Spektrál gráfelmélet feladatok 2

1. A G gráf adjacencia mátrixának sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Mi annak a $G(k)$ gráfnak a sajátértékei, melyet úgy kapunk, hogy G minden csúcsát helyettesítünk egy k méretű független halmazzal és két kupac között behúzunk minden élet pontosan akkor ha eredetileg volt él a két csúcs között?

2. (a) Jelölje N_k a G összefügg? gráfban a k hosszú séták számát. Igazoljuk, hogy $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{N_k} = \lambda_1$.
(b) lássuk be, hogy $\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{M_{2k}} = \lambda_1$ is igaz a G-beli k hosszú zárt séták M_k számára.

3. Legyen d a G gráf legkisebb, D a legnagyobb fokszáma. Legyen továbbá λ_1 az adjacenciamátrix legnagyobb sajátértéke. Bizonyítsd be, hogy

(a) $d \le \lambda_1 \le D$,

(b) $\frac{2e(G)}{n} \le \lambda_1 \le \sqrt{2e(G)(1-\frac{1}{n})}$.

4. (a) Mutasd meg, hogy ha λ sajátértéke G páros gráfnak akkor $-\lambda$ is.

(b) Legyen G összefüggő gráf legnagyobb sajátértéke λ_1, legkisebb sajátértéke λ_n. Tegyük fel, hogy $\lambda_n = -\lambda_1$. Bizonyítsd be, hogy G páros gráf.

(c) Mutasd meg, hogy a (b) feladatban nem hagyható el az összefüggőség feltétele.

5. Legyen T fa n csúcson. Mutasd meg, hogy a legnagyobb sajátértéke legfeljebb $\sqrt{n-1}$. Állhat-e egyenlőség a becslésben?

6. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan irányítása, melyben minden befok legfeljebb D^+, minden kifok legfeljebb D^-. Mutasd meg, hogy a G gráf $\lambda(G)$ spektrálsugarára teljesül, hogy

$$\lambda(G) \le 2\sqrt{D^+D^-}.$$

7. Legyen G (n,d,λ)-gráf vagyis n csúcsú, d-reguláris és a legnagyobb sajátérték kivételével mindegyik abszolútértéke legfeljebb λ. Mutasd meg, hogy

$$\left| e(X,Y) - \frac{d|X||Y|}{n} \right| \le \lambda |X|^{1/2}|Y|^{1/2},$$

ahol $e(X,Y)$ az X és Y halmazok között menő élek száma.

8. Legyen G d-reguláris gráf λ_n legkisebb sajátértékkel és legyen $\alpha(G)$ legnagyobb független halmazának mérete. Mutasd meg, hogy

$$\alpha(G) \le \frac{-n\lambda_n}{d-\lambda_n}$$

9. Ennek a feladatnak célja, hogy megmutassuk, hogy K_{10} nem bontható fel három Petersen gráf éldiszjunkt uniójára.

(a) Mutasd meg, hogy a Petersen gráf 1 sajátértékéhez 5 dimenziós sajátaltér tartozik. (Határozd meg a sajátértékeket A^2, A, I, J mátrixok közötti összefüggést vizsgálva.)

(b) Bizonyítsd be, hogy két éldiszjunkt Petersen gráf 1 sajátértékéhez tartozó 5 dimenziós sajátalterek nem triviálisan metszik egymást. (Mutasd meg, hogy a két sajátaltér már egy 9 dimenziós altérben benne vannak mindketten.)

(c) Mutasd meg, hogy ha a K_{10}-ből elhagyod két éldiszjunkt Petersen gráf élhalmazát akkor a kapott gráfnak -3 sajátértéke és így nem lehet Petersen gráf.