

## Spektrál gráfelmélet feladatok

1. (a) Legyen  $A$  a  $G$  gráf adjacencia mátrixa. Mi az  $(A^2)_{ij}$  kombinatorikus jelentése ha  $i = j$  illetve ha  $i \neq j$ ?

(b) Legyen  $k$  pozitív egész. Mi az  $(A^k)_{ij}$  kombinatorikus jelentése?

2. Legyen  $A$  a  $G$  gráf adjacencia mátrixa vagyis  $A = (a_{ij})$ , ahol  $a_{ij} = 1$  ha  $i$ . és  $j$ . csúcs össze van kötve és  $0$  ha nincsenek összekötve. Legyen az  $A$  mátrix sajátértékei  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_n$  (valóság(!), miért is?). Mutasd meg, hogy

(a)  $\sum \lambda_i = 0$ .

(b)  $\sum \lambda_i^2 = 2e(G)$ .

(c) Mi lesz  $\sum \lambda_i^3$  illetve általában  $\sum \lambda_i^k$ ?

3. (a) Mik a  $K_n$  teljes gráf sajátértékei?

(b) Mik  $K_{n,m}$  teljes  $n + m$  csúcsú páros gráf spektruma?

4. Mutasd meg, hogy egy  $d$ -reguláris gráf legnagyobb sajátértéke  $d$  és multiplicitása éppen a  $G$  gráf komponenseinek száma.

5. Legyen  $G$  legnagyobb sajátértéke  $\lambda_1$ , legkisebb sajátértéke  $\lambda_n$ . Mutasd meg, hogy  $\lambda_1 \geq |\lambda_n|$ .

6. Legyen  $A$  a  $G$  gráf adjacencia mátrixa, legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektora  $v_1$ . Mutasd meg, hogy

$$\max_{\|x\|=1} x^T A x = \lambda_1$$

illette

$$\min_{\|x\|=1} x^T A x = \lambda_n$$

továbbá

$$\max_{\|x\|=1, x \perp v_1} x^T A x = \lambda_2$$

Hogyan általánosítható ez az állítás a többi sajátértékre?

7. (a) Mutasd meg, hogy ha  $\lambda$  sajátértéke  $G$  páros gráfnak akkor  $-\lambda$  is.

(b) Legyen  $G$  összefüggő gráf legnagyobb sajátértéke  $\lambda_1$ , legkisebb sajátértéke  $\lambda_n$ . Tegyük fel, hogy  $\lambda_n = -\lambda_1$ . Bizonyítsd be, hogy  $G$  páros gráf.

(c) Mutasd meg, hogy a (b) feladatban nem hagyható el az összefüggőség feltétele.

8. A  $d$ -reguláris  $G$  gráf sajátértékei legyenek  $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_n$ . Mik  $\overline{G}$  sajátértékei?

9. Jelölje  $m_k(G)$  ahányféleképpen ki lehet választani  $G$ -nek  $k$  független élét ( $m_0(G) = 1$ ). Bizonyítsd be, hogy egy  $T$  fa karakterisztikus polinomja

$$\sum_{j=0}^{n/2} (-1)^j m_j(T) x^{n-2j}.$$