---

1. Add meg az alábbi függvényeket $f(x) = u^a(x)$, $f(x) = a^u(x)$, $f(x) = \log_a u(x)$, $\sin u(x)$ vagy $\cos u(x)$ alakban és a láncszabály segítégével határozd meg a deriváltjukat!

   (a) $(2x+1)^5$ (b) $(4-3x)^{-9}$ (c) $\sin^3 x$ (d) $\sin x^3$

   (e) $2^{\cos x}$ (f) $\ln \cos x$ (g) $e^{-x^2/2}$ (h) 2^{3x}

   (i) $\sin \frac{3\pi x}{2}$ (j) $(3x+1)\sqrt{3x+1}$ (k) $\cos(2x - \pi/3)$

2. Mi a deriváltja a következő függvényeknek:

   (a) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ (b) $f(x) = 4x^3 \cos(x^2+1)$ (c) $f(x) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

3. Határozzuk meg a következő függvények inverzének a deriváltját a megadott helyeken!

   (a) $f(x) = x^5 + x^2$, $a = 2$ (b) $3x^3 + x$, $a = 4$ (c) $-2x^3 + \sqrt{x}$, $a = -1$

4. A $\operatorname{tg} x$ függvény inverzét $\operatorname{arctg} x$ jelöli. Tehát ha $\alpha = \operatorname{arctg} x$, akkor $\operatorname{tg} \alpha = x$.

   (a) Legyen Δ egy olyan derékszögű háromszög amiben az $\alpha = \operatorname{arctg} x$ szög melletti befogó hossza 1. Mi az α-val szemközti befogó hossza? Mi az átfogó hossza? Párosítsd a következő kifejezéseket a megfelelő algebrai alakkal:

      i. $\sin(\operatorname{arctg} x)$ ii. $\cos(\operatorname{arctg} x)$ iii. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ iv. $\cot(\operatorname{arctg} x)$

      v. x vi. $\dfrac{1}{x}$ vii. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ viii. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

   (b) Mutasd meg, hogy az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ függvény derivált-függvénye $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$!

5. Mutasd meg, hogy az $f(x) = e^{-3x}$ függvény kielégíti az

$$f'(x) = -3f(x)$$

   azonosságot! (Az ilyen típusú azonosságokat differenciál egyenletnek nevezzük.)

6. Mutasd meg, hogy az $f(x) = 20 + 80e^{-0,05x}$ függvény kielégíti az

$$f'(x) = -0,05\big(f(x) - 20\big)$$

   azonosságot!

7. Mutasd meg, hogy az $f(x) = \dfrac{10^{11}}{(2x+100)^5}$ függvény kielégíti az

$$f'(x) = -\frac{5f(x)}{x+50}$$

   azonosságot!

. . . . *Folyt. a túloldalon*

8. Számoljuk ki a következő függvények második deriváltját:

(a) $x^3 + 2x^2 + x + 1$ (b) $e^{\sin x}$ (c) $\ln \cos x$

9. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számoljuk ki a következő határértékeket! Ellenőrizzük a szabály alkalmazásának a feltételeit!

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{\sin\sqrt{x}}$

10. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x+1}$ határértéket! Vegyük észre, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin x)'}{(x+1)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$. Miért nem mond ez ellen a L'Hospital szabálynak?

11. Milyen intervallumokon növekszik, illetve csökken, hol van lokális szélsőértéke a következő függvényeknek?

(a) $f(x) = 2x^3 - 18x + 23$ (c) $f(x) = e^{-x^2}$

(b) $f(x) = x\sqrt{18 - x^2}$ (d) $f(x) = xe^{-x^2/2}$

12. Milyen intervallumokon növekszik, illetve csökken, hol van lokális szélsőértéke az $f(x)$ függvénynek, ha deriváltja

(a) $f'(x) = (x-1)(x+2)$ (b) $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$ (c) $f'(x) = (x^2-1)(x+2)$

13. Keressük meg a következő függvények lokális szélsőértékeit és határozzuk meg a típusát!

(a) $y = xe^{-x}$ (b) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ (c) $y = x - 2\sin x$

14. Határozd meg az $f(x) = x^3 - 12x + 12$ függvény abszolút szélsőértékeit a megadott intervallumokon!

(a) $[-4, 4]$, (b) $[-3; 3]$, (c) $[0; 3]$