy $X = A \cup B$. Ha $X = \mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B$ is teljesül, akkor a $(B, A \cap B) \to (A \cup B, A)$ inklúzió izomorfizmust indukál: $H_n(B, A \cap B) \cong H_n(A \cup B, A)$.

A két állítás ekvivalenciája az $X \setminus U = B$ választással látható. A bizonyításhoz a kis láncok tételének relatív verzióját használjuk:

3.24. Tétel. (Relatív kis láncok) Legyen $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ az X tér fedése úgy, hogy $X = \bigcup_\alpha \mathrm{int}U_\alpha$ és legyen $A \subset X$. Definiáljuk a relatív $\mathcal{U}$-kis láncokat:

$$C^{\mathcal{U}}(X,A) := C^{\mathcal{U}}(X)/C^{\mathcal{U}\cap A}(A),$$

ahol $\mathcal{U} \cap A = \{U_\alpha \cap A\}$. Ekkor a $C^{\mathcal{U}\cap A}(X) \to C(A)$ és a $C^{\mathcal{U}}(X) \to C(X)$ inklúziók indukálnak egy $j : C^{\mathcal{U}}(X,A) \to C(X,A)$ láncleképezést, ami izomorfizmust indukál a homológiákon: $H_n^{\mathcal{U}}(X,A) := H_n(C^{\mathcal{U}}(X,A)) \cong H_n(X,A)$.

A relatív kis láncok tételének bizonyítása: Definíciója szerint j kommutatívvá teszi a

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^{\mathcal{U}\cap A}(A) \arrow[r] \arrow[d] & C^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & C^{\mathcal{U}}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C(A) \arrow[r] & C(X) \arrow[r] & C(X,A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diagramot. A két vízszintes sor egzakt, így HES-okat indukálnak, sőt a két HES között is indukálódik egy leképezés a RES $\to$ HES funktorialitása miatt. Így egy "végtelen létrát" kapunk, amire az 5-ös lemmát alkalmazva kapjuk a kívánt izomorfizmust. $\square$

A kivágási tétel bizonyítása: Legyen $\mathcal{U} = \{A, B\}$ Ekkor $C^{\mathcal{U}}(X, A) = \big(C(A)+C(B)\big)/C(A)$ és $C(B, A \cap B) = C(B)/C(A \cap B)$. A Noether izomorfizmus tétel miatt így a $(B, A \cap B) \to (X, A)$ inklúzió által indukált $C(B, A \cap B) \to C^{\mathcal{U}}(X, A)$ leképezés izomorfizmus. Mivel a

$$\begin{tikzcd} C(B, A \cap B) \arrow[r] \arrow[d] & C^{\mathcal{U}}(X, A) \arrow[dl] \\ C(X, A) & \end{tikzcd}$$

diagram kommutál, a relatív kis láncok tételéből következik a kivágási tétel második alakja. $\square$

3.25. Házi feladat. Lássuk be, hogy $X = S^1 \times S^1$ és $Y = S^1 \vee S^1 \vee S^2$-re $H_*(X) \cong H_*(Y)$, de $X \not\simeq Y$.

3.5. Redukált homológia-elmélet

Legyen $x_0 \in X$. Ekkor definiálhatjuk a *redukált homológia-csoportokat*: $\tilde{H}_n(X) := H_n(X, x_0)$. Pontozott terekre inkább a redukált homológiát szoktuk használni, lásd homotópia-csoportok, ahol szintén van kitüntetett pont. A redukált homológia-csoportok nem nagyon térnek el a megfelelő homológia-csoportoktól, és nem függnek x_0 választásától, ami a következő ekvivalens definícióból is látszik: Legyen

$$\cdots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial} C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

az úgynevezett *augmentált lánckomplexus*, ahol $\varepsilon(\sum n_i \sigma_i) := \sum n_i$. Könnyű látni, hogy az augmentált lánckomplexus homológia-csoportjai a redukált homológia-csoportok. Egy harmadik lehetőség a $pt : X \to *$ konstans-leképezésre $\tilde{H}_n(X) = \mathrm{Ker} H_n(pt)$. Bármelyik felírásból látszik, hogy $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$, ha $n>0$, és $\tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(X)$. A Mayer-Vietoris sorozat redukált homológia-csoportokra is egzakt, amit néha kényelmesebb használni, lásd pl. a gömbök homológia-csoportjainak kiszámolása.

3.26. Házi feladat. Lássuk be, hogy $\tilde{H}_{n+1}(\Sigma X) \cong \tilde{H}_n(X)$, ahol $\Sigma X = X \times I/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\})$ jelöli X *szuszpenzióját.*

3.27. Házi feladat. Keressünk minél kevesebb szinguláris szimplex lineáris kombinációjából álló reprezentánsokat az S^n gömbök n-edik homológia-csoportjának generátorához. Ugyanezt próbáljuk meg a T^2 tórusz második homológia-csoportjára.

Segítség: keressünk ciklusokat, amit "fedik" a sokaságunkat, majd használjuk a $H_n(X, X \setminus x)$ *lokális homológia-csoportokat* annak ellenőrzésére, hogy valóban a generátort kaptuk.

3.6. Alkalmazások

3.28. Tétel. Komplementum-tétel

1. Legyen $h : D^k \to S^n$ egy topologikus beágyazás (homeomorfizmus a képre). Ekkor
$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(D^k)) = 0 \qquad \text{minden } i\text{-re.}$$

2. Legyen $h : S^k \to S^n$ egy topologikus beágyazás $k < n$-re. Ekkor
$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^k)) \cong \tilde{H}_i(S^{n-k-1}).$$

Bizonyítás:

(1) k-ra való indukcióval bizonyítunk, $k = 0$-ra igaz. D^k helyett a k-dimenziós kockát, $I^k = [0,1]^k$-t használjuk. Legyen $A_+ = S^n \setminus h(I^{k-1} \times [0,1/2]$ és $A_- = S^n \setminus h(I^{k-1} \times [1/2,1]$. Ekkor
$$A_+ \cap A_- = S^n \setminus h(I^k) \qquad \text{és} \qquad A_+ \cap A_- = S^n \setminus h(I^{k-1}).$$
Az indukciós lépés szerint $\tilde{H}_i(A_+ \cap A_-) = 0$, így A_+, A_- (redukált) Mayer-Vietoris sorozatából kapjuk, hogy
$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^k)) \overset{\cong}{\to} \tilde{H}_i(A_+) \oplus \tilde{H}_i(A_-). \tag{6}$$

Tegyük fel most, hogy α ciklus $S^n \setminus h(I^k)$-ben, de nem határ. Ekkor (6) miatt vagy A_+-ban, vagy A_--ban sem határ. További felezgetéssel kapunk egy $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ intervallum-sorozatot, $\bigcap I_i = \{p\}$, hogy α nem határ $S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_i)$-ben. Viszont az indukciós lépés miatt $S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})$-ben határ: $\exists \beta\ \partial\beta = \alpha$. De β tartója kompakt, vagyis már valamelyik $S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_i)$-ben benne kéne lennie $\lightning$.

(2) k-ra való indukcióval bizonyítunk, $k = 0$-ra igaz. Legyen $S^k = D^k_+ \cup D^k_-$ két félgömb úniója. Legyen $B_+ = S^n \setminus h(D^k_+)$ és $B_+ = S^n \setminus h(D^k_+)$. Ekkor – felhasználva (1)-et – B_+, B_- (redukált) Mayer-Vietoris sorozatából kapjuk, hogy
$$\tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus h(S^{k-1})) \cong \tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^k))$$
□

3.29. Következmény. Jordan-görbe tétel: Ha $S^1 \to S^2$ topologikus beágyazás, akkor a komplementer két útösszefüggő komponensű.

Ezek a komponensek egyben összefüggő komponensek is, hiszen az útösszefüggő komponensek zártak, véges sok van, tehát nyíltak is a komplementumban, tehát S^2-ben is. Viszont egy S^2-beli nyílt lokálisan útösszefüggő, tehát pontosan akkor összefüggő, ha útösszefüggő.

3.30. Következmény. Nyílt halmazok invarianciája: Ha $U \subset S^n$ nyílt és $h : U \to S^n$ beágyazás, akkor $h(U) \subset S^n$ is nyílt. (Ugyanez nyilván S^n helyett $\mathbb{R}^n$-re is igaz.)

Bizonyítás: Legyen $x \in U$ és $D^n \subset U$ egy x középpontú zárt golyó. Nyilván elég belátnunk, hogy $h(\mathrm{int}(D^n))$ nyílt. A Komplementum-tétel miatt $S^n \setminus h(\partial D^n)$-nek két útösszefüggőségi komponense van. Ezek összefüggő komponensek is, hiszen $S^n \setminus h(\partial D^n)$ nyílt (l. a fenti érvet a Jordan-görbe tételnél). De $S^n \setminus h(\partial D^n)$ diszjunkt úniója $h(D^n \setminus \partial D^n$-nek és $S^n \setminus h(D^n)$-nek. Az első útösszefüggő, hiszen ilyen képe, a második pedig a Komplementum-tétel miatt. Tehát ők a komponensek. Így $S^n \setminus h(D^n)$ nyílt $S^n \setminus h(\partial D^n)$-ben, következésképp S^n-ben is. □

4. A CW-homológia tétel bizonyítása

Az alábbi állítások tetszőleges együttható-csoportra igazak alkalmas módosítással, Mi az egyszerűség kedvéért a $\mathbb{Z}$-együttható esetére szorítkozunk.

4.1. A Vassiliev-komplexus

4.1. Definíció. Legyen $\mathcal{F} = \{\emptyset = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n \subset \cdots\}$ az X tér filtrálása, vagyis $\bigcup X^n = X$. *Vassiliev-komplexusnak* hívjuk a

$$V(\mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{d_2} H_1(X^1, X^0) \xrightarrow{d_1} H_0(X^0) \longrightarrow 0$$

sorozatot, ahol $d_{n+1} = j_n \partial_{n+1}$. Itt $j_n : H_n(X^n) \to H_n(X^n, X^{n-1})$ az (X^n, X^{n-1}) pár HES-ából és $\partial_{n+1} : H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \to H_n(X^n)$ a (X^{n+1}, X^n) pár HES-ából van.

Mivel $d_n d_{n+1} = j_{n-1}\partial_n j_n \partial_{n+1} = 0$ az (X^n, X^{n-1}) pár HES-ának félig-egzaktsága miatt, így $V(\mathcal{F})$ egy lánckomplexus. Homológia-csoportjait $H_n(\mathcal{F})$-fel fogjuk jelölni.

4.2. Tétel. Legyen $\mathcal{F} = \{X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n \subset \cdots\}$ az X tér filtrálása, amely teljesíti a *degeneráció-feltételt*:

$$H_k(X^n, X^{n-1}) = 0 \text{ ha } k \neq n, \tag{$\mathbf{D}$}$$

és a *kompaktsági feltételt*: minden $K \subset X$ kompakt részhalmazra van olyan n, hogy $K \subset X^n$. Ekkor $H_n(\mathcal{F}) \cong H_n(X)$.

A tételt elsősorban az X cella-komplexus *váz-filtrálására* akarjuk alkalmazni, ahol X^n a legfeljebb n-dimenziós cellák úniója.

4.3. Lemma. *Ha az $\mathcal{F}$ filtrálás teljesíti ($\mathbf{D}$)-t és a kompaktsági feltételt, akkor*

1. *$H_k(X^n) = 0$ ha $k > n$,*
2. *Az $i_n : X^n \to X$ beágyazásra $H(i_n) : H_k(X^n) \xrightarrow{\cong} H_k(X)$ ha $k < n$.*

Bizonyítás:

1. A (X^n, X^{n-1}) pár HES-ából és ($\mathbf{D}$)-ből következik indukcióval.
2. szintén indukcióval következik a (X^n, X^{n-1}) pár HES-ából és ($\mathbf{D}$)-ből, ha $X = X^N$ valamilyen N-re.

Különben legyen $\sigma \in C_k(X)$. A kompaktsági feltétel miatt létezik $m > n$, hogy $\sigma_m \in C_k(X^m)$ és $i^m_{\#}\sigma_m = \sigma$, ahol $i^m : X^m \to X$ a beágyazás. Ha $\partial\sigma = 0$, akkor $\partial\sigma_m = 0$, tehát $[\sigma] \in H_k(X)$-re $[\sigma] = i^m_*[\sigma_m]$. Azt viszont már beláttuk, hogy $H_k(X^n) \xrightarrow{\cong} H_k(X^m)$, tehát $H(i_n) : H_k(X^n) \to H_k(X)$ szürjektív.

Az injektivitáshoz legyen $\sigma_n \in C_k(X^n)$ és $i^n_\# \sigma_n = \sigma$. Tegyük fel, hogy $\sigma = \partial\beta$, $\beta \in C_{k+1}(X)$. A kompaktsági feltétel miatt létezik $m > n$, hogy $\beta_m \in C_{k+1}(X^m)$ és $i^m_\# \beta_m = \beta$, tehát $\sigma_m = C(X^n \to X^m)\sigma_n$-re $0 = [\sigma_m] \in H_k(X^m)$. Viszont $H_k(X^n) \overset{\cong}{\to} H_k(X^m)$, tehát $0 = [\sigma_n] \in H_k(X^n)$. $\square$

A 4.2 tétel bizonyítása: Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot, ahol a sorok a megfelő párok HES-aiból vannak:

$$\begin{tikzcd}
& H_n(X) & & \\
H_n(X^n) \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & H_n(X^{n+1}) \arrow[u, "\cong"', "2"] \arrow[r] & H_n(X^{n+1}, X^n) \overset{\mathbf{D}}{=} 0 & \\
H_n(X^n) \arrow[r] & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[rrd, dashed, "d_n"] & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[d, equal] & \\
& H_{n-1}(X^{n-2}) \overset{1}{=} 0 \arrow[r] & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[r, tail] & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})
\end{tikzcd}$$

Itt 1,2,**D** utal arra, hogy a 4.3 Lemma 1, 2. részét, illetve a **D** degeneráció-feltételt használtuk. $H_n(X)$-ből diagram-vadászhatunk egy homomorfizmust $H_n(X^n, X^{n-1})$-be, ahol a kép ∂_n magjában, tehát d_n magjában is lesz, így kapunk egy $H_n(X) \to H_n(\mathcal{F})$ leképezést.

Visszafele pedig, kihasználva megint hogy $\mathrm{Ker}(\partial_n) = \mathrm{Ker}(d_n)$, diagram-vadászhatunk egy $\mathrm{Ker}(d_n) \to H_n(X)$ leképezést. Még le kell vadászni, hogy $\mathrm{Im}(d_{n+1})$-en ez a leképezés 0-t ad, tehát kapunk egy $H_n(\mathcal{F}) \to H_n(X)$ homomorfizmust, és ellenőrizni, hogy ez a két homomorfizmus egymás inverze, amit az olvasóra bízunk. $\square$

A kompaktsági feltételt a váz-filtrálás teljesíti a gyenge topológia miatt (HF), tehát a degeneráció-feltételt kell belátni. Ehhez a $H_n(X, A)$ relatív, és a $H_n(X/A)$ abszolút homológiacsoportok közti kapcsolatot vizsgáljuk meg.

4.4. Definíció. Az (X, A) pár *jó*, ha A-nak van egy olyan nyílt V környezete X-ben, aminek A deformációs retraktja.

Ha az (X, A) pár jó , akkor V/A-nak deformációs retraktja $A/A \in X/A$, és a $q : X \to X/A$ hányados-leképezés indukál egy $X \backslash A \to X/A \backslash A/A$ és egy $V \backslash A \to V/A \backslash A/A$ homeomorfizmust.

4.5. Tétel. Ha (X, A) jó pár, akkor a $\kappa : (X, A) \to (X/A, A/A)$ hányados-leképezés izomorfizmust indukál, a

$$\kappa_* : H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

leképezés izomorfizmus.

Bizonyítás: Az alábbi diagram bal függőleges nyiláról kell belátni, hogy izomorfizmus:

$$\begin{tikzcd}
H_n(X, A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\kappa_*"] & H_n(X, V) \arrow[d, "\kappa_*"] & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \arrow[l, "kiv"'] \arrow[d, "\kappa_*"] \\
H_n(X/A, A/A) \arrow[r, "i_*"] & H_n(X/A, V/A) & H_n(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A) \arrow[l, "kiv"']
\end{tikzcd}$$

Az i_*-k izomorfizmusok, ami belátható a megfelelő párok HES-ai közti leképezésekre alkalmazva az 5-ös lemmát. A jobb-oldali κ_* izomorfizmus, mert homeomorfizmus indukálja. Így a kivágási tételből következik az állítás. $\square$

4.6. Állítás. Jelölje X^i az X cella-komplexus i-vázát. Ekkor (X^{i+1}, X^i) jó pár.

Bizonyítás: Legyen $V = X^{i+1} \setminus \{i+1\text{-cellák középpontja}\}$. $\square$

4.7. Állítás. Az X cella-komplexus váz-filtrálása teljesíti a (**D**) degeneráció-feltételt.

Bizonyítás: (X^{i+1}, X^i) jó pár, tehát $H_n(X^{i+1}, X^i) \cong \tilde{H}_n(X^{i+1}/X^i)$. Viszont

$$X^{i+1}/X^i \cong \bigvee_\alpha S_\alpha^{i+1} \cong (\coprod_\alpha S_\alpha^{i+1})/(\coprod_\alpha s_\alpha),$$

ahol $s_\alpha \in S_\alpha^{i+1}$. Viszont $(\coprod_\alpha S_\alpha^{i+1}, \coprod_\alpha s_\alpha)$ is jó pár, tehát $\tilde{H}_n\left(\bigvee_\alpha S_\alpha^{i+1}\right) \cong \bigoplus_\alpha H_n(S_\alpha^{i+1}, s_\alpha)$, vagyis

$$H_n(X^{i+1}, X^i) \cong \bigoplus_\alpha \mathbb{Z} \text{ ha } n = i+1 \text{ és } 0 \text{ különben.} \qquad \square$$

4.2. Az együtthatók azonosítása

Hátra van még a $d_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ határ-leképezés (ld. (2) a 7. oldalon) azonosítása.

Ha egy $d : A \to B$ homomorfizmus együtthatóit akarjuk kiszámolni, ahol $A \cong \mathbb{Z}^k$, $B \cong \mathbb{Z}^l$, akkor a legkényelmesebben ezt úgy tehetjük meg, hogy definiálunk $a_\alpha : \mathbb{Z} \to A$, $\alpha = 1, \dots, k$, illetve $b_\beta : B \to \mathbb{Z}, \beta = 1, \dots, l$ injektív, illetve szürjektív homomorfizmusokat úgy, hogy $a = \bigoplus_\alpha a_\alpha : \mathbb{Z}^k \to A$ és $b = \bigoplus_\beta b_\beta : B \to \mathbb{Z}^l$ izomorfizmusok. Ekkor ugyanis $bda = \sum_{\alpha\beta} b_\beta d a_\alpha$, ahol a $d_{\alpha\beta} = b_\beta d a_\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ homomorfizmus egy egész számmal való szorzás, hívjuk ezt a számot a $b_\beta d a_\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *fokának.*

A fenti procedúrát most az $A = H_n(X^n, X^{n-1})$ és a $B = H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ végesen generált szabad Abel-csoportokra végezzük el:

$$\mathbb{Z} \cong H_n(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\psi_*^\alpha} H_n(X^n, X^{n-1}) \text{ illetve}$$

$$H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \xrightarrow[\cong]{\kappa_*} \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \xrightarrow{q_*^\beta} \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \cong H_{n-1}(D^{n-1}, \partial D^{n-1}),$$

ahol ψ^α az α n-cella karakterisztikus leképezése, κ_* a jó pár tétel izomorfizmusa és $q^\beta : X^{n-1}/X^{n-2} \to S_\beta^{n-1}$ pedig a hányados-leképezés, ami a többi gömböt összeomlasztja. Vagyis a d_n határ-leképezés együtthatói a fenti bázisban: $d_{\alpha\beta}$ a $q_*^\beta \kappa_* d_n \psi_*^\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ homomorfizmus foka. A szóhasználat egyszerűsítésésre vezessük be a *homologikus fok* fogalmát:

4.8. Definíció. Az $f : S^n \to S^n$ leképezés *homologikus foka* k, ha az indukált $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_n(S^n)$ homomorfizmus $\alpha \mapsto k\alpha$ alakú (f_* foka k).

A homologikus fok néhány egyszerű tulajdonsága:

1. $\deg(\mathrm{Id}_{S^n}) = 1$,
2. $\deg(f) = 0$ ha f nem szürjektív,
3. $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$,
4. $s \mapsto -s$ foka $(-1)^{n+1}$.

4.9. Házi feladat. 1. Lássuk be, hogy ha $f : S^n \to S^n$ fixpontmentes, akkor $\deg(f) = (-1)^{n+1}$. (Ha $\mathbb{Z}_k$ szabadon hat S^{2n}-en, akkor $k = 2$.)

2. Lássuk be, hogy S^n-en van seholsem 0 vektor-mező $\iff$ n páratlan.

Most a homologikus fok segítségével megadjuk a $d_{\alpha\beta}$ együtthatók geometriai interpretációját.

4.10. Tétel. Legyen $\mathcal{F}$ az X cella-komplexus váz-filtrálása és $V(\mathcal{F})$ a filtrálás Vassiliev-komplexusa. Ekkor

$$d_{\alpha\beta} = \deg(q_*^\beta \kappa_* d_n \psi_*^\alpha) = \deg \varphi^{\alpha\beta},$$

ahol a $\varphi^{\alpha\beta} : S^{i-1} \to S^{i-1}$ leképezés a $\varphi_\alpha^n : S^{i-1} \to X^{i-1}$ ragasztó-leképezés és a

$$q^\beta q : X^{i-1} \to X^{i-1}/X^{i-2} \to X^{i-1}/(X^{i-1} \setminus e_\beta^{i-1}) \cong S^{i-1}$$

hányados-leképezés kompozíciója.

Bizonyítás: Az állítás következik az alábbi diagram kommutativitásából:

$$\begin{tikzcd}
H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) \arrow[r, "\partial_n", "\cong"'] \arrow[d, "\psi_*^\alpha"] \arrow[rr, bend left, "q_*^\beta \kappa_* d_n \psi_*^\alpha"] & \tilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n) \arrow[r, "\varphi_*^{\alpha\beta}"] \arrow[d, "\varphi_*^\alpha"] & \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \\
H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dr, "d_n"'] & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j_{n-1}"] & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \arrow[u, "q_*^\beta"'] \\
 & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[ur, "\cong", "\kappa_*"'] &
\end{tikzcd}$$

4.11. Megjegyzés. Ahhoz hogy a fok tényleg definiálva legyen, rögzítenünk kell a $H_n(S_\alpha^n) \cong \mathbb{Z}$ és $H_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ csoportok generátorait, ez például a $\partial\Delta^n \to S^n$ ciklus rögzítésével történhet (vetítsünk Δ^n baricentumából a körülírt gömbre, a kapott szinguláris lánc ciklus és generálja $\tilde{H}_n(S^n)$-t: (HF)).

A homologikus fok kiszámolásában gyakran segít a *lokális fok* fogalma. Legyen $y \in S^n$ olyan, hogy $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Válasszunk diszjunkt $U_1, \dots, U_m$ környezeteket ezekhez a pontokhoz úgy, hogy f mindet x egy V környezetébe képezze. Ekkor felírhatunk egy kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(U_i, U_i \setminus x_i) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[d, "k_i"] & H_n(V, V \setminus y) \arrow[d, "\cong"', "kiv"] \\
H_n(S^n, S^n \setminus x_i) & H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "f_*"] & H_n(S^n, S^n \setminus y) \\
 & H_n(S^n) \arrow[r, "f_*"] \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "j"'] & H_n(S^n) \arrow[u, "\cong", "\mathrm{HES}(S^n, S^n \setminus y)"']
\end{tikzcd}$$

A felső f_* fokát hívjuk *lokális foknak*, és $\deg f|x_i$-vel jelöljük. Diagram-vadászattal kapjuk:

4.12. Állítás. $\deg f = \sum_i \deg f|x_i$.

4.2.1. A Hurewicz homomorfizmus

A CW-homológia definíciójában a homotopikus fokot használtuk. Most belátjuk, hogy ez megegyezik a homologikus fokkal.

Legyen g a $H_n(S^n)$ generátora. Ha $f : S^n \to Z$, akkor $f_*(g) \in H_n(Z)$. A homotópia-invariancia miatt kapunk egy $\mathrm{hu} : \pi_n(Z, z_0) \to H_n(Z)$ *Hurewicz leképezést.*

4.13. Állítás. A Hurewicz leképezés homomorfizmus.

Bizonyítás: Az alábbi diagram kommutatív, ahol lehet,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, bend left, "\iota^X"] \arrow[drr, bend left=40, "\alpha"] & & \\
 & X \vee Y \arrow[ul, bend left, "\pi^X"] \arrow[dl, bend left, "\pi^Y"'] \arrow[r, "\alpha \vee \beta"] & Z \\
Y \arrow[ur, bend right, "\iota^Y"'] \arrow[urr, bend right=40, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

vagyis $\alpha = (\alpha \vee \beta)\iota_X$, $\beta = (\alpha \vee \beta)\iota_Y$, $\pi_X \iota_X = \mathrm{Id}_X$ és $\pi_Y \iota_Y = \mathrm{Id}_Y$. Mivel $\iota_*^X + \iota_*^Y$ izomorfizmus, így

$$(\alpha \vee \beta)_* = (\alpha \pi^X)_* + (\beta \pi^Y)_* \tag{7}$$

Tekintsük most az összeadás definícióját $\pi_n(Z)$-ben:

$$[\alpha + \beta] = [(\alpha h^+) \vee (\beta h^-)\nu],$$

ahol $\nu : S^n \to S^n_+ \vee S^n_-$ a „nadrágszíj-összehúzó” leképezés és $h^\pm : S^n_\pm \to S^n$ rögzített homeomorfizmusok. Vegyük észre, hogy $h^+\pi^+\nu \sim h^-\pi^-\nu \sim \mathrm{Id}_{S^n}$, ahol $\pi^\pm : S^n_+ \vee S^n_- \to S^n_\pm$ jelöli a megfelelő összeomlasztásokat. Alkalmazva a (7) azonosságot kapjuk, hogy

$$\mathrm{hu}[\alpha + \beta] = \big((\alpha h^+) \vee (\beta h^-)\nu\big)_* g = \alpha_*(h^+\pi^+\nu)_* g + \beta_*(h^-\pi^-\nu)_* g = \mathrm{hu}[\alpha] + \mathrm{hu}[\beta]$$

$\square$

4.14. Következmény. A homotopikus fok megegyezik a homologikus fokkal.

Ehhez elég látni, hogy $\mathrm{hu}(1) = 1$, ami a definícióból azonnal következik.

Ezzel a 3.5 tétel bizonyítását a homológia és CW-homológia azonosságáról befejeztük.

4.15. Házi feladat. Lássuk be hogy ha X egy útösszefüggő tér, akkor a Hurewicz-homomorfizmus egy $\pi_{(}X)/[\pi_{(}X), \pi_{(}X)] \to H_1(X)$ izomorfizmust indukál ($[G, G]$-vel a G csoport kommutátor rész-csoportját jelöljük). Segítség: egy X-beli 1-ciklushoz rendeljünk hozzá egy zárt görbét X-ben és mutassuk meg, hogy a megfelelő osztály a fundamentális csoport kommutátor részcsoport szerinti faktorában jól definiált.

A fenti házi feladat segítségével direkt bizonyítást kapunk arra, hogy $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

5. Homológia együtthatókkal

Az $\mathbb{RP}^n$ projektív tér $\mathbb{Z}_2$-együtthatós homológiája látszólag plusz információt ad az egész-együtthatós homológiához képest. Valójában az egész-együtthatós homológia-csoportok meghatározzák az összes többit. Erről szól az *Univerzális Együttható Tétel.* Ez tiszta algebra: Legyen $L = (C_n, \partial_n)$ egy lánckomplexus, és definiáljuk az $L \otimes G$ lánckomplexust úgy, hogy a grádicsok $C_n \otimes G$ lesznek, a határ-leképezések pedig a ∂_n által indukáltak. Szeretnénk L és $L \otimes G$ homológiáit összehasonlítani.

5.1. Házi feladat. Lássuk be, hogy ha egy lánckomplexus grádicsai végesen generáltak, akkor előáll, mint a $0 \to \mathbb{Z} \to 0$, és $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to 0$ felbonthatatlan (a második nem irreducibilis, találjunk rész-lánckomplexusát!) lánckomplexusok direkt összege (nem egyértelmű!).

5.2. Megjegyzés. *A fenti házifeladat szerint a végesen generált eset visszavezethető a* $0 \to \mathbb{Z} \to 0$, *és* $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to 0$ *lánckomplexusok esetére:*

$$(0 \to \mathbb{Z} \to 0) \otimes G = 0 \to G \to 0, \text{ \textit{és}}$$

$$(0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to 0) \otimes G = 0 \to G \xrightarrow{\cdot m} G \to 0, \text{ \textit{tehát}}$$

$$H_*(0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to 0) = (0,\ 0,\ \mathbb{Z}_m,\ 0) \text{ \textit{és}}$$

$$H_*(0 \to G \xrightarrow{\cdot m} G \to 0) = (0,\ m\text{-Tor}(G),\ G/mG,\ 0),$$

ahol m-Tor$(G) = \{g \in G : mg = 0\}$ *a* G *Abel-csoport* m-torzió részcsoportja. *(*$G \otimes \mathbb{Z} \cong G$ *és* $G \otimes \mathbb{Z}_m \cong G/mG$*.)*

5.3. Példa. A projektív terekre $H_i(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) \cong H_i(\mathbb{RP}^n) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus 2\text{-Tor}\, H_{i-1}(\mathbb{RP}^n)$.

i	0	1	2	3	4	$\cdots$	n *(ps/pt)*
$H_i(\mathbb{RP}^n)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\cdots$	$0/\mathbb{Z}$
2-Tor $H_i(\mathbb{RP}^n)$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\cdots$	0
2-Tor $H_{i-1}(\mathbb{RP}^n)$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\cdots$	$\mathbb{Z}_2/0$
$H_i(\mathbb{RP}^n) \otimes \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\cdots$	$0/\mathbb{Z}_2$
$H_i(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\cdots$	$\mathbb{Z}_2$

5.1. Homologikus algebra

A fentieket elegánsabban is meg lehet fogalmazni, ami jó alkalom a homologikus algebrával való további ismerkedésre. Legyen R egy gyűrű, és legyen R-$\mathcal{M}od$ az R-modulusok kategóriája. (Legtöbbször az $R = \mathbb{Z}$ esetet, vagyis az Abel-csoportok kategóriáját fogjuk használni.) Ha van egy $F : R\text{-}\mathcal{M}od \to R\text{-}\mathcal{M}od$ elég szép funktorunk (legyen pl. *additív*: leképezések összegét összegbe viszi), akkor az indukál egy funktort az R-modulusok lánckomplexusainak kategóriáján is: egy funktor az "egyenleteket" tartja, így a félig egzaktságot is, tehát lánckomplexus F-je is lánckomplexus lesz. Az egzaktságot viszont már nem feltétlenül, így a $H(F(L)) = F(H(L))$ azonosság általában nem teljesül. Pl. a G-vel való tenzorszorzás funktorára most láttuk, hogy nem *egzakt*. Most megmérjük, hogy $H(F(L)) = F(H(L))$ mennyire nem teljesül.

5.4. Definíció. Legyen $A \in R$-$\mathcal{M}od$. Az

$$\underline{F} \to A \to 0 = \cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

sorozatot az A R-modulus *szabad feloldásának* hívjuk, ha a sorozat egzakt és az F_i-k szabad R-modulusok.

5.5. Házi feladat.

1. Az Abel-csoportoknak ($\mathbb{Z}$-modulusoknak) van 2 hosszú szabad feloldása.
2. Minden R-modulusnak van szabad feloldása. (F_i-k indukcióval megkonstruálhatók.)
3. Keressünk olyan R-modulust, amelyiknek csak végtelen hosszú szabad feloldása van.

Legyen $\mathcal{F} : R\text{-}\mathcal{M}od \to R\text{-}\mathcal{M}od$ egy additív funktor és $F = \underline{F} \to A \to 0$ az A R-modulus szabad feloldása. Ekkor $\mathcal{F}(F)$ is félig egzakt, és $H_i(\mathcal{F}(F))$ méri mennyire nem az.

5.6. Állítás. $H_i(\mathcal{F}(F))$ nem függ a szabad feloldástól, csak $\mathcal{F}$-től és A-tól.

Bizonyítás: Következik az alábbi lemmából $\mathrm{Id}_A : A \to A$-ra alkalmazva.

5.7. Lemma. *Ha $\alpha : A \to B$ modulus-homomorfizmus és $F = \underline{F} \to A \to 0$, $G = \underline{G} \to B \to 0$ szabad feloldások, akkor α indukál egy – lánchomotópia erejéig egyértelmű – $\underline{\alpha} : F \to G$ láncleképezést.*

Lemma bizonyítása: Az alábbi diagramban akarjuk a szaggatott nyilakat definiálni (kommutatívan!):

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_n \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha_n"] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, dashed, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, dashed, "\alpha_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & G_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & G_1 \arrow[r, "g_1"] & G_0 \arrow[r, "g_0"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mivel F_0 szabad és g_0 szürjektív, így α_0 definiálható. α_1 akkor definiálható, ha $\mathrm{Im}(g_1) \supset \mathrm{Im}(\alpha_0 f_1)$, de ez következik az egzaktságból és a definiált rész kommutativitásából. A további α_i-ket hasonlóan definiálhatjuk indukcióval. A lánchomotópia erejéig egyértelműség HF. $\square$

A 5.6 állítás miatt az alábbi definíció korrekt:

5.8. Definíció. Legyen $\mathcal{F} : R\text{-}\mathcal{M}od \to R\text{-}\mathcal{M}od$ egy additív funktor. Ekkor $\mathcal{F}$ *i-edik derivált funktorát* a

$$\mathrm{Der}^i(\mathcal{F})(A) := H_i(\mathcal{F}(F))$$

formulával definiáljuk, ahol A egy R-modulus és $F = \underline{F} \to A \to 0$ az A szabad feloldása.

A derivált funktor definícióját morfizmusokra az olvasóra bízzuk. A G Abel-csoporttal való tenzorszorzás $\otimes G : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ funktor derivált funktorát

$$\mathrm{Tor}(A; G) := \mathrm{Der}^1(\otimes G)(A)$$

-val jelöljük. 5.5.1 miatt a magasabb derivált funktorok nullák.

5.9. Tétel. Univerzális Együttható Tétel Minden C lánckomplexusra a

$$0 \longrightarrow H_n(C \otimes G) \longrightarrow H_n(C; G) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C); G) \longrightarrow 0$$

sorozat egzakt.

Egy hasonlóan bizonyítható tételt részletesen fogunk bizonyítani hamarosan.

5.1.1. Künneth-formulák

A Künneth-formulák egy szorzattér homológiáját hasonlítják össze a tényezők homológiájával. Bizonyítás nélkül adunk meg néhány hasznos változatot. Aki megoldotta a 3.8 házi feladatot, már sejti, hogy a homológiák tenzorszorzatához lesz köze a válasznak.

5.10. Definíció. Legyen R egy (kommutatív egységelemes) gyűrű. Ha az L lánckomplexus L_i grádicsai R-modulusok és a határleképezések R-modulus homomorfizmusok, akkor L-et *R-lánckomplexusnak hívjuk. Ha L és M R-lánckomplexusok akkor definiáljuk az $L \otimes_R M$ R-lánckomplexust:*

$$(L \otimes_R M)_n := \bigoplus_i L_i \otimes_R M_{n-i}$$

és ha $l \in L_i,\ m \in M_{n-i}$, akkor

$$\partial(l \otimes m) := \partial l \otimes m + (-1)^i l \otimes \partial m.$$

Nem nehéz bizonyítani a következőt:

5.11. Állítás. Ha X és Y CW-komplexusok, akkor

$$C^{CW}(X; R) \otimes_R C^{CW}(Y; R) \cong C^{CW}(X \times Y; R),$$

ahol az izomorfizmust az $e^i \otimes e^j \mapsto e^i \times e^j$ megfeleltetés indukálja. Itt e^i az X, e^j pedig az Y egy cellája, amiket az egységkocka leképezéseinek tekintünk.

5.12. Tétel. Algebrai Künneth-formula Legyen R főideál-gyűrű, L és M R-lánckomplexusok. Ekkor léteznek

$$0 \longrightarrow \bigoplus_i H_i(L) \otimes_R H_{n-i}(M) \longrightarrow H_n(L \otimes_R M) \longrightarrow \bigoplus_i \mathrm{Tor}_R(H_i(L), H_{n-i-1}(M)) \longrightarrow 0$$

rövid (hasadó) egzakt sorozatok.

A könnyebb megjegyezhetőség kedvéért (triviális) lánckomplexusokat készíthetünk, és akkor kapjuk lánckomplexusok RES-át:

$$0 \longrightarrow H_*(L) \otimes_R H_*(M) \longrightarrow H_*(L \otimes_R M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_R(H_*(L), H_*(M))_- \longrightarrow 0.$$

A definíciókat az olvasóra bízzuk. Az alsó $-$ index az eggyel elcsúsztatott indexelésű lánckomplexusra utal.

6. Kohomológia

A tenzorszorzás funktort a $\mathrm{Hom}(\cdot, G)$ (kontravariáns!) funktorra cserélve kapjuk a G-együtthatós kohomológia fogalmát. A $H^i(X; G)$ kohomológia-csoportok több szempontból használhatóbb invariánsai egy topologikus térnek, mint a homológia-csoportok. Ennek egyik oka a kontravariancia, másik pedig, hogy ha egy gyűrűből választjuk az együtthatókat, akkor $H^*(X; R)$-en természetes szorzás vezethető be. Később más előnyökről is szó lesz.

6.1. Definíció. $H^i(C; G)$-vel jelöljük a $\mathrm{Hom}(C, G)$ *koláncкomplexus* (a nyilak visszafele mennek,a *kohatár-leképezéseket* δ-val jelöljük) homológia-csoportjait. Kézenfekvő módon definiáljuk a *kolánc, kohatár* és *kociklus* fogalmát is.$C^*(X; G)$ illetve $H^i(X; G)$ jelöli X szinguláris koláncкomplexusát, illetve annak kohomológia-csoportjait (*szinguláris kohomológia*).

6.0.2. Homológia-elméleti tételek duálisai

Az alábbi állítások lényegében ugyanúgy bizonyíthatók, mint a homológiai párjuk:

6.2. Tétel. (Mayer-Vietoris sorozat) Tegyük fel, hogy $X = A \cup B = \mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B$. Ekkor létezik egy hosszú egzakt sorozat (HES):

$$\cdots \longleftarrow H^n(A \cap B) \longleftarrow H^n(A) \oplus H^n(B) \longleftarrow H^n(A \cup B) \longleftarrow H^{n-1}(A \cap B) \longleftarrow \cdots.$$

6.3. Definíció. Legyen $X \supset A$ egy térpár. Ekkor

$$C^*(X, A; G) = \mathrm{Hom}(C_*(X, A), G))$$

jelöli a *relatív koláncokat* és $H^i(X, A; G)$ a megfelelő *relatív kohomológia-csoportokat.*

6.4. Tétel. (Pár hosszú egzakt kohomológia sorozata)
A $0 \to C^*(X,A;G) \to C^*(X;G) \to C^*(A;G) \to 0$ RES indukál egy

$$\cdots \longleftarrow H^n(A) \longleftarrow H^n(X) \xleftarrow[\delta_n]{} H^n(X,A) \longleftarrow H^{n-1}(A) \longleftarrow \cdots \tag{8}$$

hosszú egzakt sorozatot.

Legyen $x_0 \in X$. Ekkor definiálhatjuk a *redukált kohomológia-csoportokat*: $\tilde{H}^n(X) := H^n(X,x_0)$.

CW-komplexusokra definiálhatjuk a CW-kolánckomplexust, mint a CW-lánckomplexus duálisát, és ennek kohomológia-csoportjai megegyeznek a szinguláris kohomológia-csoportokkal.

Létezik Univerzális Együttható Tétel a kohomológia-csoportokra is, a végesen generált esetben a 5.2 megjegyzéshez hasonlóan járhatunk el.

6.5. Házi feladat. Számoljuk ki a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ csoportok egymással vett Hom csoportjait.

Az általános esetben legyen C szabad Abel-csoportok lánckomplexusa. Ekkor definiálhatunk egy

$$h : H^n(C;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(C);G)$$

homomorfizmust a $h[\alpha]([\beta]) := \alpha(\beta) \in G$ formulával, ahol $\alpha \in \mathrm{Hom}(C_n, G)$ kociklus és $\beta \in C_n$ ciklus.

6.6. Állítás.

1. h jól definiált.
2. h szürjektív.
3. $\mathrm{Ker}h \cong \mathrm{Coker}\, i^*_{n-1}$, ahol $i^*_{n-1} : Z^*_{n-1} \to B^*_{n-1}$ az $i_{n-1} : B_{n-1} \to Z_{n-1}$ inklúzió adjungáltja.

6.7. Megjegyzés. egy $\varphi : A \to B$ homomorfizmus *komagja*: $\mathrm{Coker}(\varphi) = B/\mathrm{Im}(\varphi)$. Ez duális fogalma a magnak, hiszen:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\varphi \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \qquad \text{és} \qquad 0 \longleftarrow \mathrm{Coker}\,\varphi \longleftarrow B \xleftarrow{\varphi} A$$

egzaktak. Azonnal következik a definícióból az is, hogy ha

$$\xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}}$$

egzakt, akkor az alábbi RES "vágható ki belőle":

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\partial_{n+2} \longrightarrow C_n \longrightarrow \mathrm{Ker}\partial_{n-1} \longrightarrow 0$$

6.6 bizonyítása:

1. α kociklus $\iff$ $\delta\alpha = 0$ $\iff$ $\alpha|_{B_n} = 0$, hiszen $\delta\alpha(\beta) \overset{\text{def}}{=} \alpha(\partial\beta)$. Legyen $\alpha' = \alpha + a$, $\beta' = \beta + b$, ahol a kohatár és b határ ($a = \delta u,\ b = \partial v$). Ekkor $\alpha'(\beta') = \alpha'(\beta)$, mivel α kociklus; és $a(\beta') = \delta u(\beta') = u(\partial\beta') = 0$ mivel β' ciklus. Tehát $\alpha'(\beta') = \alpha(\beta)$.

2. Vegyük észre, hogy az $i : Z_n \to C_n$ inklúzió *hasad*: létezik egy $p : C_n \to Z_n$ homomorfizmus, hogy $pi = \mathrm{Id}_{z_n}$. Itt kihasználjuk, hogy $Z_n = Ker\partial$ ahol $\partial : C_n \to B_{n-1}$ és B_{n-1} szabad Abel-csoport, hiszen a C_{n-1} szabad Abel-csoport részcsoportja. Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(H_n(C); G)$, ekkor $\exists!\varphi_1 : Z_n \to G$, hogy $\varphi_1|_{B_n} = 0$ és $\varphi[\beta] = \varphi_1(\beta)$ minden β ciklusra. Legyen $\varphi_2 = \varphi_1 p$, ekkor

$$\delta\varphi_2(\beta) = \varphi_2(\partial\beta) = \varphi_1 p(\partial\beta) = \varphi_1(\partial\beta) = 0,$$

hiszen $\varphi_1|_{B_n} = 0$. Tehát φ_2 kociklus és

$$h[\varphi_2]([\beta]) = \varphi_2(\beta) = \varphi_1(\beta) = \varphi[\beta].$$

3. A B_n, Z_n csoportok definíciója az alábbi RES-ban foglalható össze:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \longrightarrow 0\ .$$

Minden n-re együtt kapjuk HES-ek RES-át:

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow C \longrightarrow B_- \longrightarrow 0\ ,$$

ahol $(B_-)_n = B_{n-1}$: eggyel elcsúsztatjuk az indexelést. Z és $(B_-)_n$ triviális lánckomplexusok, a határ-operátorokat nullának definiáljuk. 2-ben láttuk, hogy ez a RES *hasad*: $0 \longrightarrow Z \overset{p}{\leftrightarrows} C \longrightarrow B_- \longrightarrow$
Minket a duális

$$0 \longleftarrow Z^* \longleftarrow C^* \longleftarrow B^*_- \longleftarrow 0 \tag{9}$$

RES érdekel, ahol az $A^* = \mathrm{Hom}(A; G)$ jelölést használjuk. Egy RES duálisa nem mindig egzakt, de egy hasadó RES duálisa mindig hasadó RES (HF, funktorok egyenlettartóak). Tehát (9) indukál egy HES-t a (ko)homológiákon:

$$\longleftarrow B^*_n \xleftarrow{d_n} Z^*_n \longleftarrow H^n \longleftarrow B^*_{n-1} \xleftarrow{d_{n-1}} Z^*_{n-1} \longleftarrow \tag{10}$$

Itt felhasználtuk, hogy $H^n(B^*_-) = B^*_{n-1}$ és $H^n(Z^*) = Z^*_n$, hiszen triviális lánckomplexusok, és a $H^n = H^n(C^*)$ jelölést használjuk. A d_n kohatár-leképezést az alábbi diagram definiálja (itt újra felhasználtuk, hogy $H^n(B^*_-) = B^*_{n-1}$ és $H^n(Z^*) = Z^*_n$):

$$\begin{tikzcd}
Z^*_{n+1} & C^*_{n+1} \arrow[l] & B^*_n \arrow[l, "\delta"'] \\
Z^*_n \arrow[u, "0"] \arrow[urr, dashed, "d_n"] & C^*_n \arrow[l] \arrow[u, "\delta"'] & B^*_{n-1} \arrow[l] \arrow[u, "0"]
\end{tikzcd}$$

d_n definícióját (3.17) végigkövetve láthatjuk, hogy $i_n^* = d_n$. A diagramból mellesleg az is látszik, hogy $\delta : C_{n+1}^* \to C_n^*$ átfaktorizálódik B_n^*-on, ami persze következik a $\delta\alpha(\beta) = \alpha(\partial\beta)$ definícióból is. A (10) HES-ól „kivághatjuk” a

$$0 \longleftarrow \mathrm{Ker} i_n^* \longleftarrow H^n \longleftarrow \mathrm{Coker}\, i_{n-1}^* \longleftarrow 0 \tag{11}$$

RES-t. Megint használva, hogy ‘inklúzió duálisa megszorítás’ kapjuk, hogy $\mathrm{Ker} i_n^* = \{\varphi : Z_n \to G : \varphi|_{B_n} = 0\}$. Ezek a homomorfizmusok bijekcióban állnak a $Z_n/B_n \to G$ homomorfizmusokkal, tehát $\mathrm{Ker} i_n^* \cong \mathrm{Hom}(H_n(C); G)$. Könnyű végigbogarászni, hogy a $H^n \to \mathrm{Ker} i_n^*$ leképezés (11)-ben megegyezik h-val a $\mathrm{Ker} i_n^* \cong \mathrm{Hom}(H_n(C); G)$ azonosítás után, vagyis $\mathrm{Ker} h \cong \mathrm{Coker}\, i_{n-1}^*$. □

Hátra van még az Univerzális Együttható Tétel kimondásához, hogy $\mathrm{Coker}\, i_{n-1}^*$-t valami ismerősebb objektummal azonosítsuk. Ehhez vegyük észre, hogy a homológia-csoportot definiáló

$$F:\ 0 \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

RES a $H_{n-1}(C)$ Abel-csoport szabad feloldása. F-re alkalmazva a $\mathrm{Hom}(\cdot; G)$ funktort kapjuk az

$$F^*:\ 0 \longleftarrow B_{n-1}^* \longleftarrow Z_{n-1}^* \longleftarrow H_{n-1}^*(C) \longleftarrow 0$$

félig egzakt sort, amire $H^1(F^*) = \mathrm{Coker}\, i_{n-1}^*$. A derivált funktor definícióját értelemszerűen módosítva kontravariáns funktorokra ez éppen a $\mathrm{Hom}(\cdot; G)$ funktor (első) derivált funktora, amit $\mathrm{Ext}(\cdot; G)$-val szoktak jelölni. Vagyis:

6.8. Tétel. Univerzális Együttható Tétel kohomológia-csoportokra Minden C lánckomplexusra a

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C); G) \longrightarrow H^n(C; G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(C); G) \longrightarrow 0$$

sorozat egzakt.

Közben azt a nem triviális eredményt is megkaptuk, hogy $\mathrm{Coker}\, i_{n-1}^*$ csak $H_{n-1}(C)$-től függ. A bizonyításból az is kijön, hogy az UET sor hasad, de ez a hasadás nem kanonikus. Ebből az is következik, hogy egy X tér $\mathbb{Z}$-együtthatós homológia-csoportjai meghatározzák a G-együtthatós kohomológia-csoportjait.

6.9. Házi feladat. Számoljuk ki a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ csoportok egymással vett Ext csoportjait.

6.10. Házi feladat. Számoljuk ki a valós projektív terek $\mathbb{Z}$-együtthatós kohomológia-csoportjait az UET-lel.

6.11. Házi feladat. Lássuk be, hogy ha F test, akkor

$$H^n(X; F) \cong \mathrm{Hom}_F(H_n(X; F); F).$$

Most már számos módon kiszámolhatjuk, hogy $H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

6.12. Házi feladat. Rögzítsünk minden $s \in S^1$-re egy $\gamma_s : [0,1] \to S^1$ görbét úgy, hogy $\gamma_s(0) = s_0$ és $\gamma_s(1) = s$. Legyen $\sigma : [0,1] \to S^1$ egy szinguláris 1-szimplex. Ekkor $\hat{\sigma} := \gamma_{\sigma(0)} * \sigma * \bar{\gamma}_{\sigma(1)}$ egy zárt görbe (itt $*$ a görbék összefűzését jelöli), melynek definiálható a $\kappa(\hat{\sigma}) \in \mathbb{Z}$ körüljárási száma. A $\sigma \mapsto \kappa(\hat{\sigma})$ hozzárendelés indukál egy $a \in \mathrm{Hom}(C_1(S^1), \mathbb{Z})$ homomorfizmust. Mutassuk meg, hogy a egy kociklus és $[a] \in H^1(S^1)$ generátor. (tipp: $a(\sigma * \sigma') = a(\sigma) + a(\sigma')$.)

6.1. Szorzás

6.13. Definíció. Legyen R egy gyűrű és X egy topologikus tér. Ekkor a $\varphi \in C^k(X;R), \psi \in C^l(X;R)$ koláncok *csészeszorzata* $\varphi \smile \psi \in C^{k+l}(X;R)$:

$$\varphi \smile \psi(\sigma) = \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_k])\psi(\sigma|[v_k, \dots, v_{k+l}]), \tag{12}$$

ahol $\sigma : \Delta^{k+l} \to X$ egy szinguláris $k + l$-szimplex.

Az alábbi lemmából következik, hogy a csészeszorzat indukál egy

$$H^k(X;R) \times H^l(X;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X;R)$$

szorzást, amit szintén csészeszorzatnak fogunk hívni.

6.14. Lemma.

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi,$$

ahol $\varphi \in C^k(X;R)$ és $\psi \in C^l(X;R)$.

Bizonyítás: Ha $\sigma : \Delta^{k+l+1} \to X$, akkor

$$\delta\varphi \smile \psi(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k])\psi(\sigma|[v_{k+1}, \dots, v_{k+l+1}]) \text{ és}$$

$$(-1)^k \varphi \smile \delta\psi(\sigma) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_k])\psi(\sigma|[v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1}]).$$

Ha ezeket összeadjuk, akkor az első összeg utolsó tagja kiejti a második összeg első tagját, a maradék pedig $\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi \smile \psi(\partial\sigma)$, hiszen $\partial\sigma = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1}])$. □

A lemmából következik, hogy kociklusok szorzata kociklus, és kociklus-szor kohatár az kohatár, tehát valóban kapunk egy kohomologikus szorzást, ami asszociatív és disztributív, hiszen a kociklus-szinten nyilvánvalóan az.

6.15. Állítás. A visszahúzás gyűrű-homomorfizmus, azaz, ha $f : X \to Y$, akkor $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$.

Bizonyítás: Következik abból, hogy $f^\sharp : C^*(Y;R) \to C^*(Y;R)$-ra

$$\begin{aligned} f^\sharp\varphi \smile f^\sharp\psi(\sigma) &= f^\sharp\varphi(\sigma|[v_0,\ldots,v_k])f^\sharp\psi(\sigma|[v_k,\ldots,v_{k+l}]) \\ &= \varphi(f\sigma|[v_0,\ldots,v_k])\psi(f\sigma|[v_k,\ldots,v_{k+l}]) \\ &= \varphi \smile \psi(f\sigma) = f^\sharp\varphi \smile \psi(\sigma). \end{aligned}$$ □

Nemsokára belátjuk, hogy

6.16. Példa.

1. $H^*(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]$ és $H^*(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$, ahol α foka 2,

2. $H^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha]$ és $H^*(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$, ahol α foka 1.

6.1.1. Künneth-formula és csészeszorzás

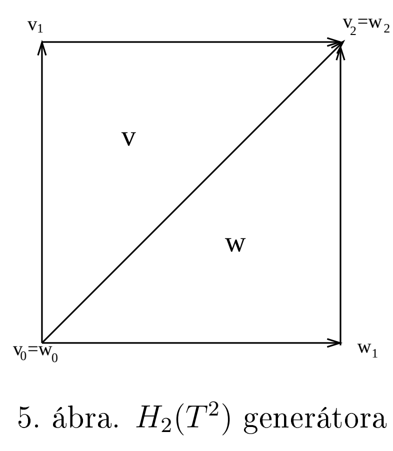
6.17. Tétel. Legyenek X, Y cella-komplexusok, és tegyük fel, hogy $H^k(Y;R)$ szabad R-modulus minden k-ra. Ekkor

$$H^*(X;R) \otimes_R H^*(Y;R) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y;R)$$

izomorfizmus, ahol $\times(\alpha \otimes \beta) = \alpha \times \beta := p_X^*(\alpha) \smile p_Y^*(\beta)$.

6.18. Házi feladat. Bizonyítsuk be a fenti tételt $X = Y = S^1, R = \mathbb{Z}$-re.

Segítség: Használjuk a 6.12 és a 3.27 házi feladatok megoldását.
Megoldás: Azt kell belátnunk, hogy a két S^1 faktor első kohomológia-csoportjának generátorát keresztszorozva a tórusz második kohomolőgia-csoportjának generátorát kapjuk. Tekintsük az $\alpha = v - w$ láncot a tóruszon (l. 5 ábra). Könnyű látni, hogy ez egy ciklus. Legyen g a 6.12



5. ábra. $H_2(T^2)$ generátora

feladatban megadott kociklus, és értékeljük ki $p_X^*([g]) \smile p_Y^*([g]) \in H^2(T^2)$-t az $[\alpha] \in H_2(T^2)$ homológia-osztályon:

$$p_X^*([g]) \smile p_Y^*([g])([\alpha]) = g(p_\sharp^X\alpha|[0,1])g(p_\sharp^Y\alpha|[1,2]) = (1-0)(1-0) = 1.$$

A számolásból az is adódik, hogy $[\alpha] \in H_2(T^2)$ tényleg generátor.

6.1.2. Alkalmazások

A gyűrű-struktúra létezésének erős következményei vannak, pl. egy finomabb invariánst kapunk topologikus terek megkülönböztetésére.

6.19. Állítás. $\mathbb{CP}^2 \not\simeq S^2 \vee S^4$.

Bizonyítás: Mivel $\tilde{H}^*(X \vee Y) \cong \tilde{H}^*(X) \oplus \tilde{H}^*(Y)$ mint gyűrűk, ha X, Y jól pontozott, azaz (X, x_0) és (Y, y_0) jó párok (HF), így $\tilde{H}^*(\mathbb{CP}^2) \not\cong \tilde{H}^*(S^2 \vee S^4)$ mint gyűrűk. $\square$

6.20. Következmény. A Hopf leképezés $h : S^3 \to S^2$ nem null-homotóp, hiszen h-t használjuk ragasztó-leképezésnek $\mathbb{CP}^2$ cella-felbontásában. Ha h null-homotóp lenne, akkor azt kapnánk, hogy $\mathbb{CP}^2 \simeq S^2 \vee S^4$. (Ezt az eredményt h homotópia HES-ának vizsgálatából is megkaphatjuk.)

6.21. Állítás. Ha A nullosztómentes algebra $\mathbb{R}$ felett, akkor

$$n = \dim_{\mathbb{R}}(A) = 2^l.$$

Bizonyítás: Az A-beli szorzás definiál egy $\mu : \mathbb{RP}^{n-1} \times \mathbb{RP}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ leképezést, hiszen a szorzás bilinearitása miatt egyenesek szorzata egyenes. A 6.17 tételből következik, hogy

$$H^*(\mathbb{RP}^{n-1} \times \mathbb{RP}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha, \beta]/(\alpha^n, \beta^n).$$

6.22. Lemma. *$\mu^*(\gamma) = \alpha + \beta$, ahol $H^*(\mathbb{RP}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\gamma]/(\gamma^n)$.*

A lemmából következik, hogy $0 = \mu^*(\gamma^n) = \sum_k \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$, tehát $\binom{n}{k} \equiv 0 \mod 2$ minden $0 < k < n$-re. Egyszerű számelméleti gondolatmenet adja, hogy ekkor $n = \dim_{\mathbb{R}}(A) = 2^l$.

Lemma bizonyítása: Feltehetjük, hogy $n > 2$. Legyen $x \in S^{n-1}$ és $\lambda : I \to S^{n-1} \subset A$ egy x-et $-x$-szel összekötő görbe. Ekkor az indukált $\mathbb{RP}^{n-1}$-beli hurok nem null-homotóp, és mivel a $\lambda_y(t) := \lambda(t) \cdot y$ görbe összeköti $x \cdot y$-t $-x \cdot y$-nal, így a λ_y által indukált hurok sem null-homotóp. Ezt $y \cdot \lambda(t)$-re is eljátszva kapjuk, hogy $\pi_1(\mu) : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ mindkét faktor generátorát a kép generátorába képzi. Alkalmazzuk a Hurewicz-homomorfizmust, majd $H_1(\mu)$-t dualizáljuk. $\square$

A későbbiekben szükségünk lesz relatív csészeszorzatokra is, amiket szintén A (12) formulával definiálhatunk:

$$H^k(X; R) \times H^l(X, A; R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X, A; R),$$

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X; R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X, A; R),$$

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X, A; R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X, A; R),$$

hiszen ha φ vagy ψ eltűnik az A-beli láncokon, akkor $\varphi \smile \psi$ is.

Ha $A, B \subset X$ nyíltak, vagy X rész-cella-komplexusai, akkor a kis (ko)láncok tétele miatt kapunk (HF) egy

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X, B; R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X, A \cup B; R)$$

szorzatot is.