Extremális reguláris gráfok

1. Legyen G egy d–reguláris gráf $v(G) = n$ csúccsal és tekintsük a $G_1 = (d+1)G$ és $G_2 = nK_{d+1}$ gráfokat. Jelölje $i_k(G_i)$ a G_i gráf k csúcsú független halmazainak számát. Mutasd meg, hogy tetszőleges $k \geq 0$ esetén
$$\frac{i_{k+1}(G_1)}{i_k(G_1)} \geq \frac{i_{k+1}(G_2)}{i_k(G_2)}.$$
Legyen $I(G)$ a G független halmazainak száma beleértve az üres halmazt is. Mutasd meg, hogy
$$I(G)^{1/v(G)} \geq I(K_{d+1})^{1/v(K_{d+1})}.$$

2. Legyen G egy tetszőleges gráf és $G \times K_2$ az a gráf, melynek csúcshalmaza $V(G) \times \{0, 1\}$ és az (u, i) és (v, j) csúcsok akkor vannak összekötve ha $(u, v) \in E(G)$ és $i \neq j$. Mutasd meg, hogy
$$I(G)^2 = I(G \cup G) \leq I(G \times K_2).$$
Az $I(G)^{1/v(G)} \leq I(K_{d,d})^{1/v(K_{d,d})}$ teljesül minden d–reguláris páros gráfra. Mutasd meg, hogy ebből következik, hogy minden d–reguláris gráfra is teljesül.

3. Legyen $\mathrm{ch}(G, q)$ a G gráf q színnel való jószínezéseinek számát. Mutasd meg, hogy tetszőleges G páros gráfra teljesül, hogy
$$\mathrm{ch}(G, q) \geq q^{v(G)} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{e(G)},$$
ahol $v(G)$ a G gráf csúcsainak, $e(G)$ az éleinek száma.

4. Legyen G tetszőleges d–reguláris gráf. Bizonyítsd be, hogy
$$\mathrm{ch}(G, q)^{1/v(G)} \geq \mathrm{ch}(K_{d+1}, q)^{1/v(K_{d+1})}.$$

5. Mutasd meg, hogy tetszőleges G gráfra teljesül, hogy
$$\mathrm{ch}(G \cup G, q) \leq \mathrm{ch}(G \times K_2, q).$$

6. Legyen G tetszőleges gráf és $A \subseteq E(G)$ esetén legyen $k(A)$ a $(V(G), A)$ gráf összefüggő komponenseinek száma. Legyen
$$Z(G, q, w) = \sum_{A \subseteq E(G)} q^{k(A)} w^{|A|}.$$
Mutasd meg, hogy tetszőleges d–reguláris G gráfra és $q \geq 1, w \geq 0$ akkor
$$Z(G, q, w)^{1/v(G)} \leq Z(K_{d+1}, q, w)^{1/v(K_{d+1})}.$$
Mutasd meg, hogy ha $0 \leq q \leq 1, w \geq 0$ akkor
$$Z(G, q, w)^{1/v(G)} \geq Z(K_{d+1}, q, w)^{1/v(K_{d+1})}.$$