

# Kombi Problémamegoldó & Kutató Szemi

## Gráfok és szimmetriák

### Összefoglaló.

Szimmetria — automorfizmus — csoport

- **Honnan jöhet?** Pl: kódok, részhalmaz (metszési) struktúrák, algebrai struktúrák (pl. Cayley-gráfok), geometria; más szimm. gráfokból, gráftranszformációval (pl csúcs-azonosítás, 'switch')
- **Miért fontos?** Gyakorlati alkalmazás / extremálitás / kapcs más mat. tudományterületekkel / egyszerű leírhatóság
- **Izomorfia-kérdés** Szimm.-k száma, struktúrája;  $Sp(A)$ , bizonyos részgráfok száma ...

### KULCSFOGALMAK

- $k$ -regularitás; erős regularitás:  $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ; táv-regularitás
- csúcs- és éltranzitivitás
- $G$  Moore-gráf:  $d$ -regularis,  $k$ -átmérőjű, és csúcsszáma extrémális:  $|V(G)| = 1 + d \sum_{i=0}^{k-1} (d-1)^i$ . Pl:  $C_5$  kör ( $d = 2$ ); Petersen: ( $d = 3$ ), Hoffman-Singleton: ( $d = 7$ )

Pár kapcsolódó tétel és technika

- Frucht: Minden csoport valamely gráfnak szimmetriacsoportja.
- Lovász('78): A Kneser-gráfok színezési száma; topológiai módszer.
- Automorfizmus létezésének megállapítása könnyű? NP

0. Konstruálj egy kellően szimmetrikus, érdekes gráfot. Számold meg a szimmetriacsoportja elemszámát

1. Csúcs- és éltranzitivitás: következik-e az egyikből a másik? Következik-e valamelyikből Hamilton-kör léte?

2. Mennyi lehet vajon a Kneser gráfok színezési száma?  $KG(n, k)$ :  $V \sim \binom{[n]}{k}$ ,  $E$ : diszjunktság.

3. Igazoljuk, hogy egy  $SRG(n, k, \lambda, \mu)$  erősen reguláris gráfra

$$(n - k - 1)\mu = k(k - \lambda - 1).$$

4. Konstruálj olyan 16 csúcsú 6-reguláris gráfot, melyben bármely két csúcsnak pontosan két közös szomszédja van.

5. Konstruálj olyan 16 csúcsú 5-reguláris gráfot, melyben ha két csúcs össze van kötve, akkor nincs közös szomszédjuk, ha pedig nincsenek összekötve, akkor pontosan két közös szomszédja van.

6. Konstruálj olyan 35 csúcsú 18-reguláris gráfot, melyben bármely két csúcsnak pontosan 9 közös szomszédja van.

7. a) Felbontható-e  $K_{16}$  három háromszögmentes gráffá?

b) felbontható-e  $K_{10}$  három Petersen-gráffá?

c) felbontható-e  $K_{50}$  hét H-S gráffá?