Vegyes feladatok

1.(a) Legyen G összefüggő gráf, $\tau(G)$ az n csúcsú G gráf feszítőfáinak a száma. Bizonyítsd be, hogy

$$(n-1)\tau(G) = \sum_{\substack{V(G)=V(G_1)\cup V(G_2) \\ V(G_1)\cap V(G_2)=\emptyset}} \tau(G_1)\tau(G_2)e(G_1, G_2)$$

ahol az $e(G_1, G_2)$ a G_1 és G_2 között menő élek számát jelöli.

(b) Mutasd meg, hogy ha G gráf minden fokszáma páros és $|V(G)|$ páros akkor $\tau(G)$ páros.

(c) Legyen G gráf adjacencia mátrixa A_G. Ekkor $\det(A_G)$ paritása megegyezik G teljes párosításainak számának a paritásával.

(d) Tegyük fel, hogy G minden foka páros. Mutasd meg, hogy G tetszőleges u csúcsa esetén $G - u$ párosításainak számának paritása megegyezik $\tau(G)$ paritásával.

2. Jelölje $i_k(G)$ ahányféleképpen ki lehet választani k független csúcsát a G gráfnak ($i_0(G) = 1$). Mutasd meg, hogy az n csúcsú T fa esetén

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k i_k(T) \in \{-1, 0, 1\}$$

3. Legyen $A \subseteq S_n$ permutációk egy halmaza, melyre minden $\pi, \sigma \in A$ esetén létezik $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, melyre $|\pi(i) - \sigma(i)| = 1$. Mutasd meg, hogy

$$|A| \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$