Happy end probléma és környéke - vázlat

0.1. Probléma (Klein, Erdős, Szekeres). *Ha adott elegendően sok általános helyzetű pont a síkon, létezik-e közöttük n, amely konvex helyzetű?*

0.2. Definíció. *$K(n)$ a min. pontszám, amire igaz, hogy létezik mindenképp konvex helyzetű n elemű részhalmaza.*[1]

0.3. Állítás. *('35) $K(4) = 5$, $K(5) = 9$.*

0.4. Sejtés. $K(n) = 2^{n-2} + 1$.

0.5. Tétel (Erdős -Szekeres, '35). *$K(n)$ jól def.*[2]

Biz 1: $R^4(n, 5)$ miatt: a négyeseket színezzük, piros ha konvex, kék ha nem. Ez felső korlát tehát.

Biz 2. $R^3(n, n)$ miatt: a ponthármasokat színezzük, piros ha konvex helyzetű, kék ha konkáv. (Feltehető, hogy nincs függőleges egyenes meghatározva) Ez felső korlát tehát.

0.6. Probléma. *Nagy konvex ha konkáv ívet keresünk: $F(k, l)$ a min N, melyre igaz: N ált helyzetű pontból (ha nincs függőleges egyenest meghatározó pár) mindig kiválasztható konvex k-ív, vagy konkáv l-ív.*

0.7. Állítás. $K(n) \leq F(n, n)$.

Biz 2. Valójában $F(n, n)$-re adott felső korlátot!
Most $F(k, l)$-re keresünk alsó és felső korlátot.

0.8. Tétel. *Felső korlát: $F(k, l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.*

Biz. indukció. Ha $k = 2$ vagy $l = 2$, trivi. Else: $F(k, l) \leq F(k-1, l) + F(k, l-1) - 1$, ezt bizonyítjuk. (Ez biz 2-nél sokkal jobb!)

Ha nincs konkáv l-es, egy N elemű halmazban, akkor vegyük azokat a pontokat (P halmaz), amik egy konvex $k-1$-ív végpontjai. A kimaradó pontok száma legfeljebb $F(k-1, l) - 1$. P-ben tehát vagy van k-as konvex, vagy $l-1$-es konkáv: utóbbi eset is jó nekünk, mert kibővítési lehetőséget ad k-as konvexre vagy l-es konkávra.

0.9. Tétel. *Alsó korlát: konstrukció, $F(k, l) > \binom{k+l-4}{k-2}$.*

Indukció, egy $(k-1, l)$-mentes és egy $(k, l-1)$-mentes halmaz uniója. Lapított halmazokkal dolgozunk, sorrendre figyelünk. Áll: ha konvex halmaz mindkettőből tartalmaz, akkor a másodikból csak egyet tartalmazhat. Ha konkáv halmaz mindkettőből tartalmaz, akkor az elsőből csak 1-et tartalmazhat.

0.10. Következmény. $F(k, l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

---

[1] feltesszük, hogy minden ponthalmaz, amit vizsgálunk, általános helyzetű

[2] '36: Klein, Szekeres oo

0.11. TÉTEL (ERDŐS, SZEKERES, '60). $K(n) \geq 2^{n-2} + 1$.

Ez egy konstrukció ismét.

- Negyedkörívre fűzünk sorban kis tartományokat $T_0, T_1, \dots T_{n-2}$, amiknek a távolsága nagy, az átmérőjük kicsi, x és y- koordináták az indexekkel együtt növekednek különböző tartománybeli pontpár esetén.
- Minden tartomány "lapított" ponthalmazunk van: a meghatározott T_j-beli egyenesek szeparálják a T_i-beli és T_k-beli pontokat, $i < j < k$.
- $|T_i| = \binom{t-2}{i}$,
- T_i $(i+2, t-i)$-mentes halmaz 0.9 Tétel szerint.

Ez legfeljebb $t-1$-est tartamaz.

Valóban: Ha csak egy T_i-ből veszünk pontokat, akkor azért; ha többől, akkor az első T_i-ből, amiből van eleme, legfeljebb $i+1$-et, az utolsó T_j-ből legfeljebb $t-j-1$-et, a közbülsőkből legfeljebb 1-et.

0.12. ÁLLÍTÁS (TÓTH GÉZA, PAWEL VALTR, '98). $K(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 2$.

(Challenge! ;))

0.13. PROBLÉMA. *d-dimenzióban?*

0.14. ÁLLÍTÁS (KÁROLYI, '01). $K_d(n) \leq \binom{2n-2d-1}{n-d} + d$

0.15. PROBLÉMA. *Horton halmazok: üres konvex k-szög is biztos van elegendően nagy ponthalmazban?*

0.16. TÉTEL. $k = 5, 6$*: igen*[3], $k = 7$*: nem!*

0.17. PROBLÉMA. *Mekkora egyenesszög közeli szöget határoz meg biztosan egy N-pontú ponthalmaz?...*

Megjegyzés:
a konvex tételt 0.12 használhatjuk.... Egy $K(n)$ pontú nyilván meghatároz egy legalább $\pi(1-\frac{2}{n})$ nagyságút...

0.18. TÉTEL (SZEKERES). *Ha $N \geq 2^n + 1$, akkor egy N pontú halmazban lesz egy legalább $\pi(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n\cdot(2^n+1)^2})$ nagyságú tompaszög.*

0.19. TÉTEL (SZEKERES). *Ha $N \geq 2^n$, $\varepsilon > 0$, van olyan N pontú halmazban, amiben nincs legalább $\pi(1 - \frac{1}{n} + \varepsilon)$ nagyságú tompaszög.*

0.20. TÉTEL (ERDŐS-SZEKERES). *Ha $N = 2^n$, $\varepsilon > 0$, akkor minden N pontú általános helyzetű halmazban van egy $\pi(1 - \frac{1}{n})$-nél nagyobb tompaszög.*

---

[3] a $k = 6$ eset 2007-es eredmény!

Hivatkozások

[1] BÁRÁNY, Imre; KÁROLYI, Gyula. Problems and results around the Erdös-Szekeres convex polygon theorem. In: Discrete and Computational Geometry. Springer Berlin Heidelberg, 2001. p. 91-105.

[2] ERDŐS, Pál; SZEKERES, György. A combinatorial problem in geometry. Compositio Mathematica, 1935, 2: 463-470.

[3] ERDŐS, Pál; SZEKERES, György. On some extremum problems in elementary geometry. In: Annales Univ. Sci. Budapest. 1960. p. 3-4.

[4] HORTON J.D., Sets with no empty convex 7-gons, Canad. Math. Bull. 26 (1983), 482-484.

[5] MORRIS, Walter; SOLTAN, Valeriu. The Erdos-Szekeres problem on points in convex position - a survey. Bulletin of the American Mathematical Society, 2000, 37.4: 437-458.

[6] NICOLÁS, Carlos M. The empty hexagon theorem. Discrete and Computational Geometry, 2007, 38.2: 389-397.

[7] TÓTH, Géza; VALTR, Pavel. Note on the Erdos-Szekeres theorem. Discrete and Computational Geometry, 1998, 19.3: 457-459.