1. Egy szép reggel a hét törpe morcosan ébred. Egyenként vonulnak be a reggeliző asztalhoz, ami egységnyi hosszú. Amikor a k-adik törpe lép be, úgy ül le az asztalhoz, hogy a távolsága minden más törpétől legalább $1/k$ legyen. Miután leült, nem mozdul többet az asztaltól. Bizonyítsuk be, hogy akárhogy ülnek le a törpék, legkésőbb az utolsó nem fog tudni leülni. (A törpék az asztal ugyanazon oldalára ülnek.)

Megoldás

Tegyük fel, hogy mind a hét törpe le tudott ülni az asztal mellé, és a legbaloldalt ülő törpe t_1-ediknek ült le, a mellette ülő t_2-ediknek, $\ldots$, a legjobboldalt ülő törpe t_7-ediknek ült le. Nyilván $\{t_1, \ldots, t_7\} = \{1, \ldots, 7\}$.

Az ülésre vonatkozó feltétel miatt az asztalnál az i-edik, illetve $i+1$-edik helyen ülő törpe közötti távolság legalább

$$\frac{1}{\max(t_i, t_{i+1})}$$

(2 pont).

Emiatt a első, illetve a hetedik törpe közötti távolság az asztalnál legalább

$$\frac{1}{\max(t_1, t_2)} + \frac{1}{\max(t_2, t_3)} + \cdots + \frac{1}{\max(t_6, t_7)}.$$

(1 pont)

Mivel $\{t_1, \ldots, t_7\} = \{1, \ldots, 7\}$, ezért az összegben szereplő törtek közül mindegyik eleme az

$$\left\{\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{7}\right\}$$

halmaznak. A $t_1, \ldots, t_7$ számok páronként különbözőek, ezért tetszőleges $i < j \in \{1, \ldots, 6\}$ számokra teljesül, hogy ha

$$\frac{1}{\max(t_i, t_{i+1})} = \frac{1}{\max(t_j, t_{j+1})},$$

akkor $i + 1 = j$. (2 pont)

Emiatt a fenti hat tagú összegben mindegyik tag legfeljebb egy másikkal egyenlő, és így az összeg legalább

$$2 \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right) = \frac{107}{105} > 1.$$

(1 pont)

Emiatt az első és a hetedik törpe közötti távolság nagyobb mint 1, ami ellentmond annak, hogy az asztal egységnyi hosszú. (1 pont)

Tehát valóban nem tud leülni a hét törpe az asztalhoz.

Megj.1. Esetekre bontással is meg lehetett közelíteni a feladatot, t.i. aszerint hogy milyen sorrendben ülhetnek le az asztal mentén egymás mellé a sorban érkező törpék. A körülményességen túl annak indoklása hogy szisztematikusan minden esetet megnéztünk, és nem nagyoltuk el egyik indoklását sem, általában nehézséget okozott.

Megj.2. Sokan észrevették, hogy a 'főszereplők' valahogy az $1/5, 1/6, 1/7$ törtek lesznek, és ezek összege adja ki az ellentmondást. Ez mindenképpen pontot ért, azonban ennek precíz matematikai levezetése nélkül jellemzően inkább a 0+, semmint a 7− pontszám-régióba került az értékelése

2. Legyen n egy természetes szám. Tegyük fel, hogy 2017 darab olyan természetes számokból álló (a, b) rendezett pár van, melyre $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n}$. Bizonyítsuk be, hogy n négyzetszám.

1. Megoldás: Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát abn-nel, ekkor $bn + an = ab$ adódik. Majd adjunk hozzá mindkét oldalhoz $n^2 - bn - an$-et, és a szorzattá alakítás után

$$(a - n)(b - n) = n^2 \tag{1}$$

egyenletet kapjuk.

(2 pont)

Az eredeti reciprokegyenletből látszik, hogy $a, b > n$. Ekkor $a - n > 0$ osztja n^2-et, és n^2 tetszőleges d pozitív osztójára $(d + n, n^2/d + n)$ rendezett pár megoldása az egyenletnek.

(1 pont)

Innen adódik, hogy az (a, b) megoldások és n^2 (pozitív) osztópárjai között bijekció létesíthető.

(2 pont)

Tehát n^2 osztóinak száma 2017, viszont 2017 prím, így $n^2 = p^{2016}$ valamilyen p prímre, hiszen az osztók száma a prímfelbontásbeli prímek kitevőinél 1-gyel nagyobb számok szorzata.

(1 pont)

Innen pedig $n = p^{1008}$ adódik, tehát n négyzetszám.

(1 pont)

2. megoldás: Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát nab-vel. Ekkor

$$bn + an = ab \tag{2}$$

Legyen $(a, b) = d$, továbbá $a = dx$, és $b = dy$. Ezt behelyetesítve és d-vel leegyszerűsítve

$$yn + xn = dxy \tag{3}$$

x osztja yn-et és dxy-t, így osztja a harmadik tagot, yn-et. De $(x, y) = 1$, így $x|n$. Hasonlóan $y|n$. Tehát az n szám

$$n = xym$$

alakban írható. Ezt behelyettesítve és xy-nal leosztva kapjuk, hogy

$$(y + x)m = d \tag{4}$$

(2 pont)

Tehát az (2) egyenlet megoldásait n olyan 3 tényezős szorzattá bontásai adják, ahol az első két tényező relatív prím, és a tényezők sorrendje számít, azaz bijekció létesíthető (2) megoldásai és az olyan (x, y, m) hármasok között, melyekre $xym = n$ és $(x, y) = 1$.

(2 pont)

A következőkben indukcióval bizonyítjuk, hogy $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ esetén az ilyen szorzattá bontások száma $T(n) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)...(2\alpha_k + 1)$. x és y egyértelműen meghatározza m-et, ezért elég x-et és y-t megadni.

Ha $n = p^\alpha$, akkor $x = 1$ esetén $y|n$ tetszőleges, így $p + 1$ megfelelő hármas van. Ha $x \neq 1$, akkor $y = 1$, tehát p ilyen hármas van. Ez összesen $2p + 1$.

Ha $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, legyen $n' = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$. (x', y', m') tetszőleges hármas, melyre, $x'y'm' = n'$, és $(x', y') = 1$. Megszámoljuk az összes olyan (x, y, z) hármast, amire $(x/x')|p_k^{\alpha_k}$, $(y/y')|p_k^{\alpha_k}$, $(m/m')|p_k^{\alpha_k}$, továbbá $xym = n$ és $(x, y) = 1$. Könnyen látszik, hogy ha végigmegyünk az összes (x', y', m') hármason, akkor megkapjuk az összes (x, y, m) hármast is, melyre $xym = n$ és $(x, y) = 1$.

$x = x'$ esetén $\alpha_k + 1$ olyan y van, ami előáll $y'p_k^r$ alakban valamilyen $1 \leq r \leq \alpha_k$ egészre. Ha $x = x'p_k^r$, valamilyen $1 \leq r \leq \alpha_k$-ra, akkor pedig $y = y'$, ilyenből α_k van. Tehát adott (x', y', m')-höz $2\alpha_k + 1$ megfelelő (x, y, m) hármas van.

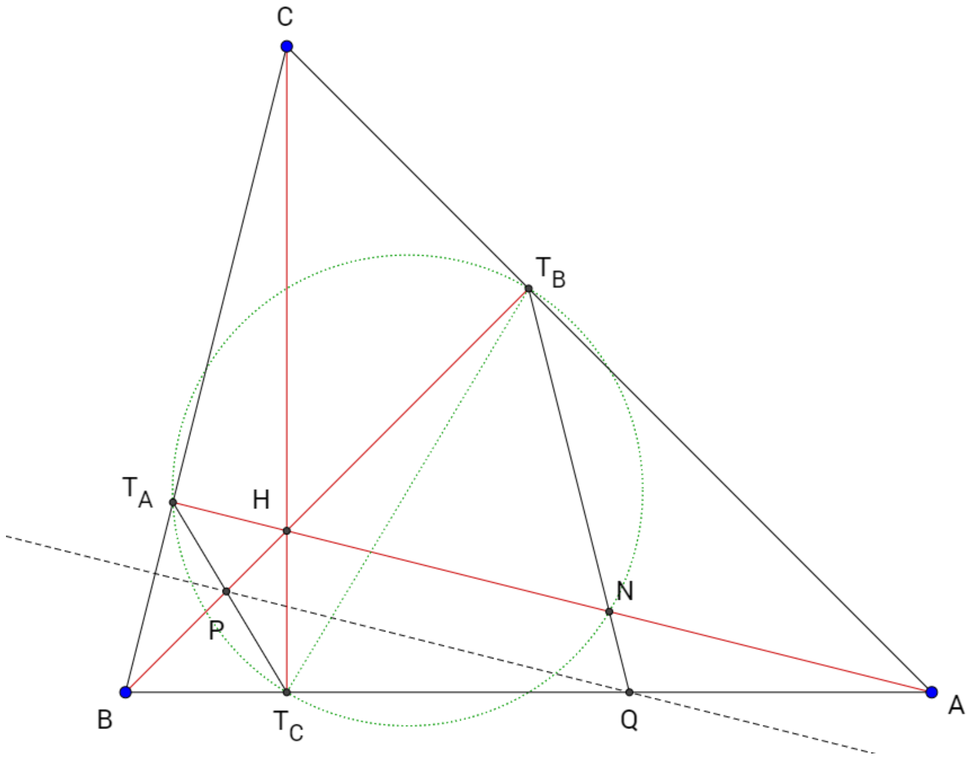
Így tehát $T(n) = T(n')(2\alpha_k + 1) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)...(2\alpha_{k-1} + 1)(2\alpha_k + 1)$ megfelelő hármas van.

(2 pont)

Tehát $T(n) = 2017$, de mivel 2017 prím, így n-nek csak egy osztója van. Így $n = p^{1008}$-on, ami négyzetszám.

(1 pont)

3. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melynek magasságpontja H, továbbá a T_A, T_B, T_C pontok az A, B, C pontokból induló magasságvonalak talppontjai. Legyen P pont a T_AT_C egyenes metszéspontja a B-ből induló magasságvonallal, míg Q pont legyen az AB egyenes metszéspontja a P-n átmenő BC-re merőleges egyenessel. Igazoljuk, hogy ha T_BQ és AT_A metszéspontja N, akkor N felezi az AH szakaszt!



1. Megoldás: *(Minden megoldásban a C-nél levő szöget γ-nak fogjuk nevezni.)*

Mivel az AT_CHT_B egy húrnégyszög, így felhasználva PQ és AT_A párhuzamosságát kapjuk, hogy $T_CQP\sphericalangle = T_CAH\sphericalangle = T_CT_BH\sphericalangle = T_CT_BP\sphericalangle$, ahonnan adódik, hogy QT_CPT_B is húrnégyszög.

(2 pont)

Az AC szakaszból a T_C és T_A pontok egyaránt derékszögben látszódnak, ezért az AT_AT_CC is egy húrnégyszög,

(1 pont)

így $QT_CP\sphericalangle = AT_CT_A\sphericalangle = 180° - \gamma$, ahonnan a QT_CPT_B húrnégyszögsége miatt adódik, hogy $QT_BP\sphericalangle = \gamma$.

(1 pont)

Ezután viszont megállapítható, hogy az AT_BN háromszög egyenlőszárú, ugyanis

$$T_BAN\sphericalangle = CAT_A\sphericalangle = 90° - \gamma = AT_BH\sphericalangle - QT_BP\sphericalangle = AT_BN\sphericalangle$$

(1 pont)

Node T_B rajta van az AH Thalesz-körén és N az AH olyan pontja, amire $NA = NT_B$ teljesül és ezek együtt csakis akkor teljesülhetnek, ha N a Thalesz-kör középpontja, tehát felezi az AH szakaszt.

(2 pont)

Diszkusszió: Mivel ABC hegyesszögű háromszög, ezért minden pont teljesen a háromszögön belül fog elhelyezkedni.

2. Megoldás: A T_AAC háromszög és a T_BAH háromszögek hasonlóságából következik, hogy $T_BHA\sphericalangle = \gamma$, és így a PQ, valamint az AT_A egyenesek párhuzamosságából adódik, hogy $T_BPQ\sphericalangle = \gamma$.

(1 pont)

Mivel a T_BHT_CA egy húrnégyszög, így $T_BT_CQ\sphericalangle = T_BT_CA\sphericalangle = T_BHA\sphericalangle = \gamma$, tehát a T_BPT_CQ is egy húrnégyszög.

(2 pont)

Most pedig megmutatjuk, hogy az N pont is rajta van a talppontok köré írt körön (ami nem más, mint a Feuerbach-kör). Igazoljuk hát, hogy a $T_AT_CNT_B$ is egy húrnégyszög:

$$T_AT_CT_B\sphericalangle = PT_CT_B\sphericalangle = PQT_B\sphericalangle = T_ANT_B\sphericalangle$$

(2 pont)

Ugyanakkor ismeretes, hogy a Feuerbach-kör a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszokat a felezőpontjukban metszi, ahonnan adódik, hogy N köteles az AH szakasz felezőpontjának lennie.

(2 pont)

Diszkusszió: Mivel ABC hegyesszögű háromszög, ezért minden pont teljesen a háromszögön belül fog elhelyezkedni.

Töredékpontok: Önmagában hasonló háromszögek, illetőleg (magasságpont+két talppontos) húrnégyszögek létezésének észrevételeért még nem jár pont.

(0 pont)

Ugyanakkor a diszkusszió hiánya járjon pontlevonással, ha az ábrán lényegi helyzetben használja ellenőrzés nélkül

(-1 pont)

A megoldásokban igazolt két nemtriviális négyszög húrnégyszögségének megsejtéséért is adható pont.

(1 pont)

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c, d pozitív számokra $abcd = 1$ teljesül, akkor fennáll az

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+d)} + \frac{1}{d(1+a)} \geq 2$$

egyenlőtlenség.

Megoldás: Mivel $a, b, c, d > 0$ és $abcd = 1$, megadhatók olyan x, y, z, w pozitív számok, melyekre

$$a = \frac{y}{x}, \quad b = \frac{z}{y}, \quad c = \frac{w}{z}, \quad d = \frac{x}{w}$$

teljesül. Élhetünk például a következő választással: $x = 1,\ y = a,\ z = ab,\ w = abc = \frac{1}{d}$.

(1 pont)

(Ennek a helyettesítésnek az a célja, hogy a vizsgált kifejezést homogénné tegyük. A homogén alakra hozott egyenlőtlenségeket általában könnyebb kezelni. Hasonló helyettesítést mindig bevethetünk, ha szorzatfeltétel adott a változókra.) Elvégezve a helyettesítést, a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő lesz:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+w} + \frac{z}{w+x} + \frac{w}{x+y} \geq 2. \tag{1}$$

(1 pont)

Innen két lehetséges megoldás mutatunk.

1. módszer: Írjuk fel a Cauchy-egyenlőtlenséget az alábbi vektorokra:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}}, \sqrt{\frac{y}{z+w}}, \sqrt{\frac{z}{w+x}}, \sqrt{\frac{w}{x+y}}\right), \left(\sqrt{x(y+z)},\ \sqrt{y(z+w)},\ \sqrt{z(w+x)},\ \sqrt{w(x+y)}\right).$$

$$\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+w} + \frac{z}{w+x} + \frac{w}{x+y}\right)(x(y+z) + y(z+w) + z(w+x) + w(x+y)) \geq (x+y+z+w)^2$$

(3 pont)

Elég lenne tehát azt belátni, hogy

$$(x+y+z+w)^2 \geq 2\left(x(y+z) + y(z+w) + z(w+x) + w(x+y)\right).$$

Kiszorzás után a fenti egyenlőtlenség a következőre redukálódik:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 &\geq 2xz + 2yw \\ (x-z)^2 + (y-w)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ami pedig nyilvánvalóan igaz. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

(2 pont)

2. módszer: Hozzuk közös nevezőre (1) 1. és 3. illetve 2. és 4. tagját, majd alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget a nevezőkre.

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+w}+\frac{z}{w+x}+\frac{w}{x+y}=\frac{x(w+x)+z(y+z)}{(y+z)(w+x)}+\frac{y(x+y)+w(z+w)}{(z+w)(x+y)}\geq$$

$$\frac{xw+x^2+yz+z^2+xy+y^2+zw+w^2}{\frac{1}{4}(x+y+z+w)^2}$$

(3 pont)

Elég lenne tehát azt belátni, hogy

$$2(x^2+y^2+z^2+w^2+xy+yz+zw+wx)\geq(x+y+z+w)^2. \tag{2}$$

Kiszorzás után a fenti egyenlőtlenség (szintén) a következőre redukálódik:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+w^2 &\geq 2xz+2yw \\ (x-z)^2+(y-w)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ami pedig nyilvánvalóan igaz. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

(2 pont)

1. Megjegyzés: Az 1. megoldásban a Cauchy-egyenlőtlenség helyett hivatkozhatunk a Titu-lemmára is. Ha $q_1,\dots,q_n>0$ és $p_1,\dots,p_n\in\mathbb{R}$, akkor

$$\frac{p_1^2}{q_1}+\frac{p_2^2}{q_2}+\cdots+\frac{p_n^2}{q_n}\geq\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)^2}{q_1+q_2+\cdots+q_n}.$$

Ezt a lemmát a Cauchy-egyenlőtlenségből lehet bebizonyítani, így a megoldás lényegében ugyanaz. Bővítsük a törteket (1)-ban, majd alkalmazzuk a Titu-lemmát:

$$\frac{x^2}{x(y+z)}+\frac{y^2}{y(z+w)}+\frac{z^2}{z(w+x)}+\frac{w^2}{w(x+y)}\geq\frac{(x+y+z+w)^2}{x(y+z)+y(z+w)+z(w+x)+w(x+y)}$$

Egy másik lehetőség a súlyozott számtani és harmonikus közép közti egyenlőtlenség használata az $\frac{1}{y+z},\frac{1}{z+w},\frac{1}{w+x},\frac{1}{x+y}$ számokra az x,y,z,w súlyokkal.

2. Megjegyzés: A 2. megoldást úgy is befejezhetjük, ha észrevesszük, hogy (2) átalakítható így:

$$\begin{aligned} (x+y)^2+(y+z)^2+(z+w)^2+(w+x)^2 &\geq \frac{1}{4}\left((x+y)+(y+z)+(z+w)+(w+x)\right)^2 \\ \sqrt{\frac{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+w)^2+(w+x)^2}{4}} &\geq \frac{(x+y)+(y+z)+(z+w)+(w+x)}{4}. \end{aligned}$$

Ez pedig pont a számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenség az $x+y,\ y+z,\ z+w,\ w+x$ számokra.

3. Megjegyzés: Mindkét megoldásból következik, hogy az egyenlőség szükséges feltétele $x = z$ és $y = w$. Az eredeti változókra ez azt jelenti, hogy $a = c = \frac{1}{b} = \frac{1}{d}$. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez a feltétel elégséges is.

4. Megjegyzés: Joggal merül fel a kérdés, hogy általánosítható-e az (1) egyenlőtlenség (és általa az eredeti feladat) 4 helyett n változóra. Azaz igaz-e

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}$$

ahol $n \geq 3$, $x_1, \dots x_n > 0$ és $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ jelölés szerint. Ez a probléma Shapiro-egyenlőtlenség néven ismert, és meglepő módon csak akkor igaz, ha $n \leq 12$ és páros vagy $n \leq 23$ és páratlan. Ha viszont az alsó korlátot a kicsit kisebb $0.494 \cdot n$-re cseréljük, az egyenlőtlenség minden n-re igaz lesz.

5. Megjegyzés: Többen az

$$a = \frac{y}{x}, \quad b = \frac{z}{y}, \quad c = \frac{w}{z}, \quad d = \frac{x}{w}$$

helyett a következő alternatív helyettesítést alkalmazták:

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z}, \quad c = \frac{z}{w}, \quad d = \frac{w}{x}.$$

Ekkor a feladat a következő alakot ölti:

$$\frac{yz}{x(y+z)} + \frac{zw}{y(z+w)} + \frac{wx}{z(w+x)} + \frac{xy}{w(x+y)}.$$

Innen nehezebb befejezni a bizonyítást. (Legkönnyebb, ha rögtön visszatérünk a reciprok változókra.) Ettől függetlenül erre az átalakításra is jár a 2 pont. A tanulság az, hogy ilyen esetekben érdemes kipróbálni mindkét lehetséges helyettesítést.

6. Megjegyzés: Volt, aki a rendezési egyenlőtlenséggel próbálta megoldani a feladatot. Ha (A, B, C, D) az (a, b, c, d) egy permutációja úgy, hogy $A \leq B \leq C \leq D$. Felírva a rendezési egyenlőtlenséget az $\frac{1}{A} \geq \frac{1}{B} \geq \frac{1}{C} \geq \frac{1}{D}$ és $\frac{1}{A+1} \geq \frac{1}{B+1} \geq \frac{1}{C+1} \geq \frac{1}{D+1}$ számokra, a vizsgált kifejezésre a következő alsó korlát adható:

$$\frac{1}{A(D+1)} + \frac{1}{B(C+1)} + \frac{1}{C(B+1)} + \frac{1}{D(A+1)}.$$

Csábító lehet ezzel dolgozni az eredeti helyett, hiszen itt a változók kettes párokba osztva jelennek csak meg. Azonban ez a kifejés már lehet kisebb, mint 2! (Pl. $A = \frac{1}{81}, B = C = \frac{9}{10}, D = 100$) Így nem jár pont ezért a megoldási útért.