Extremális gráfelmélet - rövid áttekintés, tabló-felvázolás

1

Alapkérdésünk jellemzően: gráfelméleti struktúrákat, osztályokat vizsgálunk. Bizonyos alapfeltevések mellett *(jellemzően rögzített paraméter-értékek mellett, mint a csúcsszám)* valamely más paraméter-érték *(pl. élszám)* legnagyobb, legkisebb értéke érdekel minket (**extremális érték**), vagy a lehetséges értékei - de legalább is a nagyságrend.

Emellett további alapkérdésünk: milyen az **extremális struktúra**, vagyis azon gráfok szerkezete, amikre az extremális érték felvétetik?

Cél: Módszerekre rálátni, tételeket megismerni.

JELÖLÉS 1.1. • *K_k, P_k, C_k: k csúcsú teljes gráf; út; ill. kör.*

• *$G[n]$: a G gráf felfújt gráfja: minden G-beli csúcs helyét egy n csúcsú független halmaz veszi át, élek $G[n]$-ben azon csúcspárok között mennek, amely csúcsok ősei is össze voltak kötve G-ben.*

• *$T_{n,p}$ a p osztályú, n csúcsú Turán gráf: élek a p darab csúcsosztály között haladnak csak és kizárólag, a csúcsosztályok számossága kiegyenlített, max 1 az eltérés. $(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor, \lceil \frac{n}{p} \rceil)$. Vagyis $K_k[p] = T_{kp,p}$.*

• *$ex(n, H)$ a maximális élszám értéke az n csúcsú, H részgráfot nem tartalmazó ("H-mentes") gráfok között.*

• *$\chi(G)$ a G kromatikus száma*

Mintatételünk:

tétel 1.2 (Turán)**.** *$ex(n, K_{p+1}) = |E(T_{n,p})| \approx \binom{p}{2}(\frac{n}{p})^2 = \frac{p-1}{2p}n^2$, (ez egyben felső korlát is, nem csak approximáció!), és ha egy H-mentes gráfnak épp $|E(T_{n,p})|$ éle van, akkor izomorf ezzel a Turán gráffal.*

Különböző problémairányok:

P1. Mi helyzet, ha a Turán-tételben nem teljes gráf, hanem más H gráf a kizárt gráf? Esetleg több gráfot is kizárhatunk...

P2. $ex(n, H)$ az élszámot vizsgálja, mint paramétert (vagyis a K_2 részgráfok számát); mi a helyzet, ha pl. a $\triangle$-számot vizsgáljuk, vagy valamilyen F részgráfok számának lehetséges számát H-mentességi feltétel mellett?

P3. Stabilitás, aszimptotika. A struktúrára irányul figyelmünk: Mi a helyzet a maximális lehetséges élszám környékén? Ha kicsit kevesebb él van egy H-mentes gráfban, mint az extremális mennyiség, a struktúra mennyire térhet el? Vagy: ha kicsit több él van egy gráfban, mint $ex(n, H)$, akkor hány H részgráfot tartalmaz?

P4. Nem az összes H-mentes gráf között vizsgáljuk a kérdést, csak egy részosztályban (pl. páros gráfok...)

P5. Gráfok helyett: hipergráfokon?

Főleg P1. problémával foglalkozunk, a többire csak felvillantunk eredményeket.

tétel 1.3 (Erdős-Stone-Simonovits.)**.** *$ex(n, H)$ nagyrészt a H kromatikus számától függ!*

$$ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}\right)\binom{n}{2} + o(n^2)$$

tétel 1.4 (Erdős-Stone-Simonovits, következmény)**.** *Ha H páros, akkor $ex(n, H) = o(n^2)$*

Általános megközelítés: alsó becslés konstrukcióból jön, a felső korlát valamilyen gráfelméleti (leszámolási) becslésből.

2 páros H gráfok

tétel 2.1 ($H = P_k$, Erdős-Gallai)**.** *$ex(n, P_k) \leq \frac{k-2}{2}n$, az extrém struktúra pedig egyértelmű: $k-1$-es klikkek diszjunkt uniója, plusz a maradék csúcshalmazon kapott kisebb klikk.*

sejtés 2.2 ($H = T_k$, ahol T_k tetszőleges rögzített k csúcsú fa, Erdős-Sós)**.**

$$ex(n, T_k) \leq \frac{k-2}{2}n$$

Ez igaz, ha k elég nagy, $k > k_0$: Ajtai, Komlós, Simonovits, Szemerédi tétele. Regularitási lemma kell.

tétel 2.3 ($H = C_4 = K_{2,2}$, Erdős-Rényi, Reiman, Füredi)**.** *$ex(n, C_4) \leq \frac{1}{2}n^{3/2} + O(n)$. Ilyen nagyságrendű élszámot kapunk véges geometriák illeszkedési gráfjából, ill. polaritásaiból. A becslés éles.*

tétel 2.4 ($H = K_{s,t}$, $2 \leq s \leq t$, Kővári-Sós-Turán)**.**

$$ex(n, K_{s,t}) \leq \frac{1}{2}\sqrt[s]{t-1}\,n^{2-1/s} + O(n).$$

Ilyen nagyságrendű élszámot kapunk véges geometriák illeszkedési gráfjából, ill. polaritásaiból. A becslés éles.

Biz (volt!): cseresznye-számolás.

tétel 2.5 ($H = K_{s,t}$, $2 \leq s \leq t$, Erdős).

$$ex(n, K_{s,t}) \geq C \cdot n^{2-1/s-1/t}.$$

Biz (volt!): kétszeres leszámolás, (vagy elemi valségi módszer): az összes e élszámú gráfot megszámoljuk, ami egy $s+t$ csúcsú $K_{s,t}$ részgráfot tartalmaz. Ha e nem túl nagy, akkor nagyvonalú számolás esetén is kevesebbet kapunk, mint az összes e élű n csúcsú gráf; vagyis van $K_{s,t}$-mentes e élű.

Megj.: ha $s << t$, akkor a $K-S-T$ tétel nagyságrendje éles, van ilyen sok élű konstrukció: Alon-Rónyai-Szabó.

tétel 2.6 ($H = C_{2k}$, $2 \leq k$, Bondy-Simonovits).

$$ex(n, C_{2k}) \leq 100k \cdot n^{1+1/k}.$$

Megj.: Ez az $n^{1+1/k}$ a helyes nagyságrend valóban, ha $n = 2, 3$ vagy 5, van konstrukció.

3 struktúra

P3. kérdés.

tétel 3.1 (Erdős-Simonovits). *Ha $\chi(H) - 1 = p \geq 2$, akkor*

$$ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1}\right)\binom{n}{2} + o(n^2) = |E(T_{n,p})| + o(n^2),$$

sőt az extremális gráf a $T_{n,p}$ gráfból megkapható $o(n^2)$ él "módosításával": törlésével vagy hozzáadásával.

tétel 3.2 (Erdős-Simonovits). *Legyen $\chi(H) - 1 = p \geq 2$. Ha G gráf H-mentes, élszáma közel van az $ex(n, H)$-hoz, akkor a G struktúrája is közel van a $T_{n,p}$ gráf struktúrájához: minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik n_ε küszöb és $\delta > 0$, hogy ha $n > n_\varepsilon$, akkor teljesül hogy $ex(n, H) - |E(G)| < \delta n^2 \Rightarrow E(G)$ és $E(T_{n,p})$ eltérése $< \varepsilon n^2$, azaz G a $T_{n,p}$ gráfból megkapható εn^2 él "módosításával".*

4 Egyebek

Technikák, biz módszerek (Turán tételen keresztül is)

• gráfkonstrukciók: algebrai, véges geometriai struktúrákra alapozva

• becslése: struktúra lokális tulajdonságainak jobb megértéséből globális becslés: kétszeres leszámlálások, szélességi és mélységi feszítőfa; kiindulás szélső helyzetből (bármely él hozzáadása már kizárt gráfot adna).

• valószínűségi módszer: pl. várhatóérték-módszer. (ld. gyak)

• Regularitási lemma

• teljes indukció; gráf-transzformációk (Zykov-technika: olyan módosítás a struktúrában, ami az élszámot nem csökkenti, de a struktúra egyszerűbb.)

További tételek

Mintaállítás **P2**+**P4**-re

tétel 4.1 (Erdős-sejtés, Grzesik, ill Razborov és társai tétele)**.** *n csúcsú háromszögmentes gráfban a C_5 gráfok száma legfeljebb $(\frac{n}{5})^5$.*

Mintaállítás **P5**-re

sejtés 4.2 (Turán-(3,4)-sejtés)**.** *n-csúcsú 3-uniform hipergráf legfeljebb $\approx \frac{5}{9}\binom{n}{3}$ hiperélet tartalmazhat, ha nincsen benne K_4^3, vagyis olyan négycsúcsú részhipergráf, ami mind a 4 lehetséges hiperélet feszíti.*