Egy kis reklám

A Matematikatanárok Klubjának honlapja:
https://www.cs.elte.hu/~miertmat/progs.html

Recski András: *Síkbarajzolható gráfok, rúdszerkezetek, transzformátorok.*
https://www.youtube.com/watch?v=IY4Dzcwyf5s

Tassy Gergely: *Catalan-számok, fák Prüfer kódja*
https://www.youtube.com/watch?v=0_Lzd8WJLvE

A mai előadás korábbi változata
https://www.youtube.com/watch?v=LgR0w1lAXKI
(Hogyan mondanám el középiskolásoknak?)

Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába.*
Ingyen letölthető: http://www.interkonyv.hu/konyvek/164-Kiss-Emil

1. Szimmetriák

Háromszög-szimmetria



Rubin *Zafir* *Kalcit*

aluminium-oxid: Al_2O_3 kalcium-karbonát: $CaCO_3$



Hematit *Ametiszt* *Kvarc*

vasoxid: Fe_2O_3 szilicium-dioxid: SiO_2

Hatszög-szimmetria

Berill (berillium–aluminium-szilikát): $Be_3Al_2(SiO_3)_6$
Egy szimmetriatengely körüli 60°-os elforgatás.


Vörös berill


Smaragd


Akvamarin

Kocka–oktaéder-szimmetria

Összesen 48 szimmetria. Hogyan számoljuk meg őket?


Galenit
ólom-szulfid: PbS


Gyémánt
szén: C


Fluorit
kalcium-fluorid: CaF_2

A szimmetria mint permutáció

Egy négyzet, kocka szimmetriái a tér azon egybevágóságai, amelyek az egész alakzatot, mint halmazt önmagukba viszik. Például ilyen egy négyzet középpontja körüli 90 fokos forgatás. Nyilván csúcs képe szimmetriánál csúcs lesz. Elég a csúcsok képeit ismerni, az meghatározza a transzformációt.

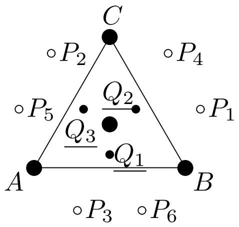
Legyen X (rendszerint véges) halmaz (pl. egy kocka csúcsai). Az X halmazt önmagára képező kölcsönösen egyértelmű függvényeket az X halmaz *permutációinak* nevezük. Ezek a kompozíció (egymás után alkalmazás) műveletére nézve az S_X *szimmetrikus csoportot* alkotják.

A négyzet szimmetriái: négy forgatás és négy tükrözés. Hogyan lehet a szimmetriákat általában megszámolni?

2. A szimmetriák száma

Pálya és stabilizátor

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriái: három forgatás ($k \cdot 120°$), három tükrözés. Alkalmazzuk egy P_1 pontra az összes szimmetriát.



P_1 *pályája* hatelemű.

$\underline{Q_1}$ az AB felező merőlegesén van, *pályája* háromelemű.

A középpont *pályája* egyelemű.

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
$\underline{Q_1}$-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).
A középpontot 6 transzformáció hagyja fixen.

(Pálya elemszáma) $\times$ (fixáló trafók száma) $=$ szimmetriák száma

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen G az X véges halmaz permutációinak olyan összessége, amely bármely két elemének kompozícióját (egymás utánját) is tartalmazza (azaz részcsoport).

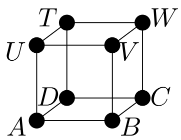
Az $A \in X$ pont *pályáját* úgy kapjuk, hogy az összes G-beli permutációt alkalmazzuk A-ra.

Az $A \in X$ pont *stabilizátora* azokból a G-beli permutációkból áll, amelyek A-t *fixálják*, azaz önmagába képzik.

Pálya–stabilizátor-tétel

Ha egy pont pályájának és stabilizátorának elemszámát összeszorozzuk, akkor a G elemszámát kapjuk.

A kocka szimmetriáinak a száma



$ABCDUVWT$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel. Minden csúcs is a szomszédaiba, így minden csúcs minden csúcsba.
Tehát az A csúcs pályája *nyolcelemű*: $\{A, B, C, D, U, V, W, T\}$.
Legyen H az A csúcs stabilizátora G-ben. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, U\}$. Ezeket meg is kapjuk AW körüli forgatással ($\pm 120°$). Ezért H-nál a B pályája *háromelemű*.
Legyen L a B stabilizátora H-ban, akkor $|H| = 3|L|$. L-nél C pályája a *kételemű* $\{C, V\}$. Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz.
Így $|G| = 8|H| = 8 \cdot 3|L| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$.

3. Lényegesen különböző megoldások

Egy általános iskolai versenyfeladat

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.
Legyen G a négy forgatásból álló csoport, ez permutálja a 36 megoldást. Két megoldás akkor vihető forgatással egymásba, ha egy pályán vannak. Ezért a második kérdés a pályák száma!

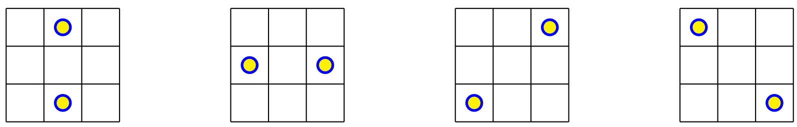
Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma
A pályák száma a szimmetriák *fixpontjainak átlagos száma.*

Szimmetrák bármely kompozícióra zárt halmazát (azaz csoportját) tekinthetjük, ezért a harmadik kérdésre is választ kapunk.

A feladat megoldása

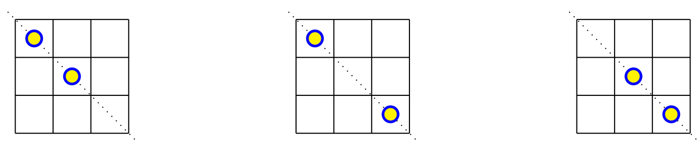
A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt, ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük?

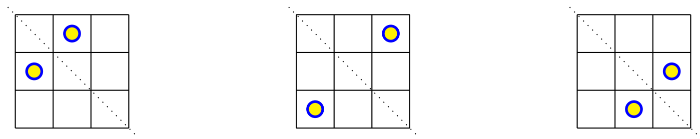
Ki kell számolnunk a fixpontok átlagos számát.
Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.
A 180°-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai. Ezek száma $(9 - 1)/2 = 4$.
Egyik 90°-os forgatásnak sincs fixpontja a 36 között (ehhez 1, vagy legalább 4 mezőt kellene választani a feladatban). Így a pályák száma $(36+4+2\cdot 0)/4 = 10$.



A forgatás és tükrözés esete

Ha tükrözést is megengedünk, akkor nyolc szimmetria van. Az identitás, illetve a forgatások fixpontjainak száma ugyanaz, mint az előző esetben. Mind a négy tengelyes tükrözés esetében hat fixpont van, ebből három olyan, ahol a kiválasztott mezők a tengelyen vannak. Az eredmény $(36+4+2\cdot 0+4\cdot 6)/8 = 8$.





Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig? Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$
(123)	8 permutáció	4 gráf fixpont	$32 = 8 \cdot 4$
(1234)	6 permutáció	4 gráf fixpont	$24 = 6 \cdot 4$
(12)	6 permutáció	16 gráf fixpont	$96 = 6 \cdot 16$
(12)(34)	3 permutáció	16 gráf fixpont	$48 = 3 \cdot 16$
Összesen:	24 permutáció		$264 = 24 \cdot 11$

Tehát 11 darab nemizomorf négycsúcsú gráf van.

Az (123) permutáció ($1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ és $4 \mapsto 4$) fixpont-gráfjai:

4. Két bizonyítás

A pálya-stabilizátor tétel bizonyítása

Ha $A \in X$ a G egy elemével átvihető $B \in X$-be, akkor *ugyanannyi* elem viszi A-et B-be, mint A-t A-ba.

Bizonyítás
Ha $h(A) = B$ (h rögzített), akkor minden $g \in G$ esetén

$$g(A) = B \iff h^{-1}g(A) = A \text{ és } k(A) = A \iff hk(A) = B.$$

A $g \mapsto h^{-1}g$ és $hk \leftarrow\!\shortmid k$ megfeleltetések egymás inverzei a (G-beli) $A \mapsto B$, illetve $A \mapsto A$ permutációk között. Utóbbiak az A pont G-beli stabilizátorát alkotják. $\square$

Az előzőek szerint az A pályájának minden B elemére teljesül, hogy annyi G-beli permutáció viszi A-et B-be, ahány eleme A stabilizátorának van G-ben. Így G elemszáma a pálya és a stabilizátor elemszámának szorzata.

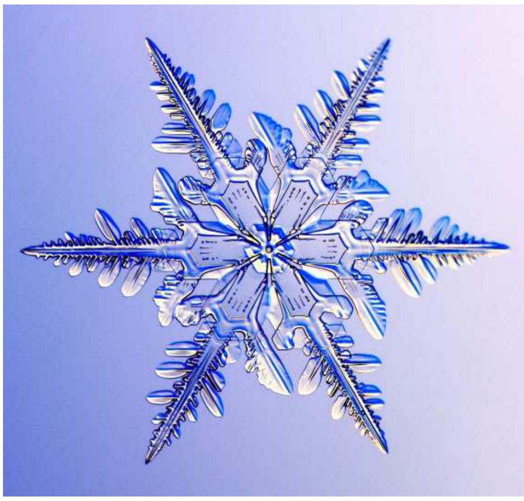
A Burnside-lemma bizonyítása

Legyenek G pályái az X halmazon $O_1, \ldots, O_k$. (Ezek páronként nem metszik egymást és lefedik X-et.) Kétféleképpen megszámoljuk azokat a (g, A) párokat, ahol $g(A) = A$ (és $g \in G$, $A \in X$). A számuk legyen N.

Rögzített A mellett ez A stabilizátorának elemszáma. A pálya-stabilizátor tétel miatt a $|G|/|O_i|$ számokat kell összeadni, a $|G|/|O_i|$-t annyiszor, ahány eleme O_i-nek van. Ezért $N = k|G|$ (ahol k a pályák száma).

Rögzített g mellett g fixpontjainak számát kapjuk. Tehát N a fixpontok számának összege is egyúttal. A G elemszámával osztva az állítást kapjuk: a fixpontok számának átlaga a pályák száma. □

Hópelyhek



Hópelyhek

Határozzuk meg az alábbi hópelyhek szimmetriacsoportját.