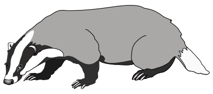

- W. G. Chinn és N. E. Steenrod. *Bevezetés a topológiába: A szakaszok, görbék, körök és körlemezek leképzésének geometriája*, Gondolat Kiadó, 1980.
- Mark de Longueville. *A Course in Topological Combinatorics*, Springer, 2013.
- Jiří Matoušek. *Using the Borsuk–Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, Springer, 2003. [**A szeminárium elsősorban ezen könyv 3.3. fejezetére épül.**]
- Jiří Matoušek. *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2010.
- Szűcs András. *Topológia*, ELTE, 2018. http://web.cs.elte.hu/~szucs/Top1-2.pdf

---

Legyenek $n \geq k$ természetes számok. A $\mathrm{KG}_{n,k} = (V, E)$ *Kneser-gráf* az a gráf, amelyre $V = \binom{[n]}{k}$ (vagyis V az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz k-elemű részhalmazaiból áll), valamint $\{u, v\} \in E \iff u \cap v = \emptyset$.

A fenti gráf kromatikus számának kérdése 1955-ből Martin Kneser német matematikustól származik, a probléma megoldása – a *topologikus módszer* egyik első alkalmazása – pedig Lovász Lászlótól, 1978-ból.

0. Ismerjünk rá a $\mathrm{KG}_{n,1}$, $\mathrm{KG}_{2k,k}$ és $\mathrm{KG}_{5,2}$ gráfokra! Határozzuk meg a kromatikus számukat!

1. $\chi(\mathrm{KG}_{n,k}) \leq n - 2k + 2$. (Ezt már Kneser is tudta és úgy sejtette, hogy $\chi(\mathrm{KG}_{n,k}) = n - 2k + 2$.)

Tétel (Kneser–Lovász). $\chi(\mathrm{KG}_{n,k}) = n - 2k + 2$. *Bizonyítás*: A Borsuk–Ulam-tétel segítségével!

Jelölés: $\mathbb{S}^d = \{x = (x_1, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : \sum_{i=1}^{d+1} x_i^2 = 1\}$ a *d-dimenziós egységgömb*.

Tétel (Borsuk–Ulam, 1933). Ha $f\colon \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$ folytonos, akkor létezik $x \in \mathbb{S}^d$, amelyre $f(x) = f(-x)$.

2. Bizonyítsuk be a Borsuk–Ulam-tételt a $d = 1$ esetben! ($d = 2$ eset: ld. a Szűcs-jegyzet 1. fejezetét.)

Tétel (Ljuszternik–Schnirelman, 1930). Legyenek $A_1, \ldots, A_{d+1} \subseteq \mathbb{S}^d$ olyan zárt halmazok, amelyek együttesen lefedik $\mathbb{S}^d$-t. Ekkor létezikA_i-re $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$ teljesül.

3. Bizonyítsuk be a Ljuszternik–Schnirelman-tételt a Borsuk–Ulam-tételből! (Valójában ekvivalensek.)
Segítség: Tekintsük az $f\colon \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto (\mathrm{dist}(x, A_1), \ldots, \mathrm{dist}(x, A_d))$ függvényt.

Észrevétel (Greene, 2002). Az A_i halmazok közül néhány lehet nyílt is.

4. Bizonyítsuk be közösen (Joshua Greene nyomán) a Kneser–Lovász-tételt! [Matoušek, 2003; p. 60]

Egy $G = (V, E)$ gráf *frakcionális kromatikus száma* az a legkisebb $\chi_f(G) = a/b$ szám, amelyre teljesül, hogy V lefedhető a független halmazzal oly módon, hogy mindegyik csúcsot b halmaz fedi.

5. a) Jelölje C_ℓ az ℓ-hosszú kört. $\chi_f(C_\ell) = ?$ **b)** Határozzuk meg $\chi_f(\mathrm{KG}_{n,k})$ értékét!

c) Mutassuk meg, hogy $\mathrm{KG}_{n,k}$ $(n \geq 2k + 1)$ bármely páratlan köre legalább $1 + 2\lceil \frac{k}{n-2k} \rceil$ hosszú!

d)* Mit mondhatunk a páros körök minimális hosszáról?

6. a) Legfeljebb hány csúcsa lehet $\mathrm{KG}_{n,k}$ egy feszített, teljes páros részgráfjának?

b)* És ha nem követeljük meg, hogy a részgráf feszített legyen?

Összeállította: Huszár Kristóf, PhD hallgató, IST Austria. Email: kristof.huszar@ist.ac.at