Véletlen struktúrák és alkalmazások

Előadó: Lovász László

2009. tavasz

Tartalom

Az előadás leginkább Alon-Spencer [1] könyvét követi. Alább azok a témák vannak részletezve, ahol ettől eltérünk.

1 Bevezető példák

1.1 2-kromatikus hipergráfok

1.1 Tétel (Erdős–Hajnal) *Ha egy r-gráf élszáma $\leq 2^{r-1}$, akkor 2-szinezhető.*

1.2 Ramsey számok

1.2 Tétel (Erdős, Erdős–Szekeres)

$$2^{(k-1)/2} \leq R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

1.3 Megjegyzés Ezt a bizonyítást el lehet mondani úgy is, hogy csak a megfelelő tulajdonságú gráfok számáról beszélünk, nem beszélve valószínűségekről. Azonban a valószínűségi szemlélet az, ami továbbvezet.

1.3 Turnament Hamilton útjainak száma

1.4 Állítás (Rédei) *Minden turnamentben van Hamilton út.*

1.5 Tétel (Szele) *Van olyan n csúcsú turnament, melyben legalább $n!/2^{n-1}$ Hamilton-út van.*

A megfordítást csak kimondjuk.

1.6 Tétel (Alon) *Minden $c < 2$-höz van olyan n_0, hogy ha $n \geq n_0$, akkor minden n csúcsú turnamentben legfeljebb $n!/c^{n-1}$ Hamilton-út van.*

1.4 LYM egyenlőtlenség, Sperner tétele

Sperner rendszernek hívjuk az olyan hipergráfot, melyben egyik él sem tartalmaz egy másikat.

1.7 Tétel *Sperner rendszerre*

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

1.8 Következmény (Sperner tétele) $|\mathcal{H}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

1.5 Bollobás egyenlőtlenség

1.9 Tétel *Legyenek $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m$ véges halmazok, és tegyük föl, hogy minden i-re $A_i \cap B_i = \emptyset$, de ha $i \neq j$, akkor $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1.$$

1.10 Következmény *Ha $|A_i| = p$, $|B_i| = q$, akkor $m \leq \binom{p+q}{q}$.*

2 Várható érték

2.1 Alsó becslés a független pontok maximális számára

2.1 Állítás *Legyen G egy n csúcsú, m élű gráf, és legyen $0 \leq p \leq 1$. Ekkor*

$$\alpha(G) \geq pn - p^2 m.$$

Bizonyítás. Válasszunk ki véletlenszerűen minden pontot p valószínűséggel, majd a kapott pontok által kifeszített minden élnek hagyjuk el valamelyik végpontját. □

Ha $m \geq n/2$, akkor p legjobb választása $p = n/2m$, és így

$$\alpha(G) \geq \frac{n^2}{4m}.$$

Ennél Turán tételéből sokkal jobb becslés nyerhető:

$$\alpha(G) \geq \frac{n^2}{2m+n}.$$

Erre (és ezzel Turán tételére is) adunk egy véletlent használó bizonyítást. A következő erősebb egyenlőséget igazoljuk:

2.2 Tétel

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d_v + 1}.$$

2.2 Gráfok keresztezési száma

Egy G gráf $\mathrm{cr}(G)$ keresztezési száma az a minimális c, melyre G legfeljebb c kereszteződéssel lerajzolható a síkba.

2.3 Lemma

$$\mathrm{cr}(G) \geq m - 3n + 6.$$

2.4 Tétel (Ajtai, Chvátal, Newborn, Szemerédi; Leighton) *Ha* $|V(G)| = n$ *és* $|E(G)| = m \geq 5n$*, akkor*

$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{m^3}{100n^2}$$

Bizonyítás. Válasszunk ki minden pontot p valószínűséggel $(0 < p < 1)$, igy kapunk egy $G' = (V', E')$ feszitett részgráfot. Ekkor

$$\mathsf{E}(|V'|) = pn,$$
$$\mathsf{E}(|E'|) = p^2 m,$$
$$\mathsf{E}(\mathrm{cr}(G')) \leq p^4 \mathrm{cr}(G).$$

A 2.3 lemma szerint

$$\mathrm{cr}(G') > |E'| - 3|V'|,$$

és várható értéket véve azt kapjuk, hogy

$$p^4 \mathrm{cr}(G) > p^2 m - 3pn, \qquad \mathrm{cr}(G) > \frac{m}{p^2} - 3\frac{n}{p^3}.$$

A jobboldal maximuma $p = 9n/(2m)$ értéknél van, ahol az adódik, hogy

$$\mathrm{cr}(G) > \frac{4m^3}{243n^2}.$$

□

A fenti becslésnek sok alkalmazása van különböző geometriai kérdésekre. Például egyszerű bizonyítást ad arra, hogy n síkbeli pont között az 1 távolság csak $O(n^{4/3})$-szor fordulhat elő.

2.3 Rövid kört nem tartalmazó nagy kromatikus számú gráf

2.5 Tétel (Erdős) *Minden k, l-hez van olyan gráf, melynek kromatikus száma legalább k, és melyben minden kör hossza legalább l.*

Legyen

$$p = \frac{(\log n)^3}{n}, \qquad t = \frac{n}{\log n}, \quad l = \frac{\log n}{10 \log\log n}.$$

Ekkor $G(n,p)$-ben nagy valószínűséggel nincs t elemű független, és a legfeljebb l hosszúságú körök várható száma kisebb, mint $n/4$. Így $n/2$ pontot elhagyva olyan gráfot kapunk, melynek kromatikus száma $> n/(2t)$, és minden körének hossza $> k$.

2.4 Brégman tétele

Legyen F k szintű gyökeres fa, melynek minden levele az alsó szinten van. Legyen N levele. Minden u levélhez legyen P_u a gyökérből u-ba vezető út. Legyen X olyan véletlen levél, melyet úgy kapunk, hogy a gyökérből kiindulva minden pontban a lefelé menő élekből egyet egyenletes eloszlás szerint választunk, és azon lépünk lefelé („naív véletlen pont"). Legyen Y egyenletesen választott véletlen pont.

Minden gyökértől levélig vezető P útra legyen $d(P)$ a le-fokok szorzata (a levelet kivéve). Ekkor

$$\mathsf{P}(X = u) = \frac{1}{d(P_u)}.$$

Innen következik, hogy

$$\sum_u \frac{1}{d(P_u)} = 1$$

és

$$\mathsf{E}(d(P_X)) = N.$$

A $d(P_X)$ valószínűségi változó szórása igen nagy lehet, ezért használhatóbbak az alábbi becslések:

2.6 Lemma

$$\mathsf{E}(\log d(P_X)) \le \log N \le \mathsf{E}(\log d(P_Y)).$$

Bizonyítás. Mivel $\log x$ konkáv, a Jensen egyenlőtlenség szerint

$$\mathsf{E}(\log d(P_Y)) = -\frac{1}{N} \sum_u \log \frac{1}{d(P_u)} \ge -\frac{1}{N} \cdot N \cdot \log \frac{1}{N} = \log N.$$

Másrészt $x \log x$ konvex, így

$$\mathsf{E}(\log d(P_X)) = -\sum_u \frac{1}{d(P_u)} \log \frac{1}{d(P_u)} \le N\big(-\frac{1}{N} \log \frac{1}{N}\big) = \log N.$$

Megjegyzés: $\mathsf{E}(\log d(P_X))$ éppen az X entrópiája. □

2.7 Tétel (Brégman) *Legyenek $d_1, \dots, d_n$ egy egyszerű páros G gráf „alsó" pontosztályának fokszámai. Ekkor G teljes párosításainak száma legfeljebb*

$$(d_1!)^{1/d_1} \dots (d_n!)^{1/d_n}.$$

2.8 Megjegyzés (a) Ha minden fok nagy, akkor ez jól közelíthető azzal, hogy $d_1 \dots d_n / e^n$. Ha a gráf d-reguláris, akkor ez $(d/e)^n$.

(b) Ha a gráf nem egyszerű, akkor csak a triviális $d_1 \dots d_n$ felső korlát mondható. (c) V.ö. a Falikman–Jegoricsev tétellel: Ha egy gráf d-reguláris, akkor a teljes párosítások száma legalább $d^n n!/n^n \approx (d/e)^n$. Ennek Schrijver-tól származó élesítése: a teljes párosítások száma legalább

$$\left(\frac{(d-1)^{d-1}}{d^{d-2}}\right)^n.$$

Bizonyítás. A 2.6 Lemma alkalmazásához vesszük az ,,alsó" pontok egy véletlen $\pi = (v_1, \ldots, v_n)$ permutációját, és megkonstruáljuk a következő F_π fát: csúcsai azok a részleges párosítások, melyek kiterjeszthetők teljes párosítássá, és melyek $v_1, \ldots v_k$-t párosítják valamely k-ra; a szülőt pedig az utolsó párosítás-él elhagyásával kapjuk.

Minden M teljes párosítára, W minden π permutációjára, és minden $w \in W$ pontra jelölje $F(M, \pi, w)$ az M azon éleinek halmazát, melyekre w-t megelőző pontból indulnak ki, és legyen $a(M, \pi, w)$ a w csúcs azon szomszédainak száma, melyek párja w-t nem előzi meg a permutációban.

Fontos észrevétel: az $F(M, \pi, w)$ részleges párosítás foka az F_π fában legfeljebb $a(M, \pi, w)$. Ezért bármely M teljes párosításra

$$\log d(P_M) = \sum_{w \in W} \log d_{F_\pi}(F(M, \pi, w) \leq \sum_{w \in W} \log a(M, \pi, w).$$

Legyen Y egy egyenletes eloszlás szerint választott teljes párosítás. Ekkor

$$\log N \leq \mathsf{E}_Y(\log d(P_Y)) \leq \sum_{w \in W} \mathsf{E}_Y(\log a(F(Y, \pi, w)).$$

Vegyük a várható értéket minden π permutációra, akkor

$$\log N \leq \sum_{w \in W} \mathsf{E}_Y \mathsf{E}_\pi(\log a(F(Y, \pi, w)).$$

De egy véletlen π permutációban w szomszédaival párosított pontok közül a w egyforma valószínűséggel lesz első, második, ..., $d(w)$-edik, így

$$\mathsf{E}_\pi(\log a(F(Y, \pi, w)) = \frac{1}{d(w)} \sum_{j=1}^{d(w)} \log j = \frac{1}{d(w)} \log(d(w)!),$$

és így

$$\log N \leq \sum_{w \in W} \mathsf{E}_Y \Big(\frac{1}{d(w)} \log(d(w)!) \Big) = \sum_{w \in W} \frac{1}{d(w)} \log(d(w)!).$$

Ezzel Brégman tételét bebizonyítottuk. □

3 Második momentum módszer

Ha X nemnegatív, egészértékű valószínűségi változó, akkor a Markov egyenlőtlenség szerint

$$\mathsf{P}(X > 0) \leq \mathsf{E}(X). \tag{1}$$

Ha X nemnegatív valószínűségi változó, akkor a Csebisev Egyenlőtlenség szerint

$$\mathsf{P}(X = 0) \leq \frac{\mathsf{Var}(X)}{\mathsf{E}(X)^2}. \tag{2}$$

3.1 K_4 küszöbfüggvénye

3.1 Tétel *Legyen $p(n) \in [0,1]$.*

(a) Ha $p(n)n^{2/3} \to 0$, akkor 1-hez tartó valószínűséggel $G(n,p(n))$-ben nincs teljes négyszög.

(b) Ha $p(n)n^{2/3} \to \infty$, akkor 1-hez tartó valószínűséggel $G(n,p(n))$-ben van teljes négyszög.

3.2 Prímosztók száma

Legyen $\lambda(n)$ az n szám különböző prímosztóinak száma.

3.2 Tétel (Turán) *Legyen $k \in [n]$ véletlen. Ekkor minden $t > 0$ számra és (t-től függően) elég nagy n-re*

$$\mathsf{P}(|\lambda(k) - \ln\ln k| > t\sqrt{\ln\ln k}|) < \frac{20}{t^2}.$$

Bizonyítás. A legtöbb $k \in [n]$ számra $\ln\ln n \approx \ln\ln k$. Pontosabban, ha $\sqrt{n} \le k \le n$, akkor

$$\ln\ln n - \ln\ln k \le \ln\ln n - \ln\ln\sqrt{n} < 1.$$

Ezért elegendő azt bizonyítani, hogy minden $s > 0$-ra és (s-től függően) elég nagy n-re

$$\mathsf{P}(|\lambda(k) - \ln\ln n| > s\sqrt{\ln\ln k}) < \frac{10}{s^2}.$$

Ehhez vegyük észre, hogy $\lambda(k)$ így írható:

$$\lambda(k) = \sum_{\substack{p\le n\\ p \text{ prime}}} X_p,$$

ahol

$$X_p = \begin{cases} 1, & \text{ha } p \mid k,\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Így

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\lambda(k)) &= \sum_p \mathsf{E}(X_p) = \frac{1}{n}\sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor = \frac{1}{n}\sum_{p\le n}\Big(\frac{n}{p} - \Big\{\frac{n}{p}\Big\}\Big)\\ &= \sum_{p\le n}\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\sum_{p\le n}\Big\{\frac{n}{p}\Big\} = \ln\ln n + c_1,\end{aligned}$$

ahol $|c_1| \le 1$. Továbbá,

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(\lambda(k)) &= \sum_p \mathsf{Var}(X_p) + \sum_{p\ne q}\mathrm{Cov}(X_p,X_q) \le \mathsf{E}(\lambda(k)) + \frac{1}{n}\sum_{p\ne q}\lfloor\frac{n}{pq}\rfloor - \frac{1}{n^2}\sum_{p\ne q}\lfloor\frac{n}{p}\rfloor\lfloor\frac{n}{q}\rfloor\\ &\le \mathsf{E}(\lambda(k)) + \frac{1}{n}\sum_{p\ne q}\frac{n}{pq} - \frac{1}{n^2}\sum_{p\ne q}\Big(\frac{n}{p}-1\Big)\Big(\frac{n}{q}-1\Big)\\ &\le \mathsf{E}(\lambda(k)) + \sum_{p\ne q}\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\Big)\\ &\le \mathsf{E}(\lambda(k)) + 2(1+\ln\ln n) < 4\ln\ln n.\end{aligned}$$

Így a Csebisev Egyenlőtlenség szerint

$$\mathsf{P}(|\lambda(k) - \ln\ln n| > s\sqrt{\ln\ln n}) \le \mathsf{P}(|\lambda(k) - \mathsf{E}(\lambda(k))| > s\sqrt{\ln\ln n} - 3) \le \frac{\mathsf{Var}(\lambda(k))}{(s\sqrt{\ln\ln n} - 3)^2} < \frac{10}{s^2}.$$

ha n elég nagy. □

3.3 Teljes részgráf mérete véletlen gráfban

3.3 Tétel *Legyen $k = k(n) \ge 1$ egész szám.*

(a) *Ha* $\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}} \to 0$, *akkor*

$$\mathsf{P}(\omega(G(n, 1/2)) \ge k) \to 0.$$

(b) *Ha* $\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}} \to \infty$, *akkor*

$$\mathsf{P}(\omega(G(n, 1/2)) < k) \to 0.$$

Bizonyítás. Legyen $k_0 = k_0(n)$ az a legkisebb pozitív egész szám, melyre $\binom{n}{k_0}2^{-\binom{k_0}{2}} < 1$. Könnyű látni, hogy

$$k_0 \sim 2\log n,$$

és hogy ha $k < k_0 - 2$, akkor (b) feltétele áll fenn, míg ha $k > k_0 + 1$, akkor (a) feltétele. Ezért feltehetjük, hogy $k \sim 2\log n$.

Minden k elemű S halmazra, legyen

$$X_S = \begin{cases} 1 & \text{ha } S \text{ teljes részgráf,} \\ & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ekkor $X = \sum_S x_S$ a teljes k-asok száma.

$$\mathsf{E}(X) = \binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}.$$

Így

$$\mathsf{P}(\omega(G(n, 1/2)) \ge k) = \mathsf{P}(|X| \ge 1) \le \mathsf{E}(X) = \binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}.$$

Ebből (a) adódik.

A másik oldali becsléshez kiszámítjuk a szórást.

$$\mathsf{Var}(X) = \sum_S \mathsf{Var}(X_S) + \sum_{S \ne T} \mathrm{Cov}(X_S, X_T).$$

Az első szumma kisebb, mint $\mathsf{E}(X)$. A másodikban csak azok a tagok nem nullák, ahol S és T legalább két pontban metszik egymást. Ha $|S \cap T| = i$, akkor

$$\mathrm{Cov}(X_S, X_T) = 2^{-2\binom{k}{2}+\binom{i}{2}} - 2^{-2\binom{k}{2}} < 2^{-2\binom{k}{2}+\binom{i}{2}},$$

és így

$$\mathsf{Var}(X) \le \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{n!}{i!(k-i)!^2(n-2k+i)!} 2^{-2\binom{k}{2}+\binom{i}{2}}.$$

A (2) egyenlőtlenség szerint elég azt megmutatni, hogy $\mathsf{Var}(X)/\mathsf{E}(X)^2 \to 0$. A fentiekből

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{Var}(X)}{\mathsf{E}(X)^2} &\le \frac{2^{\binom{k}{2}}}{\binom{n}{k}} + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{n! 2^{-2\binom{k}{2}+\binom{i}{2}}}{i!(k-i)!^2(n-2k+i)!} \left(\frac{k!(n-k)! 2^{\binom{k}{2}}}{n!} \right)^2 \\ &= \frac{2^{\binom{k}{2}}}{\binom{n}{k}} + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{k!^2(n-k)!^2}{n! i!(k-i)!^2(n-2k+i)!} 2^{\binom{i}{2}}\end{aligned}$$

Az első tag nullához tart a feltevés szerint. A második szummában nézzük két egymásutáni tag hányadosát:

$$\begin{aligned}&\frac{k!^2(n-k)!^2 2^{\binom{i+i}{2}}}{n!(i+1)!(k-i-1)!^2(n-2k+i+1)!} \bigg/ \frac{k!^2(n-k)!^2 2^{\binom{i}{2}}}{n! i!(k-i)!^2(n-2k+i)!} \\ &= \frac{2^i(k-i)^2}{(i+1)(n-2k+i+1)}\end{aligned}$$

Ez i-nek növekedő függvénye, és korlátos i-re $O((\log n)^2/n)$ nagyságrendű, míg ha $k-i$ korlátos, akkor $\Omega(n/\log n)$-re nő. Így a két szélső tag összege dominálja a szummát. De ezek mindketteje 0-hoz tart:

$$\frac{k!^2(n-k)!^2 2}{n! 2!(k-2)!^2(n-2k+2)!} = k(k-1)\frac{(n-k)\dots(n-2k+3)}{n(n-1)\dots(n-k+1)} < \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

és

$$\frac{k!^2(n-k)!^2 2^{\binom{k-1}{2}}}{n!(k-1)!(n-k-1)!} = \frac{k(n-k)2^{\binom{k}{2}}}{2^{k-1}\binom{n}{k}} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

□

4 Martingálok

Valószínűségi változóknak egy $X_1, X_2, \dots$ sorozatát *martingálnak* nevezzük, ha minden $k \ge 0$ indexre

$$\mathsf{E}(X_{k+1} \mid X_1, \dots, X_k) = X_k.$$

Hozzávehetjük mindig az $X_0 = \mathsf{E}(X_1)$ értéket. Minden martingálra

$$X_0 = \mathsf{E}(X_1) = \mathsf{E}(X_2) = \dots$$

4.1 Tétel (Doob) *Ha $X_1, X_2, \dots$ korlátos martingál, akkor 1 valószínűséggel $\lim_{n\to\infty} X_n$ létezik.*

4.2 Tétel (Azuma Egyenlőtlenség) *Legyen $X_1, X_2, \dots$ olyan martingál, melyre $|X_{m+1} - X_m| \le 1$ minden m-re. Ekkor*

$$\mathsf{P}\big(X_m \ge X_0 + \lambda\big) < e^{-\lambda^2/(2m)}.$$

Ha $\lambda = \varepsilon m$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathsf{P}\big(X_m - X_0 \geq \varepsilon m\big) < e^{-\varepsilon^2 m/2}.$$

Érdekes még a $\lambda = c\sqrt{m}$ választás:

$$\mathsf{P}\big(X_m - X_0 \geq c\sqrt{m}\big) < e^{-c^2/2}.$$

4.3 Következmény (Bernstein–Csernov–Hoeffding) *Legyenek* $X_1, X_2, \ldots$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók,* $|X_i| \leq 1$. *Ekkor*

$$\mathsf{P}\left(\Big|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_m - \mathsf{E}(X_1)\Big| > \varepsilon\right) < 2e^{-\varepsilon^2 m/2}.$$

4.4 Következmény *Legyenek* $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ *egy valószínűségi mező, és legyen* $f: \Omega^n \to \mathbb{R}$ *olyan mérhető függvény, melyre*

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - f(y_1, \ldots, y_n)| \leq 1$$

ha $(x_1, \ldots, x_n)$ *és* $(y_1, \ldots, y_n)$ *csak egy koordinátában különböznek. Ekkor*

$$\mathsf{P}\big(f(x) - \mathsf{E}(f(x)) > \lambda\big) < e^{-\lambda^2/(2m)}.$$

és

$$\mathsf{P}\big(|f(x) - \mathsf{E}(f(x))| > \lambda\big) < 2e^{-\lambda^2/(2m)}.$$

4.1 Véletlen leképezés képhalmaza

4.5 Tétel *Legyen* $|S| = n$, *és legyen* $\phi: S \to S$ *véletlen leképezés. Ekkor*

$$\mathsf{P}\left(\Big||\phi(S)| - \Big(1 - \frac{1}{e}\Big)n\Big| > \lambda\right) < 2e^{-\lambda^2/(2n)}.$$

4.2 Véletlen részgráf élszáma

4.6 Tétel *Legyen* G n *csúcsú* m *élű gráf, jelölje* $d = m/\binom{n}{2}$ *az élsűrűségét, legyen* $k \geq 1$, *és legyen* S *a* $V(G)$ *egy véletlen* k *elemű részhalmaza. Ekkor*

$$\mathsf{P}\left(\Big|\frac{|E(G[S])|}{\binom{k}{2}} - d\Big| > \varepsilon\right) \leq e^{-\varepsilon^2 k/8}.$$

Legyenek v_1 véletlen pont $V(G)$-ben, v_2 véletlen pont $V(G) \setminus \{v_1\}$-ben, stb. v_k véletlen pont $V(G) \setminus \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$-ben, és $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Legyen

$$X_m = \frac{1}{k-1}\mathsf{E}(|E(G[S])| \mid v_1, \ldots, v_m).$$

Ekkor $X_0, X_1, \ldots, X_k$ martingál, és

$$|X_{m+1} - X_m| \leq 1.$$

Továbbá $X_0 = d\frac{k}{2}$. Így Azuma egyenlőtlensége szerint

$$\mathsf{P}\left(\Big|\frac{|E(G[S])|}{\binom{k}{2}} - d\Big| > \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(|X_k - X_0| > \varepsilon\frac{k}{2}\right) < \exp\Big(-\frac{\varepsilon^2 k}{8}\Big).$$

4.7 MEGJEGYZÉS Választhatnánk a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ csúcsokat egymástól függetlenül, és alkalmazhatnánk a 4.4 Következményt. Ekkor azonban egy maradéktagot kellene külön megbecsülnünk, amit abból kapunk, hogy két v_i egybeesik.

4.3 Véletlen részgráf kromatikus száma

4.8 TÉTEL *Minden G gráfhoz és $1 \le k \le |V(G)|$ egész számhoz van olyan $s = s(G,k)$ szám, hogy a $V(G)$ egy véletlen k elemű S részhalmazára*

$$\mathsf{P}(|\chi(G[S]) - s| > \varepsilon k) \le e^{-\varepsilon^2 k/2}.$$

Konkrétan $s = \mathsf{E}(\chi(G[S]))$, de erről nehéz a definíciónál többet mondani. Legyen $v_1, v_2 \ldots$ mint fentebb, és legyen

$$X_m = \mathsf{E}(\chi(G[S]) \ \mid \ v_1, \ldots, v_m).$$

Ekkor $X_0, X_1, \ldots, X_k$ martingál, és

$$|X_{m+1} - X_m| \le 1.$$

Így Azuma egyenlőtlensége szerint

$$\mathsf{P}(|X_k - X_0| > \varepsilon k) < e^{-\varepsilon^2 k/2}.$$

4.4 Véletlen gráf maximális teljes részgráfja

Legyen k_0 a legkisebb olyan egész szám, melyre

$$\binom{n}{k_0} 2^{\binom{k_2}{2}} \le 1.$$

4.9 TÉTEL *Legyen $k = k_0 - 4$. Ekkor $G = G(n, 1/2)$-re teljesül, hogy*

$$\mathsf{P}(\omega(G) < k) \le \exp(\frac{-n^2}{1024(\log n)^8}).$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ az a gráf, melynek csúcsai az $[n]$ halmaz k elemű részhalmazai, élei pedig az olyan (A, B) párokat kötik össze, melyekre $|A \cap B| \ge 2$. Legyen $\mathcal{G}$ ennek az a (véletlen) részgráfja, melyet azok a csúcsok feszítenek, melyek G-ben teljes részgráfnak felelnek meg. Az Azuma egyenlőtlenség 4.4 következményét alkalmazzuk az

$$\alpha(\mathcal{G}) = \alpha(X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{n-1,n})$$

függvényre, ahol X_{ij} annak az indikátora, hogy i és j össze vannak-e kötve. Legyen

$$\eta = \mathsf{E}(\alpha(\mathcal{G})), \qquad \nu = \mathsf{E}(|V(\mathcal{G})|), \qquad \mu = \mathsf{E}(|E(\mathcal{G})|).$$

Itt ν könnyen számolható, μ pedig a 3.3 tétel bizonyításához hasonló módon közelíthető:

$$\nu = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}, \qquad \mu = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k-1} \binom{n}{k}\binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i} 2^{-2\binom{k}{2}+\binom{i}{2}} \sim \frac{\nu^2 k^4}{2n^2}.$$

Nyilvánvaló, hogy egy élt megváltoztatva, $\alpha(\mathcal{G})$ legfeljebb 1-gyel változik. Ha nincs teljes k-as, akkor $\alpha(\mathcal{G}) = 0$, és így

$$\mathsf{P}(\omega(G) < k) = \mathsf{P}(\alpha(\mathcal{G}) = 0) = \mathsf{P}(\alpha(\mathcal{G}) - \mathsf{E}(\alpha(\mathcal{G})) \le -\eta) \le \exp(-\frac{\eta^2}{n(n-1)}).$$

Itt η-t alulról kell becsülnünk. Ehhez a 2.1 Állítást használjuk: minden $0 \le q \le 1$ esetén

$$\alpha(\mathcal{G}) \ge q|V(\mathcal{G})| - q^2|E(\mathcal{G})|,$$

és várható értéket véve

$$\eta \ge q\nu - q^2\mu.$$

Így a $q = \frac{\nu}{2\mu}$ választással (amiről ellenőrizni kell, hogy legfeljebb 1), azt kapjuk, hogy

$$\eta \ge \frac{\nu^2}{4\mu} \sim \frac{n^2}{2k^4}.$$

Ezt helyettesítve, és azt használva, hogy $k \sim 2\log n$, a tétel következik. □

4.5 Véletlen gráf kromatikus száma

4.10 Tétel *Legyen $n \ge 1$ egész, $p \in [0,1]$ és $G = G(n,p)$. Ekkor can olyan $c > 0$, hogy*

$$\mathsf{P}(|\chi(G) - c| > \lambda\sqrt{n-1}) < 2e^{-\lambda^2/2}.$$

De mi ez a c érték? A 4.9 tételből levezethető:

4.11 Következmény *Minden $\varepsilon > 0$-ra*

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\chi(G) - \frac{n}{2\log n}\Big| > \varepsilon\frac{n}{2\log n}\Big) = o(n).$$

5 Lokális Lemma

5.1 Tétel *Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ események, és tegyük föl, hogy minden A_i-hez van $n-d-1$ másik esemény úgy, hogy azoktól A_i teljesen független. Tegyük föl, hogy $\mathsf{P}(A_i) \le 1/(e(d+1))$ minden i-re. Ekkor $\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) > 0$.*

Általánosabb alakja:

5.2 TÉTEL *Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ események, és tegyük föl, hogy vannak olyan $x_1, \ldots, x_n \in (0,1)$ valós számok, és minden i-hez van olyan $S_i \subseteq \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, hogy minden $S \subseteq S_i$-re*

$$\mathsf{P}\Big(A_i \;\Big|\; \bigwedge_{j \in S} \overline{A}_j\Big) \le x_i \prod_{j \notin S_i} (1 - x_j).$$

Ekkor

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) \ge \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i) > 0.$$

A bevezető alakon kívül még két következményt érdemes megfogalmazni:

5.3 KÖVETKEZMÉNY *Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ események, és tegyük föl, hogy minden i-hez van olyan $S_i \subseteq \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, $|S_i| = n - d - 1$, hogy minden $S \subseteq S_i$-re*

$$\mathsf{P}\Big(A_i \;\Big|\; \bigwedge_{j \in S} \overline{A}_j\Big) \le \frac{1}{e(d+1)}.$$

Ekkor

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) > 0.$$

5.4 KÖVETKEZMÉNY *Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ események, és tegyük föl, hogy minden i-hez van olyan $S_i \subseteq \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, hogy A_i teljesen független az $\{A_j : j \in S_i\}$ eseményektől, továbbá*

$$\sum_{j \notin S_i} \mathsf{P}(A_j) \le \frac{1}{4}.$$

Ekkor

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) > 0.$$

5.5 MEGJEGYZÉS A függetlenségi feltételt gyakran úgy adjuk meg, hogy definiálunk a $V = \{1, \ldots, n\}$ egy gráfot, melyre az áll, hogy minden i csúcsra az A_i esemény teljesen független az $(A_j : j \in V \setminus N(i) \setminus \{i\})$ eseményektől (figyelem: nem csak külön-külön mindegyiktől!).

5.1 Brooks tétel hipergráfra

5.6 TÉTEL *Ha egy k-uniform hipergráfban minden él legfeljebb 2^{k-3} másik élt metsz, akkor a hipergráf 2 színnel szinezhető.*

5.7 KÖVETKEZMÉNY *Ha egy k-uniform hipergráfban minden pont foka legfeljebb $2^{k-3}/k$, akkor a hipergráf 2 színnel szinezhető.*

5.8 KÖVETKEZMÉNY *Ha egy k-uniform hipergráfban bármely két élnek legfeljebb egy közös pontja van, és éleinek száma legfeljebb $4^{k-4}/k^3$, akkor a hipergráf 2 színnel szinezhető.*

5.2 k-val osztható hosszúságú irányított kör

Kőnnyű bebizonyítani, hogy ha egy gráfban minden befok legalább δ, akkor van benne legalább $\delta + 1$ hosszúságú irányított kör. Mi mondható még a körök hosszáról?

5.9 Tétel *Legyen G irányított gráf, legyen a maximális kifok Δ és a minimális befok δ. Ekkor minden $1 \le k \le \delta/(1+\ln(1+\delta\Delta))$ egész számra van G-ben olyan irányított kör, melynek hossza osztható k-val.*

5.3 Fedések felbontása

5.10 Tétel *Legyen $\mathcal{H}$ olyan hipergráf, melyben minden pont foka legalább k, és minden pontra a pontot tartalmazó élek úniója legfeljebb 2^{k-3} elemű. Ekkor $\mathcal{H}$ felbontható két olyan hipergráf úniójára, melyek mindegyike minden csúcsot lefed.*

5.11 Következmény *Ha $\mathcal{F}$ nyílt egységkörök olyan halmaza, mely minden pontot legalább k-szor és legfeljebb $2^{k/2-6}$–-szorosan fednek le, akkor $\mathcal{F}$ felbontható két olyan halmaz úniójára, melyek mindegyike minden pontot lefed.*

5.4 Latin transzverzális

5.12 Tétel (Erdős–Spencer) *Legyen A olyan $n \times n$ mátrix, melyben minden elem legfeljebb $(n-1)/(4e)$-szer fordul elő. Ekkor van olyan π permutáció, hogy az $a_{i\pi(i)}$ elemek mind különbözőek.*

6 Vapnik-Cservonenkisz dimenzió

6.1 Lefogás és törtlefogás

Legyen $(V, \mathcal{H})$ egy hipergráf, $n = |V|$, $m = |\mathcal{H}|$. A

$$\begin{array}{rll} \text{minimize} & \sum_{i\in V} x_i & \\ \text{subject to} & x_i \ge 0 & (i \in V) \\ & \sum_{i\in E} x_i \ge 1 & (E \in \mathcal{H}). \end{array} \tag{3}$$

linearis program minden megoldását *tört-lefogó halmaznak*, a program optimális értékét a *törtlefogási számnak* nevezzük, és $\tau^* = \tau^*(\mathcal{H})$-val jelöljük. Nyilvánvaló, hogy τ^* alsó korlátot ad a lefogó pontok minimális $\tau(\mathcal{H})$ számára. Kérdés, hogy mennyire éles ez a korlát, és egy optimális törtlefogásból (ami polinomiális időben kiszámítható) megkonstruálható-e egy közelítő egész megoldás.

Tekintsük (3) egy optimális x megoldását, és legyen $p_i = x_i/\tau^*$. Ekkor $(p_i :\ i \in V)$ egy valószínűségeloszlás V-n, melyben minden $E \in \mathcal{H}$ él valószínűsége legalább $1/\tau^*$.

Két (nem lényegesen különböző) módon próbálhatunk meg ebből lefogó halmazt konstruálni:

(a) Generáljunk $v_1, v_2, ...$ csúcsokat a p eloszlásból, és álljunk meg, ha minden él le van fogva.

(b) Minden csúcsról egymástól függetlenül cp_i valószínűséggel eldöntjük, hogy ki akarjuk-e választani, és reménykedünk abban, hogy a kiválasztott pontok minden élt lefognak.

Az (a) változatban könnyen látható. hogy nagy valószínűséggel polinomiális számú lépés után megállunk. Legyen T_{rand} az így megkonstruált (véletlen) lefogó halmaz mérete.

Egy rögzített A élre, annak a valószínűsége, hogy az első t kiválasztott pont nem fogja le,

$$\left(1 - \frac{1}{\tau*}\right)^t < e^{-t/\tau^*}.$$

Így

$$\mathsf{P}(T_{\text{rand}} > t) < me^{-t/\tau^*},$$

és ha $t > \tau^* \ln(2m)$, akkor nagyobb, mint $1/2$ annak a valószínűsége, hogy minden élt lefogtunk, vagyis $1/2$-nél nagyobb valószínűséggel

$$T_{\text{rand}} \le \tau^* \ln(2m) \le \tau \ln(2m). \tag{4}$$

Jobb becslést kapunk, ha a Lokális Lemmát alkalmazzuk, 5.3 változatában. Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ minden éle legfeljebb D másik élt metsz. Legyen $S = \{v_1, \dots, v_t\}$, és legyenek a „rossz" események azok, hogy S nem fog le egy adott élt. Ha

$$De^{-t/\tau^*} < \frac{1}{4},$$

akkor a Lokális Lemma szerint pozitív valószínűséggel minden él le lesz fogva. Továbbá,

$$\mathsf{E}(|S|) \le \tau^* \ln(4D) \le \tau \ln(4D). \tag{5}$$

Algoritmikus szempontból ez a becslés sem igazán érdekes, mert a mohó algoritmus kicsit jobb korlátot ad, igen gyors algoritmussal együtt:

6.1 ÁLLÍTÁS *Ha egy H hipergráf maximális foka D, akkor a mohó algoritmus által adott T_{moho} lefogó halmazra*

$$|T_{\text{moho}}| \le \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{D}\right)\tau^*(H).$$

6.2 Becslés a Vapnik-Cservonenkisz dimenzió alapján

Egy H hipergráf *Vapnik-Cservonenkisz dimenziója* az a legnagyobb k egész szám, melyre van olyan $S \subseteq V(H)$, $|S| = k$, hogy minden $X \subseteq S$ halmazhoz van olyan $A \in H$, melyre $X = S \cap A$.

6.2 LEMMA (SAUER–SHELAH) *Ha H Vapnik-Cservonenkisz dimenziója k, akkor $|H| \le 1 + n + \dots + \binom{n}{k}$.*

6.3 TÉTEL *Ha egy H hipergráf Vapnik-Cservonenkisz dimenziója k, akkor*

$$T_{\text{rand}} \le 8k\tau^*(H) \log(k\tau^*(H)).$$

Legyen $t = \lfloor 8k\tau^*(H)\log(k\tau^*(H))\rfloor$ és $s = \lfloor 4k\log(k\tau^*(H))\rfloor$. Legyen p annak a valószínűsége, hogy van olyan A él, melyet $\{v_1, \dots, v_t\}$ nem metsz. Annak a B eseménynek a valószínűségét fogjuk kétféleképpen megbecsülni, hogy van olyan A él, melyet $\{v_1, \dots, v_t\}$ nem metsz, de $\{v_{t+1}, \dots, v_{2t}\}$ legalább s pontban metsz.

Tegyük föl, hogy van olyan A él, melyet $\{v_1, \dots, v_t\}$ nem metsz. Csebisev Egyenlőtlensége szerint

$$\mathsf{P}\Big(|E \cap \{v_{t+1}, \dots, v_{2t}\}| \le s\Big) < \frac{1}{2}.$$

Így

$$\mathsf{P}(B) > \frac{1}{2}p. \tag{6}$$

Másrészt, a B esemény valószínűsége nem változik, ha a $\{v_1, \dots, v_{2t}\}$ pontokat véletlenszerűen permutáljuk. Ha egy $A \in \mathcal{H}$ legalább s pontot tartalmaz $\{v_1, \dots, v_{2t}\}$-ből, akkor annak a valószínűsége hogy a permutáció után ezek közül mind a maásodik felében lesz

$$\frac{\binom{2t-s}{t}}{\binom{2t}{t}} \le \Big(1 - \frac{s}{2t}\Big)^t < e^{-s/2}.$$

Ezt a korlátot nem kell minden $A \in \mathcal{H}$ élre összeadni, hanem csak olyanokra, melyeknek a $\{v_1, \dots, v_{2t}\}$ halmazzal különböző metszeteket adnak. Az ilyenek száma a 6.2 Lemma szerint legfeljebb

$$\binom{2t}{d} + \binom{2t}{d-1} + \cdots + 1 < (2t)^d.$$

Így

$$\mathsf{P}(B) = (2N)^d e^{-s/2} < 1/4$$

(6)-gyel összevetve adódik, hogy $p \le 1/2$.

Kicsit gondosabb számolás azt mutatja, hogy legalább 1/2 valószínűséggel $T_{\text{rand}} = O(k\tau^* \log \tau^*)$.

6.3 ε-hálók és ε-minták

Legyen $(V, \mathcal{H})$ egy hipergráf és $\varepsilon > 0$. Egy $S \subseteq V$ halmaz *ε-háló*, ha bármely $A \in \mathcal{H}$, $|A| > \varepsilon|V|$ halmazt metsz. Egy $S \subseteq V$ halmaz *ε-minta*, ha bármely $A \in \mathcal{H}$ halmazra

$$\left|\frac{|A \cap S|}{|S|} - \frac{|A|}{|V|}\right| \le \varepsilon.$$

6.4 Következmény *Legyen $\mathcal{H}$ Vapnik-Cservonenkisz-dimenziója k, ekkor minden $\varepsilon > 0$-ra van $(V, \mathcal{H})$-ban olyan S ε-háló, melyre*

$$|S| \le 8\frac{k}{\varepsilon}\ln\frac{k}{\varepsilon}.$$

A fenti bizonyítás módosításával belátható:

6.5 Következmény *Legyen $\mathcal{H}$ Vapnik-Cservonenkisz-dimenziója k, ekkor minden $\varepsilon > 0$-ra van $(V, \mathcal{H})$-ban olyan S ε-minta, hogy*

$$|S| \le \text{const}\frac{k}{\varepsilon^2}\ln\frac{k}{\varepsilon}.$$

6.6 Következmény *Legyen V egy n elemű ponthalmaz a síkban. Ekkor van olyan $S \subseteq V$ halmaz, hogy minden T háromszögre*

$$\left| \frac{|T \cap S|}{|S|} - \frac{|T \cap V|}{|V|} \right| \le \varepsilon,$$

és

$$|S| \le \mathrm{const} \frac{1}{\varepsilon^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

6.7 Következmény *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ olyan integrálható függvény, melyre $\int f = 1$. Ekkor van olyan $S \subseteq \mathbb{R}^2$ véges halmaz, melyre minden T háromszögre*

$$\left| \int_T f - \frac{|T \cap S|}{|S|} \right| \le \varepsilon,$$

és

$$|S| \le \mathrm{const} \frac{1}{\varepsilon^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

7 Korrelációs egyenlőtlenségek

7.1 A 4-Függvény Tétel

Bármely S halmaz és $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^S$ esetén legyen $\mathcal{A} \underline{\cup} \mathcal{B} = \{A \cup B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{A} \underline{\cap} \mathcal{B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ és $\mathcal{A} \underline{\setminus} \mathcal{B} = \{A \setminus B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Bármely $\alpha : 2^S \to \mathbb{R}_+$ függvényre legyen $\alpha(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \alpha(A)$.

7.1 Tétel (Ahlswede-Daykin 4-függvény-tétele) *Legyen S véges halmaz és $\alpha, \beta, \gamma, \delta : 2^S \to \mathbb{R}_+$ olyan halmazfüggvények, melyekre*

$$\alpha(A)\beta(B) \le \gamma(A \cup B)\delta(A \cap B)$$

teljesül bármely két $A, B \subseteq S$ halmazra. Ekkor

$$\alpha(\mathcal{A})\beta(\mathcal{B}) \le \gamma(\mathcal{A} \underline{\cup} \mathcal{B})\delta(\mathcal{A} \underline{\cap} \mathcal{B})$$

teljesül bármely két $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^S$ halmazrendszerre.

7.2 Következmény *Legyen L véges disztributív háló, és $\alpha, \beta, \gamma, \delta : L \to \mathbb{R}_+$ olyan függvények, melyekre*

$$\alpha(x)\beta(y) \le \gamma(x \vee y)\delta(x \wedge y)$$

teljesül bármely két $x, z \in L$ elemre. Ekkor

$$\alpha(X)\beta(Y) \le \gamma(X \underline{\vee} Y)\delta(X \underline{\wedge} Y)$$

teljesül bármely két $X, Y \subseteq L$ halmazra.

(Itt $X \vee Y = \{x \underline{\vee} y : x \in X, y \in Y\}$, és $\alpha(X) = \sum_{x \in X} \alpha(x)$ stb.)

7.3 Következmény *Legyen L véges disztributív háló, és legyen $X, Y \subseteq L$. Ekkor*

$$|X| \cdot |Y| \leq |X \underline{\vee} Y| \cdot |X \underline{\wedge} Y|.$$

7.4 Következmény (Marica–Schönheim) *Legyen S véges halmaz és $\mathcal{H} \subseteq 2^S$. Ekkor*

$$|\mathcal{H} \underline{\setminus} \mathcal{H}| \geq |\mathcal{H}|.$$

7.5 Tétel (Kleitman) *Legyen S véges halmaz és legyen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^S$. Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mindkettő leszálló vagy fölszálló, akkor*

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \geq 2^{-n} |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|,$$

míg ha $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ egyike leszálló, másika fölszálló, akkor

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \leq 2^{-n} |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|.$$

Ezt így is fogalmazhatjuk:

7.6 Következmény *Legyen S véges halmaz, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^S$, és legyen Xaz S egy véletlen részhalmaza (egyenletesen választva az összes közül). Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mindkettő leszálló vagy fölszálló, akkor*

$$\mathsf{P}(X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{B}) \geq \mathsf{P}(X \in \mathcal{A}) \mathsf{P}(X \in \mathcal{B}),$$

míg ha $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ egyike leszálló, másika fölszálló, akkor

$$\mathsf{P}(X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{B}) \leq \mathsf{P}(X \in \mathcal{A}) \mathsf{P}(X \in \mathcal{B}).$$

7.2 Az FKG Egyenlőtlenség

7.7 Tétel (Fortuin–Kasteleyn–Ginibre) *Legyen L véges disztributív háló, és $\mu : L \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, melyre*

$$\mu(x)\mu(y) \leq \mu(x \vee y)\mu(x \wedge y)$$

teljesül bármely két $x, z \in L$ elemre (logszubmoduláris függvény). Ekkor bármely két monoton növekvő $f, g : L \to \mathbb{R}_+$ függvényre

$$\left(\sum_{x \in L} \mu(x) f(x) \right) \left(\sum_{x \in L} \mu(x) g(x) \right) \leq \left(\sum_{x \in L} \mu(x) f(x) g(x) \right) \left(\sum_{x \in L} \mu(x) \right).$$

Másszóval,

7.8 Következmény *Legyen L véges disztributív háló, és $\mu : L \to \mathbb{R}_+$ olyan valószínűségeloszlás L-en, melyre*

$$\mu(x)\mu(y) \leq \mu(x \vee y)\mu(x \wedge y)$$

teljesül bármely két $x, z \in L$ elemre. Legyen X véletlen pont a μ eloszlásból. Ekkor bármely két monoton növekvő $f, g : L \to \mathbb{R}_+$ függvényre

$$\mathsf{E}(f(X))\mathsf{E}(g(X)) \leq \mathsf{E}(f(x)g(x)).$$

7.3 Parciális rendezések lineáris kiterjesztései

Legyen $(P, \leq)$ egy véges parciálisan rendezett halmaz, és legyen $\mathcal{L}$ a lineáris kiterjesztéseinek halmaza. $\mathcal{L}$ elemeit úgy is tekintjük, mint monoton bijektív $P \to \{1, \ldots, |P|\}$ leképezéseket. Legyen $\preceq$ egy véletlen lináris kiterjesztés.

7.9 TÉTEL *Bármely három $a, b, c \in P$ elemre*

$$\mathsf{P}(a \preceq b, a \preceq c) \geq \mathsf{P}(a \preceq b)\mathsf{P}(a \preceq c).$$

8 Szitamódszerek

Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges események. Minden $I \subseteq [n] = \{1, \ldots, n\}$ halmazra legyen $A_I = \bigwedge_{i \in I} A_i$. A szitaformula szerint

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \mathsf{P}(A_I).$$

8.1 Bonferoni egyenlőtlenségek

Legyen $k \geq 0$ egész. Ha k páros, akkor

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) \leq \sum_{|I| \leq k} (-1)^{|I|} \mathsf{P}(A_I), \tag{7}$$

míg ha k páratlan, akkor

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) \geq \sum_{|I| \leq k} (-1)^{|I|} \mathsf{P}(A_I). \tag{8}$$

8.2 Brunn szita

Legyen $f(k) \geq 0$ tetszőleges egészértékű függvény az $\{1, \ldots, n\}$ halmazon, és legyen

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq \{1, \ldots, n\} : |I \cap \{1, \ldots, k\}| \leq 2f(k),\ k = 1, \ldots, n\}.$$

Ekkor

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}} (-1)^{|I|} \mathsf{P}(A_I).$$

8.3 Selberg szita

8.1 LEMMA *Minden $I \subseteq [n]$ részhalmazhoz legyen λ_I egy valós szám, továbbá $\lambda_\emptyset = 1$. Ekkor*

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) \leq \sum_{I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}} \lambda_I \lambda_J \mathsf{P}(A_{I \cup J}). \tag{9}$$

Megjegyezzük, hogy $\lambda_I = (-1)^{|I|}$ választással az egyenlőség teljesül.

Legyen $0 < a_i < 1$, $b_i = 1 - a_i$, $a_I = \prod_{i\in I} a_i$ és $b_I = \prod_{i\in I} b_i$. Minden $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszerre és $J \subseteq [n]$ halmazra legyen

$$\mathcal{A}/J = \{I \subseteq [n] \setminus J : \ I \cup J \in \mathcal{A}\}, \qquad Q = Q_{\mathcal{A}} = \sum_{I\in\mathcal{A}} \frac{a_I}{b_I}, \qquad Q_J = Q_{\mathcal{A}/J} = \sum_{\substack{I\subseteq[n]\setminus J\\ I\cup J\in\mathcal{A}}} \frac{a_I}{b_I}.$$

Megjegyezzük, hogy $\mathcal{A}/J \subseteq \mathcal{A}$, így $Q_{\mathcal{A}/J} \le Q_{\mathcal{A}}$.

8.2 Lemma *Legyen $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ egy leszálló halmazrendszer. Ekkor*

$$\sum_{I,J\in\mathcal{A}} \lambda_I\lambda_J a_{I\cup J} \tag{10}$$

minimuma a $\lambda_\emptyset = 1$ feltétel mellett $1/Q_{\mathcal{A}}$, amit a

$$\lambda_I = (-1)^{|I|}\frac{Q_{\mathcal{A}/I}}{b_I Q_{\mathcal{A}}} \tag{11}$$

választás ad.

Bizonyítás. Alakítsuk át (10)-et:

$$\begin{aligned}\sum_{I,J}\lambda_I\lambda_J a_{I\cup J} &= \sum_{I,J}\lambda_I\lambda_J\frac{a_Ia_J}{a_{I\cap J}} = \sum_{I,J}\lambda_I\lambda_J a_Ia_J\sum_{K\subseteq I\cap J}\frac{b_K}{a_K}\\ &= \sum_K\frac{b_K}{a_K}\sum_{K\subseteq I}\sum_{J\supseteq K}\lambda_I\lambda_J a_Ia_J = \sum_K\frac{b_K}{a_K}\left(\sum_{I\supseteq K}a_I\lambda_I\right)^2 = \sum_K\frac{b_K}{a_K}\mu_K^2,\end{aligned}$$

ahol

$$\mu_K = \sum_{I\supseteq K} a_I\lambda_I. \tag{12}$$

Itt λ_I-t kifejezhetjük a μ_K-kkal:

$$\lambda_I = \frac{1}{a_I}\sum_{K\supseteq I}(-1)^{|K-I|}\mu_K, \tag{13}$$

mert a μ_K-k nyilvánvalóan meghatározzák a λ_I-ket és a (13) által definiált λ_I-k kielégítik (12)-et. A (12) és (13) egyenletekből következik, hogy $\lambda_I = 0$ minden $I \notin \mathcal{A}$-ra akkor és csak akkor, ha $\mu_I = 0$ minden $I \notin \mathcal{A}$-ra. Így (10) minimuma a $\lambda_\emptyset = 1$ feltétel mellett ugyanaz, mint

$$\sum_{K\in\mathcal{A}}\frac{b_K}{a_K}\mu_K^2 \tag{14}$$

minimuma a

$$\sum_{K\in\mathcal{A}}(-1)^{|K|}\mu_K = 1 \tag{15}$$

feltétel mellett. Tovább alakítva

$$\sum_{K\in\mathcal{A}}\frac{b_K}{a_K}\mu_K^2 = \sum_{K\in\mathcal{A}}\frac{a_K}{b_K}\left(\frac{b_K}{a_K}\mu_K - \frac{(-1)^{|K|}}{Q}\right)^2 + \frac{1}{Q}. \tag{16}$$

Mivel

$$\mu_K = \frac{(-1)^{|K|}}{Q} \cdot \frac{a_K}{b_K} \tag{17}$$

a változóknak egy olyan választása, mely minimalizálja (16) jobboldalát, és ugyanakkor kielégíti a (15) feltételt, azt kapjuk, hogy a (14) minimuma $1/Q$ és (17) adja a μ-k optimális választását. Ebből (13) alapján λ_I értéke is könnyen adódik. $\square$

8.3 Következmény *Legyen* $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ *egy leszálló halmazrendszer és* $\varepsilon > 0$. *Tegyük fel, hogy minden* $K \in \mathcal{A}$ *halmazra* $|\mathsf{P}(A_K) - a_K| < \varepsilon$. *Ekkor*

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \dots \overline{A}_n) \leq \frac{1}{Q_\mathcal{A}} + \varepsilon \left(\sum_{I \in \mathcal{A}} \frac{Q_I}{Q b_I} \right)^2.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathsf{P}(A_K) = a_K + r_K$, ahol $|r_K| \leq \varepsilon$, és legyen λ a (11) szerint választva. Ekkor a 8.1 Lemma szerint

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \dots \overline{A}_n) \leq \sum_{I,J \subseteq \{1,\dots,n\}} \lambda_I \lambda_J \mathsf{P}(A_{I \cup J}) = \sum_{I,J \subseteq \{1,\dots,n\}} \lambda_I \lambda_J a_{I \cup J} + \sum_{I,J \subseteq \{1,\dots,n\}} \lambda_I \lambda_J r_{I \cup J}.$$

Itt a 8.2 Lemma szerint az első tag $\frac{1}{Q}$, a második pedig így becsülhető:

$$\Big| \sum_{I,J \subseteq \{1,\dots,n\}} \lambda_I \lambda_J r_{I \cup J} \Big| \leq \varepsilon \sum_{I,J \subseteq \{1,\dots,n\}} |\lambda_I| \cdot |\lambda_J| = \varepsilon \Big(\sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} |\lambda_I| \Big)^2.$$

Innen (11) alapján következik a Lemma. $\square$

Megjegyezzük, hogy a maradéktag így alakítható át:

$$\sum_{I \in \mathcal{A}} \frac{Q_I}{Q b_I} = \frac{1}{Q} \sum_{I \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{K \supseteq I \\ K \in \mathcal{A}}} \frac{a_{K \setminus I}}{b_K} = \frac{1}{Q} \sum_{K \in \mathcal{A}} \frac{1}{b_K} \sum_{I \subseteq K} a_{K \setminus I} = \frac{1}{Q} \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \frac{1 + a_i}{1 - a_i}.$$

8.4 Következmény *Legyen* $\varepsilon, \delta > 0$, *és tegyük fel, hogy az előző következmény feltételei mellett*

$$\prod_{i \in K} \left(1 + \frac{1}{a_i} \right) \leq C$$

minden $I \in \mathcal{A}$ *halmazra. Ekkor*

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \dots \overline{A}_n) \leq \frac{1}{Q} + \varepsilon C^2.$$

Bizonyítás. A 8.3 Következménybeli maradéktagot kell becsülnünk:

$$\sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \frac{1 + a_i}{1 - a_i} = \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \left(1 + \frac{1}{a_i} \right) \frac{a_i}{1 - a_i} \leq a \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \frac{a_i}{1 - a_i} = CQ,$$

és így a maradéktag legfeljebb εC^2. $\square$

Alkalmazásként bebizonyítjuk a kovetkező számelméleti tételt:

8.5 Következmény *Minden elég nagy x számra*

$$\pi(x) \le 4\frac{x}{\ln x}.$$

Bizonyítás. Legyenek $p_1, \ldots, p_n$ a $\sqrt{x}$-nél nem nagyobb primszámok, és a korábbiakhoz hasonlóan legyen $p_K = \prod_{i\in K} p_i$. Legyen $a_i = 1/p_i$. Legyen $M = \lfloor x^{2/5} \rfloor$, és legyen $\mathcal{A} = \{K \subseteq [n] : p_K \le M\}$. Legyen z az $[x]$ halmazból egyenletes eloszlás szerint választott véletlen szám, és jelölje A_i azt az eseményt, hogy $p_i \mid z$. Ekkor

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_n) = \mathsf{P}(z \text{ prím}, \ z > \sqrt{x}) = \frac{\pi(x) - \pi(\sqrt{x})}{x},$$

és így

$$\pi(x) = \mathsf{P}(\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_n)x + O(\sqrt{x}). \tag{18}$$

A 8.4 Következményt alkalmazzuk. Minden $K \subseteq [n]$ halmazra

$$\mathsf{P}(A_K) = \mathsf{P}\Big(p_K \mid z\Big) = \frac{1}{x}\Big\lfloor\frac{x}{p_K}\Big\rfloor,$$

és így

$$|\mathsf{P}(A_K) - a_K| < \frac{1}{x}$$

minden $K \subseteq [n]$ halmazra. Továbbá ha $K \in \mathcal{A}$, akkor

$$\prod_{i\in K}\left(1 + \frac{1}{a_i}\right) = \prod_{i\in K}(1 + p_i) \le M \prod_{i\in K}(1 + \frac{1}{p_i}) < M \exp\Big(\sum_{i\in K}\frac{1}{p_i}\Big).$$

Itt

$$\sum_{i\in K}\frac{1}{p_i} \le \sum_{p<M}\frac{1}{p} < \ln\ln x,$$

és így

$$\prod_{i\in K}\left(1 + \frac{1}{a_i}\right) < M\exp(\ln\ln x) \le x^{1/3}\ln x.$$

Tehát a 8.4 Következmény feltételei teljesülnek $\varepsilon = 1/x$ és $C = x^{1/3}\ln x$ választással, és ezért

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_n) \le \frac{1}{Q} + \frac{1}{x}x^{2/3}(\ln x)^2 = \frac{1}{Q} + x^{-1/3}(\ln x)^2.$$

Az első tag becsléséhez

$$Q = \sum_{K\in\mathcal{A}}\frac{a_K}{b_K} = \sum_{K\in\mathcal{A}}\prod_{i\in K}\frac{a_i}{1-a_i} = \sum_{K\in\mathcal{A}}\prod_{i\in K}(a_i + a_i^2 + \ldots) = \sum_{K\in\mathcal{A}}\prod_{i\in K}(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \ldots).$$

Az utóbbi szorzatot kifejtve, $\frac{1}{k}$ alakú tagokat kapunk, és biztosan megkapunk minden olyan tagot, melyben $k \le M$. Így

$$Q \ge \sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k} > \frac{1}{3}\ln x.$$

Így

$$\frac{1}{Q} + x^{-1/3}(\ln x)^2 \le \frac{3}{\ln x} + x^{-1/3}(\ln x)^2 \le \frac{3 + o(1)}{\ln x}.$$

Ebből (18) alapján

$$\pi(x) \leq \frac{(3+o(1))x}{\ln x} + O(\sqrt{x}) = \frac{3+o(1)x}{\ln x}.$$

$\square$

8.6 MEGJEGYZÉS 1. Gondosabb számolással a 4-es konstans $2+o(1)$-re csökkenthető. A Selberg-szitát használva a pontos $1+o(1)$ is bizonyítható, de az sokkal bonyolultabban.

2. A $\pi(x) = O(x/\ln x)$ becslés a fentinél egyszerűbb elemi eszközökkel is bizonyítható. A Selberg-szita azonban más irányú általánosításokhoz is használható, például a fenti bizonyításhoz hasonlóan levezethető a következő tétel.

8.7 KÖVETKEZMÉNY *Legyen $0 < l < k$, és legyen x a k-hoz képest elég nagy szám. Ekkor az $l, k+l, \ldots, k(x-1)+l$ számtani sorozatban előforduló prímek száma nem nagyobb, mint*

$$3 \cdot \frac{k}{\varphi(k)} \cdot \frac{x}{\log x}.$$

9 Közelítő leszámlálás, mintavétel és Markov-láncok

9.1 Teljes párosítások száma

Legyen $\Phi(G)$ a G gráf teljes párosításainak száma. Ennek pontos kiszámítása NP-nehéz (sőt #P-teljes). Ha tudunk egy véletlen teljes párosítást generálni, (közelítőleg) egyenletes eloszlásból, akkor ebből meg tudjuk mondani, hogy a pársítások hányad része tartalmaz egy adott élt, vagyis, hogy az élt elhagyva, milyen tényezővel csökken a teljes párosítások száma. Igy rekurzíve meg tudjuk becsülni a teljes párosítások számát.

9.2 Lineáris kiterjesztések száma

Legyen $P = (V, \leq)$ egy paricálisan rendezett véges halmaz, és legyen $\eta(P)$ a P parciális rendezés teljes rendeyéssé való kiterjesztéseinek száma. Ennek pontos kiszámítása megint csak NP-nehéz. Ha tudunk egy véletlen kiterjesztést generálni (közelítőleg) egyenletes eloszlás szerint, akkor ebből meg tudjuk mondani, hogy a kiterjesztések hányad része rendez egy eredetileg nem összehasonlítható $x, y \in V$ párt egyik vagy másik sorrendben, vagyis, hogy mondjuk az $x < y$ relációt (és ennekminden következményét) a rendezéshez hozzávéve, milyen tényezővel csökken a kiterjesztések száma. Igy rekurzíve meg tudjuk becsülni a kiterjesztések számát.

9.3 Szinezések száma

Legyen $p(G, k)$ a G gráf k színnel való szinezéseinek száma ($k \in \mathbb{Z}_+$). Ennek pontos kiszámítása NP-nehéz. Ha egy élt elhagyva a maradék gráfhoz tudunk egy véletlen k-szinezést generálni (közelítőleg) egyenletes eloszlás szerint, akkor ebből meg tudjuk mondani, hogy a szinezések hányad része szinezi egyformán az elhagyott él végpontjait, vagyis, hogy az élt elhagyva milyen tényezővel nő a k-szinezések száma. Igy rekurzíve meg tudjuk becsülni a k-szinezések számát.

Itt fel fogjuk tenni, hogy $k > 2D$, ahol D a maximális fok. Így a szinezések száma $(k/2)^n$ és k^n között van.

10 Bolyongás gráfokon

Átmeneti mátrix: $M = (p_{ij})$, ahol (irányítatlan gráfon való) bolyongás esetén $p_{ij} = 1/d_i$. Ha $(v^0, v^1, \dots)$ egy bolyongás, akkor

$$\mathsf{P}(v_{t+1} = j \mid v_t = j) = \mathsf{P}(v_{t+1} = j \mid v_t = j, v_{t-1}, \dots) = M_{ij}.$$

Nyilván $M\mathbf{1} = \mathbf{1}$, tehát $\mathbf{1}$ M-nek jobboldali sajátvektora, a hozzátartozó sajátérték 1. Az 1-hez tartozó másik sajátvektor a *stacionárius eloszlás*: $M^{\mathsf{T}}\pi = \pi$. A Peron-Frobenius tétel szerint $\pi > 0$. Bolyongás esetén $\pi_i = \frac{d_i}{2m}$. Legyen $\pi_0 = \min\{\pi_i : \ i \in V\}$.

Egy Markov lánc *reverzibilis*, ha $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ minden i, j csúcspárra. Irányítatlan gráfon való bolyongás reverzibilis. Reverzibilis Markov lánc esetén M sajátértékei valósak: $1 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Szimmetrizált átmeneti mátrix: $N = D^{1/2} M D^{-1/2}$, ahol $D = \operatorname{diag}(\pi_i)$.

Lusta bolyongás: $p_{ii} \geq 1/2$.

A bolyongással kapcsolatos sok kérdés közül csak a keveréssel (azaz a $\sigma^t \to \pi$ konvergenciasebességgel) foglalkozunk.

10.1 Sajátérték-hézag és keverés

10.1 Lemma *Bármely i csúcsból indulva, bármely $S \subseteq V$ halmazra*

$$|\mathsf{P}(v^t \in S) - \pi(S)| \leq \sqrt{\frac{\pi(S)}{\pi_i}} \max(|\lambda_2|^t, |\lambda_n|^t).$$

10.2 Megjegyzés Lusta bolyongásra M pozitív szemidefinit, tehát csak λ_2-t kell figyelembe venni.

10.3 Lemma

$$1 - \lambda_2 = \min\Big\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (x_i - x_j)^2 : \ \sum_i \pi_i x_i = 0, \sum_i \pi_i x_i^2 = 1 \Big\}$$

10.2 Csatolás és keverés

10.4 Lemma *Legyen $(v^0, v^1, \dots)$ és $(u^0, u^1, \dots)$ két (nem független!) bolyongás ugyanazon a gráfon (Markov-láncon), ahol u_0 véletlen csúcs a stacionárius eloszlásból. Ekkor bármely $S \subseteq V$ halmazra*

$$|\sigma^t(S) - \pi(S)| \leq \mathsf{P}(v^t \neq u^t).$$

10.2.1 Keverés a kockán

Legyen $(v^0, v^1, \dots)$ lusta bolyongás a d-dimenziós Q^d kockán. Megbecsülhetjük a keverési időt sajátértékekkel vagy csatolással.

10.5 ÁLLÍTÁS *A Q^d kockán $t = cn \ln n$ lépés után bármely $S \subseteq V(Q^d)$ halmazra*

$$|\sigma^t(S) - \pi(S)| \le \frac{1}{c}.$$

Nem volt előadáson, csak tájékoztatásul: mi minden lehetett volna még...

10.2.2 Véletlen színezés

Egy n csúcsú G gráf k-szinezései közül akarunk egyet véletlenszerűen kiválasztani. Legyen a gráf maximális fokszáma D. Adott α szinezéshez generálunk véletlenszerűen egy α' szinezést a következőképpen. Egyenletes eloszlás szerint kiválasztunk egy i csúcsot és egy a színt; ezt az (i, a) párt a lépés *magjának* nevezzük. Ha

$$\alpha'(j) = \begin{cases} a & \text{ha } i = j, \\ \alpha(j) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

legális szinezés, akkor legyen ez az új szinezés; ellenkező esetben legyen $\alpha' = \alpha$. Így egy reverzibilis Markov láncot (irányítatlan gráfon való bolyongást) kapunk.

Két adott α^0 és β^0 szinezésből kiindulva, konstruáljuk meg az $\alpha^0, \alpha^1, \dots$ és $\beta^0, \beta^1, \dots$ bolyongásokat úgy, hogy minden lépésben ugyanazt a véletlen magot használjuk. Ezt a csatolást *egyszerű csatolásnak* nevezzük.

10.6 TÉTEL (JERRUM) *Ha $D > 3k$, akkor két egyszerűen csatolt $\alpha^0, \alpha^1, \dots$ és $\beta^0, \beta^1, \dots$ szinezés-sorozatra*

$$\mathsf{P}(\alpha^s \ne \beta^s) \le \frac{kn^2}{s}.$$

Bizonyítás. Legyen $U^t = \{i \in V : \alpha^t(i) \ne \beta^t(i)\}$, $W^t = V \setminus U^t$ és $X^t = |U^t|$. Minden $i \in V$-re jelölje a_i az i-ből az $\{U^t, W^t\}$ partició másik oldalára menő élek számát. Ekkor

$$\mathsf{E}(X^{t+1} \mid X^t > 0) \le X^t - \frac{1}{kn}. \tag{19}$$

Valóban, legyen (i, a) a t-edik lépés magja. Ha $i \in U^t$, akkor $X^t - 1 \le X^{t+1} \le X^t$, és

$$\mathsf{P}(X^{t+1} = X^t - 1 \mid i) \ge \frac{k - 2d_i + a_i}{k}. \tag{20}$$

Ha $i \in W^t$, akkor $X^t \le X^{t+1} \le X^t + 1$, és

$$\mathsf{P}(X^{t+1} = X^t + 1 \mid i) \le \frac{2a_i}{k}. \tag{21}$$

Így

$$\mathsf{E}(X^{t+1} \mid X^t > 0) \le X^t - \sum_{i \in U^t} \frac{k - 2d_i + a_i}{kn} + \sum_{i \in W^t} \frac{2a_i}{kn}.$$

Felhasználva, hogy

$$\sum_{i\in U^t} a_i = \sum_{i\in W^t} a_i,$$

azt kapjuk, hogy

$$\mathsf{E}(X^{t+1} \mid X^t > 0) \le X^t - \sum_{i\in U^t} \frac{k-2d_i-a_i}{kn} \le X^t - \frac{1}{kn}.$$

A (19) egyenletet így is irhatjuk:

$$\mathsf{E}\Big(X^{t+1} + \frac{t+1}{kn} \mid X^t > 0\Big) \le X^t + \frac{t}{kn}, \tag{22}$$

vagyis $X^t + \frac{t}{kn}$ szupermartingál, legalábbis amíg $X^t > 0$. Legyen $T_0 = \min\{t : X^t = 0\}$, és $T = \min\{s, T_0\}$. Ekkor a szupermartingálokra vonatkozó megállási tétel szerint

$$\mathsf{E}\Big(X^T + \frac{T}{kn}\Big) \le X^0 \le n.$$

Másrészt

$$\mathsf{E}\Big(X^T + \frac{T}{kn}\Big) \ge \frac{1}{kn}\mathsf{E}(T) \ge \frac{1}{kn}\mathsf{P}(X^T > 0)s = \frac{1}{kn}\mathsf{P}(\alpha^s \ne \beta^s)s.$$

Ezt a két becslést összevetve, a tétel adódik. □

Ferde csatolásnak nevezzük a következőt. Az α^t és β^t szinezésekhez generálunk egy véletlen (i,a) magot, ezt használjuk az α^{t+1} előállítására. Ha $\alpha^t(i) \ne \beta^t(i)$, akkor az (i,a) magot használjuk β^{t+1} előállítására is. Ha $\alpha^t(i) = \beta^t(i)$, akkor legyen $S = \alpha^t(N(i)) \setminus \beta^t(N(i))$ és $T = \beta^t(N(i)) \setminus \alpha^t(N(i))$. Legyen S' és T' két olyan halmaz, melyre $S' \subseteq S$, $T' \subseteq T$, és $|S'| = |T'| = \min\{|S|, |T|\}$. Legyen $\phi : S' \to T'$ tetszőleges bijekció. Ha $a \in S'$, legyen $b = \phi(a)$; ha $a \in T'$, legyen $b = \phi^{-1}(a)$; minden egyéb esetben legyen $b = a$. A β^{t+1} előállítására használjuk az (i,b) magot.

10.7 Tétel (Jerrum) *Ha $D > 2k$, akkor két ferdén csatolt $\alpha^0, \alpha^1, \dots$ és $\beta^0, \beta^1, \dots$ szinezés-sorozatra*

$$\mathsf{P}(\alpha^t \ne \beta^t) \le \frac{kn^2}{t}.$$

A bizonyítás lényege, hogy (20) továbbra is igaz, míg (21) helyett az élesebb

$$\mathsf{P}(X^{t+1} = X^t + 1 \mid i) \le \frac{a_i}{k}$$

egyenlőtlenség áll (csak kicsit nehezebb belátni). Ebből következik, hogy (19) most is igaz, és a bizonyítás ugyanúgy fejezhető be.

10.3 Konduktancia

Egy $\emptyset \subset S \subset V$ halmaz *konduktanciája*

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{i\in S, j\notin S} \pi_i p_{ij}}{\pi(S)\pi(V\setminus S)}.$$

A Markov-lánc *konduktanciája*

$$\Phi = \min_{\emptyset\subset S\subset V} \Phi(S).$$

10.8 TÉTEL (JERRUM–SINCLAIR)

$$\frac{\Phi^2}{8} \leq 1 - \lambda_2 \leq \Phi.$$

10.9 KÖVETKEZMÉNY *Lusta bolyongásra*

$$|\mathsf{P}(v^t \in S) - \pi(S)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi_0}} e^{-t\Phi^2/8}.$$

A 10.8 tételben az alsó korlát egyszerű. A felső korlátot az alábbi alakban bizonyítjuk. Legyen $x \in \mathbb{R}^V$ olyan vektor, melyre $\sum_i \pi_i x_i = 0$. Ekkor

$$\sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (y_i - y_j)^2 \geq \frac{\Phi^2}{8} \sum_i \pi_i y_i^2.$$

10.10 LEMMA *Legyen $y \in \mathbb{R}^V$ olyan vektor, melyre $\pi\{i: \ y_i < 0\} \leq 1/2$ és $\pi\{i: \ y_i > 0\} \leq 1/2$. Ekkor*

$$\sum_{i,j} \pi_i p_{ij} |y_i - y_j| \geq \frac{\Phi}{2} \sum_i \pi_i |y_i|.$$

A konduktancia becslése leggyakrabban egy többtermékes folyam konstruálásával történik. Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, és $i, j \in V$. Legyen $\overrightarrow{E}$ a lehetséges irányított élek halmaza (tehát minden $e \in E$ él két elemnek felel meg $\overrightarrow{E}$-ban). *$i - j$-folyamnak* nevezünk egy olyan $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre $f(uv) = -f(vu)$ és minden $u \in V \setminus \{i, j\}$ csúcsra $\sum_{v:\, uv \in \overrightarrow{E}} f(uv) = 0$. Az f folyam *értéke*

$$\mathrm{val}(f) = \Big| \sum_{v:\, iv \in \overrightarrow{E}} f(iv) \Big|.$$

Többtermékes folyamnak nevezzük folyamok egy $F = (f_{ij} : i, j \in V)$ rendszerét, ahol f_{ij} egy $i - j$-folyam. Az F többtermékes folyam *terhelése* az uv élen

$$F(uv) = \sum_{i,j} |f_{ij}(uv)|.$$

Többtermékes folyamok segítségével alsó becslést adhatunk egy gráf konduktanciájára:

10.11 LEMMA *Jelölje K azt a legkisebb nemnegatív számot, melyre létezik olyan $F = (f_{ij})$ többtermékes folyam, hogy minden i, j párra*

$$\mathrm{val}(f_{ij}) = \pi_i \pi_j,$$

és minden uv élre

$$F(uv) \leq K \pi_i p_{ij}.$$

Ekkor

$$\Phi \geq \frac{1}{K}.$$

10.12 MEGJEGYZÉS Leighton és Rao egy nevezetes tétele szerint az ellenkező irányban fennáll:

$$\Phi \leq \mathrm{const} \frac{\ln n}{K}.$$

10.4 Véletlen teljes párosítás

(Jerrum-Sinclair).

10.5 Megállási szabályok

11 Véletlen gráfok növekedése

11.1 Elágazó folyamatok

Legyen $(p_0, p_1, \dots)$ valószínűségeloszlás a természetes számokon. Ez definiál egy véletlen gyökeres fát a következőképpen. A fának vannak élő és holt csúcsai. Induláskor egyetlen élő csúcsa van. Minden lépésben egy (mondjuk véletlenszerűen választott) élő csúcsa Z (élő) utódot hoz létre és meghal, ahol Z a $(p_0, p_1, \dots)$ eloszlásból választott szám. A folyamat megáll, ha nincs élő csúcs. Jelölje T a megállás idejét. Ha a folyamat nem áll meg, akkor $T = \infty$.

Legyen $q_j = \mathsf{P}(T = j)$ és $q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j$. Legyen $p(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$. Legyen $c = \mathsf{E}(Z) = p'(1)$.

11.1 Lemma (a) *Minden $|z| \le 1$ esetén $q(z) = zp(q(z))$.*

(d) *Ha $p(z)$ konvergenciasugara nagyobb, kint 1, akkor $q(z)$-é is, és ezért van olyan $\delta > 0$, hogy $q_j < e^{-\delta j}$.*

11.2 Tétel (a) *Ha $c < 1$, akkor 1 valószínűséggel a folyamat véges sok lépés után megáll, és $\mathsf{E}(T)$ véges.*

(b) *Ha $c = 1$, akkor 1 valószínűséggel a folyamat véges sok lépés után megáll, de $\mathsf{E}(T)$ végtelen.*

(c) *Ha $c > 1$, akkor pozitív valószínűséggel a folyamat végtelen sok lépésen át tart.*

11.2 A legnagyobb komponens

11.3 Tétel *A $G(n, c/n)$ gráf legnagyobb komponensének pontszáma 1-hez tartó valószínűséggel*

$$\begin{cases} O(\ln n), & \text{ha } c < 1, \\ \Theta(n), & \text{ha } c > 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen először $c < 1$. Rögzítsük egyelőre G-nek V csúcshalmazát; az éleket majd később fogjuk generálni. Vegyünk hozzá V-hez további $u_1, u_2, \dots$ csúcsokat. Legyen v tetszőleges csúcs. Indítsunk el v-től egy elágazó folyamatot a következőképpen. Ha már felépítettünk egy k csúcsú T fát, akkor tekintsük ennek egy élő csúcsát, és az ebből a $(V(G) \cup \{u_1, \dots, u_k\}) \setminus V(T)$ menő éleket. Minden ilyen élt p/n valószínűséggel tegyünk bele a fába.

Mivel egy csúcs utódainak várható száma $n(c/n) < 1$, a fa 1 valószínűséggel kihal, és várható mérete egy csak c-től függő K konstans. Továbbá a 11.2(d) tétel szerint van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\mathsf{P}(|V(T)| > j) < e^{-\delta j}.$$

Most generáljuk a $G(n, c/n)$ gráf egy példányát a következőképpen. Elhagyjuk T-ből az $u_1, u_2, \ldots$ csúcsokat, és mindazon pontpárokat, melyekről még nem döntöttünk a T konstrukciója során, c/n valószínűséggel összekötjük. Nem nehéz meggondolni, hogy ennek a gráfnak az eloszlása tényleg $G(n, c/n)$, a $V(T) \setminus \{u_1, u_2, \ldots\}$ halmazból nem lép ki él. Jelölje C_v a véletlen gráf v-t tartalmazó komponensét, akkor tehát $V(C_v) \subseteq V(T)$. (Azt sem nehéz látni, hogy majdnem mindíg egyenlőség áll.) Tehát

$$\mathsf{P}(|V(C_v)| > j) < e^{-\delta j}.$$

Legyen $k = (2 \ln n)/\delta$, akkor

$$\mathsf{P}(|V(C_v)| > k) < \frac{1}{n^2},$$

és így annak a valószínűsége, hogy van olyan v csúcs, melyre $|V(C_v)| > k$, kisebb, mint $1/n$.

A $c > 1$ eset a 11.2(c) tétel alkalmazásával hasonlóan bizonyitható, de a részletek bonyolultabbak. $\square$

12 Expanderek

13 Statisztikus fizika

14 Kvázivéletlen gráfok

15 Derandomizálás

16 Etc

16.1 Izolálás Lemma

16.1 Lemma (Mulmuley, Vazirani, Vazirani) *Súlyozzuk egy n csúcsú hipergráf csúcsait az $\{1, \ldots, N\}$ halmazból vett véletlen súlyokkal. Ekkor annak a valószínűsége, hogy a maximális élsúlyt két él is eléri, legfeljebb n/N.*

16.2 Janson egyenlőtlenség

16.3 Talagrand egyenlőtlenség

16.4 Kim–Vu egyenlőtlenség

16.5 Rödl majszolás

References

[1] N. Alon, J. Spencer: *The Probabilistic Method*, Wiley–Interscience, 2000.