Nullhelytétel és algoritmikus megközelítés

1. A tétel és környéke

Általános alakban a tétel a következőképpen fogalmazható meg, Hilbert Nullhelytételéhez (lásd Hilbert) hasonló formában:

1.1. Tétel. [Combinatorial Nullstellensatz, általános alak][1] *Legyen $\mathbb{F}$ tetszőleges test, és legyen $P = P(x_1, \ldots, x_k)$ egy k változós $\mathbb{F}$ feletti polinom. Legyenek továbbá $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $\mathbb{F}$ elemeinek nemüres halmazai, és definiáljuk segítségükkel a*

$$g_i(x_i) = \prod_{s \in A_i} (x_i - s)$$

polinomokat. Ha $P(s_1, s_2, \ldots s_k) = 0$ teljesül minden $(s_1, s_2, \ldots, s_k) \in A_1 \times \ldots \times A_k$ helyettesítésre a szorzathalmazból, akkor P a g_i polinomok által generált ideálban van, vagyis

$$P = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i,$$

ahol $h_i = h_i(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ többváltozós polinomok $\mathbb{F}$ felett. Azt is megkövetelhetjük, hogy

$$\deg(h_i) \leq \deg(P) - \deg(g_i)$$

teljesüljön.

Egyszerű és jól használható speciális esete a 1.1 Tételnek az alábbi

1.2. Következmény. *Ha az $\mathbb{F}_q$ feletti $P = P(Y_1, \ldots, Y_k)$ polinom eltűnik minden behelyettesítés esetén, akkor P felírható*

$$P(Y_1, \ldots, Y_k) = h_1(Y_1^q - Y_1) + \cdots + h_k(Y_k^q - Y_k)$$

alakban, ahol a h_i-k $Y_1, \ldots, Y_k$ változójú, legfeljebb $\deg(P) - q$ fokú polinomok.

A legismertebb változata a 1.1 Tételnek azt állítja, hogy egy $P(x_1, \ldots, x_k)$ k-változós polinom nullhelyeinek halmaza nem tartalmazhatnak nagyméretű $A_1 \times \ldots \times A_k$ szorzathalmazt, amennyiben a P polinom bizonyos monomjának együtthatója nem nulla.

1.3. Tétel. [Combinatorial Nullstellensatz, el nem tűnési változat] *Legyen $\mathbb{F}$ tetszőleges test, és legyen $P = P(x_1, \ldots, x_k)$ egy k változós $\mathbb{F}$ feletti polinom. Tegyük fel hogy létezik egy olyan $\prod_{i=1}^{k} x_i^{d_i}$ monom, melyre a $\sum_{i=1}^{k} d_i$ kitevőösszeg megegyezik P fokával, és $\prod_{i=1}^{k} x_i^{d_i}$ együtthatója P-ben nem nulla. Ekkor bármely $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{F}$ halmazok esetén, melyeknek számosságára $|A_i| > d_i$ teljesül, létezik egy $(s_1, s_2, \ldots s_k) \in \times A_i$ amelyre $P(s_1, s_2, \ldots s_k) \neq 0$.*

[1] ALON, Noga; TARSI, M. Combinatorial nullstellensatz. Combinatorics Probability and Computing, 1999, 8.1: 7-30.

1.4. Megjegyzés. *A monomra vonatkozó feltétel gyengíthető: nem kell igazából, hogy max fokú legyen, elég ha 'maximális', vagyis nincs olyan monom, aminek a kitevősorozata változónként nagyobb, vagy egyenlő.*

1.5. Tétel. [Kvantitatív Nullstellensatz][2] *Legyen $\mathbb{F}$ egy test, $P \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ pedig a test feletti többváltozós polinom, melynek foka,* $\deg(P) \leq d_1 + d_2 + \ldots + d_m$*. Tekintsünk egy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_m$ halmazrendszert $A_i \subseteq \mathbb{F}$ és $|A_i| = d_i + 1$ feltételek mellett. Ekkor a $\prod x_i^{d_i}$ P-beli monom együtthatója kifejezhető mint*

$$\sum_{z_1 \in A_1} \sum_{z_2 \in A_2} \sum_{z_m \in A_m} \frac{P(z_1, z_2, \ldots z_m)}{\phi_1'(z_1)\phi_2'(z_2)\cdots\phi_m'(z_m)},$$

ahol $\phi_i(x) = \prod_{a \in A_i}(x - a)$.

A 1.5 Tétel hatékony használatának kulcsa az, hogy az együtthatónak megfelelő bonyolult összeget leegyszerűsítjük, élve azzal a lehetőséggel, hogy az A_i halmazok megválasztásában nagy a szabadságunk. Amennyiben a vizsgált polinomunk elég szimmetriával rendelkezik, akkor elérhető, hogy az összegzésben a tagok többsége nullává váljon. Bizonyos polinomcsaládokra még az is elérhető, hogy az A_i halmazok optimális választásával mindösszesen egy tag nem tűnik el az összegből.

1.6. Megjegyzés. *Kell, hogy az A_i halmaz különböző elemeket tartalmazzon? Értelemszerűen igen - bizonyos értelemben. Ugyanakkor, ahogy a kombinatorikus nullhelytétel, és az előző kvantitatív változatban is a Lagrange interpoláció nagyon tapintható, felmerülhet, hogy a Lagrange-interpoláció változatai további variánsokhoz vezetnek. És valóban, létezik olyan változat is, ami kvázi a Hermite interpoláció szerint multihalmazokon vesz értéket, viszont akkor parciális deriváltak eltűnéséről is szól, vagyis a kvantitatív változatban ezeken felvett értékeket is összegezünk.*[3]

Alkalmazások: az additív kombinatorika, a kombinatorikus geometria, a véges geometria, a gráfelmélet (irányítások, színezések, részgráfok...), vagy az extremális halmazrendszerek elmélete, (q-analóg) algebrai azonosságok, polinomok kombinatorikája...

Módszer Áll: a P tulajdonság teljesül valamely $\times A_i$ szorzathalmaz egyes elemeire. (Vagyis a szorzathalmaz bizonyos értelemben elég tágas, metszenie kell P karakterisztikus halmazát.)

Indirekt: Ha nem teljesül, akkor a tekintsünk egy polinomot, ami leírja a nem-P-beliség megoldáshalmazát. Ha jól választunk, kicsi fokú polinom lesz[4]. Az ellentmondást az adja, hogy a mi szorzathalmazunk ($\times A_i$) egészén mégsem tűnhet el a polinom a Nullhelytétel szerint.

[2]Lasoń, Karasev-Petrov, Károlyi- Nagy- Petrov-Volkov

[3]KÓS, Géza; RÓNYAI, Lajos. Alons Nullstellensatz for multisets. Combinatorica, 2012, 32.5: 589 - 605.; KÁROLYI Gyula, NAGY Zoltán; PETROV, Fedor; VOLKOV, Vladislav. A new approach to constant term identities and Selberg-type integrals. arXiv preprint arXiv: 1312.6369, 2013.

[4]összevetve a szorzathalmazzal, koordinátánként

Előny: nem kell a struktúra ismerete. A tetszőlegesen (de elegendően nagynak) választott szorzathalmaz-hálónk mindenképp kifog nekünk egy nem-0 halat. Persze - mivel nagy a háló- megtalálni nem könnyű benne.

Hátrány: Ha a test-struktúrát nem is használjuk ki teljes egészében; de jellemzően csak $\mathbb{R}$ felett, vagy $\mathbb{F}_p$ ill $\mathbb{F}_q$ felett ad igazából eredményeket (amik nem erőltetések), pedig a kombinatorikus állítások egy részénél a prímhatvány méret önmagában irrelevánsnak tűnik.
Emellett csak egzisztenciát ad, tanút az igazságra nem.

Trükkök: Lehet a polinomot úgy kiértékelni, hogy érdektelen monomjait megváltoztatjuk. Sokszor segít, ha összeadjuk az összes kiértékelési értéket, és erről látjuk be, hogy nem nulla.

2. Hol használták?

2.1. Kombinatorikus számelmélet

Példák: Erdős -Ginzburg-Ziv, Erdős-Heilbronn és egyéb restricted sumset problémák.

EGZ: van rá jó algoritmus $O(n^2)$, és amúgy $O(n^3)$-t is egyszerűen látható, ha a Cauchy-Davenportot használjuk p tagra. Világos, hogy nem a Nullstellenatz áll ezek hátterében: bizonyos értelemben jobban ismerjük a struktúrát, mint amit a Nullstellensatz megkövetel. Jól mutatja ezt az is, hogy nem csak prímrendre igaz az állítás.

2.2. Gráfok

1. Zero-sum p-flow (Akbari[5])

2.1. Definition. *Zero-sum flow, élekhez rendelünk nemnulla számokat $\mathbb{R}$-ből, minden csúcsban megköveteljük, hogy az összeg 0 legyen. Zero-sum p-flow: vagy $\mathbb{Z}_p$-ből rendelünk nemnullákat, vagy p-nél kisebb abszolut értékű egészeket rendelünk az élekhez; és minden csúcsban megköveteljük, hogy az összeg 0 legyen.*

Hasonló a nevezetes irányított esethez, amire a Tutte-féle sejtés volnatkozik: elvágó élmentes irányított gráfban van 5-flow. (Itt a beéleken és a kiéleken van megkövetelve az összegek egyenlősége.) Seymour révén igazolt 5 helyett 6-ra.)
Akbari et al. pontos feltételt adott arra nézve, mikor létezik irányítatlan esetben 0-sum p-flow.

2.2. Tétel. *Legyen $G = (V, \{e_1, \dots, e_m\})$ -hez rendelve a következő polinom:*

$$g = \prod_{v \in V} \left(\left(\sum_{e_i \in E, v \in e_i} x_i \right)^{p-1} - 1 \right) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_m].$$

Ekkor G-hez megadható zero p-flow pontosan akkor ha

$$g \notin \left\langle x_1^{p-1} - 1, \dots, x_m^{p-1} - 1 \right\rangle.$$

[5] S. Akbari, A. Daemi, O. Hatami, A. Javanmard, A. Mehrabian, Zero-Sum Flows in Regular Graphs, Graphs and Combinatorics 26 (2010), 603 - 615.

Nota bene: G-hez $f : E \to \mathbb{Z}_p \setminus 0$ zero p-flow pontosan akkor ha $g(f(e_1), \dots f(e_m)) \neq 0$.

2.3. Sejtés (Zero-Sum Conjecture). *Ha létezik G-ben zero-sum flow, akkor létezik zero-6-flow is.*

2. Louigi-sejtés f-faktorokról

2.4. Definition. *f-faktor egy $G(V, E)$ gráfban $H \subseteq G$, ha valamely rögzített $f : V \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ esetén $d_H(v) \in f(v)$.*

Tutte 1-faktor tétele szükséges és elégséges feltételt ad arra, ha f egyelemű halmazokat rendel a csúcsokhoz, azaz előír fokszámot. Lovász tétele szükséges és elégséges feltételt ad, ha f nem túl foghíjas, azaz minden v-re az $f(v)$-beli értékek legfeljebb kettesével növekednek. Feltesszük, hogy $f(v) \subseteq [0, d_G(v)]$.

2.5. Tétel (Shirazi - Verstraete). [6] *Ha $|f(v)| > \lceil d_G(v)/2 \rceil \ \forall v$, akkor biztosan létezik f-faktor.*

Ezt a polinomot nézzük:

$$\prod_{v \in V} \prod_{c \in \overline{f(v)}} \left(\sum_{v \in e} x_e - c \right),$$

ahol $\overline{f(v)} := [0, d_G(v)] \setminus f(v)$. Állítjuk, hogy van egy minden változójában legfeljebb elsőfokú, nemnull együtthatójú monom, ami maximális fokú! Ez lényegében azon múlik, hogy G-nek van olyan irányítása, amiben minden kifok legalább $\lfloor d_G(v)/2 \rfloor$. Egy ilyen monomra alkalmazva a nullhelytételt a $\{0, 1\}^m$ szorzathalmazon, kapunk helyet ahol nem tűnik el a függvény, vagyis egy halmazt, ami éppen egy jó f-faktor lesz.

Frank András, Lau, Szabó Jácint: megy ez elemien is, amennyiben van olyan irányítása a gráfnak, amiben a befok $\rho_D(v)$ legalább annyi, mint a $\overline{f(v)}$; teljes indukcióval az élek számára. Ugyanakkor, ismeretes

2.6. Tétel (Hakimi). *$F : V \to \mathbb{N}$ adva, akkor pont akkor van G-nek $\rho_D(v) \geq F(v)$ irányítása, ha minden X halmazban a függvényértékek összege legfeljebb annyi, az X-re illeszkedő élek száma.*

2.7. Következmény. *Eszerint tehát elég, ha minden halmazon összeadjuk a $|f(v)|$értékeket, és elleőrízzük, hogy legfeljebb annyi, mint a halmazra illeszkedő élek száma!*

2. Listaszínezés, Alon-Tarsi, és az Erdős-probléma

2.8. Definition. *L-színlista egy $G(V, E)$ gráfban $L : V \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $l(v) = |L(v)|$.*

[6]SHIRAZI, Hamed; VERSTRAËTE, Jacques. A note on polynomials and f-factors of graphs. Electronic J. of Combinatorics, 2008, 15: N22.

2.9. Definition. *Adott egy irányítása G-n. Ekkor az ettől páratlan sok él-átírásnyításban különböző irányításokat páratlannak nevezzük, a párosakat párosnak.*

2.10. Tétel (Alon-Tarsi). *Adott egy G gráf és $\underline{l}$ vektor, $|V(G)|$ koordinátával. Teljesül rá, hogy a $\underline{l}$ befokszámsorozatú irányítások között a páros és páratlan irányítások száma különbözik, akkor a gráf $\underline{l}+\underline{1}$ - listaszínezhető.*

2.11. Probléma. *Adva egy 4-reguláris $3k$ csúcsú gráf, amiben van Hamilton kör, és a maradék gráf háromszögek diszjunkt uniója. Ez 3-listaszínezhető.*

Azt lehet igazolni[7], hogy az Alon-Tarsi alkalmazható $\underline{l} = \underline{2}$-vel. Ehhez elég igazolni, hogy olyan gráfunk van, ami nemcsak páros élszámú Euler-gráf, hanem $2 \pmod 4$ az Euler részgráfjai száma.

Ezzel még Brooks általánosítása is kijön.

3. Anti-Magic labelling

$a : E \to [1, m]$ bijekció úgy, hogy a csúcsokra vett összegek különbözzenek.

Eredmény- típus: ha n prímhatvány, és van benne körök faktora, akkor anti-magic a gráf.[8] Ha van nagy fok, vagy ha elég sűrű, akkor antimagic[9].

4. Részgráf problémák

2.12. Tétel (Alon-Kalai-Friedland). *Nemtriviális $0 \pmod{p^h}$ részgráf létezik, ha elegendően nagy az élszám: $|E(G)| > n(p^h - 1)$.*

No, de: Bár minden 4-reguláris gráf tartalmaz 3-regulárisat, a k-reguláris részgráf megtalálása NP-teljes![10].

2.3. Egyebek

2.13. Probléma (P. Cameron). *$AG(2, q)$ Affin sík pontjaihoz rendeljük az irányok ($q+1$ db) egy permutációját így:*

1. *minden csúcsnál legyen a permutáció fixpontmentes*
2. *ha x és y csúcs az e egyenest határozza meg, akkor az e egyenes iránya a két permutációban máshova kerüljön.*

---

[7] FLEISCHNER, Herbert; STIEBITZ, Michael. A solution to a colouring problem of P. Erdős. Discrete Mathematics, 1992, 101.1: 39-48.

[8] Hefetz

[9] Alon

[10] Chvatal, Fleischner, Sheehan, Thomassen

Nullstellensatz-szerű, de még amikor néztük, nem jött ki. $q = 2$-re nem igaz, $q = 3$-ra igaz, és sejtés szerint általában is az.

Érdekes kapcsolat: ha vesszük az affin sík incidenciagráfját, akkor ez ilyesmiről beszél: színezzük meg $q+1$ színnel az éleket jól, mégpedig úgy, hogy a színek az irányok; minden pontnak $q+1$ a foka, és minden egyenesnek q, de ott a fixpontmentesség szerint $1 - -1$ ki van tiltva.

Galvin-tétel: ezen a páros gráfon is van színezés a listákból, ha minden élen egy extra színt még hozzávennénk. De ez elhagyható-e?

kapcsolat: Balanced list-edge coloring (Frank - Fleiner[11]).

[11] FLEINER, Tamás; FRANK, András. Balanced list edge-colourings of bipartite graphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2010, 36: 837-842.