Valószínűségszámítás (jegyzet)

Csiszár Villő

2009. február 18.

1. Valószínűségi mező

Két bevezető példa:

1) Osztozkodási probléma (1494, helyes megoldás több, mint 100 évvel később, Pascal, Fermat): Két játékos fej-írás játékot játszik, az nyer, aki előbb ér el 6 pontot. Azonban a játék 5 : 3-as állásnál félbeszakad. Kérdés: milyen arányban osztozzanak a nyereményen? Válasz: ha a nyerési esélyek arányában tartjuk igazságosnak az osztozást, akkor 7 : 1 arányban kell osztozniuk.

2)Körbeverő kockák:
Három kockára felírjuk az $1-18$ számokat az alábbiak szerint:

$I.$	1	10	11	12	13	14
$II.$	2	3	4	15	16	17
$III.$	5	6	7	8	9	18

A játék a következő. Először A választhat egy kockát, majd B választhat a maradék kettőből. Ezután mindketten feldobják a kockájukat, és az nyer, aki nagyobbat dob. Kinek előnyös a játék? Válasz: B-nek előnyös, mert a kockák körbeverik egymást:
I-nél jobb II, II-nél jobb III, III-nál jobb I.
Tehát akármit választ A, annál tud B jobbat választani.

Tekintsünk egy véletlen kísérletet:
Jelölje a lehetséges kimentelek halmazát $\Omega \neq \emptyset$, ennek neve *eseménytér*.
Az eseménytér elemeit jelölje $\omega \in \Omega$, ezek az *elemi események*.
Az eseménytér (bizonyos) $A \subseteq \Omega$ részhalmazai az *események*.
Ha a kísérlet kimenetele ω, és $\begin{array}{l} \omega \in A, \text{ akkor az } A \text{ esemény bekövetkezett} \\ \omega \notin A, \text{ akkor az } A \text{ esemény nem következett be} \end{array}$

1.1. Példa. Feldobunk egy dobókockát.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (mit dobunk)
Legyen $A = \{2, 4, 6\}$ az az esemény, hogy "páros számot dobunk"
Ha 4-est dobtunk, azaz $\omega = 4$, akkor az A esemény bekövetkezett. Ha 5-öst dobtunk, azaz $\omega = 5$, akkor az A esemény nem következett be. ■

Események:
technikai okokból sokszor nem lesz az eseménytér minden részhalmaza (megfigyelhető) esemény. Jelölje az *események családját* $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$, erről a következő tulajdonságokat követeljük meg:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$: Ω neve *biztos esemény*
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$: ha A esemény, akkor a komplementere is
3) $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{A}$: megszámlálható sok esemény uniója is esemény

Mj.: Az 1),2),3) feltételeknek elget tevő $\mathcal{A}$ halmazrendszert σ-algebrának hívjuk.

Azt, hogy események metszete is esemény legyen, azért nem követeljük meg, mert az már következik a 2) és 3) feltételekből, felhasználva, hogy $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\cup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}}$.

Valószínűség:
Minden eseménynek van valószínűsége, az A esemény valószínűségét $P(A)$ jelöli, ahol P a *probability* szóból származik. Azaz P egy $\mathcal{A} \to \mathbb{R}$ függvény. P-ről a következő tulajdonságokat követeljük meg:

1) $P(A) \geqslant 0$: minden valószínűség nemnegatív
2) $P(\Omega) = 1$: a biztos esemény valószínűsége 1
3) Ha $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt események, akkor $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Mj.: Az 1),2),3) feltételeknek elget tevő P függvényt valószínűségi mértéknek hívjuk.

Ezek a követelmények a *relatív gyakoriság* tulajdonságaiból származtathatók. Ugyanis azt szeretnénk, ha egy esemény valószínűsége azt fejezné ki, hogy a kísérleteknek kb. hányad részében következik be az esemény. Tegyük fel, hogy egy kísérletet egymástól függetlenül n-szer elvégzünk, és jelölje k_A, hogy hányszor következett be A. Ekkor k_A az A gyakorisága, $r_A = k_A/n$ pedig az A esemény relatív gyakorisága. Könnyen ellenőrizhető, hogy a relatív gyakoriságra teljesülnek a fenti 1)-3) követelmények megfelelői:
1) $r_A \geqslant 0$
2) $r_\Omega = 1$
3) $r_{A\cup B} = r_A + r_B$, ha $A \cap B = \emptyset$

1.1. Definíció. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek hívjuk, ahol Ω nemüres halmaz, $\mathcal{A}$ σ-agebra, P pedig valószínűségi mérték.

Néhány egyszerű állítás:
1) $P(\emptyset) = 0$:
$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset)$.
2) Minden A eseményre $P(A) \leqslant 1$.
$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \geq P(A)$. Sőt, kijött, hogy $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
4) Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $\left|P(A \cap B) - P(A)P(B)\right| \leqslant \frac{1}{4}$.

2. Klasszikus valószínűségi mező

Akkor beszélünk klasszikus valószínűségi mezőről, ha az eseménytér elemszáma véges, az eseménytér minden részhalmaza esemény, és minden elemi esemény egyformán valószínű. Azaz:
$|\Omega| = n$ és $\forall \omega \in \Omega$-ra $P(\omega) = \dfrac{1}{n}$
Legyen $A \subset \Omega$. Ekkor $P(A) = \dfrac{|A|}{n} = \dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$.

2.1. Példa. (deMère lovag esete) 3 kockával dobunk, a 11-es vagy a 12-es összeg valószínűsége nagyobb?
Lehetőségek:

11:	641	632	551	542	533	443
12:	642	633	552	543	561	444

Azonban ha egyformán valószínű lehetőségekkel akarunk dolgozni, akkor a sorrendet is figyelembe kell venni! Azaz $|\Omega| = 6^3$, és
$P("11") = \dfrac{6+6+3+6+3+3}{6^3} = \dfrac{27}{6^3} \longleftarrow$ ez a valószínűbb
$P("12") = \dfrac{6+3+3+6+6+1}{6^3} = \dfrac{25}{6^3}$ ■

2.1. Példa klasszikus valószínűségi mezőre: Mintavételezés

Tegyük fel, hogy egy gyár egy adott napon N terméket gyártott, melyből M selejtes, azaz a selejtarány $p = M/N$. A termékekből n elemű mintát veszünk.
Ha visszatevés nélkül vesszük a mintát, akkor

$$P(k \text{ db selejtes}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ha visszatevéssel vesszük a mintát, akkor

$$P(k \text{ db selejtes}) = \frac{\binom{n}{k} M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Visszatevés nélküli mintavételnél tegyük fel, hogy $N \to \infty$, és a p selejtarány rögzített. Nézzük meg, hová tart a korábban kiszámolt valószínűség!

$$\frac{\dfrac{M!}{k!(M-k)!} \cdot \dfrac{(N-M)!}{(n-k)!(N-M-n+k)!}}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}} =$$

$$= \binom{n}{k} \frac{\overbrace{M(M-1)(M-2)\cdots(M-k+1)}^{k\ db}\overbrace{(N-M)(N-M-1)\cdots(N-M-n+k+1)}^{n-k\ db}}{\underbrace{N(N-1)\cdots(N-n+1)}_{n\ db}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

3. A szita (Poincaré) formula és a Jordán formula

Legyenek $A_1, ..., A_n$ események. Ha nem diszjunktak, akkor a $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ valószínűség kiszámítása nehéz lehet. Erre ad módszert a szita formula.

3.1. Tétel. (**Szita formula**) Legyenek $A_1, ..., A_n$ események. Ekkor

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k,$$

ahol

$$S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Speciálisan $n = 2, 3$-ra a következőt kapjuk:

$n = 2:$ $\quad P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

$n = 3:$ $\quad P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

$$= \underbrace{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)}_{S_1} - \underbrace{(P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3))}_{S_2} + \underbrace{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{S_3}$$

A formula bizonyítása (vázlat): az n esemény az eseményteret a következő 2^n részre partícionálja:

$\Omega = \Omega \cap \Omega \cap \cdots \cap \Omega = (A_1 \cup \overline{A}_1) \cap (A_2 \cup \overline{A}_2) \cap \cdots \cap (A_n \cup \overline{A}_n) =$

$$= \underbrace{(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap \overline{A}_n) \cup \cdots \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1} \cap \overline{A}_n)}_{\text{ez } 2^n \text{ tag}}.$$

Úgy kapjuk a 2^n tagot, hogy minden tagban mindegyik i-re vagy A_i, vagy $\overline{A}_i$ szerepel. A tagok közül csak $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n$ nincs benne az $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ eseményben.

Vegyünk egy olyan tagot, amelyben $\begin{matrix} k \text{ db} \\ n-k \text{ db} \end{matrix}$ esemény szerepel $\begin{matrix} \text{komplementer nélkül} \\ \text{komplementerrel} \end{matrix}$

és $k \geq 1$. Azt kell megmutatni, hogy ezt a részt pontosan egyszer számoltuk le a szita formulában:

$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \binom{k}{4} + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} = 1 \quad (k \geq 1).$

3.2. Tétel. (**Jordán formula**) Legyenek $A_1, ..., A_n$ események. Ekkor

$$P(\text{Az } n \text{ eseményből pontosan } r \text{ teljesül}) = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{k+r}{r} S_{k+r},$$

ahol S_k ugyanaz, mint a szita formulában.

3.1. Példa. (Névjegy probléma) Tegyük fel, hogy n ember véletlenszerűen összekeveri a névjegyét. Jelölje B azt az eseményt, hogy senki sem a sajátját kapja.

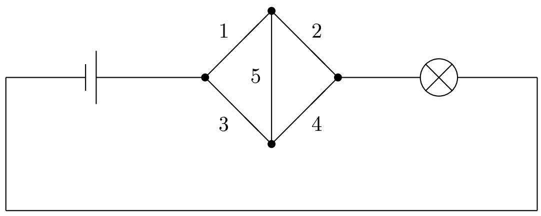
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$, ahol A_i = az i.-edik ember a sajátját kapja. Alkalmazzuk a szita formulát!
$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \dfrac{(n-k)!}{n!} \Rightarrow S_k = \dbinom{n}{k}\dfrac{(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{k!}$. Tehát
$P(B) = (-1)^0 \dfrac{1}{0!} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\dfrac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{1}{k!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{e}$ mivel $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$.
A Jordán formula segítségével azt is kiszámolhatjuk, hogy mennyi az esélye, hogy pontosan r ember kapja a saját névjegyét. ■

3.2. Példa. (Születésnapok) Van N ember.

$$P(\text{van hónap, amelyben senki sem született}) = P(A_1 \cup \dots \cup A_{12}),$$

ahol A_i az az esemény, hogy az i.-dik hónapban nem született senki, $i = 1, ..., 12$.
$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \dfrac{(12-k)^N}{12^N} = \left(\dfrac{12-k}{12}\right)^N$,
$S_k = \dbinom{12}{k}\left(\dfrac{12-k}{12}\right)^N$.
■

3.3. Példa. (Vezetékszakadás) A beszámozott vezetékek mindegyike vagy vezet, vagy nem, $1/2 - 1/2$ valószínűséggel.



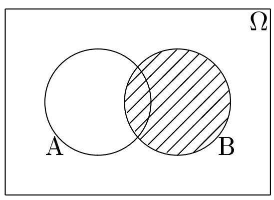
Tekintsük a következő négy eseményt:
$A_1 : 1, 2$ vezet, $A_2 : 1, 5, 4$ vezet $A_3 : 3, 5, 2$ vezet, $A_4 : 3, 4$ vezet.
$P(\text{ég a lámpa}) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.
Most $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ nem írható fel általánosan.

$$\begin{aligned}
S_1 = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} \\
S_2 = {} & P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_4) + P(A_3 \cap A_4) = \\
& = \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{11}{32} \\
S_3 = {} & P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \tfrac{4}{32} = \tfrac{1}{8} \\
S_4 = {} & P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \tfrac{1}{32}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow P(\text{ég a lámpa}) = \frac{3}{4} - \frac{11}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \underset{\sim}{\frac{1}{2}}$
■

4. Feltételes valószínűség

4.1. Definíció. Legyen $A, B \in \mathcal{A}$ és $P(B) > 0$. Az A esemény valószínűsége, feltéve hogy B bekövetkezett (A feltételes valószínűsége a B eseményre nézve) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$



4.1. Példa. Egy urnában 2 jó és 2 selejtes csavar van, kétszer húzunk.
Legyen A = elsőre jó csavart húzunk, B = másodikra selejtes csavart húzunk.
a) Visszatevéssel húzunk:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2\cdot 2}{4\cdot 4}}{\frac{4\cdot 2}{4\cdot 4}} = \frac{1}{2} = P(A) \Rightarrow B \text{ bekövetkezése nem változtat } A \text{ valószínűségén.}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(B) \Rightarrow A \text{ bekövetkezése nem változtat } B \text{ valószínűségén.}$$

b) Visszatevés nékül húzunk:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2\cdot 2}{4\cdot 3}}{\frac{2}{4}} = \frac{2}{3} > P(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow A \text{ bekövetkezése növeli } B \text{ valószínűségét.}$$

$$P(B) = \frac{\overbrace{2\cdot 1}^{\text{mindkettő selejt}} + \overbrace{2\cdot 2}^{\text{első jó, második selejt}}}{4\cdot 3} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} > P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow B \text{ bekövetkezése növeli } A \text{ valószínűségét.} \quad \blacksquare$$

Mj.: Egy urnában N jó és M selejtes termék van. Egymás után, visszatevés nélkül, mindet kihúzzuk. Bizonyítsuk be, hogy $P(k\text{-adikra selejteset húzunk} \mid \ell\text{-edikre jót húzunk}) = \frac{M}{N+M-1}$, minden $k \neq \ell$ párra.

4.1. Tétel. Legyen $\mathcal{A}_B = \{A\cap B : A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{A}$. Ekkor $\mathcal{A}_B$ σ-algebra B-n, és $(B, \mathcal{A}_B, P(\cdot|B))$ valószínűségi mező.

Bizonyítás.
$\mathcal{A}_B$ σ-algebra B-n, mivel
1) $B = B\cap\Omega \in \mathcal{A}_B$
2) $A\cap B \in \mathcal{A}_B \Rightarrow B\setminus(A\cap B) = \overline{A}\cap B \in \mathcal{A}_B$
3) $A_i\cap B \in \mathcal{A}_B \Rightarrow \cup_i(A_i\cap B) = (\cup_i A_i)\cap B \in \mathcal{A}_B$

$P(\cdot|B)$valószínűségi mérték B-n, mivel
1) általánosabban: $\forall A\in\mathcal{A} : P(A|B \geqslant 0$
2) $P(B|B) = 1$ $\quad P(B|B) = \dfrac{P(B\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$
3) általánosabban: $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} : A_i\cap A_j = \emptyset$ $(i\neq j) \Rightarrow$

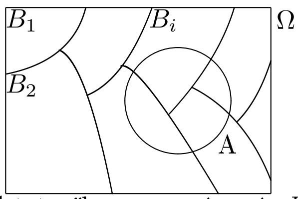
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \frac{P((\bigcup_i A_i)\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B))}{P(B)} \overset{*}{=} \frac{\sum P(A_i\cap B)}{P(B)} \overset{\text{def}}{=} \sum P(A_i|B)$$

$*(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B) = \emptyset$ mivel A_j, A_i diszjunktak $(i\neq j)$ $\blacksquare$

4.2. Definíció.

$B_1, B_2, ... \in \mathcal{A}$ teljes eseményrendszer (TER), ha
1) $P(B_i) > 0$
2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ (elég, ha $P(\bigcup B_i) = 1$)
3) $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i\neq j)$



4.2. Tétel. (**Teljes valószínűség tétele**) Legyen $A\in\mathcal{A}$ tetszőleges esemény, és $B_1, B_2, ...$ TER. Ekkor

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)\cdot P(B_i).$$

Bizonyítás. $P(A) = P(A\cap\Omega) = P(A\cap(\cup B_i)) = P(\bigcup(B_i\cap A)) \overset{\text{diszj}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i\cap A) =$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(B_i\cap A)}{P(B_i)}\cdot P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)\cdot P(B_i). \quad \blacksquare$$

4.2. Példa. Egy dobókockával addig dobunk, amíg hatost nem kapunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nem dobunk közben ötöst?

Legyen B_n: n-edikre dobunk először hatost ($n = 1, 2, 3, ...$). Ekkor $B_1, B_2, ...$ TER, és $P(B_n) = \dfrac{5^{n-1} \cdot 1}{6^n}$. Legyen még A: nem dobunk ötöst közben. A fenti tétel szerint

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

Itt

$$P(A|B_n) = \frac{P(A \cap B_n)}{P(B_n)} = \frac{\frac{4^{n-1} \cdot 1}{6^n}}{\frac{5^{n-1}}{6^n}} = \frac{4^{n-1}}{5^{n-1}}.$$

Visszahelyettesítve,

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{5^{n-1}} \cdot \frac{5^{n-1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{6}} = \underset{\sim}{\frac{1}{2}}.$$

■

4.3. Tétel. (**Bayes tétele**) Legyen $A \in \mathcal{A}$ esemény, és $B_1, B_2, ...$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}.$$

Bizonyítás. A jobboldal számlálója $\dfrac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)} \cdot P(B_k) = P(A \cap B_k)$, a jobboldal nevezője pedig éppen $P(A)$ a teljes valószínűség tétele szerint. ■

4.3. Példa. Tegyük fel, hogy egy hallgató a feltett kérdésre $\frac{3}{4}$ valószínűséggel tudja a választ. Ha nem tudja, akkor tippel, és $\frac{1}{3}$ valószínűséggel találja el a helyes választ. a) Mennyi az esélye, hogy a hallgató helyesen válaszol? b) Ha a hallgató helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta is a választ?
Legyen A: a hallgató helyesen válaszol, B_1: tudja a választ, B_2: nem tudja a választ. Ekkor B_1, B_2 TER, $P(B_1) = \frac{3}{4}$, $P(B_2) = \frac{1}{4}$, $P(A|B_1) = 1$, $P(A|B_2) = \frac{1}{3}$. Ebből
a) $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = 1 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{2} = \underset{\sim}{\frac{5}{6}}$.

b) $P(B_1|A) = \dfrac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)} = \dfrac{1 \cdot \frac{3}{4}}{1 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \underset{\approx}{\dfrac{9}{10}}$. ■

5. Események függetlensége

5.1. Definíció. Az A és B események *függetlenek*, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Mj.: Ha $P(B) > 0$, akkor az azzal ekvivalens, hogy $P(A|B) = P(A)$.

5.2. Definíció. a) Az $A_1, ..., A_n$ események *függetlenek*, ha $\forall 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ választásra

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

b) Az $A_1, ..., A_n$ események *páronként függetlenek*, ha $\forall i \neq j$-re A_i és A_j függetlenek.

5.3. Definíció. Az $A_1, A_2, \ldots$ végtelen sok esemény *független*, ha közülük bármely véges sok esemény független.

5.1. Példa. Egy kockával 2-szer dobunk. Legyen A: az 1. dobás páros, B: a 2. dobás páratlan, C: a két dobás összege páros. Ekkor A, B, C páronként függetlenek, mivel $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ és

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4},$$

de nem főggetlenek, mivel $P(A \cap B \cap C) = 0$. ■

5.1. Tétel. Független események közül tetszőleges sokat kicserélve a komplementerére, független eseményeket kapunk.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy egy eseményt ki lehet cserélni a komplementerére. Feltehetjük, hogy A_1-et cseréljük $\overline{A}_1$-re. Az új események metszetére vonatkozó szorzási szabály csak abban az esetben szorul bizonyításra, ha az $\overline{A}_1, A_2, ..., A_k$ események lettek kiválasztva. Azt kell tehát belátni, hogy

$$P(\overline{A}_1 \cap \overbrace{A_2 \cap \ \cap A_k}^{B}) = P(\overline{A}_1) \cdot \overbrace{P(A_2) \cdots P(A_k)}^{P(B)}.$$

Ez viszont könnyű: $P(\overline{A}_1 \cap B) = P(B) - P(A_1 \cap B) = P(B) - P(A_1)P(B) = (1 - P(A_1))P(B) = P(\overline{A}_1)P(B)$. ■

5.2. Tétel. Legyen $P(A) = 0$ vagy 1, és B tetszőleges esemény. Ekkor A és B függetlenek.

Bizonyítás.
a) Legyen először $P(A) = 0$. Ekkor $P(A) \cdot P(B) = 0$, valamint $A \cap B \subseteq A$ miatt $P(A \cap B) = 0$.
b) A $P(A) = 1$ eset az előző tételből következik. ■

6. Valószínűségi változók

6.1. Definíció. Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt *valószínűségi változónak* nevezünk, ha teljesül rá, hogy minden $a < b$ valós számpárra $\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) < b\} \in \mathcal{A}$.

Mj.: A feltétel azért kell, hogy a $P(X \in B)$ valószínűségek értelmesek legyenek a „szép" $B \subseteq \mathbb{R}$ halmazokra.

6.1. Példa. Feldobunk két dobókockát, nevezzük őket egyes és kettes kockáknak. Láttuk, hogy a kísérlethez tartozó eseménytér 36 elemű, $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : 1 \leq \omega_1, \omega_2 \leq 6\}$. Ha a két kockát nem tudjuk megkülönböztetni, akkor Ω nem minden részhalmaza esemény, csak az olyanok, melyekre ha $(\omega_1, \omega_2) \in A$, akkor $(\omega_2, \omega_1) \in A$ is teljesül. Ezért az az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $X((\omega_1, \omega_2)) = \omega_1$ (azaz az egyes kockával dobott érték) nem valószínűségi változó, hiszen pl.

$$\{1 \leq X < 2\} = \{X = 1\} = \{(1, \omega_2) : 1 \leq \omega_2 \leq 6\} \notin \mathcal{A}.$$

Ilyen függvénnyel nem lenne érdemes foglalkozni, hiszen az értékét nem tudjuk megfigyelni. ■

6.2. Definíció. Az X valószínűségi változó *diszkrét*, ha értékkészlete megszámlálható (véges vagy végtelen).

Ha X diszkrét, akkor lehetséges értékei felsorolhatók: $x_1, x_2, \ldots$. Továbbá a valószínűségi változóra tett feltétel miatt $\forall i : \{\omega | X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{A}$ azaz a $P(X = x_i)$ valószínűség értelmes. Jelölje $p_i = P(X = x_i)$. Ekkor a p_i számok nemnegatívak, és $\sum_i p_i = 1$, ui. az $\{X = x_i\}$ események páronként diszjunktak és az egyesítésük Ω.

6.3. Definíció. a) A $p = (p_0, p_1, ...)$ (véges vagy végtelen) sorozatot *diszkrét valószínűségeloszlásnak* nevezzük, ha $p_i \geq 0$ és $\sum_i p_i = 1$.
b) Az X diszkrét valószínűségi változó *eloszlása* az $(x_i, p_i)_{i=1,...}$ párok sorozata, ahol x_i-k az X lehetséges értékei, és $p_i = P(X = x_i)$.

6.1. Nevezetes diszkrét eloszlások

Binomiális eloszlás

Jelölje X, hogy n független kísérletből hányszor következik be egy p valószínűségű A esemény. Ekkor X eloszlása binomiális, az eloszlás rendje n, paramétere p. Jelölésben: $X \sim Bin(n, p)$.
X eloszlása: $(k, p_k)_{k=0,1,\ldots,n}$, ahol $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

A p_k valószínűség levezetése: legyen A_i: az i. kísérletben bekövetkezik az A esemény. Ekkor

$$\{X = k\} = \cup_{\epsilon : \sum \epsilon_i = k} A_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap A_n^{\epsilon_n},$$

ahol $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n$, és $A_i^1 = A_i$, $A_i^0 = \overline{A}_i$.
Mivel az unió diszjunkt, és a metszet tagjai függetlenek:

$$P(X = k) = \sum_{\epsilon : \sum \epsilon_i = k} P(A_1^{\epsilon_1}) \cdots P(A_n^{\epsilon_n}) = \sum_{\epsilon : \sum \epsilon_i = k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

6.2. Példa. a) Egy urnában M piros és $N - M$ fekete golyó van, n-szer húzunk visszatevéssel. Jelölje X, hogy hányszor húzunk pirosat. Ekkor $X \sim Bin(n, M/N)$.
b) Jelölje X, hogy 20 hallgatóból hányan születtek októberben. Ekkor $X \sim Bin(20, 1/12)$.
c) Egy teszten 15 kérdés van, mindenhol 4 válaszlehetőség. Véletlenszerűen töltöm ki a tesztet. Jelölje X a helyes válaszok számát. Ekkor $X \sim Bin(15, 1/4)$. ■

Mj.: Az $n = 1$ rendű binomiális eloszlás másik neve indikátor eloszlás, jelölésben $Bin(1, p) = Ind(p)$.

Hipergeometriai eloszlás

Egy urnában N golyóból M jelölt. Jelölje X, hogy n visszatevés nélküli húzásból hányszor húzunk jelölt golyót. Ekkor X eloszlása hipergeometriai, az eloszlás paraméterei N, M, n. Jelölésben:
$X \sim Hipgeo(N, M, n)$.
X eloszlása: $(k, p_k)_{k=0,1,\ldots,n}$, ahol $p_k = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Geometriai (Pascal) eloszlás

Jelölje X, hogy hányadik független kísérletben következik be először egy p valószínűségű A esemény. Ekkor X eloszlása geometriai, az eloszlás paramétere p. Jelölésben: $X \sim Geo(p)$.
X eloszlása: $(k, p_k)_{k=1,2,\ldots}$, ahol $p_k = (1-p)^{k-1} p$.

A p_k valószínűség levezetése: legyen A_i: az i. kísérletben bekövetkezik az A esemény. Ekkor

$$\{X = k\} = \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_{k-1} \cap A_k,$$

a függetlenség miatt tehát

$$p_k = P(\overline{A}_1) \cdots P(\overline{A}_{k-1}) P(A_k) = (1-p)^{k-1} p.$$

6.3. Példa. a) Jelölje X, hogy hányadik kockadobásra kapunk először 6-ost. Ekkor $X \sim Geo(1/6)$.
b) Jelölje X, hogy hány hallgatót kell végigkérdezni, mire az első Skorpiót megtalálom. Ekkor $X \sim Geo(1/12)$. ■

Negatív binomiális eloszlás

Jelölje X, hogy hányadik független kísérletben következik be r-edszer egy p valószínűségű A esemény. Ekkor X eloszlása negatív binomiális, az eloszlás rendje r, paramétere p. Jelölésben: $X \sim Negbin(r, p)$.
X eloszlása: $(k, p_k)_{k=r,r+1,\ldots}$, ahol $p_k = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$.

A p_k valószínűség levezetése: legyen A_i: az i. kísérletben bekövetkezik az A esemény. Ekkor

$$\{X = k\} = \cup_{\epsilon:\sum \epsilon_i = r-1} A_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap A_{k-1}^{\epsilon_{k-1}} \cap A_k,$$

ahol $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k-1}) \in \{0,1\}^{k-1}$, és $A_i^1 = A_i, A_i^0 = \overline{A}_i$.
Az unió most is diszjunkt, a metszet tagjai pedig függetlenek, tehát ugyanúgy számolhatunk tovább, mint a binomiális eloszlásnál.
Mj.: Az $r = 1$ rendű negatív binomiális eloszlás éppen a geometriai, azaz $Negbin(1, p) = Geo(p)$.

Poisson eloszlás

Ha X eloszlása $(k, p_k)_{k=0,1,\ldots}$, ahol $p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, akkor X Poisson eloszlású. Az eloszlás paramétere a $\lambda > 0$ szám. Jelölésben: $X \sim Poisson(\lambda)$.

Mivel a p_k valószínűségeket most nem egy *modellből* számoltuk ki, meg kell mutatni, hogy a p_k sorozat valószínűségeloszlás:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = 1.$$

A Poisson eloszlás a gyakorlatban felbukkanó, fontos eloszlás. A következő tétel mutatja, hogy nagy rendű binomiális eloszlás jól közelíthető Poisson eloszlással.

6.1. Tétel. Tegyük fel, hogy $n \to \infty$ és $n \cdot p_n = \lambda$, azaz $p_n = \frac{\lambda}{n} \to 0$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Bizonyítás.

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Itt $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \longrightarrow 1$ ha $n \to \infty$, továbbá $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-\lambda}$ és $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \longrightarrow 1$. ■

Mj.: A tétel feltételei mellett az is igaz, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \longrightarrow 0.$

6.4. Példa. A gyakorlatban Poisson eloszlásúnak tekinthető például a sajtóhibák száma egy 20 oldalas szövegben, a telitalálatos szelvények száma egy adott heti lottóhúzáson, vagy a magyarországi autóbalesetek száma egy napon. ■

6.2. Eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

6.4. Definíció. Az X valószínűségi változó *eloszlásfüggvénye* az $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvény, ahol $F(x) = P(X < x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

Az eloszlásfüggvény segítségével kiszámolhatók a $P(X \in B)$ valószínűségek. A legegyszerűbb eset, ha B (esetleg elfajult) intervallum vagy félegyenes. Szükség lesz a következő lemmára.

6.1. Lemma. (Folytonossági lemma) Legyen $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$ események monoton csökkenő sorozata, és $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$. Ekkor $P(B_i) \longrightarrow 0$ ha $i \longrightarrow \infty$.

Bizonyítás. Tekintsük a B_1 esemény következő diszjunkt felbontását: $B_1 = (B_1 \setminus B_2) \cup (B_2 \setminus B_3) \cup \cdots$. A valószínűség additivitása miatt tehát

$$P(B_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i \setminus B_{i+1}) = \sum_{i=1}^{\infty} (P(B_i) - P(B_{i+1})) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (P(B_i) - P(B_{i+1})) =$$
$$\lim_{n\to\infty} (P(B_1) - P(B_{n+1})) = P(B_1) - \lim_{n\to\infty} P(B_{n+1}).$$

Ebből adódik, hogy $\lim_{n\to\infty} P(B_{n+1}) = 0$. ■

6.1. Feladat. (Folytonossági lemma átfogalmazása) Legyen $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$ és $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B$. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{i\to\infty} P(B_i) = P(B)$.

Visszatérve a félegyenesek és intervallumok valószínűségére:
a) $P(X < b) = F(b)$.
b) $P(a \le X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a)$.
c) $P(X \ge a) = 1 - F(a)$.
d) $P(X \le b) = \lim_{x \searrow b} F(x) = F(b + 0)$: legyen ugyanis $x_n \searrow b$ (azaz $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \cdots$, $x_n \longrightarrow x$), és $B_n = \{b < X < x_n\}$. Ezekre teljesül $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$ és $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$, így a lemma szerint $P(B_n) \longrightarrow 0$. Továbbá $F(x_n) = P(X < x_n) = P(X \le b) + P(B_n)$, így $P(X \le b) = \lim F(x_n) = F(b + 0)$.
e) $P(X > a) = 1 - F(a + 0)$.
f) $P(a < X < b) = F(b) - F(a + 0)$.
g) $P(a \le X \le b) = F(b + 0) - F(a)$.
h) $P(X = b) = F(b + 0) - F(b)$.

6.2. Tétel. Legyen F egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor
1) F monoton nemcsökkenő, azaz $a < b$-re $F(a) \le F(b)$.
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.
3) F balról folytonos, azaz ha $x_n \nearrow x$, akkor $F(x_n) \to F(x)$.

Bizonyítás.
1) $a < b$-re $\{X < a\} \subseteq \{X < b\}$, így $F(a) \le F(b)$.
2) Az elsőhöz: Legyen $x_n \searrow -\infty$ és $B_n = \{X < x_n\}$. A B_n sorozatra alkalmazható a lemma, tehát $F(x_n) = P(B_n) \to 0$. A másodikhoz: Legyen $x_n \nearrow \infty$ és $B_n = \{X \ge x_n\}$. A B_n sorozatra alkalmazható a lemma, tehát $1 - F(x_n) = P(B_n) \to 0$.
3) Legyen $B_n = \{x_n \le X < x\}$, ezekre alkalmazható a lemma, tehát $F(x) - F(x_n) = P(B_n) \longrightarrow 0$. ■

Mj.: Ha egy F függvényre teljesülnek a fenti feltételek, akkor létezik hozzájuk X valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye éppen F.

Milyen kapcsolatban áll egymással egy X *diszkrét* valószínűségi változó eloszlása és eloszlásfüggvénye? Könnyű látni, hogy az (x_i, p_i) eloszlású diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye lépcsős, azaz az x_i értékekben szakadása van, az ugrás nagysága éppen p_i, és két szomszédos x_i érték között az eloszlásfüggvény konstans.

6.2. Feladat. Rajzoljuk fel a következő diszkrét valószínűségi változók eloszlásfüggvényét!
a) X egy dobókockával dobott érték.
b) X három érmedobásból a fejek száma. ■

Diszkrét valószínűségi változók esetében kényelmesebb az eloszlással dolgozni, mint az eloszlásfüggvénnyel. Az F függvény inkább a folytonos változók esetében hasznos.

6.5. Definíció. a) X *folytonos* valószínűségi változó, ha az F eloszlásfüggvény (mindenhol) folytonos. Ez azzal ekvivalens, hogy $P(X = x) = 0$ minden x-re.
b) X *abszolút folytonos* valószínűségiváltozó, ha van olyan f függvény, melyre $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Ekkor az f függvényt az X ***sűrűségfüggvényének*** nevezzük.

A gyakorlatban használt valószínűségi változók majdnem mindig vagy diszkrétek, vagy abszolút folytonosak. Abszolút folytonos esetben F (majdnem mindenhol) differenciálható, és $f(x) = F'(x)$.

6.3. Tétel. Legyen f egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Ekkor
1) $f(x) \geqslant 0$.
2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Bizonyítás.
1) Mivel F monoton növő, így deriváltja nemnegatív.
2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} F(y) = 1.$ ∎

Mj.: Ha egy f függvényre teljesülnek a fenti tulajdonságok, akkor létezik hozzájuk X valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye éppen f.

A sűrűségfüggvény segítségével is kiszámolhatók a $P(X \in B)$ valószínűségek. A legegyszerűbb eset megint az, amikor B intervallum (vagy félegyenes). Most

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

A helyzet tehát egyszerűbb, mivel $<$ és $\leq$ között nincs különbség.

6.3. Nevezetes abszolút folytonos eloszlások

Egyenletes eloszlás

Az X egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon, ha sűrűségfüggvénye: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x < b, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

Jelölésben: $X \sim E(a, b)$.

Ellenőrzés: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = 1.$

X eloszlásfüggvénye: $\displaystyle F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x-a}{b-a}$, ha $a \leqslant x \leqslant b$.

Továbbá $P(c < X < d) = \dfrac{d-c}{b-a}$, azaz egy szakasz valószínűsége a hosszával arányos. Ezért az egyenletes eloszlás annak felel meg, hogy az (a, b) intervallumból „véletlenszerűen” választunk egy pontot.

Exponenciális eloszlás

Az X exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

Jelölésben: $X \sim Exp(\lambda)$.

Ellenőrzés: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1.$

X eloszlásfüggvénye: $\displaystyle F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{\lambda x} + 1$, ha $x \geq 0$.

6.4. Tétel. (Exponeniális eloszlás örökifjú tulajdonsága) Legyen $X \sim Exp(\lambda)$. Ekkor minden x és z pozitív számra teljesül, hogy

$$P(X > x + z \mid X > x) = P(X > z).$$

Bizonyítás.

$$P(X > x + z \mid X > x) = \frac{P(X > x + z)}{P(X > x)} = \frac{1 - F(x + z)}{1 - F(x)} = \frac{e^{-\lambda(x+z)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda z} = 1 - F(z) = P(X > z).$$

∎

Az örökifjú tulajdonság azt jelenti, hogy az idő minden pillanatban újrakezdődik, a múlt nincs hatással a jövőbeli eseményekre. Megmutatható, hogy a folytonos eloszlások közül csak az exponenciális eloszlás rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Ennek alapján a következő valószínűségi változók modellezhetők pl. ezponenciális eloszlással:
a) Mikor fut be az első hívás egy telefonközpontba.
b) Mikor szakad el először a szál a szövőszéken.
c) Mennyit kell várnia az autóstopposnak, amíg felveszik.

6.3. Feladat. Mutassuk meg, hogy a diszkrét eloszlások közül a geometriai eloszlás örökifjú tulajdonságú.

Normális eloszlás

Az X standard normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Jelölésben: $X \sim N(0,1)$.

Vegyük észre, hogy a fenti sűrűségfüggvényt most ϕ-vel jelöltük. Ezt a speciális jelölést a standard normális eloszlás fontossága indokolja. Most nem olyan könnyű ellenőrizni, hogy ϕ integrálja 1, mivel a primitív függvény nem adható meg zárt alakban.

6.5. Tétel. $\phi(x)$ sűrűségfüggvény.

Bizonyítás. Kell: $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Trükk: az integrál négyzetét fogjuk kiszámolni:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{(a)}{=}$$
$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\ \mathrm{d}\rho \mathrm{d}r = \int_0^{\infty} r \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} \mathrm{d}r = \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 1.$$

(a) integráltranszformációval: $x = r\cdot\cos\rho$; $y = r\cdot\sin\rho$; $x^2+y^2 = r^2$

$$\left|\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\rho} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\rho} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \cos\rho & -r\cdot\sin\rho \\ \sin\rho & r\cdot\cos\rho \end{pmatrix}\right| = \cos\rho\cdot r\cos\rho - (-r\cdot\sin\rho\cdot\sin\rho) = r. \quad \blacksquare$$

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\,\mathrm{d}t$. Ez nem adható meg zárt alakban, értékeit pozitív x-ekre táblázatba foglalták, negatív x-ekre pedig a $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$ összefüggésből kapjuk az értékeket.

6.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy ϕ páros függvény, egyetlen lokális maximumhelye a 0-ban van, inflexiós pontjai pedig a ± 1. Vezessük le továbbá a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ összefüggést.

Mj.: Legyen $X \sim N(0,1)$. Ekkor

$$P(|X| < 1) \approx 0.70, \quad P(|X| < 2) \approx 0.95 \quad P(|X| < 3) \approx 0.99.$$

Az X normális eloszlású $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\phi(\frac{x-m}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Ez azzal ekvivalens, hogy $X = \sigma Y + m$ alakú, ahol $Y \sim N(0,1)$.
Jelölésben: $X \sim N(m,\sigma)$.

Mj.: Ha $Y \sim N(0,1)$, és $X = \sigma Y + m$, ahol $\sigma < 0$, akkor $Y \sim N(m, -\sigma)$, mert ha Y standard normális, akkor $-Y$ is az.

Láttuk tehát, hogy az általános normális eloszlást a standard normális eloszlásból származtatjuk lineáris transzformációval. Általában is megkérdezhető, hogy ha az abszolút folytonos eloszlású X eloszlásfüggvénye F, sűrűségfüggvénye pedig f, akkor az $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$ lineáris transzformáltnak hogyan számolhatjuk ki G eloszlásfüggvényét és g sűrűségfüggvényét. A választ a következő számolás adja meg:

$$G(x) = P(Y < x) = P(aX + b < x) = \begin{cases} P(X < \frac{x-b}{a}) = F(\frac{x-b}{a}) & \text{ha} \quad a > 0, \\ P(X > \frac{x-b}{a}) = 1 - F(\frac{x-b}{a}) & \text{ha} \quad a < 0. \end{cases}$$

$$g(x) = G'(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

6.5. Feladat. a) Adjuk meg $Y = aX + b$ eloszlását $(a \neq 0)$, ha i) $X \sim E(c, d)$, ii) $X \sim Exp(\lambda)$.
b) Legyen $X \sim N(0, 1)$. Adjuk meg $Y = X^2$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

7. Valószínűségi vektorváltozók

Gyakran nem csak egy valószínűségi változó érdekel minket, hanem szeretnénk több valószínűségi változó együttes viselkedését tanulmányozni.

7.1. Definíció. Az $X = (X_1, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ függvény *valószínűségi vektorváltozó* (vvv), ha teljesül rá a következő: $\forall a_i < b_i$ $(i = 1 \dots n)$ valós számokra $\{\, \omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \,\} \in \mathcal{A}$.

Mj.: A fenti definíció biztosítja, hogy X_i valószínűségi változó minden i-re.

7.2. Definíció. Az X vvv eloszlásfüggvénye az $F : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ függvény, melyre $F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n)$.

7.1. Tétel. Legyen X vvv, eloszlásfüggvénye F. Ekkor
1) F mindegyik változójában monoton nemcsökkenő, azaz minden i-re, ha $a_i < b_i$, akkor $F(a_1, \dots, a_n) \leq F(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$.
2) teljesül, hogy

$$\lim_{\min x_i \to \infty} F(x_1, ..., x_n) = 1, \quad \lim_{\min x_i \to -\infty} F(x_1, ..., x_n) = 0.$$

3) F mindegyik változójában balról folytonos.
4) minden $a_i < b_i$ $(i = 1, \dots, n)$ számpárra

$$\sum_{\epsilon} (-1)^{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i} F(c_1, ..., c_n) \geq 0,$$

ahol $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, és $c_i = \epsilon_i a_i + (1 - \epsilon_i) b_i$.

Bizonyítás. Az 1)-3) tulajdonságokat ugyanúgy bizonyíthatjuk, mint egy dimenzióban. A 4) tulajdonság onnan következik, hogy az $F(c_1, \dots, c_n)$ mennyiségek fenti összege éppen a

$$P\left(X \in \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i)\right)$$

valószínűség(ezt a szita formula segítségével lehet bizonyítani), és így nemnegatív. ■

Nézzük meg speciálisan az $n = 2$ esetet! A 4) tulajdonság kiírva:

$$F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) \geqslant 0 \quad (a_1 < b_1, a_2 < b_2).$$

Legyen $F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x + y \leqslant 0 \\ x + y & \text{ha } 0 < x + y < 1 \\ 1 & \text{ha } x + y \geqslant 1 \end{cases}$

Erre teljesül 1)-3), viszont $F(1, 1) - F(1, 0) - F(0, 1) + F(0, 0) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1$, így F nem lehet eloszlásfüggvény.

Mj.: Ha F rendelkezik az (1)-(4) tulajdonságokkal, akkor létezik X vvv, melynek eloszlásfüggvénye éppen F.

7.2. Tétel. (Peremeloszlásfüggvény) Jelölje az X vvv eloszlásfüggvényét F, és legyen F_i az X_i koordináta eloszlásfüggvénye. Ekkor

$$F_i(x_i) = \lim_{\substack{x_j \to \infty \\ j \neq i}} F(x_1, ..., x_n).$$

Bizonyítás. Válasszunk tetszőlegesen $x_j^N \to \infty$, $j \neq i$ sorozatokat, x_i pedig legyen fix. Legyen még

$$\{X_1 < x_1^N, \ldots, X_{i-1} < x_{i-1}^N, X_i < x_i, X_{i+1} < x_{i+1}^N, \ldots, X_n < x_n^N\} = B_N.$$

Könnyen látszik, hogy a B_N események bővülnek, uniójuk pedig a $B = \{X_i < x_i\}$ esemény. A folytonossági lemma átfogalmazása szerint tehát

$$F(x_1^N, \ldots, x_{i-1}^N, x_i, x_{i+1}^N, \ldots, x_n) = P(B^N) \to P(B) = F_i(x_i).$$

■

Mj.: az $(X_1, \ldots, X_n)$ vektor tetszőleges részvektorának eloszlásfüggvényét úgy kapjuk a teljes vektor eloszlásfüggvényéből, hogy a „felesleges” változókkal végtelenhez tartunk.

A vektorváltozóknak is két fő típusuk van, a diszkrétek és az abszolút folytonosak.

7.3. Definíció. Az $X = (X_1, ..., X_n)$ vvv *diszkrét*, ha megszámlálható sok értéket vehet fel. Ekkor X eloszlása megadható az $(x^i, p^i)_{i=1,2,...}$ sorozatokkal, ahol $x^i \in \mathbb{R}^n$ a lehetséges értékek, és $p^i = P(X = x^i)$.

7.1. Példa. (Polinomiális eloszlás) Tegyük fel, hogy egy kísérletnek r lehetséges kimenetele lehet, $A_1, ..., A_r$, és $P(A_i) = p_i$. A kísérletet n-szer elvégezve (egymástól függetlenül), jelölje X_i, hogy hányszor következett be az A_i esemény. Ekkor $X = (X_1, ..., X_r)$ eloszlása n rendű, $p = (p_1, ..., p_r)$ paraméterű polinomiális eloszlás. Képlettel kifejezve

$$P(X_1 = k_1, ..., X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r},$$

ha $k_i \geqslant 0$ és $\sum_{i=1}^r k_i = n$, egyébként pedig 0.
Pl.: egy dobókockával 100-szor dobunk, legyen $X = (X_1, \ldots, X_6)$, ahol X_i jelöli a dobott i-esek számát. Ekkor X polinomiális eloszlású, rendje 100, paramétere $p = (1/6, \ldots, 1/6)$. ■

7.2. Példa. Egy pakli magyar kártyából kivesszük a 4 királyt és a 4 ászt. Ebből a 8 lapból kihúzunk kettőt visszatevés nélkül. Legyen X a kihúzott pirosak száma, Y a kihúzott ászok száma. Adjuk meg (X, Y) eloszlását!
Ha az eloszlás két dimenziós, és a felvett értékek száma kevés, legegyszerűbb táblázattal megadni az eloszlást. Klasszikus valószínűségi mezőnk van. Összes eset száma: $\binom{8}{2} = 28$
Az eloszlás táblázata:

X/Y	0	1	2	$\sum$
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
1	$\frac{3}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{12}{28}$
2	0	$\frac{1}{28}$	0	$\frac{1}{28}$
$\sum$	$\frac{6}{28}$	$\frac{16}{28}$	$\frac{6}{28}$	1

X illetve Y eloszlását peremeloszlásnak nevezzük, mivel a táblázat peremére írhatók, pl.:
$P(X = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) = \frac{3}{28} + \frac{9}{28} + \frac{3}{28} = \frac{15}{28}$.
Általában, diszkrét vektorváltozó részvektorának eloszlását (valószínűségeit) úgy kapjuk meg, ha a „felesleges” változók szerint összegzünk:

$$P(X_{i_1} = x_{i_1}, ..., X_{i_k} = x_{i_k}) = \sum_{x_i : i \notin \{i_1, ..., i_k\}} P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$$

■

7.4. Definíció. Az $X = (X_1, ..., X_n)$ vvv eloszlása *abszolút folytonos*, ha F előáll integrál-alakban, azaz van olyan n-változós f függvény, melyre

$$F(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, ..., t_n)\, \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n\,.$$

Ekkor f az X (együttes/n-dimenziós) sűrűségfüggvénye.

7.3. Tétel.
1) Ha $(X_1, ..., X_n)$ abszolút folytonos, akkor $F(x_1, ..., x_n)$ folytonos
2) Ott, ahol f folytonos, F-nek $\exists$ az n-szeres vegyes parciális deriváltja, és
$\dfrac{\partial^n F(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = f(x_1, \ldots, x_n)$
3) $f \geqslant 0$, és $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = 1$
4) Minden, a gyakorlatban előforduló n-dimenziós $\mathcal{B}$ halmazra:
$P((x_1, ..., x_n) \in \mathcal{B}) = \int \cdots \int_{\mathcal{B}} f(x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$

Spec: $\mathcal{B} = \displaystyle\mathop{\times}_{i=1}^{n} [a, b_i)$, akkor

$$P((X_1, ..., X_n) \in \mathop{\times}_{i=1}^{n} [a_i, b_i]) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1$$

5) Az $(X_{i_1}, ..., X_{i_k})$ részvektor sűrűségfüggvénye
$f_{i_1,...,i_k}(x_{i_1}, ..., x_{i_k}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}x_{j_1} \cdots \mathrm{d}x_{j_{n-k}}$
ahol $\{1, ..., n\} = \underbrace{\{i_1, ..., i_k\} \cup \{j_1, ..., j_{n-k}\}}_{\text{diszjunkt unió}}$, azaz a „felesleges” változók szerint integrálunk.

Példa: $(X_1, ..., X_n)$ egyenletes eloszlású egy $\mathcal{B}$ halmazon, ha $f(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{B}|} & \text{ha } (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{B} \\ 0 & \text{ha } (x_1, ..., x_n) \notin \mathcal{B} \end{cases}$
ahol $|\mathcal{B}|$ a $\mathcal{B}$ halmaz n dimenziós térfogata:
$|\mathcal{B}| = \displaystyle\int \cdots \int_{\mathcal{B}} 1\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$
$P((X_1, ..., X_n) \in \mathcal{A}) = \displaystyle\int \cdots \int_{\mathcal{A}} f(x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int \cdots \int_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} \frac{1}{|\mathcal{B}|}\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|}{|\mathcal{B}|}$
Példa: Legyen (X, Y) egyenletes eloszlású a $\mathcal{B}$ háromszögön. $f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{ha } x, y \geqslant 0 \text{ és } x + y \leqslant 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

X sűrűségfüggvénye $f_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y = \int_0^{1-x} 2\, \mathrm{d}y = 2(1 - x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$

X eloszlásfüggvénye $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \int_0^x 2(1 - t)\, \mathrm{d}t & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$
Y eloszlása ugyanaz, mint X-é (szimmetria miatt)
X eloszlásfüggvénye: $F_X(x) = P(X < x) =?$
$\mathcal{A} = \{(s, t) | s < x\}$

$$P(X < x) = P((X, Y) \in \mathcal{A}) = \frac{|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|}{|\mathcal{B}|} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 - (1 - x)^2 = 1 - (1 - 2x + x^2) = 2x - x^2$$

8. Függetlenség - valószínűségi változókra

8.1. Definíció. $X_1, ..., X_n$ független valószínűségi változók, ha
$P(X_1 < x_1, ..., X_n < x_n) = P(X_1 < x_1) \cdots P(X_n < x_n)$ $\forall x_1, ..., x_n$-re, azaz
$F(x_1, ..., x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$
Belátható, hogy diszkrét esetben, azaz ha $(X_1, ..., X_n)$ diszkrét, akkor ezzel ekvivalens:

$P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n)$ $\forall x_1, ..., x_n$-re.

Példa: 4 ász, 4 király: X és Y nem független
$0 = P(X = 2, Y = 2) \neq P(X = 2) \cdot P(Y = 2) = \frac{1}{28} \cdot \frac{6}{28}$
Keresünk olyan (X, Y) párt, amelynek a marginálisai ugyanazok, de X és Y független.

$X \backslash Y$	0	1	2	$\sum$
0	$\frac{15}{28} \cdot \frac{6}{28}$	$\frac{15}{28} \cdot \frac{16}{28}$	$\frac{15}{28} \cdot \frac{6}{28}$	$\frac{15}{28}$
1	$\frac{10}{28} \cdot \frac{6}{28}$	$\frac{12}{28} \cdot \frac{16}{28}$	$\frac{12}{28} \cdot \frac{6}{28}$	$\frac{12}{28}$
2	$\frac{1}{28} \cdot \frac{6}{28}$	$\frac{1}{28} \cdot \frac{16}{28}$	$\frac{1}{28} \cdot \frac{6}{28}$	$\frac{1}{28}$
$\sum$	$\frac{6}{28}$	$\frac{16}{28}$	$\frac{6}{28}$	1

Kihúzunk két lapot.
X: pirosak száma.
Visszatesszük, és megint húzunk két lapot.
Y: ászok száma.

8.1. Tétel. Ha $(X_1, ..., X_n)$ abszolút folytonos, akkor:
$X_1, ..., X_n$ függetlenek $\Leftrightarrow f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$

Biz.: $\Rightarrow$: $F(x_1, ..., x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$

$$f(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

$\Leftarrow$: $F(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_1(t_1) \cdots f_n(t_n)\,\mathrm{d}t_n \cdots \mathrm{d}t_1 = \int_{-\infty}^{x_1} f_1(t_1)\,\mathrm{d}t_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_n(t_n)\,\mathrm{d}t_n = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$

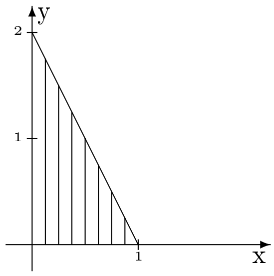
Példa: (X, Y) egyenletes $\triangle$-n

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{ha } x, y \geqslant 0 \text{ és } x + y \leqslant 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & \text{ha } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Tehát: $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$



Keressünk olyan kétváltozós sűrűségfüggvényt, melynek marginálisai ugyanezek, de a két kooridnáta független! Válasz:

$$h(x,y) = \begin{cases} 4(1-x)(1-y) & \text{ha } 0 \leqslant x, y \leqslant 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

8.2. Tétel.
1) ha $X_1, ..., X_n$ függetlenek, és $g_1, ..., g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, akkor $g_1(X_1), ..., g_n(X_n)$ is függetlenek
2) ha $X_1, ..., X_n$ függetlenek, és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvény, akkor $g(X_1, ..., X_k)$; $X_{k+1}, ..., X_n$ is függetlenek

Biz. nélk.

9. Konvolúció

9.1. Definíció. $X_1, ..., X_n$ függetlenek, X_i eloszlása (eloszlásfüggvénye) F_i. Ekkor $X_1 + \cdots + X_n$ H eloszlása az F_i eloszlások konvolúciója, jel. $H = F_1 * \cdots * F_n$.

9.1. Diszkrét eset

9.1. Tétel. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek és nemnegatív egész értékűek, továbbá $Z = X + Y$. Ekkor

$$P(Z = k) = \sum_{j=0}^{k} P(X = j, Y = k - j) = \sum_{j=0}^{k} P(X = j) \cdot P(Y = k - j)$$

Példa: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
$Y \sim \text{Poisson}(\mu)$
függetlenek, és $Z = X + Y$

$$P(Z = k) = \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j \mu^{k-j}}_{(\lambda+\mu)^k} = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} \Rightarrow Z \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$$

Példa: $X \sim \text{Binom}(n, p)$
$Y \sim \text{Binom}(m, p)$
függetlenek, és $Z = X + Y$

$$P(Z = k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \cdot \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{m-(k-j)} =$$

$$= p^k (1-p)^{(n+m)-k} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}}_{\binom{n+m}{k}} \Rightarrow Z \sim \text{Binom}(n + m, p)$$

Példa: $X \sim \text{Geom}(p)$
$Y \sim \text{Geom}(p)$
függetlenek, és $Z = X + Y \sim \text{NegBin}(2, p)$

Példa: $X \sim \text{NegBin}(r, p)$
$Y \sim \text{NegBin}(s, p)$
függetlenek, és $Z = X + Y \sim \text{NegBin}(r + s, p)$

9.2. Abszolút folytonos eset

9.2. Tétel. Legyen X: F(x),f(x) / Y: G(x),g(x) függetlenek, és Z=X+Y.

Ekkor $H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) F(z-y) \mathrm{d}y$ és $h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(z-y) \mathrm{d}y$

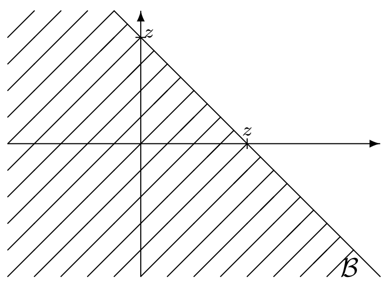
Biz: $H(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z) =$

$$= P((X,Y) \in \mathcal{B}) \overset{*}{=} \int_{\mathcal{B}} f(x) g(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f(x) g(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{z-y} f(x) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) F(z-y) \, \mathrm{d}y$$

$$h(z) = H'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(z-y) \, \mathrm{d}y$$



$*$ (X,Y) sűrűségfüggvénye $f(x)g(y)$ a függetlenség miatt

Példa: $\begin{array}{l} N_1 \sim N(m_1, \sigma_1) \\ N_2 \sim N(m_2, \sigma_2) \end{array}$ függetlenek $\begin{array}{l} N_1 = \sigma_1 X_1 + m_1 \\ N_2 = \sigma_2 X_2 + m_2 \end{array}$ ahol $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ és függetlenek

$N = N_1 + N_2 = \underbrace{\sigma_1 X_1 + \sigma_2 X_2}_{Z} + m_1 + m_2$

$\sigma_1 X_1$ sűrűségfüggvénye: $f(v) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\dfrac{v^2}{2\sigma_1^2}}$

$\sigma_2 X_2$ sűrűségfüggvénye: $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \cdot e^{-\dfrac{y^2}{2\sigma_2^2}}$

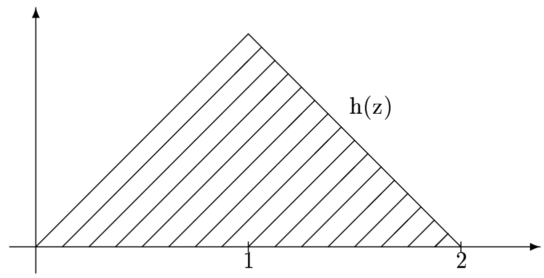
Ekkor $h(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(z-y)\,\mathrm{d}y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot e^{-\dfrac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow Z \sim N(0, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$ és $N \sim N(m_1+m_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$

Példa: $X, Y \sim E(0,1)$ függetlenek, és $Z = X + Y$

kell: $\begin{array}{l} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 \leqslant z - y \leqslant 1 \end{array} \Leftrightarrow y \geqslant z-1 \;\; ; \;\; y \leqslant z \;\; ; \;\; 0 \leqslant z \leqslant 2$

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(z-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\max(0,z-1)}^{\min(1,z)} 1\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \displaystyle\int_0^z 1\,\mathrm{d}y = z & \text{ha } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ \displaystyle\int_{z-1}^1 1\,\mathrm{d}y = 2-z & \text{ha } 1 \leqslant z \leqslant 2 \end{cases}$$



10. Várható érték

$X \quad x_1, x_2, \ldots, x_k \longleftarrow$ lehetséges értékek

$\quad\;\; p_1, p_2, \ldots, p_k \longleftarrow$ valószínűségek

n kísérletet végzünk

a kapott értékek átlaga: $\dfrac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k}{n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dfrac{n_i x_i}{n} \approx p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k$

n_i: hányszor kaptunk x_i értéket

10.1. Definíció. Az X diszkrét valószínűségi változó várható értéke: $E(X) = \sum_i x_i p_i$, feltéve, hogy a sor abszolút konvergens.

Példa: Kockadobás várható értéke

$X:$	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$

10.1. Várható érték tulajdonságai

1) Ha X korlátos, akkor $E(X)$ létezik

Biz: $|x_i| \leqslant K$

$$\sum_i |x_i|\, p_i \leqslant \sum_i K p_i = K \sum_i p_i = K \cdot 1 = K \Rightarrow \text{a sor absz.konv.}$$

2) Ha $a \leqslant X \leqslant b$, akkor $a \leqslant E(X) \leqslant b$

Biz: $E(X) = \sum_i x_i p_i \leqslant \sum_i b p_i = b$

3) Ha X kostans, azaz $P(X = c) = 1$, akkor $E(X) = c \cdot 1 = c$

4) Ha $E(X)$ létezik, akkor $E(cX)$ is létezik, és $E(cX) = c \cdot E(X)$

Biz: $\begin{matrix} cx_1, & cx_2, & \dots \\ p_1, & p_2, & \dots \end{matrix}$

$$E(cX) = \sum_i (cx_i) p_i = c \cdot \sum_i x_i p_i = cE(X)$$

5) Legyenek $X_1, \dots, X_n$ valószínűségi változók és $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor

$$E(g(X_1, \dots, X_n)) = \sum_{(x_1, \dots, x_n)} g(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

ha a jobb oldali sor abszolút konvergens

6) Ha $E(X)$ és $E(Y)$ létezik, akkor $E(X + Y)$ is létezik, és $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Biz: $E(X) + E(Y) = \sum_i x_i p_i + \sum_j y_j q_j =$

$$= \sum_i x_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) + \sum_j y_j \sum_i P(X = x_i, Y = y_j) =$$

$$= \sum_{i,j} (x_i + y_j) P(X = x_i, Y = y_j) \stackrel{5)}{=} E(X + Y) \quad ; \quad (g(x, y) = x + y)$$

Példa: $E(aX + b) \stackrel{6)}{=} E(aX) + E(b) \stackrel{3)}{=} E(aX) + b \stackrel{4)}{=} aE(X) + b$

Példa: tfh $X \leqslant Y \Rightarrow E(X) \leqslant E(Y)$

$X - Y \leqslant 0 \stackrel{2)}{\Rightarrow} E(X - Y) \leqslant 0$

$E(X + (-1)Y) = E(X) + E((-1)Y) = E(X) + (-1)E(Y) \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow E(X) \leqslant E(Y) \surd$

7) Ha X és Y függetlenek $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Biz: $E(X)E(Y) = \sum_{i,j} x_i p_i y_j q_j \stackrel{\text{fgln}}{=} \sum_{i,j} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = E(XY)$

Megj.: fordítva nem igaz, azaz $E(XY) = E(X)E(Y) \not\Rightarrow X$ és Y függetlenek

10.2. Definíció. Legyen X diszkrét valószínűségi változó, A esemény, melyre $P(A) > 0$. X feltételes várható értéke A-ra nézve:

$$E(X|A) = \sum_i x_i P(X = x_i | A),$$

ha a sor abszolút konvergens.

10.1. Tétel. A teljes várható érték tétele. Legyen X diszkrét valószínűségi változó, A_k pedig teljes eseményrendszer. Ekkor

$$E(X) = \sum_k E(X|A_k) P(A_k).$$

10.2. Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke

1) $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

$x_i = i \;\; ; \;\; i = 0,\dots,n \;\; ; \;\; p_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} =$$

$$= n \cdot \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i} \overset{i-1:=j}{=} n \cdot p \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}}_{1} = n \cdot p$$

másik módszer: $X = X_1 + \dots + X_n \;\; ; \;\; X_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i. \text{ kísérletre bekövetkezett az esemény} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

$X_i \sim \mathrm{Ind}(p) \;\Rightarrow\; E(X_i) = p$

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots E(X_n) = \overbrace{p}^{1} + \dots + \overbrace{p}^{n} = n \cdot p$$

2) $X \sim \mathrm{Hipgeo}(N, M, n)$ Hipergeometriai eloszlás

$X: \;\; x_i = 0,\dots,n$

$$p_i = \frac{\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

$X = X_1 + \dots + X_n \;\; ; \;\; X_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i. \text{ kísérletre bekövetkezett az esemény} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

$X_i \sim \mathrm{Ind}(\frac{M}{N})$

$$P(i.\ \text{jó}) = \frac{M \cdot \binom{N-1}{n-1}(n-1)!}{\binom{N}{n} n!} = \frac{M}{N}$$

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots E(X_n) = \frac{M}{N} + \dots + \frac{M}{N} = n \cdot \frac{M}{N}$$

3) $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$

$X: \;\; x_i = 0, 1, \dots$

$$p_i = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \overset{i-1:=j}{=} \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \overbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}^{e^{\lambda}} = \lambda$$

4) $X \sim \mathrm{Geo}(p)$

$X: \;\; x_i = 1, 2, \dots$

$p_i = (1-p)^{i-1} \cdot p$

tfh.: X lehetséges értékei $\begin{array}{ccc} 0, & 1, & \dots \\ p_0, & p_1, & \dots \end{array}$

$$E(X) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} P(X > i)$$

$$\begin{array}{llll} p_1 & & & \longleftarrow P(X>0) \\ p_2 & p_2 & & \longleftarrow P(X>1) \\ p_3 & p_3 & p_3 & \longleftarrow P(X>2) \end{array}$$

$P(X > i) = (1-p)^i$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

Másik módszer: teljes várható érték tételével.

$A = \{$ az első kísérletre bekövetkezett az esemény $\}$.

$E(X) = E(X|A)P(A) + E(X|\overline{A})P(\overline{A}) = 1 \cdot p + (1 + E(X))(1-p)$

ebből $E(X) = 1/p$.

5) $X \sim \mathrm{NegBin}(r,p)$

$X: \quad x_i = r, r+1, \ldots$

$\qquad p_i = \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}$

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$

$X_j = j-1$. bekövetkezés után hányadjára következett be j.-szer

$X_j \sim \mathrm{Geo}(p) \Rightarrow E(X) = r \cdot \dfrac{1}{p} = \dfrac{r}{p}$

6) Névjegykártya

$X = X_1 + \cdots + X_n \quad ; \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i. \text{ hallgató a sajátját kapta} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

$P(X_i = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$

$E(X_i) = \dfrac{1}{n}$

$E(X) = n \cdot \dfrac{1}{n} = 1$

10.3. Abszolút folytonos eset

X sűrűségfüggvénye $f(x)$

10.3. Definíció. X várható értéke $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)$, ha ez az integrál abszolút konvergens. Analógia a diszkrét esettel: $\begin{array}{ccl} x & \leftarrow & \text{lehetséges érték} \\ f(x) & \leftarrow & \text{"valószínűség"} \end{array}$

Könnyű látni, hogy a tulajdonságok közül igaz marad 1),2),4),5'),6),7), ahol

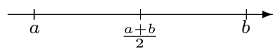
5') $(X_1, \ldots, X_n)$ absz. folyt., $f(x_1, \ldots, x_n)$ sűrűségfüggvény, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor

$$E(g(X_1, \ldots, X_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

10.4. Nevezetes abszolút folytonos eloszlások várható értéke

1) $X \sim \mathrm{E}(a,b)$

$$E(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$$



2) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leqslant 0 \end{cases}$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}x \overset{*}{=} \underbrace{\left[x \cdot (-e^{-\lambda x})\right]_0^{\infty}}_{0} + \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$* : \ u \sim x \ ; \ v' \sim e^{-\lambda x} \Rightarrow v = -e^{-\lambda x}$

3) $X \sim \mathrm{N}(m, \sigma)$

$Y \sim \mathrm{N}(0,1)$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\substack{\text{páratlan} \\ \text{függvény}}} \,\mathrm{d}x = 0$$

$X = \sigma Y + m$

$E(X) = \sigma \cdot E(Y) + m = \sigma \cdot 0 + m = m$

11. Szórás, szórásnégyzet

11.1. Definíció.

$E\left[(X-E(X))^2\right]=D^2(X)$ az X szórásnégyzete

$D(X)=\sqrt{D^2(X)}$ az X szórása

Megj.: $D^2(X)$ véges $\Leftrightarrow E(X^2)$ véges

11.1. Szórásnégyzet tulajdonságai

1) $D^2(X)=E(X^2)-E(X)^2$

Biz.: $D^2(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]=E\left[X^2-2XE(X)+E(X)^2\right]=$
$=E(X^2)-E(2X\cdot E(X))+\underbrace{E(E(X)^2)}_{E(X)^2}=E(X^2)-E(X)^2$

2) $D^2(X)=0 \Leftrightarrow P(X=c)=1$ (azaz konstansfüggvény)

Biz.: $\Leftarrow$: $X-E(X)=c-c=0$ 1 valószínűséggel $\Rightarrow$
$\Rightarrow (X-E(X))^2=0$ 1 valószínűséggel $\Rightarrow$
$\Rightarrow E\left[(X-E(X))^2\right]=0$

$\Rightarrow$: $E[\underbrace{(X-E(X))^2}_{\geqslant 0}]=0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow (X-E(X))^2=0$ 1 valószínűséggel $\Rightarrow$
$\Rightarrow X-E(X)=0$ 1 valószínűséggel $\Rightarrow$
$\Rightarrow X=E(X)=c$

3) $D^2(X+b)=D^2(X)$

Biz.: $(X+b)-E(X+b)=(X+b)-(E(X)+b)=X-E(X)$

4) $D^2(aX)=a^2D^2(X)$
$D(aX)=|a|\cdot D(X)$

Biz.: $E\left[(aX-E(aX))^2\right]=E\left[a^2(X-E(X))^2\right]=a^2D^2(X)$

5) $D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)$

ahol $\mathrm{cov}(X,Y)=E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]$ az X és az Y kovarianciája

elnevezés: X és Y korrelálatlanok, ha $\mathrm{cov}(X,Y)=0$

spec.: X,Y függetlenek, akkor korrelálatlanok is, mivel

$\mathrm{cov}(X,Y)=E\left[XY-E(X)Y-E(Y)X+E(X)E(Y)\right]=E(XY)-E(X)E(Y)$

Biz.: $D^2(X+Y)=E[(\underbrace{(X+Y)-E(X+Y)}_{(X-E(X))+(Y-E(Y))})^2]=$
$=E[(X-E(X))^2+(Y-E(Y))^2+2(X-E(X))(Y-E(Y))]$

5') $D^2(X_1+\cdots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}D^2(X_i)+2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{cov}(X_i,X_j)$

11.2. Nevezetes eloszlások szórásnégyzete

1) $X \sim \text{Indikátor}(p)$
$E(X) = p \quad ; \quad E(X^2) = p$ mert $X^2 = X \quad (0^2 = 0 \quad ; \quad 1^2 = 1)$
$D^2(X) = p - p^2 = p(1-p)$

2) $X \sim \text{Binom}(n, p)$
$X = X_1 + \cdots + X_n$
$X_i \sim \text{Indikátor}(p)$ és függetlenek
$D^2(X) = D^2(X_1) + \cdots + D^2(X_n) = n \cdot p(1-p)$

3) $X \sim \text{HipGeom}(N, M, n)$
$X = X_1 + \cdots + X_n$
$X_i \sim \text{Indikátor}\left(\frac{M}{N}\right)$

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i) + 2 \cdot \sum_{i<j} \text{cov}(X_i, X_j) = \\ &= n \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right) + 2\binom{n}{2}\left(\frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} - \left(\frac{M}{N}\right)^2\right) = n \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1} \end{aligned}$$

ahol $\text{cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$

$$X_iX_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } X_i = 1 \text{ és } X_j = 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$E(X_iX_j) = P(X_iX_j = 1) = \frac{M \cdot (M-1)}{N \cdot (N-1)}$$

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} - \frac{M}{N} \cdot \frac{M}{N}$$

4) $X \sim \text{Geom}(p)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{p} \\ E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1 - \underset{q}{p})^{k-1} \cdot \underset{1-q}{p} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\underbrace{(k+1)^2 - k^2}_{2k+1}) q^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2kq^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} q^k}_{\frac{1}{1-q}} = \frac{2q}{p} \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} p + \frac{1}{1-q} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2} \\ D^2(X) &= \frac{2q+p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

5) $X \sim \mathrm{NegBin}(r,p)$
$X = X_1 + \cdots + X_r$
$X_i \sim \mathrm{Geom}(p)$ és függetlenek

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^{r} D^2(X_i) = r \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

6) $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$
$k^2 = k(k-1) + k$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}_{E(X)=\lambda} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \lambda \overset{k-2:=j}{=} e^{-\lambda}\lambda^2 \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}}_{e^{\lambda}} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$D^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

7) $X \sim \mathrm{Egyenletes}(a,b)$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$D^2(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

8) $X \sim \mathrm{N}(m,\sigma)$
$X = \sigma Y + m$ ahol $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$

$$D^2(Y) = E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \underbrace{\left[x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{0} + \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\substack{\text{ez standard normális}\\ \text{sűrűségfüggvény}=1}} = 1$$

ahol $u \sim x$; $v' \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow v = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$D^2(X) = \sigma^2 D^2(Y) = \sigma^2$$

9) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \underbrace{\left[x^2 \cdot \left(-e^{-\lambda x}\right)\right]_0^{\infty}}_{0} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x}_{E(X)=\frac{1}{\lambda} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)} = \frac{2}{\lambda^2}$$

ahol $u \sim x^2$; $v' \sim \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow v = -e^{-\lambda x}$

$$D^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

12. Korreláció, kovariancia

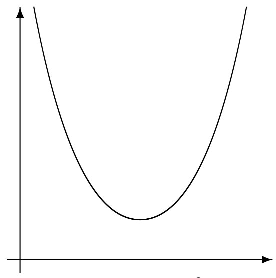
$$
\begin{array}{lll}
1) & \mathrm{cov}(X,Y) & = & E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\
2) & \mathrm{cov}(X,Y) & = & \mathrm{cov}(Y,X) \\
3) & \mathrm{cov}(X,b) & = & 0 \\
4) & \mathrm{cov}(X,X) & = & D^2(X) \\
5) & \mathrm{cov}(X,Y+Z) & = & \mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(X,Z) \\
6) & \mathrm{cov}(aX,Y) & = & a\cdot\mathrm{cov}(X,Y)
\end{array}
$$

12.1. Definíció. X és Y korrelációs együtthatója:
$R(X,Y) = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}$
Ha $D(X)=0$ vagy $D(Y)=0$ akkor $R(X,Y)=0$

12.1. Tétel. $|R(X,Y)| \leqslant 1$

másodfokú egyenlet λ-ban

Biz.: $0 \leqslant E[(U-\lambda V)^2] = E(U^2) - 2\lambda E(UV) + \lambda^2 E(V^2)\ \forall\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow (-2E(UV))^2 - 4E(V^2)E(U^2) \leqslant 0$
$E(UV)^2 \leqslant E(U^2)E(V^2)$
$|E(UV)| \leqslant \sqrt{E(U^2)E(V^2)}$
$|\mathrm{cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{D^2(X)}\cdot\sqrt{D^2(Y)} = D(X)D(Y)$



nincs mo.: diszkrimináns $(b^2-4ac)\leqslant 0$

12.2. Definíció. X standardizáltja: $X^* = \dfrac{X-E(X)}{D(X)}$. Erre $E(X^*)=0$; $D(X^*)=1$.

$R(X,Y) = E(X^*Y^*)$
köv.: $R(aX+b, cY+d) = \pm R(X,Y)$
Megj.: $R(X,Y)$ abszolút értéke a függőség erősségét mutatja
előjele pedig a függőség irányát mutatja

12.2. Tétel. $|R(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX+b$ 1 valószínűséggel ($a\neq 0$; $b\in\mathbb{R}$)
és $R=+1$ ha $a>0$
és $R=-1$ ha $a<0$

Biz.: $\Leftarrow$: $R(X,Y) = R(X,aX+b) = \dfrac{\text{cov}(X,aX+b)}{D(X)D(aX+b)} = \dfrac{a\cdot \overbrace{\text{cov}(X,X)}^{D^2(X)}+0}{D(X)\,|a|\,D(X)} = \dfrac{a}{|a|} = \pm 1$

$\Rightarrow$: tfh. $R(X,Y)=1$ $\quad (D^2(X^*) = E(X^{*2}) - E(X^*)^2)$

$$E[(X^*-Y^*)^2] = \overset{1}{E(X^{*2})} + \overset{1}{E(Y^{*2})} - \overset{2\cdot 1}{2E(X^*Y^*)} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $(X^*-Y^*)^2 = 0$ 1 valószínűséggel

$X^* = Y^*$ 1 valószínűséggel

$$\frac{X-E(X)}{D(X)} = \frac{Y-E(Y)}{D(Y)} \Rightarrow Y = \underbrace{\frac{D(Y)}{D(X)}}_{a} X + \underbrace{E(Y) - \frac{D(Y)}{D(X)}E(X)}_{b}$$

ha $R(X,Y) = -1$ akkor $E[(X^*+Y^*)^2] = 0$

Példa: n kockadobás

X: 6-osok száma

Y: páratlanok száma

$\text{cov}(X,Y) = ?$

$D(X) = \sqrt{n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}$ $\quad X \sim \text{Binom}(n,\frac{1}{6})$

$D(Y) = \sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}$ $\quad Y \sim \text{Binom}(n,\frac{1}{2})$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad X_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az i. dobás 6-os} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j \qquad Y_j = \begin{cases} 1 & \text{ha a j. dobás páratlan} \\ 0 & \text{egyébként (páros)} \end{cases}$$

$$\text{cov}(X,Y) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\text{cov}(X_i,Y_j) = -n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\text{cov}(X_i,Y_j) = \begin{cases} 0 & \text{ha } i\neq j\text{, mert } X_i \text{ és } Y_j \text{ ilyenkor függetlenek} \\ \text{cov}(X_i,Y_i) & \text{ha } i=j \end{cases}$$

$$\text{cov}(X_i,Y_i) = \underbrace{E(X_i,Y_i)}_{0} - E(X_i)E(Y_i) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}$$

$$R(X,Y) = \frac{-n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} = -\sqrt{\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Példa: X,Y függetlenek, azonos eloszlásúak $\Rightarrow D^2(X) = D^2(Y)$

$$R(X,X+Y) = \frac{\text{cov}(X,X+Y)}{D(X)D(X+Y)} = \frac{\text{cov}(X,X)+\overbrace{\text{cov}(X,Y)}^{0}}{D(X)\sqrt{D^2(X)+D^2(Y)}} = \frac{D^2(X)}{D(X)\sqrt{2}D(X)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

13. A Nagy Számok Törvényei

13.1. Tétel. Markov egyenlőtlenség:

Legyen $X \geqslant 0$ valószínűségi változó ; $E(X)$ létezik. Ekkor $P(X\geqslant K) \leqslant \dfrac{E(X)}{K}$.

Biz.: $\tilde{X} = \begin{cases} K & \text{ha } X \geqslant K \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

$\tilde{X} \leqslant X$; $E(\tilde{X}) \leqslant E(X)$

$E(X) \geqslant E(\tilde{X}) = K\cdot P(\tilde{X}=K) + 0\cdot P(\tilde{X}=0) = K\cdot P(X\geqslant K)$

13.2. Tétel. Csebisev-egyenlőtlenség:

Legyen X tetsz. valószínűségi változó ; $E(X), D(X)$ létezik. Ekkor $P(|X-E(X)|\geqslant K) \leqslant \dfrac{D^2(X)}{K^2}$.

Biz.: $P(\ (X-E(X))^2 \geqslant K^2\ ) \overset{\text{Markov}}{\leqslant} \dfrac{E[\ (X-E(X))^2\ ]}{K^2} = \dfrac{D^2(X)}{K^2}$

Példa: pénzérme; jelöljük n dobásból a fejek számát: S_n

$P(S_n \geqslant 0,6n)$-t szeretnénk becsülni.

a) Markov: $P(S_n \geqslant 0,6n) \leqslant \dfrac{E(S_n)}{0,6n} = \dfrac{0,5n}{0,6n} = 0,83.$

b) Csebisev: $P(S_n \geqslant 0,6n) = P(S_n - 0,5n \geqslant 0,1n) \leqslant \dfrac{1}{2}P(|S_n - 0,5n| \geqslant 0,1n) \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{(0,1n)^2} = \dfrac{100}{8n}$

itt $\frac{1}{2}$-es szorzó: szimmetria, 1000 dobásból 520-at vagy 480-at u.a. valószínűséggel dobhatok

c) Még jobb: $P(S_n \geqslant 0,6n) = P(\ (1,5)^{S_n} \geqslant (1,5)^{0,6n}\ ) \leqslant \dfrac{E(1,5^{S_n})}{1,5^{0,6n}} = \dfrac{\left(\frac{5}{4}\right)^n}{(1,5^{0,6})^n} = 0,98^n$

ahol $E(1,5^{S_n}) = E(1,5^{X_1+\dots+X_n}) = E(1,5^{X_1}\cdots 1,5^{X_n}) \overset{\text{fgtln}}{=} E(1,5^{X_1})\cdots E(1,5^{X_n}) = \left(\dfrac{5}{4}\right)^n$

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az i. fej} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

$E(1,5^{X_i}) = 1,5^0 \cdot \dfrac{1}{2} + 1,5^1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}$

$n = 1000:$ $P(S_{1000} \geqslant 600)$

Markov: $\leqslant 0,83$

Cseb.: $\leqslant \dfrac{25}{2n} = \dfrac{25}{2000} = 0,0125$

1.5-ös: $1,68 \cdot 10^{-9}$

Példa: Legyen X Exp(1) eloszlású valószínűségi változó.

Tekintsük a $P(X \geq K)$ valószínűséget, illetve becsléseit:

K	2	4	10	50	100
Markov	$5 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
Csebisev	$1 \cdot 10^{0}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
Igazság	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$4,5 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-22}$	$3,7 \cdot 10^{-44}$

13.1. Definíció. Az X_n valószínűségi változók sorozata tart X-hez sztochasztikusan, ha $\forall \varepsilon > 0 : P(|X_n - X| > \varepsilon) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

13.3. Tétel. Nagy számok Bernoulli-féle törvénye:
Legyen egy p valószínűségű A esemény gyakorisága n független kísérletből S_n.
Ekkor $\dfrac{S_n}{n} \longrightarrow p$ sztochasztikusan $(n \to \infty)$.

Biz.: $S_n \sim \text{Binom}(n,p)$

$$P(\left|\tfrac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon) = P(|S_n - np| > n\cdot\varepsilon) \overset{\text{Cseb}}{\leqslant} \frac{np(1-p)}{n^2\cdot\varepsilon^2} = \underbrace{\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2}}_{\text{const}} \cdot \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

13.4. Tétel. Nagy számok gyenge törvénye:
Legyenek X_i-k független, azonos eloszlású valószínűségi változók,
továbbá legyen $E(X_i) = m$; $D(X_i) = \sigma$ (tehát léteznek).
Ekkor $S_n = X_1 + \dots + X_n \Rightarrow \dfrac{S_n}{n} \longrightarrow m$ sztochasztikusan $(n \to \infty)$

Biz.: $P(\left|\tfrac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon) \overset{\text{Cseb}}{\leqslant} \dfrac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2} = \underbrace{\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}_{\text{const}} \cdot \dfrac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$E(\tfrac{S_n}{n}) = \frac{1}{n}E(X_1 + \cdots X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \dots + E(X_n)) = m$$

$$D^2(\tfrac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2}\cdot D^2(X_1 + \dots + X_n) \overset{\text{fgtln}}{=} \frac{1}{n^2}(D^2(X_1) + \dots + D^2(X_n)) = \frac{n\cdot\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

13.5. Tétel. Nagy számok gyenge törvénye, általánosabb alak: Legyen $X_1, X_2, \ldots$ páronként korrelálatlan valószínűségi változók, $E(X_i) = m_i$, $D^2(X_i) = \sigma_i^2$, és jelölje $\vartheta_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. Ha $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n m_i \to m$, és $\vartheta_n/n \to 0$, akkor $S_n/n \to m$ sztochasztikusan.

Biz.: Vegyük észre, hogy $E(S_n/n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n m_i$, és $D^2(S_n/n) = \vartheta_n^2/n^2$. Minden $\epsilon > 0$-hoz van olyan N_0, hogy $n \geq N_0$ esetén

$$|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n m_i - m| < \epsilon/2.$$

Ezért, ha $n \geq N_0$, akkor

$$P(|S_n/n - m| > \epsilon) \leq P(|S_n/n - E(S_n/n)| > \epsilon/2) \leq \frac{\vartheta_n^2/n^2}{(\epsilon/2)^2} \to 0.$$

13.6. Tétel. Nagy számok gyenge törvénye, Bernstein-féle alak: Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók, és használjuk az előző tétel jelöléseit. Legyen még $R(X_i, X_j) = R_{ij}$. Tegyük fel, hogy $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n m_i \to m$, és $\vartheta_n^2 \leq Kn$ valamilyen K konstansra. Tegyük még fel, hogy $R_{ij} \leq B(|i-j|)$, ahol $B : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ olyan függvény, melyre $B(0) = 1$, és $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n B(k) \to 0$. Ekkor $S_n/n \to m$ sztochasztikusan.

Biz.: Az előző tétel bizonyítása működik most is, csak azt kell belátni, hogy $D^2(S_n/n) \to 0$.

$$D^2(S_n/n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n cov(X_i, X_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \sigma_i\sigma_j R_{ij} \leq$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\vartheta_n^2 + 2\sum_{i<j}\sigma_i\sigma_j B(|i-j|)\right) = \frac{1}{n^2}\left(\vartheta_n^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} B(k)\sum_{i=1}^{n-k}\sigma_i\sigma_{i+k}\right).$$

Felhasználva a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$(\sum_{i=1}^{n-k}\sigma_i\sigma_{i+k})^2 \leq (\sum_{i=1}^{n-k}\sigma_i^2)(\sum_{i=k+1}^{n}\sigma_i^2) \leq \vartheta_n^4.$$

Ebből

$$D^2(S_n/n) \leq \frac{1}{n^2}\left(\vartheta_n^2 + 2\vartheta_n^2\sum_{k=1}^{n-1} B(k)\right) \leq \frac{K}{n} + 2K\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n B(k) \to 0.$$

Példa: Legyen $X_1 \sim \text{Ind}(1/2)$, és

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n & 3/4 \text{ valószínűséggel} \\ 1 - X_n & 1/4 \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

Ezek nem korrelálatlanok, de kiszámítható, hogy $E(X_i) = 1/2$, $D^2(X_i) = 1/4$, és $R(X_i, X_{i+k}) = 1/2^k$, azaz teljesülnek az előző tétel feltételei.

13.2. Definíció. Legyenek $X, X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy X_n tart X-hez 1 valószínűséggel (vagy majdnem mindenütt), ha

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = 1.$$

13.7. Tétel. Ha X_n tart X-hez 1 valószínűséggel, akkor sztochasztikusan is.

Biz.: Legyen $\epsilon, \delta > 0$ rögzített. Be kell látni, hogy elég nagy n-re $P(|X_n - X| < \epsilon) \geq 1 - \delta$. Legyen $A = \{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}$, és

$$A_n = \{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| < \epsilon \ \forall m \geq n\}.$$

Ezek bővülő halmazsorozatot alkotnak. Továbbá, ha $\omega \in A$, akkor van olyan n, hogy $\omega \in A_n$. Ezért $A \subset \cup_n A_n$, azaz

$$1 = P(A) = P(\cup_n A_n) = \lim_{N\to\infty} P(A_N).$$

Tehát van olyan N, hogy $m \geq N$-re $P(A_m) \geq 1-\delta$, és ezekre az m-ekre

$$P(|X_m - X| < \epsilon) \geq P(A_m) \geq 1-\delta.$$

Mj. Visszafelé nem igaz az állítás. Legyen pl. $\Omega = [0,1]$ az eseménytér, $P(A) = A$ hossza, és $X_{2^n+k}(x) = 1$, ha $k/2^n < x < (k+1)/2^n$, egyébként pedig 0. Ez a sorozat sztochasztikusan 0-hoz tart, de $P(X_n \to 0) = 0$.

13.8. Tétel. Nagy számok erős törvénye. Legyen $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $E(X) = m$ létezik. Ekkor $S_n/n \to m$ 1 valószínűséggel.

14. Centrális határeloszlástétel

14.1. Definíció. Legyen X_n valószínűségi változók sorozata, $\begin{array}{lll} X_n & \text{eloszlásfüggvénye} & F_n(x) \\ X & \text{eloszlásfüggvénye} & F(x) \end{array}$.
Ekkor azt mondjuk hogy X_n tart X-hez eloszlásban (vagy gyengén), ha $F_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x) \quad \forall x$-re, ahol $F(x)$ folytonos.

14.1. Tétel. Ha X_n tart X-hez sztochasztikusan, akkor eloszlásban is.

Biz.: Legyen F folytonos az x pontban, és $\epsilon > 0$ adott. Ekkor van olyan δ, hogy $|F(y) - F(x)| < \epsilon$, ha $|y - x| \leq \delta$.

$$F_n(x) = P(X_n < x) = P(X_n < x, |X_n - X| > \delta) + P(X_n < x, X_n - \delta \leq X \leq X_n + \delta).$$

Itt az első tag nullához tart, a másodikra pedig

$$P(X_n < x, X_n - \delta \leq X \leq X_n + \delta) \leq P(X < x + \delta, X_n - \delta \leq X \leq X_n + \delta),$$

és

$$P(X_n < x, X_n - \delta \leq X \leq X_n + \delta) \geq P(X < x - \delta, X_n - \delta \leq X \leq X_n + \delta).$$

Ha $n \to \infty$, akkor a felső becslés $F(x+\delta)$-hoz, az alsó $F(x-\delta)$-hoz tart.

Mj. Az állítás fordítva nem igaz, hiszen az eloszlásbeli konvergencia csak a valószínűségi változók eloszlásának közelségéről szól. Ha pl. van két kockánk, az egyiket végtelen sokszor (X_i), a másikat csak egyszer (Y) dobjuk fel, akkor X_n eloszlásban megegyezik Y-nal, de sztochasztikusan nem tart hozzá.

Példa: Binomiális eloszlás tart a Poissonhoz eloszlásban. Legyen $X_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, ahol $np \to \lambda$, és $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. X eloszlásfüggvénye lépcsős, tehát a természetes számokban nem folytonos. Ha $j < x < j+1$, akkor

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{j} P(X_n = k) \to \sum_{k=0}^{j} P(X = k) = F(x).$$

Példa: Legyenek $Y_i \sim E(0,1)$ függetlenek, és $X_n = \min(Y_1, \dots, Y_n)$. Ekkor X_n eloszlásban az 1 paraméterű exponenciális eloszláshoz tart.

14.2. Tétel. Centrális határeloszlástétel:
Legyenek X_i-k függetlenek, azonos eloszlásúak, $E(X_i) = m$, $D(X_i) = \sigma > 0$ léteznek, $S_n = X_1 + \cdots X_n$.
Ekkor $\dfrac{S_n - n\cdot m}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \longrightarrow \mathrm{N}(0,1)$ eloszlásban. $(n \to \infty)$

Példa: 10000 dobás egy érmével. Mennyi lesz a fejek száma az esetek 75%-ban?

$S_n = X_1 + \cdots + X_n$; $X_i \sim \text{Indikátor}(p)$; $E(X_i) = p$; $D^2(X_i) = p(1-p)$; $m = \dfrac{1}{2}$; $\sigma = \dfrac{1}{2}$

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az i. fej} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

$\dfrac{S_n - 0,5n}{\sqrt{n}\cdot 0,5} \approx \mathrm{N}(0,1)$

$$0.75 \approx P(|S_{10000} - 5000| \leq K) = P\left(\frac{|S_{10000} - 5000|}{50} \leq \frac{K}{50}\right) \approx \Phi(K/50) - \Phi(-K/50) = 2\Phi(K/50) - 1.$$

Tehát $\Phi(K/50) = 0.875$, amiből $K/50 = 1.15$, azaz $K = 57.5$.

14.3. Tétel. Ljapunov tétele. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók, használjuk a korábbi jelöléseket. Legyen még $E(|X_i - m_i|^3) = H_i^3$ véges, és $K_n^3 = \sum_{i=1}^n H_i^3$. Ha $K_n/\vartheta_n \to 0$, akkor

$$\frac{S_n - \sum_{i=1}^n m_i}{\vartheta_n} \to N(0,1)$$

eloszlásban.

Mj.: A feltételek biztosan teljesülnek, ha $|X_i - m_i| \leq C$ és $\vartheta_n \to \infty$.