Portfólió VaR és a VaR kritikái

Diplomamunka

Írta: Bende Júlia Borbála

Alkalmazott matematikus szak

Témavezetők:

Kovács Gergely, főiskolai docens
Operációkutatási Tanszék
és
Seres Csaba, Kockázatkezelési Osztályvezető
Központi Elszámolóház és Értéktár Zrt.

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Temészettudományi Kar
2009

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Napjainkra is jellemző hektikus piaci állapotban felmerül a kérdés: hogyan védekezhetünk a pénzügyi kockázatok ellen, mennyi tőkét szükséges képeznünk a kockázatok fedezéséhez? A származtatott piacok rohamos növekedése, a pénzügyi és a befektetési szolgáltatások összefonódása, az univerzális bankok, mint intézmények terjeszkedése, valamint a pénzügyi stabilitás követelménye szükségessé tette az elsősorban piaci kockázatoknak kitett kereskedési tevékenység tőkekövetelményének szabályozását. A Bázeli egyezmények (1988, 1995 és a Bazel II.-2004) ajánlásai mind arról szólnak, hogy mekkora tőkét szükséges a kockázatok ellen egy pénzintézetnek megképeznie ahhoz, hogy biztonságosan működjön. Különböző kockázatokra (piaci-, hitel-, működési- stb.) vonatkozó bázeli ajánlások ma már minden bank működésének szerves részévé váltak, ezért elemzésünk első részében megismerkedünk a kockázat pontos fogalmával, illetve, hogy milyen kockázati típusok léteznek, és ezeken belül is a piaci kockázatokat emeljük ki.

Ezután definiáljuk a kockáztatott érték (VaR) Jorion-féle fogalmát [1] alapján (harmadik fejezet), amely a ma legelterjedtebb kockázatkezelési eljárás, annak ellenére, hogy elemzésünk során folyamatosan szembesülni fogunk hibáival. Külön vizsgáljuk a VaR-t tetszőleges, illetve normális eloszlások esetén (3.3.2.) és látni fogjuk, hogy a normális eloszlás feltevése jelentős egyszerűsítéseket von maga után, melyek egyszerre jelentenek majd előnyöket és hátrányokat. Megjegyzendő, hogy a szórás mintából történő becslésére itt nem térünk ki, mivel ezzel és ennek mérési hibájával a Matematikai statisztika c. órán már részletesen foglalkoztunk. Ezután egy szemléltető alkamazást is bemutatunk (3.4.), melyhez [2] anyagát használtuk segítségül. Egy bank portfólióját két részre bontja, a kereskedési célú, elsősorban piaci kockázatoknak kitett portfóliót a kereskedési könyvben tartják nyilván, míg a hagyományos banki portfóliót a banki könyvben. Előbbi kockázatainak fedezéséhez szükséges tőkekövetelményt ma már a bankok saját modelljük szerint számolhatják. Ennek okán a negyedik fejezetben megkezdjük a portfóliók kockáztatott értékének vizsgálatát, mely az úgynevezett *mapping* eljárással kezdődik a *Rajesh-tézis* szerint ([3]), utána kitérünk arra az esetre, amikor a portfólió eszközök hozamainak alakulása a normális eloszlást követi (delta-normál módszer), majd megvizsgáljuk, hogy egy-egy eszköz pontosan mekkora kockázattal járul hozzá a portfólió kockázatának egészéhez (növekmény-VaR). Ezután a portfólió kockázatának megadásához alapvetően szükséges kovarianciamátrix meghatározására vonatozó egyszerűsítéseket mutatunk be az ötödik fejezetben.

Egy szemléltető példa után (hatodik fejezet) rátérünk a VaR kritikáira, melyek a mostani válságos időszakban jelentősen felerősödtek. Ehhez segítségemre volt a [8] és [9] előadás-vázlata. Bevezetjük a kockázati mérték és a koherens kockázati mérték fogalmát [5], illetve [11] alapján, bemutatjuk [2]-ben leírtak szerint, hogy melyek a legegyszerűbb kockázati mértékek, majd rátérünk arra, hogy a VaR miért nem felel meg koherens kockázati mérték követelményeinek. Ennek nyomán alternatív eszközökkel is megismertetjük az olvasót, illetve bemutatunk egy [4]-beli tételt (7.3.), amellyel könnyen leellenőrizhetjük egy mérték koherenciáját. Az alternatív eszközöknek [8] és [9] alapján a legnagyobb hátrányuk az, hogy szinte minden esetben konzervatívabb értéket adnak a VaR-nál, részben emiatt a gyakorlati életben egyelőre nem nagyon kerültek alkalmazásra.

Az utolsó részben a VaR egy más jellegű alkalmazását találhatjuk, mely a KELER Zrt. (Központi Elszámolóház és Értéktár Zrt.) segítségével kerülhetett be ebbe az elemzésbe.

2. Alapfogalmak, egyszerű példák

2.1. A kockázat fogalma

A vállalkozásoknak a kockázataikat kezelniük kell, de mit értünk a kockázat fogalma alatt? A kockázatot a [7]-ben leírtak szerint megadhatjuk úgy, mint véletlen változók volatilitása (átlag körüli szóródása). Kockázatról reális döntési alternatívák esetén beszélhetünk, egy esemény lehetséges kimenetelei testesítik meg a kockázatot. A kockázat vállalása nem egyoldalúan a várható veszteség lehetőségét foglalja magába, hanem a várható nyereséget is, azonban a gyakorlatban a várható veszteségek meghatározására helyeződik a hangsúly. A vállalatoknak három féle kockázattal kell szembenézniük, melyek a következők:

- *Üzleti kockázat*: a vállalat piaci magatartásából fakad, mely befolyásolja a versenypozícióit és a piaci részesedésre vonatkozó célok megvalósulását, így a vállalat szempontjából belső kockázatnak tekinthető.

- *Stratégiai kockázat*: a vállalat működési környezetének változásaiból származó rizikó faktorokat öleli fel, ilyen lehet a politikai, a társadalmi és a gazdasági környezet változása – ebből fakadóan külső kockázatnak tekinthető, mely erős hatással van a vállalat által meghatározott startégiai elképzelésekre.

- *Pénzügyi kockázat*: a különböző pénzügyi piacokon elszenvedett veszteségek lehetőségét testesítik meg, típusai az alábbiak: hitelkockázat, likviditási kockázat, piaci kockázat, működési kockázat, szabályozási vagy jogi kockázat.

Piaci kockázat

Piaci kockázat a pénzügyi változók – kamatlábak és árfolyam – mozgásából eredő kockázat. A pénzügyi változók ingadozása hatást gyakorol az intézmények kockázati kitettségére és befolyásolja a vállalatok befektetéseinek értékét és hozamát. A piaci kockázatokat kétféleképpen vehetjük számba: abszolút kockázatként, vagy relatív kockázatként. Előbbi a teljes hozam ingadozásával, utóbbi egy indextől való eltéréssel méri a kockázatot.

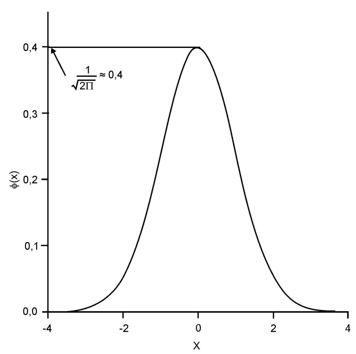
2.2. Normális eloszlás

Képzeljünk el egy olyan nagy portfóliót, amely sok apró fogyasztói hitelt tartalmaz. Például, ha a részleges visszafizetés gondolatát elvetjük, akkor külön-külön minden egyes kölcsönt binomiális eloszlással modellezhetünk, két lehetséges kimenetellel. A binomiális változók összegének eloszlása normális eloszláshoz konvergál, ezért ha a hitelek száma növekszik, akkor a portfóliót a normális eloszlás segítségével modellezhetjük. Ez az állítás azonban jelentősen függ a nemteljesítések függetlenségétől, azaz válság esetén megrendülhet az ebbe az állításba vetett bizalmunk.

A normális eloszlás jellemezhető első két momentumával, várható értékével és varianciájával, azaz szórásnégyzetével: $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, és a sűrűségfüggvénye:

$$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{[-\frac{1}{\sigma^2}(\mathrm{x}-\mu)^2]}.$$

Az alábbi ábrán a már jól ismert standard normális eloszlás $(\mathrm{N}(0,1))$ sűrűségfüggvényét láthatjuk:



1. ábra: Az N(0,1) eloszlás sűrűségfüggvénye

A következő táblázat a normális eloszlás alsó kvantiliseit tartalmazza. A kvantilisek olyan q pontok, amelyektől a jobbra (vagy balra) fekvő terület egy adott c valószínűséget fejez ki:

$$\mathrm{c} = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq \mathrm{q}) = \int\limits_{\mathrm{q}}^{+\infty} \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}.$$

Százalék	99,99	99	95	90	84,13
Érték	-3,715	-2,326	-1,645	-1,282	-1,000

1. tábla: A normális eloszlás alsó kvantilisei

Említsünk meg még két további momentumot, a ferdeséget és a csúcsosságot. Előbbi a szimmetriától való eltérést méri, így a normális eloszlás ferdesége nulla. A ferdeség képlete:

$$\beta_1 = \frac{\mathrm{E}[(\mathrm{x}-\mu)^3]}{(\mathrm{E}[(\mathrm{x}-\mu)^2])^{\frac{3}{2}}},$$

a csúcsosságé – mely az eloszlás „lapultságát” írja le – pedig:

$$\beta_2 = \frac{\mathrm{E}[(\mathrm{x}-\mu)^4]}{(\mathrm{E}[(\mathrm{x}-\mu)^2])^2} - 3.$$

A normális eloszlás csúcsossága 0. Ezen két mérőszám segítségével könnyen leellenőrízhetjük, hogy egy mintabeli eloszlás jól közelíti-e a normális eloszlást.

2.3. Az eszközhozamok

A piaci kockázat mérésekor véletlen változónak a pénzügyi eszköz hozamrátáját tekintjük. Definiáljuk a mérésül szolgáló időtávot egy hónaposnak. A hozamokat az előző hónap végétől a jelenlegi hónap elejéig mérjük.

A *számtani vagy diszkrét* hozamrátát a tőkenyereség és az időközi kifizetések (például osztalék vagy kupon) összegeként definiáljuk:

$$\mathrm{r}_t = \frac{\mathrm{P}_t + \mathrm{D}_t - \mathrm{P}_{t-1}}{\mathrm{P}_{t-1}},$$

ahol P_t a befektetés értéke a t időpontban, D_t pedig az időközi kifizetés értéke.

Amikor hosszútávú hozamokkal dolgozunk, a gyakorlatban a *mértani* hozamrátát számítjuk ki, amit az árarány logaritmusaként definiálunk:

$$\mathrm{R}_t = \ln\left(\frac{\mathrm{P}_t + \mathrm{D}_t}{\mathrm{P}_{t-1}}\right).$$

Az egyszerűség kedvéért, most tegyük fel, hogy a D_t időszaki kifizetések értéke zérus. A mértani hozamok alkalmazásának kettős előnye van. Egyrészt, ha a mértani hozamok eloszlása normális, akkor ez az eloszlás soha nem vezethet olyan esethez, amikor az ár negatív lesz. Ennek oka, hogy amikor az eloszlás bal oldala felé mozgunk, akkor $\ln(\frac{P_t}{P_{t-1}}) \to -\infty$, tehát $(\frac{P_t}{P_{t-1}}) \to 0$, vagyis $P_t \to 0$. Ezzel szemben a normális eloszlású számtani hozamok eloszlásának bal oldalán $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \to -\infty$, és ez akkor lehetséges, ha $\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 < -1$, vagyis $P_t < 0$. Ez pedig közgazdaságtanilag értelmetlen. A mértani hozamok második előnye az, hogy könnyen kiterjeszthetők több periódusra, például tekintsük a kéthavi hozamokat. Ekkor az alábbi szétbontás tehető meg:

$$R_{t,2} = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-2}}\right) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) + \ln\left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right) = R_t + R_{t-1}.$$

Tehát a kéthavi mértani hozam egyszerűen a két, havi hozam összege.

2.4. Value at risk - kockáztatott érték

A VaR a várható maximális veszteséget (vagy legnagyobb veszteséget) méri adott időtávon, adott konfidencia szint (biztonsági szint, továbbiakban c) mellett. Mielőtt a matematikai definícióra rátérnénk, megjegyzendő, hogy számos irodalomban különféleképpen formalizálják a VaR-t, melyek közt tartalmi eltérés nincs, csak formai. Az alábbiakban mi is többféle formalizációt mutatunk be, elsőként a [6]-ban találhatót.

Tegyük fel, hogy egy portfólió egynapos VaR-ja 100 millió forint 99 százalékos konfidencia szint mellett, azaz VaR(99%, 1 nap) = 100M Ft. Hogyan értelmezhetjük ezt? Ez azt jelenti, hogy normál piaci körülmények közt az adott portfóliót tekintve, egynapos időtávra 1 %-os valószínűséggel várható 100 millió forintnál nagyobb veszteség (pesszimista megközelítés), vagy másképpen: normál piaci körülmények között 99 % annak a valószínűsége, hogy egy nap alatt nem várható 100 millió forintnál nagyobb veszteség (optimista megközelítés). A pesszimista megközelítés az *alsó VaR*, mely az alsó 1% közül a legjobb kimenetel, míg az optimista a *felső VaR*, mely a felső 99% közül a legrosszabb kimenetel. Látni fogjuk, hogy az alsó és a felső VaR értéke nem feltétlenül egyezik meg, de abszolút folytonos eloszlások esetén a két érték egyenlő.

A c biztonsági szint melletti VaR értéke tehát nem más, mint egy $1-c$-rendű kvantilis, amely megmutatja azt az összeget, amelynél nagyobb értékvesztés csak $1-c$ valószínűséggel következhet be a vizsgált időszakban. A fentiek alapján a precíz definíció:

$$\mathrm{VaR_c(X) = \sup\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) = P(X \leq x) < c\}},$$

ebben az esetben tehát az alsó kvantilis adja a VaR értékét, ezért a $\mathrm{VaR_c}$ a c-rendű *alsó VaR*. Analóg módon definiálhatjuk a *felső VaR*-t:

$$\mathrm{VaR^c(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) = P(X \leq x) > c\}}.$$

Az alsó, és a felső kvantilis nem szükségképpen esik egybe, de mint említettük, abszolút folytonos eloszások esetén azonos értéket ad adott szint mellett, hiszen ekkor egyszerűen legyen q az az érték, amelyre a $\mathrm{F_X(q) = c}$ összefüggés teljesül, ekkor tehát:

$$\mathrm{VaR_c(X) = VaR^c(X) = q}.$$

3. A kockáztatott érték mérése

3.1. Mennyiségi paraméterek

A VaR mérésének első két lépése a korábban is említett két paraméter megválasztása: az időtáv hossza, melyre a kockáztatott értéket számítani akarjuk, és a konfidenciaszint. Mindkettő tetszőleges, de példaként hozhatjuk a [11]-ben leírtak alapján, hogy ha egy bank befektetéseit tekintjük (mivel a betétesek megtakarításait befektetik), akkor a minimális tőkekövetelményük kiszámításához szükséges VaR érték megadására a Bázeli bizottság az 1995-ös ún. *belső modelljében* 99%-os konfidencia szintet és 10 napos időtávot javasol. Ennek megképzése a biztonságos működést szolgálja. A piaci kockázatokra vonatkozó minimális tőkekövetelmény (MRC, *market risk charge*) tehát az elmúlt hatvan kereskedési nap átlagos VaR-ja szorozva egy biztonsági faktorral (k), vagy az előző napi VaR közül a nagyobb:

$$\mathrm{MRC}_t = \max\left\{ \mathrm{k}\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60} \mathrm{VaR}_{t-i}(99\%, 10 \text{ nap}), \mathrm{VaR}_{t-1}(99\%, 10 \text{ nap}) \right\}.$$

A biztonsági faktor értéke minimum három, de ez az érték növekszik, ha kiderül, hogy a tényleges VaR 5-nél vagy annál többször nagyobbnak bizonyult, mint a számított. Ha tíznél több hiba fordul elő, akkor a modellt újra kell kalibrálni. A kereskedelmi bankok jelenleg kereskedésük 1 napos időtávra vonatkozó VaR-ját naponta jelentik, mivel portfólióik gyakran változhatnak. Ezzel szemben pl. a nyugdíjalapok általában csak lassan változnak, így egy hónapos időtávot választanak.

A konfidenciaszint megválasztásának ki kell fejeznie a kockázatkerülés mértékét, ugyanis nagyobb mértékű kockázatkerülésnek az a következménye, hogy nagyobb mennyiségű tőkének kell fedeznie az esetleges veszteségeket, ezért magasabb konfidenciaszint megválasztása szükséges. Viszont a VaR-modell vizsgálatakor fontos, hogy olyan konfidenciaszintet határozzunk meg, amely mellett a felhasználók rendszeresen ellenőrizhetik a becsléseiket. Nagyobb konfidenciaszintek nagyobb VaR-számokat eredményeznek, ezért előnyben kell részesítenünk az alacsonyabb szinteket a magasabbakkal szemben, mivel utóbbiak egy olyan veszteségi mérőszámot adnának eredményül, amelyet ritkán lépnénk csak túl, így átlagosan hosszabb időbe telne annak eldöntése, hogy túl sok VaR-t meghaladó értéket figyelünk-e meg.

3.2. Időaggregáció

Ahogy már említettük, a VaR számításához meg kell határoznunk egy időtartamot, amelyre mérni szeretnénk a kockázatot. A kockáztatott érték átszámítása egyik peródusról a másikra nem okoz problémát, amíg a hozamok autokorrelálatlanságát feltételezzük. Ez a feltételezés a valóságtól nem elrugaszkodott, mivel egybevág a hatékony piacok gyenge formájával, ami szerint nem lehet abnormális hozamot elérni múltbéli adatok tanulmányozásán alapuló befeketetési stratégiákkal. Továbbá feltélezzük azt is, hogy a hozamok időben azonos eloszlású valószínűségi változók, tehát ezen feltételek alapján:

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{R}_t, \mathrm{R}_{t-1}) = 0,$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{R}_t) = \mathrm{E}(\mathrm{R}_{t-1}) = \mathrm{E}(\mathrm{R}),$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_t) = \mathrm{V}(\mathrm{R}_{t-1}) = \mathrm{V}(\mathrm{R}).$$

Ebből következik, hogy a kétperiódusú variancia és várható hozam:

$$\mathrm{E}(\mathrm{R}_{t,2}) = \mathrm{E}(\mathrm{R}_{t-1}) + \mathrm{E}(\mathrm{R}_t) = 2\mathrm{E}(\mathrm{R}),$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_{t,2}) = \mathrm{V}(\mathrm{R}_{t-1}) + \mathrm{V}(\mathrm{R}_t) = 2\mathrm{V}(\mathrm{R}),$$

tehát a várható érték és a variancia az időben lineárisan növekszik, így a hozamok szórása az idő négyzetgyökével szorzódik.

3.3. A VaR Jorion-féle definíciója

A következő fejezetben a Philippe Jorion által [1]-ben reprezentált VaR definíciót mutatjuk be.

3.3.1. Tetszőleges eloszlások esetén

Egy portfólió VaR-jának kiszámításához definiáljuk W_0-val az induló befektetés nagyságát, $\mathrm{f}(w)$, $\mathrm{F}(w)$-vel a portfólió sűrűség-, eloszlásfüggvényét és jelöljük a portfólió hozamrátáját R-rel. A hozam várható értéke és szórása μ és σ, c pedig a választott konfidenciaszint.

A választott időszak végén a portfólió értéke: $W = W_0(1+R)$. Definiáljuk az adott c konfidenciaszint mellett a legalacsonyabb portfolióérték (kritikus érték) nagyságát a következőképp: $W^* = W_0(1+R^*)$.

A VaR-t a várható értékhez képest elszenvedett pénzveszteségként definiáljuk, azaz:

$$\text{VaR (a várható értékhez viszonyítva)} = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu).$$

A kockáztatott értéket abszolút veszteségként is definiálhatjuk, ekkor az origóhoz viszonyítjuk a VaR-t:

$$\text{VaR (az eredeti befektetéshez viszonyítva)} = W_0 - W^* = -W_0 R^*.$$

A VaR kiszámítása mindkét esetben ekvivalens a minimális W^* érték, vagy a kritikus R^* hozamszint meghatározásával. Legáltalánosabb formájában a VaR származtatható a portfólió jövőbeli értékének $F(w)$ eloszlásfüggvényéből, ugyanis adott c konfidenciaszinten szeretnénk meghatározni azt a W^* értéket, melyre fennáll, hogy az ezen értéket meghaladó értékek előfordulási valószínűsége c:

$$P(W \geq W^*) = 1 - F(W^*) = c, \text{azaz} : c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)dw \Rightarrow$$

$$p = P(W^* \geq W) = 1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw.$$

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a $-\infty$ -től W^*-ig terjedő terület nagysága $p = 1 - c$ kell, hogy legyen, például 5%-os. A W^* számot nevezzük az eloszlás mintabeli kvantilisének. Kiemelendő, hogy ebben a megközelítésben a VaR meghatározásához nem használtuk a szórást.

3.3.2. Normális eloszlás esetén

Jelentősen leegyszerűsíthetők a számolások, ha a hozamok eloszlását normális eloszlásúnak feltételezzük, mivel ekkor a VaR mérőszám közvetlenül származtatható a portfólió szórásából. Ezt a módszert paraméteres módszernek is nevezik, mivel egy paraméter, a szórás becslését igényli, és nem csak a tapasztalati eloszlás egy kvantilisét határozzuk meg.

Első lépésként az $\mathrm{f}(w)$ tetszőleges normális eloszlást kell áttraszformálnunk egy $\Phi(\varepsilon)$ standard normális eloszlású változóvá (ahol ε várható értéke nulla, szórása pedig egységnyi). W^* értékét a kritikus R^* hozam segítségével határozzunk meg a $\mathrm{W}^* = \mathrm{W}_0(1+\mathrm{R}^*)$ összefüggésből. R^* általában negatív, így $-|\mathrm{R}^*|$-nak írható. Rendeljünk hozzá R^*-hoz egy $\alpha > 0$ standard normális változót, melyre:

$$-\alpha = \frac{-|\mathrm{R}^*| - \mu}{\sigma}, \tag{1}$$

ekkor ekvivalens átalakításokkal kapjuk:

$$1 - \mathrm{c} = \int_{-\infty}^{\mathrm{W}^*} \mathrm{f}(w)\mathrm{d}w = \mathrm{P}(\mathrm{W} \leq \mathrm{W}^*) = \mathrm{P}(\mathrm{R} \leq \mathrm{R}^*) = \int_{-\infty}^{-|\mathrm{R}^*|} \mathrm{f}(\mathrm{R})\mathrm{dR} = \int_{-\infty}^{-\alpha} \Phi(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon.$$

Ezért a kockáztatott érték meghatározása ekvivalens egy olyan α érték meghatározásával, amelyre fennáll, hogy a tőle balra fekvő terület nagysága $1 - \mathrm{c}$. Ezt a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázatának segítségével megtaláljuk, mivel ez megadja tetszőleges d_* standard normális eloszlású változó esetén a tőle balra fekvő terület nagyságát:

$$\mathrm{N}(\mathrm{d}_*) = \int_{-\infty}^{-\mathrm{d}_*} \Phi(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon.$$

Az (1) egyenletből a kritikus R^* hozamszint: $\mathrm{R}^* = -\alpha\sigma + \mu$.

Általánosításként feltehetjük, hogy μ és σ paraméterek éves szinten adottak, az időszak hossza (amelyben a kedvezőtlen kimeneteleket szeretnénk mérni) években: Δt. A korábbiakhoz hasonlóan:

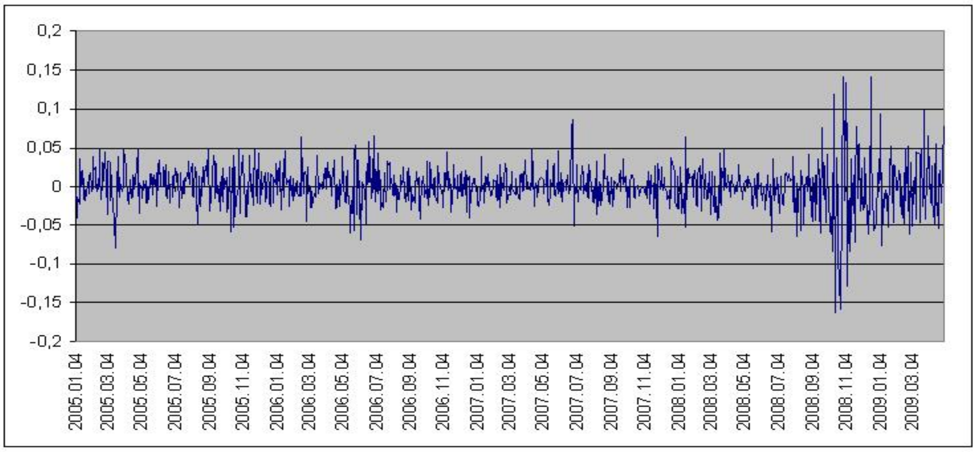
$$\text{VaR (a várható értékhez viszonyítva)} = -\mathrm{W}_0(\mathrm{R}^* - \mu) = \mathrm{W}_0\alpha\sigma\sqrt{\Delta t},$$

azaz a VaR ekkor az eloszlás szórásának többszöröse, míg az eredeti befektetéshez viszonyítva:

$$\text{VaR (az eredeti befektetéshez viszonyítva)} = -\mathrm{W}_0\mathrm{R}^* = \mathrm{W}_0(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t).$$

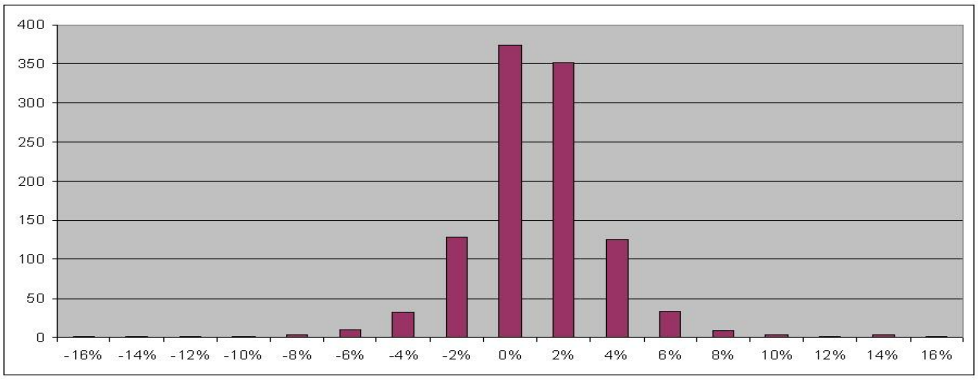
3.4. Alkalmazás

Nézzünk egy példát!



2. ábra: A MOL napi hozamai

A fenti ábrán a MOL folytonosan számított napi hozamait láthatjuk 2005.01.03. és 2009.04.09. között, melyek a –16,22 %-os minimális és az 14,02 %-os maximális értékek között mozogtak. A MOL 95%-os biztonsági szint melletti kockázatott értékének meghatározásához szükség van az empirikus sűrűségfüggvényre. Ehhez egyszerűen sorba kell rendezni a hozamokat, és megnézni, hogy az egyes sávokba (pl. hogy a 0 és 5% közötti részbe) hány megfigyelés esett. Így kapunk egy hisztogramot, melynek segítségével már ábrázolhatjuk az empirikus sűrűségfüggvényt:



3. ábra: A MOL empirikus sűrűségfüggvénye

Miután sorbarendeztük a hozamokat meg kell keresnünk azt az értéket, amelynél csak 5%-ban várható nagyobb veszteség. Ez az érték most –3,85%. Tehát azt kaptuk, hogy 95%-os konfidenciaszint feltételezése mellett napi 3,85%-nál kisebb veszteség éri azt, aki MOL részvényt vásárol. Természetesen nem csak egy részvény esetén alkalmazható ez az eljárás, hanem portfóliók esetén is, melyre még később visszatérünk. Előnye, hogy egyszerű és gyors, kezeli a diverzifikációt (korrelációkat), és nem kell feltételezni az eloszlás normalitását, mivel a módszer az empirikus eloszláson alapszik. Ezt a módszert *historikus módszer*-nek nevezzük, amelynek legnagyobb hibája, hogy nincs garancia arra, hogy a múlt jól írja le a jövőt.

A MOL hisztogramján láthatjuk, hogy az eloszlás igen közel esik a normálishoz. Ha abból indulunk ki, hogy a MOL eloszlása normális, akkor mint láttuk, az egyszerű $-\alpha\sigma + \mu$ képlettel lehet a VaR-t kiszámítani. A mintából kapott $\sigma = 2,66\%$, $\mu = -0,017\%$ értékekre, és 95% biztonsági szint esetében $\alpha = 1,645$, tehát:

$$\mathrm{R}^* = -1,65 \cdot 0,0266 - 0,00017 = -4,352\%.$$

Összevetve az empirikusan kapott –3,85%-kal, látható, hogy a MOL eloszlása közel normális, és ebben az esetben a Gauss-eloszlás használatával konzervatívabb becslés adódik. Ennek a módszernek több hibája van, mint jó tulajdonsága, előnye az egyszerűségében rejlik. Normalitást feltételez, ami a pénzügyi piacokon nem teljesül. Ezt a módszert *delta-normál módszer*-nek nevezzük, melyet portfóliók esetén később részletesen elemzünk.

Az időaggregáció szemléltetése: A MOL esetében a napi szórás értéke 2,66% volt, ha most az éves szórásra vagyunk kiváncsiak (ez 252 kereskedési napot jelent), akkor a havi szórást egyszerűen megszorozzuk gyök 252-vel: $2,66 \cdot \sqrt{252} = 42,22\%$.
Ha a pozíciók változatlanok, akkor például egy 95%-os egynapos VaR-t át lehet írni 99%-os konfidencia intervallumú és 10 napos tartási periódusú kockáztatott értékké:

$$\mathrm{VaR}_{99\%}(10 \text{ nap}) = \mathrm{VaR}_{95\%}\frac{2,33}{1,65}\sqrt{10}.$$

3.5. Módszerek összehasonlítása

Az előzőekben kétféle módszert mutattunk be egy eloszlás VaR-jának meghatározására, először azt, amikor közvetlenül kiolvastuk az eloszlásból a kívánt kvantilist, majd pedig azt, amikor meghatároztuk a szórást, majd azt egy alkalmas tényezővel megszorozva kaptuk a megoldást. Kérdés, hogy melyik módszer jobb?
A szórás (σ) több információt vesz figyelembe az egész eloszlásra vonatkozóan, míg a kvantilis csak megfigyelések sorba állítását használja fel. Másrészt a normális eloszlás esetén pontosan tudjuk, hogy hogyan transzformáljuk a becsült σ-t a becsülni kívánt kvantilissé az α segítségével. Továbbá a paraméteres módszerekkel a becsléseink pontossága nagyban megnövelhető, mivel a szórás sokkal több információt tartalmaz, mint a mintabeli kvantilisek.

4. Portfóliók kockáztatott értéke

Ha a VaR-t egyetlen eszközre szeretnénk megmérni, viszonylag könnyű dolgunk lenne. A probléma az, hogy a VaR-t nagy és összetett portfóliókra kell mérnünk, amelyek időben változnak. Az első részben megnézzük, hogy hogyan tudjuk a portfóliót kockázati faktorokkal jellemezni, azaz mely faktorok befolyásolják a portfólió teljesítményét – ez a portfólió mapping. A második részben összekapcsoljuk a portfólió teljes kockázatát a VaR mérőszámmal, és rátérünk a delta-normál módszer részletes elemzésére, melyben feltesszük, hogy az eszközök hozamai normális eloszlásúak, s mivel a portfólió hozama ezek lineáris kombinációja, a portfólió jövőbeli értékének eloszlása is normális. Ezután megmutatjuk, hogyan bonthatjuk fel a portfólió teljes kockázatát az egyes eszközök kockázathoz való hozzájárulására jellemző növekmény komponensekre (növekmény VaR). A növekmény VaR számításával lehetővé válik, hogy a befektetők azonosítsák azt az eszközüket, amelyik leginkább hozzájárul a teljes kockázatukhoz. A VaR modellek hátránya, hogy az eszközök számának növelésével azok kovarianciamátrixa nagyon megnőhet. Az ötödik fejezetben ennek megoldására a kovarianciamátrixra vonatkozó egyszerűsítéseket mutatunk be.

4.1. Portfólió-mapping

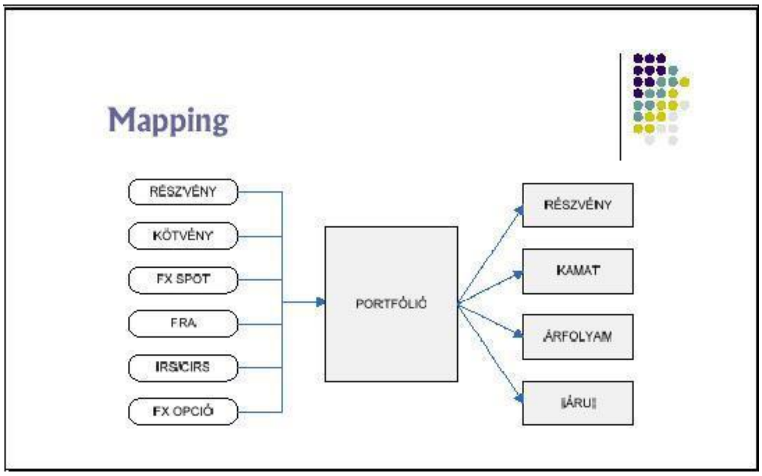
Tegyük fel, hogy portfóliónk jelenlegi értéke ismert, és portfóliónk jövőbeli veszteségét adjuk meg az X véletlen változó segítségével. Feladatunk X eloszlásának becslése, hiszen ennek használtalával tudjuk megadni a VaR értéket.

Minden portfóliót jellemezhetünk bizonyos számú kockázati tényezővel, mint például árfolyamok, kamatlábak stb., melyektől a portfólió teljesítménye függ. Legyen az Y egy N dimenziós vektor, amely ezeknek a kockázati faktoroknak tartalmazza a jövőbeli értékét, ehhez meg kell győződnünk arról, hogy historikus adatok a rendelkezésünkre állnak. A historikus adatok alapján meg tudjuk határozni Y eloszlását. Ennek segítségével szeretnénk az X eloszlását is megadni. Ahhoz, hogy Y eloszlásából X eloszlását előállítsuk, szükségünk van egy leképező függvényre, vagy *mapping*-függvényre, legyen ez θ, melyre:

$$\mathrm{X} = \theta(\mathrm{Y}), \quad \theta : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}.$$

Ezt a kapcsolatot nevezzük *portfólió mapping*-nek, mivel a θ a kockázati faktorok N dimenziós terét a portfólió jövőbeli értékének egy dimenziós terére képezi le.

A θ függvény attól függően lesz bonyolult, hogy az Y például csak részvények árfolyamait, vagy más kockázati tényezőket is (kamatok,...) tartalmaz, előbbi esetben egyszerűbb (lineáris), utóbbinál komplikáltabb függvényekkel kell dolgoznunk. Ha a θ lineáris és Y eloszlását, mely csak az eszközök árfolyamait tartalmazza, normálisnak feltételezzük, akkor X eloszlása is normális lesz, így csak a portfólió várható értékét és szórását kell kiszámolnunk. Nemlineáris θ-t akkor szükséges használnunk, amikor portfóliónk tartalmaz opciós pozíciókat, mivel ekkor θ-t a Black–Scholes-féle opcióárazási formulával adhatjuk meg. Mivel az opciók értékváltozásai nem csak az alaptermék hozamváltozásaitól függenek, így lineáris értékeléssel alulbecsüljük ezek kockázatát. Ha θ nem lineáris, úgy az X eloszlása nem lesz normális.



4. ábra: Portfólió-mapping

Nézzük meg, hogy ezek után milyen módszerekkel mérhetjük a VaR-t!

Historikus szimuláció: Az N elemű portfólió hozamát a következő képlet segítségével határozhatjuk meg:

$$\mathrm{R}_p = \sum_{i=n}^{\mathrm{N}} \mathrm{h}_i \mathrm{R}_i,$$

ahol R_i-k az egyes eszközök hozamai, a h_i súlyok pedig a jelenlegi portfólió súlyok, így az egyes eszközök múltbeli hozamai és a jelenlegi portfólió súlyok segítségével adódik egy hipotetikus hozam eloszlás. A kapott hozam eredményeket ezután szétválogatva – mint ahogy a MOL esetében is láthattuk – megkereshetjük a kívánt kvantilist. Ennek előnye, hogy egyszerű, kezeli a diverzifikációt, tetszőleges eloszlás esetén alkalmazható, nemlineáris eszközök esetén is jó. Hátránya, hogy legalább 100 napos hozam-adatsorral kell rendelkeznünk minden eszköz esetében, és egyáltalán nem biztos, hogy a múlt jól írja le a jövőt.

Monte Carlo szimulácó: Ezt a módszert tömören a folyamat két lépésével jellemezhetjük. Első lépésben meghatározunk egy sztochasztikus folyamatot (általában a geometriai Brown-mozgást alkalmazzák), amellyel a kockázati faktorok jövőbeli értékeit szimuláljuk. A második lépésben a szimulált jövőbeli értékek segítségével meghatározzuk a tényezők eloszlását, és ezzel Y, majd X eloszlását, amelyből már megadhatjuk a VaR-t. Ez különösen jó opciókat is tartalmazó portfóliók esetében, mivel alkalmazható nemlineáris pozíciókra, nem normális eloszlású eszközökre is. Azonban nagyon nagy a művelet igénye, hiszen ha egy 1000 eszközből álló portfóliónk van, és minden eszköz esetében 1000 véletlen számot generálunk, akkor már 1 millióra nő a kiértékelendő adatok száma. Ebből fakadóan megfelelő számítógépes infrastruktúrára is szükség van a szimuláció végrehajtásához.

Delta-normál módszer: A következő fejezetben részletesen tárgyaljuk ezt a módszert, amely két alapfeltételezéssel él: egyrészt, hogy az eszközhozamok eloszlása normális, másrészt, hogy portfóliónkban levő eszközök értéke csak az árfolyamváltozásoktól függ – mint például részvények esetében, így részvényekből álló portfóliókra ez a módszer könnyen számolható, és pontos eredményt ad. A delta elnevezés az opciók árának „görög betűk"-kel történő megadásánál szereplő delta, azaz:

$$\Delta = \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{S}},$$

ahol g a derivatív aktuális értéke, S pedig az alaptermék árfolyama. A Δ mutatja meg tehát, hogy mennyivel változik a derivatív értéke az árfolyam egységnyi növekedéséből eredően, ha más tényező (idő, kamatláb,...) nem változik. Mint említettük, az opciók nem csak az alaptermék árától, és így nem csak Δ-tól függenek, így ez a módszer nem jó opciós pozíciókat tartalmazó portfóliók esetében.

4.2. A delta-normál módszer

Tegyük fel, hogy a portfóliónkban levő eszközök hozamai normális eloszlásúak, és a portfólióban levő pozíciók a kockázati tényezők lineáris függvényei. Miután elvégeztük a tényezők szétválasztását, a portfólió hozama a mögöttes eszközök hozamainak lineáris kombinációjaként írható fel, ahol a súlyokat az időszak elején befektetett pénzmennyiségek határozzák meg. Azaz definiáljuk a portfólió t és t+1 időszak közötti hozamát a következőképp:

$$\mathrm{R}_{p,t+1} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_{i,t}\mathrm{R}_{i,t+1},$$

ahol a $\mathrm{w}_{i,t}$ súlyok tehát az időszak elején határozódnak meg, összegük pedig 1.
Ezt mátrixformában is felírhatjuk:

$$\mathrm{R}_p = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_1 & \mathrm{w}_2 & \dots & \mathrm{w}_\mathrm{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{R}_1 \\ \mathrm{R}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{R}_\mathrm{N} \end{pmatrix} = \mathbf{w}^\mathbf{T}\mathbf{R},$$

ahol $\mathbf{w}$ jelöli a súlyok sorvektorát, $\mathbf{R}$ pedig az egyes eszközök hozamait tartalmazó oszlopvektort.
Ezek után a portfólió várható értéke:

$$\mathrm{E}(\mathrm{R}_p) = \mu_p = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_i\mu_i,$$

varianciája, vagy szórásnégyzete pedig:

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \sum_{j=1,j\neq i}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_i\mathrm{w}_j\sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \sum_{j=1,j<i}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_i\mathrm{w}_j\sigma_{ij}.$$

Ez az összeg figyelembe veszi a különféle keresztszorzatokat is, amely összesen $\frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)}{2}$ darab kovarianciát jelent ($\mathrm{Cov}(\mathrm{R}_i, \mathrm{R}_j) = \sigma_{ij}$).

Ha növeljük az eszközök számát, akkor az összes kovarianciás tag kezelése bonyolulttá válik, ezért ismét mátrixformát alkalmazunk:

$$\sigma_p^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_1 & \dots & \mathrm{w}_\mathrm{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1\mathrm{N}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sigma_{\mathrm{N}1} & \sigma_{\mathrm{N}2} & \sigma_{\mathrm{N}3} & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{w}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{w}_\mathrm{N} \end{pmatrix}.$$

Jelöljük a kovarianciamátrixot $\mathbf{\Sigma}$-val, ezzel a portfólió varianciáját röviden a következőképp írhatjuk fel:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w^T \Sigma w}.$$

Mivel a delta-normál megközelítés szerint az összes értékpapír egyedi hozama normális eloszlású, ezért ekkor a portfólió hozama, amely véletlen változók lineáris kombinációja, szintén normális eloszlású. Adott konfidenciaszinten tehát a portfólió kockáztatott értéke $\alpha\sigma_p$ szorozva a befektetés nagyságával.

Portfólió kockázata csökkenthető nagyszámú eszköz felhasználásával vagy alacsony korrelációs együtthatók esetén. Tudjuk, hogy a kovariancia két változó lineáris együttmozgásának fokát méri, azaz ha a két változó független, akkor kovarianciájuk 0; ha ugyanabba az irányba mozognak, akkor pozítiv; ha ellentétesen, akkor negatív. A kovariancia nagysága azonban függ az egyedi komponensek varianciáitól, ezért célszerűbb mérőszám a korrelációs együttható:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

A ρ értéke mindig –1 és +1 között van, ha egységnyi, akkor a két változót tökéletesen korreláltnak mondjuk, ha 0, akkor pedig korrelálatlannak. A korrelációs együtthatók segítenek a portfólió kockázatának diverzifikálásakor. Két eszköz esetén (melyek hozama R_1 és R_2) a portfólió varianciája:

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_p) = \sigma_p^2 = \mathrm{w}_1^2\sigma_1^2 + \mathrm{w}_2^2\sigma_2^2 + 2\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2. \tag{2}$$

Tegyük fel, hogy a két eszköz között a korrelációs együttható 0, és varianciájuk megegyezik (a közös érték $\sigma^2 = \mathrm{V}_0(\mathrm{R})$). Ekkor a (2) egyenlet az alábbira egyszerűsödik:

$$\mathrm{V}_0(\mathrm{R}_p) = \sigma_p^2 = \mathrm{w}_1^2\sigma^2 + \mathrm{w}_2^2\sigma^2 = (\mathrm{w}_1^2 + \mathrm{w}_2^2)\mathrm{V}_0(\mathrm{R}). \tag{3}$$

Ha a korrelációs együttható egységnyi, akkor (2) az alábbi alakra hozható:

$$\mathrm{V}_1(\mathrm{R}_p) = \mathrm{V}_1(\mathrm{w}_1\mathrm{R}_1 + \mathrm{w}_2\mathrm{R}_2) = \tag{4}$$

$$= \mathrm{w}_1^2\mathrm{V}_1(\mathrm{R}) + \mathrm{w}_2^2\mathrm{V}_1(\mathrm{R}) + 2\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2\mathrm{V}_1(\mathrm{R}) = (\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2)^2\mathrm{V}_1(\mathrm{R}) = \mathrm{V}_1(\mathrm{R}),$$

hiszen a portfólióbeli súlyok összege egységnyi. Látható, hogy (3) $\leq$ (4), és mivel a VaR-t a szórásból számoltuk, ezért általánosságban a tökéletesen korrelált eszközökkel való diverzifikálás nem kifizetődő.

4.3. A delta-normál módszer kritikái

Láttuk, hogy a portfólió varianciáját mátrix jelöléssel a következőképp írhatjuk:

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_{p,t+1}) = \mathbf{w}_t^{\mathbf{T}} \mathbf{\Sigma}_{t+1} \mathbf{w}_t.$$

Így a kockázat az erre ható, feltételezetten normális eloszlású tényezők lineáris kombinációjából tevődik össze, valamint a kovarianciamátrix előrejelzéséből. Előnye, hogy nagy eszközszám esetén is alkalmazható és könnyű végrehajtani. A $\mathbf{\Sigma}$ kovarianciamátrix becslése alapulhat historikus adatokon, minta alapján, például a következő képlet segítségével:

$$\widehat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (\mathrm{x}_{t,i} - \widehat{\mu}_i)(\mathrm{x}_{t,j} - \widehat{\mu}_j).$$

A delta-normál módszert több kritika is érheti, először is, hogy az egyedi események kockázatát nem képes figyelembe venni. Ez olyan szokatlan vagy szélsőséges esetek valószínűségére vonatkozik, mint például a részvénypiacok vagy a valuták összeomlása. A probléma az, hogy az eseménykockázatok nem elég gyakoriak ahhoz, hogy helyesen reprezentálhassuk a meglevő historikus adatok valószínűség-eloszlásaival. Ez általánosan minden olyan módszer hiánya, amelyek historikus adatsorokat tartalmaznak. A második probléma az, hogy a legtöbb pénzügyi eszköz hozamainak eloszlását az ún. leptokurtikus, azaz vastag eloszlásvég jellemzi. Ez azért is különösen veszélyes, mert a VaR a bal eloszlásvégnél próbálja vizsgálni a portfólió hozamának viselkedését. Vastag eloszlásvégek esetén a normális eloszlással való közelítés alábecsüli a kilógó elemek – outlierek – arányát, és így a kockázat valódi értékét. Harmadik probléma, hogy ez a módszer pontatlanul méri a nemlineáris eszközök – pl. opciók –kockázatát, ilyen portfóliók esetében alkalmazása nem célravezető.

4.4. Növekmény VaR

Egy befektető számára különösen fontos információval bír annak az ismerete, hogy portfóliójában mely eszköz, vagy azok mely kombinációja járul leginkább hozzá a portfólió kockázatához. Ezen információ birtokában a felhasználók úgy lesznek képesek megváltoztatni az eszköz-összetételt, hogy a VaR-t is a leghatékonyabban változtathassák meg. Ennek a célnak az elérésére az egyedi VaR mérőszám már nem elégséges számunkra. A volatilitás az eszköz hozamának bizonytalanságát méri, ha azt elkülönítve vizsgáljuk, amikor azonban ez az eszköz egy portfólióban szerepel, csak a portfólió kockázatához való hozzájárulása számít.

Tegyük fel, hogy portfóliónkat N db értékpapírból állítjuk össze, legyenek értékpapírok indexei: j=1,...,N. Célunk, hogy meghatározzuk az i. eszköz kockázathoz való hozzájárulását, melyet az alábbi képlet w_i-szerinti deriválásával kaphatunk meg:

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \sum_{j=1, j<i}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_i \mathrm{w}_j \sigma_{i,j} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \mathrm{w}_i} = 2\mathrm{w}_i \sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1, j\neq i}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_j \sigma_{ij} = 2\mathrm{Cov}(\mathrm{R}_i, \mathrm{w}_i \mathrm{R}_i + \sum_{j\neq i}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_j \mathrm{R}_j) = 2\mathrm{Cov}(\mathrm{R}_i, \mathrm{R}_p).$$

A deriválás szabályai szerint:

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \mathrm{w}_i} = \frac{2\sigma_p \partial \sigma_p}{\partial \mathrm{w}_i}.$$

A portfólió-volatilitás relatív megváltozásának a súly megváltozására vonatkoztatott érzékenysége tehát:

$$\frac{\partial \sigma_p}{\sigma_p \partial \mathrm{w}_i} = \frac{\mathrm{Cov}(\mathrm{R}_i, \mathrm{R}_p)}{\sigma_p^2} = \beta_i.$$

Vagyis β_i méri az i. eszköz hozzájárulását a portfólió kockázatához, ezért ezt az i. értékpapír p portfólióra vonatkoztatott *szisztematikus kockázatának* is hívják. Mátrix jelöléssel:

$$\beta_i = \frac{\mathbf{\Sigma}_i \mathbf{w}}{\mathbf{w}^{\mathbf{T}} \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}},$$

ahol $\mathbf{\Sigma_i}$ a már korábban definiált kovarianciamátrix i. sora.

Megjegyzés: A β-val mért kockázat az alapja a Sharpe által kifejtett tőkepiaci árfolyamok modelljének, a CAPM(Capital Asset Pricing Model)-modellnek, mellyel a Befektetések elemzése c. tárgy során ismerkedhettünk meg. A CAPM szerint a portfólió hozama: $\mathrm{R}_p = \mathrm{R}_f + \beta(\mathrm{R}_m - \mathrm{R}_f)$, ahol R_m a piaci portfóliónak, R_f pedig a kockázatmentes befektetésnek a hozama. A fent kapott béta csak akkor egyezik meg a CAPM-belivel, ha a portfólió maga a piaci portfólió.

A β mérőszám különösen hasznos a portfóliók VaR-jának különböző kockázati források szerinti felbontásakor. A portfólió varianciáját kifejthetjük ily módon:

$$\sigma_p^2 = \mathrm{w}_1(\mathrm{w}_1\sigma_1^2 + \sum_{j=1, j\neq 1}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_j\sigma_{1j}) + \mathrm{w}_2(\mathrm{w}_2\sigma_2^2 + \sum_{j=1, j\neq 2}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_j\sigma_{2j}) + ...$$

Tovább folytatva:

$$\sigma_p^2 = \mathrm{w}_1\mathrm{Cov}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_p) + \mathrm{w}_2\mathrm{Cov}(\mathrm{R}_2, \mathrm{R}_p) + ... = \mathrm{w}_1(\beta_1\sigma_p^2) + \mathrm{w}_2(\beta_2\sigma_p^2) + ...$$

Azaz:

$$\sigma_p^2 = \sigma_p^2(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_i\beta_i),$$

amelyből látszik, hogy a portfólió varianciáját felbonthatjuk olyan komponensekre, amelyek mindegyike valamely i. eszközhöz kapcsolható. Hasonló felbontást használva azt írhatjuk, hogy:

$$\mathrm{VaR}_i^{\text{növ}} = \mathrm{w}_i\beta_i\mathrm{VaR}_p,$$
$$\mathrm{VaR}_p = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{VaR}_i^{\text{növ}},$$

ahol $\mathrm{VaR}_i^{\text{növ}}$ az i. eszköz növekményi VaR-ja. Ezzel a teljes VaR-t felbontottuk növekményekre. Ez a felbontás alapvető információt tartalmaz, mivel a kockázatot a teljes portfólió vonatkozásában és nem elkülönítetten kell vizsgálnunk.

5. A kovarianciamátrix egyszerűsítése

Az eddigiekben láthattuk, hogy a korrelációs együtthatók alapvetően befolyásolják a portfóliók kockázatait. Amikor azonban az eszközök száma nagy, a kovarianciamátrix kiszámítása egyre bonyolultabbá válik, hiszen N eszköz esetén $\frac{N(N+1)}{2}$ különböző varianciát és kovarianciát tartalmazó tagot kell becsülnünk, ami 10 eszköz esetében 55, 100 eszköz esetén pedig már 5500 tagot jelent. A korrelációk száma mértanilag nő, ha az eszközök számát növeljük. Nagy portfóliók esetében ez komoly problémákat okoz, egyrészt lehet, hogy a portfólió VaR-ja nem lesz pozitív, másrészt lehet, hogy a korrelációkat csak pontatlanul tudjuk becsülni. Ebben a részben megnézzük, milyen mértékben befolyásolják ezek a problémák a VaR-ra vonatkozó számításainkat, és néhány megoldási módot mutatunk be.

5.1. Zéró VaR-mérőszámok

A VaR mérőszámát a portfólió varianciájából származtattuk, melyet így számolunk ki:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}.$$

Kérdés, hogy van-e valami garancia arra, hogy ez a szorzat pozitív?
Sajnos nem minden esetben, ehhez ugyanis az szükséges, hogy a $\mathbf{\Sigma}$ kovarianciamátrix pozitív definit legyen. (Azzal az esettel most nem foglalkozunk, amikor a w minden eleme 0.)

$\mathbf{\Sigma}$ pozitív definitsége két feltétel fennállása esetén biztosítható:
(i) a rendelkezésre álló megfigyelések T számának meg kell haladnia az eszközök N számát, valamint,
(ii) az idősorok nem lehetnek lineárisan összefüggők.

Az (i) feltétel szerint, ha például a portfólió 100 eszközből áll, akkor legalább 100 megfigyeléssel kell rendelkeznünk ahhoz, hogy biztosítsuk egy tetszőlegesen megválasztott portfólió varianciájának pozitivitását.

A (ii) feltétel kizárja azt az esetet, amikor egy eszköz pontosan megegyezik más eszközök lineáris kombinációjával.

Nem pozitív definit mátrixra kapunk egy példát, ha két eszköz ugyanaz a portfólióban, azaz $\rho = 1$. Ebben az esetben, ha a portfólió 1 millió dollárnyit tartalmaz az egyikből (vételi pozíció esetében), és –1 milliót a másikból (eladási pozíció esetében), akkor a kockázatunk 0 lesz. Gyakorlatban valószínűbb, hogy ez a probléma nagyszámú eszközből álló portfóliók esetén jelentkezik, amelyek között magasak a korrelációs együtthatók. Ráadásul a pozíciók méretét pontosan be kell állítani ahhoz, hogy kockázatunk nulla legyen. Ez akkor a legvalószínűbb, ha a súlyokat magára a kovariancia mátrixra alapozva *optimalizációval* határoztuk meg. Az ilyenfajta optimalizáció azonban nagyon veszélyes, mert nagyon nagy pozíciók vállalásához vezethet, amelyek együttes kockázata látszólag alacsony. Ha észrevesszük, hogy a VaR-számadataink szokatlanul alacsonyak a pozíciók méretéhez viszonyítva, akkor meg kell vizsgálnunk, hogy a korrelációkban bekövetkező kis változások nem vezetnek-e nagy elmozdulásokhoz a VaR-mérőszámainkban.

5.2. A diagonális modell

Az előbbiekhez kapcsolódó probléma lehet, hogy ha növeljük az eszközök számát, akkor egyre valószínűbbé válik, hogy egyes korrelációkat hibásan mérünk. Néhány modellben le tudjuk egyszerűsíteni ezt a folyamatot egyszerűbb struktúrájú kovarianciamátrix felhasználásával. Egy ilyen modell a *diagonális modell*, amelyet eredeti formájában Sharpe alkotott meg részvényekből álló portfóliók esetére.

A feltételezés az, hogy az eszközök mozgásait csupán egyetlen tényező, a piac okozza. A modell formálisan:

$$\mathrm{R}_i = \alpha_i + \beta_i \mathrm{R}_m + \varepsilon_i, \qquad \mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0,$$
$$\mathrm{E}(\varepsilon_i \mathrm{R}_m) = 0, \qquad \mathrm{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, \qquad \mathrm{E}(\varepsilon_i^2) = \sigma_{\varepsilon,i}^2.$$

Tehát az i. eszköz hozamát az R_m piaci hozam és egy, az eszközre jellemző ε_i véletlen tag határozza meg, amely sem a piaccal, sem más eszközök véletlen tagjaival nem korrellált. Ennek eredményeképpen a varianciát a következőképp bonthatjuk fel:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon,i}^2.$$

A két eszköz közötti kovariancia pedig:

$$\sigma_{i,j}^2 = \beta_i \beta_j \sigma_m^2,$$

amely egyedül a közös tényezőtől függ. A teljes kovarianciamátrix:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mathrm{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_\mathrm{N} \end{pmatrix} \sigma_m^2 + \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon,1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{\varepsilon,\mathrm{N}}^2 \end{pmatrix}.$$

Mátrix jelölést használva, a kovarianciamátrix tehát a

$$\boldsymbol{\Sigma} = \beta \beta^\mathrm{T} \sigma_m^2 + \mathrm{D}_\varepsilon$$

alakba írható.

Mivel a D_ε mátrix diagonális, a paraméterek számát $\frac{\mathrm{N(N+1)}}{2}$-ről 2N+1 -re csökkentettük (N darab β, N elem a D mátrixban és σ_m^2). A korábban említett 100 eszközből álló portfólió esetét tekintve ez már csak 201 tagot jelent az 5500-hoz képest, ami jelentős javulás. Sőt, a nagy, jól diverzifikált portfóliók varianciája még tovább egyszerűsödik, mivel egyetlen tényezőre való érzékenységet fejez ki. A portfólió varianciája:

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_p) = \mathrm{V}(\mathrm{w}^\mathrm{T}\mathrm{R}) = \mathrm{w}^\mathrm{T}\Sigma\mathrm{w} = (\mathrm{w}^\mathrm{T}\beta\beta^\mathrm{T}\mathrm{w})\sigma_m^2 + \mathrm{w}^\mathrm{T}\mathrm{D}_\varepsilon\mathrm{w}.$$

A második tag kifejtve $\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{w}_i^2 \sigma_{\varepsilon,i}^2$. Ez a tag nagyon kicsivé válik, ha növeljük a portfólióban szereplő értékpapírok számát. Például, ha minden értékpapír varianciája megegyezik ($= \sigma_\varepsilon^2$), és azonos súlyokat feltételezünk, akkor ez az összeg: $\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (\frac{1}{\mathrm{N}})^2$, ami N növekedésével 0-hoz tart. Tehát egy portfólió varianciája egy adott értékhez konvergál:

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_p) \to (\mathrm{w}^\mathrm{T}\beta\beta^\mathrm{T}\mathrm{w})\sigma_m^2,$$

ami csupán egyetlen tényezőtől függ. Ez a közelítés különösen hasznos, ha egy sok részvényből álló portfólió VaR-ját vizsgáljuk.

6. Szemléltetés

A fentieket egy példán szemléltetjük, ahol az adatok [1] alapján rendelkezésünkre állnak.
Képzeljük el, hogy van három féle részvényünk: General Motors (GM), Ford és Hewlett Packard (HWP). Nézzük meg az alábbi táblázatot:

	Kovarianciák			**Korrelációk**		
Modell	GM	Ford	HWP	GM	Ford	HWP
Teljes mátrix						
GM	72,17			1		
Ford	43,92	66,12		0,636	1	
HWP	26,32	44,31	90,41	0,326	0,573	1
Regresszió						
β_i	0,806	1,183	1,1864			
$\mathrm{V}(\mathrm{R}_i)$	72,17	66,12	90,41			
$\mathrm{V}(\varepsilon_i)$	64,44	49,46	49,10			
$\beta_i^2\mathrm{V}(\mathrm{R}_m)$	7,73	16,65	41,32			
Diagonális modell						
GM	72,17			1		
Ford	11,35	66,12		0,164	1	
HWP	17,87	26,23	90,41	0,221	0,339	1

2. tábla: A diagonális modell

A táblázat első része tartalmazza a havi adatok alapján számított teljes kovarianciamátrixot. Ezt a mátrixot leegyszerűsíthetjük, ha meghatározzuk az egyedi részvények amerikai részvénypiacra vonatkozó regresszióját. Ezeket a regressziókat láthatjuk a táblázat második felében, amelyből a béták értéke rendre: 0,806; 1,183 és 1,864, tehát a GM bétája a legalacsonyabb, míg a HWP-nek a legnagyobb a szisztematikus kockázata. A piac varianciája az [1]-ben megadott szerint: $\mathrm{V}(\mathrm{R}_m) = 11,90$.

A táblázat alsó részében látjuk a diagonális közelítés alapján számított kovarianciamátrixot. Például a GM varianciáját a következőképp számítottuk ki:
$\beta_1^2 \cdot \mathrm{V}(\mathrm{R}_m) + \mathrm{V}(\varepsilon_1)$, ami: $0,806^2 \cdot 11,90 + 64,44 = 7,73 + 64,44 = 72,17$.

A GM és Ford közötti kovariancia $\beta_1\beta_2 \mathrm{V}(\mathrm{R}_m)$, ami: $0,806 \cdot 1,183 \cdot 1,190 = 11,35$.

A táblázat utolsó három oszlopában a részvények közötti páronkénti korrelációkat láthatjuk. A tényleges korrelációk mindegyike pozitív, csakúgy, mint a diagonális modellben. Habár a diagonális modell felhasználásával kapott mátrix hasonlít az eredeti kovarianciamátrixra, a közelítés nem tökéletes. Például a GM és a Ford közötti korreláció tényleges értéke 0,636. A diagonális modellt használva, a piacra való érzékenységre alapozott korrelációs együttható 0,164, ami alacsonyabb a valódi korrelációnál. Az, hogy ez a modell elfogadható közelítéseket eredményez, vagy sem, az adott felhasználás céljától függ, de az kétségtelen, hogy a diagonális modell jelentős egyszerűsítést jelent.

Nézzük meg ennek a portfóliónak a VaR-jának kiszámítását!
Láttuk, hogy a portfólió R_p hozamának varianciája:

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_p) = \mathrm{w}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathrm{w} = (\mathrm{w}^{\mathrm{T}}\beta\beta^{\mathrm{T}}\mathrm{w})\sigma_m^2 + \mathrm{w}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}_\varepsilon\mathrm{w}. \tag{5}$$

A portfólió kockázatának meghatározásához a piaci m indexhez viszonyított szisztematikus kockázatot jelentő β vektorra, valamint a piaci index σ_m^2 varianciájára és a D_ε diagonális mátrix által összegyűjtött reziduális varianciákra van szükség.

	Készpénz (M dollár)	**Kovarianciamátrix**			**VaR** (M dollár)
		GM	Ford	HWP	
VaR		14,01	13,41	15,68	
Béta		0,0806	1,183	1,864	
Kovarianciamátrix:					
Teljes					
GM	33,33	72,17	43,92	26,32	11,76
Ford	33,33	43,92	66,12	44,31	
HWP	33,33	26,32	44,31	90,41	
Diagonális					
GM	33,33	72,17	11,35	17,87	10,13
Ford	33,33	11,35	66,12	26,23	
HWP	33,33	17,87	26,23	90,41	
Béta					
GM	33,33	7,73	11,35	17,88	7,30
Ford	33,33	11,35	16,65	26,24	
HWP	33,33	17,88	26,23	40,32	

3. tábla: Egy 100 millió dolláros portfólió VaR-jának kiszámítása (havi VaR, 95 százalékos szinten)

Amennyiben a portfólió β-ja

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{w}_i \beta_i = \mathbf{w}^{\mathbf{T}} \beta,$$

a portfólió VaR-ja $\mathrm{VaR}_p = \mathrm{VaR}_m \beta_p$-val egyenlő. Ez a megközelítés elhagyja az (5) egyenlet második tagját. Ezt a modellt *béta-modellnek* nevezzük.

A táblázatból látszik, hogy példánkban a 100 millió dollár ugyanazon arányban van befektetve a GM, a Ford és a HWP részvényekbe. A VaR-t 95 százalékos szinten ($\alpha = 1,65$), egy hónapos időhorizonton számoljuk ki. Az első sor mutatja az egyes részvények VaR-ját, amelynek értéke 13,41-től 15,68 millió dollárig terjed egy 100 millió dollár értékű pozíció esetén. Példaként nézzük a GM VaR-ját:

$$\mathrm{VaR}_{GM} = \sigma_{GM}\alpha = \sqrt{72,17} \cdot 1,65 = 14,01.$$

A táblázatban ezután a három féle kovariancia mátrixot láthatjuk, melyek VaR értékei: 11,76; 10,13; 7,3.
Nézzük meg a diagonális modell számítását:

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_p) = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 72,17 & 11,35 & 17,87 \\ 11,35 & 66,12 & 26,23 \\ 17,87 & 26,23 & 90,41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 37,73,$$

$$\mathrm{VaR}_{Diag}(\mathrm{R}_p) = \sqrt{37,73} \cdot 1,65 = 10,13.$$

A kapott VaR számok azt mutatják, hogy a diagonális modell jól közelíti a tényleges portfólió VaR értékét, bár inkább alulról. A béta modell alulbecsli a tényleges VaR értékét.
Ha a VaR-t a három értékpapír VaR-jának átlagával adjuk meg, azaz:

$$\mathrm{VaR}(\mathrm{R}_p) = \frac{\mathrm{VaR}_{GM} + \mathrm{VaR}_{Ford} + \mathrm{VaR}_{HWP}}{3} = \frac{14,01 + 13,41 + 15,68}{3} = 14,37,$$

akkor jól látható, hogy ez konzervatív becslésnek bizonyul, mivel a kockázatnak ez a mértéke figyelmen kívül hagyja a portfólió diverzifikációs tulajdonságait. Amint a portfólióban lévő részvények száma növekszik, azt várnánk, hogy a diagonális modell VaR-ja a tényleges VaR egyre pontosabb közelítését adja.

7. A VaR kritikái és alternatív eszközök bemutatása

A VaR a piaci kockázatok kezelésének egyik leggyakrabban használt eszköze. Sikere annak köszönhető, hogy könnyen értelmezhető, így a vállalat felső vezetősége és tulajdonosai felé egyaránt egyszerűen kommunikálható. Lényegében egy intézmény piaci kockázatra való érzékenységét egyetlen szám segítségével fejezi ki. Fontos megjegyezni, hogy amióta a VaR létezik, azóta kritikái is léteznek, melyek tőzsdeválság idején (ahogy napjainkban is) felerősödnek. Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy mik a VaR legnagyobb hiányosságai, és alternatív eszközöket mutatunk hiányosságainak kiküszöbölésére. Azonban mielőtt rátérnénk a VaR hátrányaira, elevenítsük fel legfontosabb előnyeit:

(i) univerzális – mindegy milyen eszközökből (részvény, kötvény,...) álló portfólióról beszélünk, a VaR-t minden esetben lehet alkalmazni,
(ii) valószínűség alapú – valamilyen biztonsági szint mellett mondjuk meg, hogy mennyi a lehetséges veszteség,
(iii) pénzben fejezi ki a kockázatot.

Most rátérünk a kockázati mértékek kérdésére a [13]-ban leírtak alapján. Eszerint a pénzügyelmélet egyik alapfeltevése szerint minél nagyobb egy befektetési eszköz hozama, annál nagyobb a kockázata is. Ahogy portfóliónkat államkötvényekből, vállalati kötvényekből, részvényekből, devizákból, ingatlanjegyekből, nemesfémekből stb. felépítjük, ezeknek a különböző eszközöknek a relatív súlyát megválasztva meghatározhatjuk a portfólión (a múltbeli ingadozások alapján számolt átlagos) elérhető hozamot, de egyszersmind a portfólió kockázatát is. Értelmes optimalizációs célként tűzhetjük magunk elé, hogy egy adott kockázati szinten maximalizáljuk a hozamot, vagy fordítva, adott elvárt hozam mellett a súlyok megválasztásával igyekszünk minimalizálni a kockázatot. Az optimalizáció során használt kockázati mértéktől döntő módon függhet az eredmény. Ezért a helyes kockázati mérték megválasztása korántsem ártatlan elvi kérdés. A következő részben ezért áttekintjük a legáltalánosabb kockázati mértékeket.

7.1. Kockázati mértékek

A kockázati mértékeket valószínűségi változók egy halmazán értelmezhetjük, hiszen ha adott egy portfólió, befektetés vagy értékpapír, akkor egy valószínűségi változó reprezentálja az abból származó jövőbeli veszteséget.

Kockázati mérték: Legyen $\mathbf{V}$ (pénzügyi eszközök, portfóliók veszteségét reprezentáló) valószínűségi változók egy halmaza egy $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$ valószínűségi mezőn. Ekkor egy

$$\rho : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$$

függvényt kockázati mértéknek nevezünk.

A legalapvetőbb kockázati mérték a *szórás*, mely korábban elfogadott volt, hiszen Markowitz portfólió elméletéért, melyben a hozamok normalitását feltételezte, és a portfólió kockázatát a Gauss-görbe „szélességével", azaz szórásával (σ) mérte, Nobel-díjat kapott. Azonban Gauss-eloszlás legjellemzőbb vonása, hogy az átlagtól erősen (két-három σ-nak megfelelő értéknél jobban) eltérő értékek csak igen ritkán fordulnak elő. A valóságos piacokon megfigyelhető eloszlások nem ilyenek (ezt Mandelbrot is levezette [12]-ben), azaz alakjuk nem jellemezhető egyetlen számmal, és a nagy ingadozások gyakorisága lényegesen meghaladja a normális eloszlásból következő gyakoriságot. A nagy ingadozásoknak ezt a viszonylagos túlzott gyakoriságát, vagyis az eloszlásfüggvénynek a normálisnál lényegesen lassabb aszimptotikus esését a már korábban is említett leptokurtikus jelenségnek nevezzük. A centrális határeloszlás tétel szerint független azonos eloszlású valószínűségi változók összegének eloszlása a normális eloszláshoz tart, de a [12]-ben leírtak alapján ez csak akkor érvényes, ha a napi hozamok varianciája véges. Azonban az eszközhozamokat gyakran közelítik t-eloszlással, viszont az 1 szabadságfokú t-eloszlásnak szórása sincs! Továbbá pl. a Cauchy-eloszlásokat is hatványszerű eséssel jellemezhetjük a széleken, nem pedig exponenciálissal, így itt is problémába ütközhet a véges várható érték, szórás kérdése. Ahogy a korábbi fejezetekben láthattuk, a VaR lényegében a portfólió szórásának többszöröse (α-szorosa) volt, s az ismertetett delta-normál módszer az eszközök normalitását – és így a portfólió normális eloszlását – feltételezte. Emiatt ezen a ponton éri a legtöbb kritika a VaR-t.

Két eloszlás kockázatosságának összehasonlítására jó mérőszámok lehetnek a *fer-*

deség és a *csúcsosság* adatai, melyeket az első fejezetben definált unk. Minél vastagabb az egyik eloszlás széle, annál nagyobb a ferdesége, így kockázatosabbnak ítéljük, még akkor is, ha a másik eloszlás csúcsossága nagyobb.

Ha a mintában outlierek vannak, akkor érdemes használni a *MAD – mean absolute deviation*, azaz az átlagos abszolút eltérés mérőszámát, ugyanis ez kevésbé emeli ki a kiugró értékek hatását. Képlete:

$$\mathrm{MAD(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{x}_i - \overline{\mathrm{X}}|.$$

Megemlítendő még a *szemivariancia/félvariancia* (SV), amely abban különbözik a varianciától, hogy csak azokra a megfigyelésekre számítja a varianciát, amelyek az átlag alá esnek, illetve a viszonyítási pont lehet az átlagtól különböző is. Formulával:

$$\mathrm{SV(X)} = \frac{1}{n}\sum_{\mathrm{x}_i<\mathrm{E(X)}}^{n}|\mathrm{E(X)} - \mathrm{x}_i|.$$

Ezt és a VaR-t alsóági kockázat mértékeknek is nevezzük, mivel csak a negatív eseményekkel foglalkoznak. Ha a kockázatérzékeny befektetők a portfólió szemivarianciáját minimalizálják, akkor elkerülhetik a nagy veszteségeket.

7.2. Koherens kockázati mértékek

Az alábbiakban definiáljuk a koherens kockázati mérték fogalmát, amely a VaR hátrányaira mutat rá. A következő négy kritérium közül hármat ugyan még teljesít a VaR, melyet egy [5]-beli tétel segítségével be is bizonyítunk, azonban látni fogjuk, hogy a szubbadditivitás kritériumának már nem felel meg. Nézzük tehát a definíciót:

Koherens kockázati mérték: Legyen $\mathbf{V}$ valószínűségi változók egy halmaza egy $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy $\rho : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ valós függvény koherens kockázati mérték, ha:

(i) Monoton: tetszőleges $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbf{V}$ és $\mathrm{P(X \leq Y) = 1} \Rightarrow \rho(\mathrm{X}) \leq \rho(\mathrm{Y})$.
(ii) Szubadditív: $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{X+Y} \in \mathbf{V} \Rightarrow \rho(\mathrm{X+Y}) \leq \rho(\mathrm{X}) + \rho(\mathrm{Y})$.

(iii) Pozitív homogén: $X \in \mathbf{V}, \lambda \in \mathbb{R}^+, \lambda X \in \mathbf{V} \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$.

(iv) Eltolás invariáns: $v \in \mathbb{R}, X, X + v \in \mathbf{V} \Rightarrow \rho(X + v) = \rho(X) + v$.

Ezek teljesen ésszerű követelmények egy kockázati mértékkel szemben, ugyanis:
- a monotonitás szerint, ha egy portfólió vesztesége minden esetben több, mint egy másiké, akkor annak lesz nagyobb a kockázata,
- a szubadditivitás szerint az összeolvadás nem okoz extraveszteséget, azaz ha egyesítünk két portfóliót, akkor van kockázat-diverzifikációs hatás,
- a pozitív homogenitás szerint, ha megtöbszörözzük a portfóliót, ám az összetételt nem változtatjuk, akkor a kockázatosság a nagysággal arányosan változik,
- az eltolás invariancia, vagy sallangmentesség szerint, ha biztosan realizálunk egy pótlólagos adott összegű pénzáramlást, akkor a portfólió kockázatossága éppen ennek a pénzáramlásnak a nagyságával fog csökkenni.

(Megjegyezük, hogy néhány szerző a pozitív homogenitás és a szubadditivitás helyett a mérték konvexitását várja el, azaz:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y), \forall 0 \leq \lambda \leq 1,$$

amelyből következik, hogy a koherens kockázati mértékek konvexek, míg a konvex kockázati mértékek nem feltétlenül koherensek, így őket gyengén koherens kockázati mértékeknek is nevezik.)

Tétel: *Az alsó és felső VaR egyaránt monoton, pozitív homogén és eltolás invariáns egy valószínűségi mező összes valószínűségi változóinak halmazán.*

Bizonyítás: Csak az alsó VaR esetére ismertetjük a bizonyítást, a felső VaR esetére hasonlóan belátható.

Monotonitás: Ha $P(X \leq Y) = 1$, akkor $F_X(y) \geq F_Y(y)$ minden $y \in \mathbb{R}$ esetén, ezért:
$\{y|F_X(y) < 1 - \alpha\} \subset \{y|F_Y(y) < 1 - \alpha\}$, azaz:
$VaR_c(X) = \sup\{y|F_X(y) < c\} \leq \sup\{y|F_Y(y) < c\} = VaR_c(Y)$.

Pozitív homogenitás: Ha $\lambda > 0$, akkor $F_{\lambda X}(y) = F_X(\frac{y}{\lambda})$, $y \in \mathbb{R}$, ezért:

$\mathrm{VaR_c}(\lambda X) = \sup\{y|F_{\lambda X}(y) < c\} = \sup\{y|F_X(\frac{y}{\lambda}) < c\} = \lambda \sup\{z|F_X(z) < c\} = \lambda \mathrm{VaR_c}(X)$.

Eltolás invariancia: Egy $v \in \mathbb{R}$ esetén $(F_{X+v}(y) = F_X(y - v)$, $y \in \mathbb{R}$, ezért:
$\mathrm{VaR_c}(X + v) = \sup\{y|F_{X+v}(y) < c\} = \sup\{y|F_X(y - v) < c\} = v + \sup\{z|F_X(z) < c\} = v + \mathrm{VaR_c}(X)$.

$\square$

Ahogy említettük, sajnos a szubadditivitás kritériumának a VaR nem felel meg, ennek bizonyítására nézzünk egy [4]-ben ismertetett példát! Tekintsük a következőt: legyen X_1 és X_2 két véletlen változó tíz lehetséges állapotban, amelyeknek bekövetkezési valószínűsége azonos – vagy 0, vagy 1.

Állapot	X_1	X_2	$X_1 + X_2$
1.	0	0	0
2.	0	0	0
3.	0	0	0
4.	0	0	0
5.	0	0	0
6.	0	0	0
7.	0	0	0
8.	0	0	0
9.	1	0	1
10.	0	1	1
VaR(85 százalék)	0	0	1

4. tábla: A VaR szubadditivitás vizsgálata

A fenti táblázat szerint a 85 százalékhoz számolt VaR X_1 és X_2 esetében külön-külön számolva 0, mivel nem csak 85, hanem 90 százalékos biztonsággal is állíthatjuk, hogy 0-nál többet nem vesztünk, hiszen csak 1/10 az esélye az 1 veszteségnek. X_1+X_2 veszteségeloszlását együtt vizsgálva viszont nem jelentkezik diverzifikációs hatás, a teljes portfólió VaR-ja 1. Azaz, mivel találtunk egy példát, amikor a VaR nem szubadditív, így nem koherens kockázati mérték! A szubadditivitás hiánya esetén pedig az összeolvadás extra veszteséget okozhat. További probléma, hogy a VaR nem konvex, pedig a konvexitás követelménye a korábban már említett diverzifikációs elvből következik: a befektetés megosztása különböző pénzügyi instrumentumok között általában csökkenti, de semmiképp nem növeli a kockázatot. Ebből az a sajnálatos tény következik, hogy a VaR-t nem alkalmazhatjuk optimalizációs feladatokhoz.

7.3. Alternatív eszközök

Az alábbi tétel, melyet bizonyítás nélkül közlünk, arra szolgál, hogy könnyen le tudjuk ellenőrizni, hogy mikor lesz egy kockázati mérték koherens:

Reprezentációs tétel: *Egy kockázati mérték pontosan akkor koherens kockázati mérték, ha veszünk egy valószínűségi mértékcsaládot* (Π) *és a kockázati mérőszám értéke egyenlő az ebből a családból vett valószínűségeloszlások* P *szerint számított veszteség diszkontált várható értékeinek a szuprémumával:*

$$\rho(\mathrm{x}) = \sup\left\{ \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\frac{\mathrm{X}}{d} | \mathrm{P} \in \Pi) \right\}.$$

Azt a meglepő következtetést vonhatjuk le, hogy minden koherens kockázati mérőszám különböző általánosított forgatókönyvek közül a legrosszabban bekövetkező veszteséget méri; másként fogalmazva: a legrosszabb (elemi) esetek veszteségének súlyozott átlaga. Minél több forgatókönyvet veszünk számításba, annál konzervatívabb (nagyobb) a kockázati mérték.

7.3.1. Maximális veszteség

Könnyen beláthatjuk, hogy a maximális veszteség koherens kockázati mérték. Álljon a teljes eseménytér (Ω) az ω_i elemi eseményekből. Minden ω_i-hez tartozik egy X_i veszteség. Tekintsük a következő valószínűségi mértékcsaládot:

$$\mathrm{P}_i(\omega) = 1, \text{ ha } \omega \in \omega_i \text{ és } 0 \text{ különben.}$$

Ekkor, ha a reprezentációs tételben a diszkontálástól eltekintünk, azaz $\mathrm{d} = 1$, akkor a maximális veszteség, mint kockázati mérőszám épp ezen a családon vett várható értékek felső határa (amely a legnagyobb érték):

$$\rho(\mathrm{x}) = \sup \left\{ \mathrm{E_P}(\frac{\mathrm{X}}{d} | \mathrm{P} \in \Pi) \right\} = \max_i(\mathrm{X}_i).$$

7.3.2. A feltételes kockáztatott érték és az Expected Shortfall

Angol nevén *Conditional VaR*, azaz a CVaR formális képlete α biztonsági szint mellett a következő:

$$\mathrm{CVaR(X)} = \mathrm{E[X|X > VaR_\alpha(X)]}.$$

A VaR azt mutatja meg, hogy adott időtávon, konfidenciaszinten maximum mekkora a veszteség nagysága. 95 százalékos megbízhatósági szinten pesszimista nézőpontból azt mondhatjuk, hogy 5 százalékos eséllyel a VaR által mért kvantilisnél nagyobb lesz a veszteség. Ekkor egy vállalat vezetősége arra is kiváncsi lehet, hogy ha bekövetkezik az 5 százalékos esemény, akkor mekkora lesz a veszteség várható értéke, átlagos nagysága. Az α-rendű kvantilishez tartozó CVaR ezt mutatja meg.

Könnyen bebizonyíthatjuk, hogy a CVaR koherens, ugyanis ha olyan valószínűségi mértékcsaládot tekintünk, melynek tagjai az eseménytér n elemű részhalmazához A_i egyenlő valószínűségeket rendelnek (és ezeket összeadva 1-et kapunk), akkor ezt kapjuk:

$$\mathrm{P}_i(\omega) = \tfrac{1}{n}, \text{ ha } \omega \in \mathrm{A}_i \text{ és 0 különben.}$$

Az így vett várható értékek szuprémuma a legrosszabb esetek átlaga lesz. Ezekszerint a legrosszabb esetek egyszerű átlagát adó mérőszám koherens, hasonlóan a CVaR is az.

Ellenőrizzük le, hogy a CVaR tényleg kiállja a korábban tekintett szubadditivitás vizsgálatot α=85 százalékon! $\mathrm{CVaR(X_1)} = \mathrm{CVaR(X_2)} = 1$, ugyanis a megfelelő VaR-kvantilisnél (0) nagyobb veszteségek várható értéke 1. Továbbá $\mathrm{CVaR(X_1 + X_2)} = 2$, mivel 1-nél nagyobb veszteség csak a 2 lehet. Így $\mathrm{CVaR(X_1 + X_2)} \leq \mathrm{CVaR(X_1) + CVaR(X_2)}$.

A CVaR-t másnéven *Expected Shortfall*-nak is nevezik folytonos véletlen változók esetében, és a formális definíciót az alábbi módon adják meg:

$$\mathrm{ES}^{(1-\alpha)}(\mathrm{X}) = \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{0}^{1-\alpha} \mathrm{F}^{-1}(\mathrm{p})\mathrm{dp},$$

ahol $\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{p}) = \inf\left\{\mathrm{x}|\mathrm{F}(\mathrm{x}) \geq \mathrm{p}\right\}$ az általánosított inverz függvény.

Az Expected Shortfall szélsőséges esetei a várható érték és a maximális veszteség, hiszen:

$$\alpha \to 100\%, \text{ akkor } \mathrm{ES}^{(0)}(\mathrm{X}) = \max \mathrm{X} \text{ és}$$

$$\mathrm{ES}^{(1)}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}).$$

Nézzünk egy egyszerű példát [14] alapján az ES alkalmazására!
Tegyük fel, hogy 100 dollárt teszünk egy portfólióba, melynek várható eredményei az alábbi táblázat szerint alakulnak, az utolsó oszlopban az eredmények szerinti veszteséget is feltüntettük:

	Esetek valószínűsége	Eredmény	Veszteség
1.	10%	0	100
2.	30%	80	20
3.	40%	100	0
4.	20%	150	-50

5. tábla: Várható eredmény és veszteség

Ha 1-α értékeit a lenti táblázat bal oldali oszlopának megfelelően választjuk, akkor a megfelelő ES értékek jobb oldali oszlop szerint alakulnak:

$1-\alpha$ értékei(%)	$\mathrm{ES}^{(1-\alpha)}$
5%	100
10%	100
20%	60
40%	40
100%	6

6. tábla: Az ES értékei

Nézzük ekkor például az $1-\alpha = 0,05$ esetet: ekkor az $\mathrm{ES}^{(0,05)}$ az esetek legrosszabb 5%-ának várható értékét adja eredményül, azaz ezek az 5. tábla 1. sorába fognak esni, így az érték 100 lesz.

Az $1-\alpha = 0,20$ esetét vizsgálva azt kapjuk, hogy a legrosszabb 20%-ot kell néznünk a százból, melyből 10% az 5. tábla első, 10% pedig a második sorába fog esni, így az Expected Shortfall értéke:

$$\mathrm{ES}^{(0,20)} = \frac{0,1(100) + 0,1(20)}{0,2} = 60.$$

Hasonlóan kapjuk a 6. tábla további értékeit. Ahogy már említettük az $\alpha = 0$ eset valóban a várható értéket adja.

Fontos megjegyezni, hogy $1-\alpha$ növekedésével a $\mathrm{ES}^{(1-\alpha)}$ értékei csökkennek, valamint azt, hogy az $1-\alpha$-szintű ES konzervatívabb (nagyobb) értéket ad, mint azt az $1-\alpha$-szintű VaR tenné. Ezt látva, felmerülhet a kérdés, hogy ha valaki egy portfólió esetében már a VaR-t is konzervatívnak érzi, akkor érdemes-e más, kifinomultabb, de konzervatívabb eszközzel számolnia?

8. Alapbiztosítékok

Az elmúlt év során lehetőségem nyílt a KELER Zrt. (Központi Elszámolóház és Értéktár Zrt.) kockázatkezelési osztályán dolgozni, és munkám során a VaR többféle alkalmazásával is megismerkedhettem. Ezek közül az alábbi fejezetben egyet emelek ki (a termékenkénti alapbiztosíték szintjének meghatározását), mely nagyon szemléletes, és minden alkalmazott felé könnyen reprezentálható. Ez azért lényeges, mert a kockázatkezelés során nagy szükség van a többi osztállyal való szoros együttműködésre, ezért az olyan eljárások, melyek hatékonyak és egyszerűen reprezentálhatóak, megkönnyítik az osztályok közötti csapatmunkát.

Az elszámolóház a tőzsdén és tőzsdén kívül megkötött pénz- és tőkepiaci ügyletek elszámolásával és teljesítésével kapcsolatos szolgáltatásokat teljesítő szakosított hitelintézet. Ezt a funkciót Magyarországon a KELER Zrt. tölti be, melynek jelenlegi tulajdonosai a Magyar Nemzeti Bank (53,33%) és a Budapesti Értéktőzsde (46,67%). Főbb tevékenységei:

a, központi értéktár,
b, pénz- és értékpapírszámla-vezetés,
c, pozíciószámla-vezetés,
d, klíring és elszámolás,
e, cross-border elszámolás,
f, részvénykönyv-vezetés.

2009. január 1.-től a tőzsdei ügyletek garanciavállalásért felelős központi szerződő fél funkciót nem a KELER, hanem a KELER KSZF Kft. (Központi Szerződő Fél Kft.) tölti be. A tőzsdei garanciavállalalás biztosítása érdekében a KELER KSZF Kft. klíringtagsági rendszert működtet. Klíringtag az a személy, aki a KELER KSZF-fel klíringtagsági szerződést köt, míg azt a személyt, aki a KELER és a KELER KSZF szolgáltatásait a klíringtagon keresztül igénybe veszi, megbízónak nevezzük.

A KELER KSZF mint egy központi fél áll minden olyan ügylet oldalán, melyet valamely tagja kötött a tőzsdén, ezért a KELER KSZF mindig futja a tag nemteljesítésének kockázatát. Hogy limitálja és megfelelően fedezze a lehetségesen felmerülő veszteségeket, a KELER KSZF garanciát gyűjt minden nyitott pozíció után és minden nap kiszámolja a SPAN alapbiztosíték számítási szoftver segítségével a klíringtag kötelezettségét – az alapbiztosítékot. Ez két részből tevődik össze:

(i) napi árkülönbözet (variation margin),
(ii) napi garancia (initial margin).

A napi árkülönbözet a tagok nyitott pozíciójából származó nyereség vagy veszteség, melyet a KELER KSZF naponta kiszámol a piacokon kialakult napi záróárakból. (Ezt nevezik marked to market close értéknek.) Az így kapott értékeket attól függően, hogy nyereség, vagy veszteség a KELER jóváírja/terheli a számlákon. Ezáltal megakadályozható a pozíciókon keletkező veszteségek halmozódása. A napi garancia az a letét, amelyet szükséges elhelyezni minden pozíció után és visszaadandó a tagoknak, mikor a pozíció lezáródik.

Egy nagyon egyszerű példán szemléltetjük az egyébként bonyolult metódusokkal működő SPAN szoftver számításait. Egy azonnali piacon (spot piac) részvényekkel kereskedő klíringtagot tekintünk, mely három részvénnyel kereskedett az A, illetve B napon. (A valóságban a T napi záróárakat és a T, T-1, T-2 napi kötéseket veszik figyelembe.) Ennek adatait a következő ábra tartalmazza:

Vétel/Eladás	Kötés napja	Termék	Kötésár	Mennyiség	Záróár	Árkülönbözet
E	A	S.OTP	4 062	50	3 970	4 600
E	A	S.FOTEX	145	3 000	141	12 000
V	A	S.OTP	4 053	48	3 970	-3 984
V	A	S.econet.hu	132	5 500	129	-16 500
E	B	S.OTP	4 001	436	3 970	13 516
E	B	S.econet.hu	126	1 988	129	-5 964
V	B	S.OTP	3 975	20	3 970	-100
V	B	S.FOTEX	143	4 800	141	-9 600

5. ábra: Kereskedési adatok

Az árkülönbözet számítása a következő módon történik: ha vételről van szó, akkor a (záróár-kötésár)*mennyiség műveletet, ha eladásról, akkor pedig a (kötésár-záróár)* mennyiség műveletet végezzük el. Ez megadja, hogy mennyi a veszteségünk, vagy nyereségünk az adott nap végén egy adott ügyletből. Csak a negatív értékekkel, azaz a veszteségekkel foglalkozunk, ezek láthatók termékenként a következő táblában:

Termék	A nap	B nap	Végösszeg	Negatív árkülönbözetek
S.econet.hu	-16 500	-5 964	-22 464	-22 464
S.FOTEX	12 000	-9 600	2 400	0
S.OTP	616	13 416	14 032	0
Negatív árkülönbözetek összesen:				**-22 464**

6. ábra: Árkülönbözet

Ezzel kiszámoltuk az árkülönbözet értékét, már csak a napi garancia értékét kell megadni. Ehhez a lenti ábrában összegezzük a termékenkénti vételi, illetve eladási pozíciót napi lebontásban, majd meghatározzuk a két naphoz tartozó nettó pozíciót az előbbi kettő különbségeként. A termékenkénti alapbiztosítékok értékét a KELER KSZF Kft. az éppen aktuális részvény szekcióra vonatkozó leiratában hirdeti meg, és teszi közzé. A termékenkénti biztosíték igény tehát a termékenkénti alapbiztosítéknak és a nettó pozícióknak a szorzata. Ezeket összegezve kapjuk a napi garancia értékét, melyhez az árkülönbözet értékét hozzáadva megkapjuk a napi alapbiztosíték értékét.

Termék	Vétel		Eladás		Nettó pozíció		Összesen	Termékenkénti alapbiztosíték	Biztosíték igény
	A	B	A	B	A	B			
S.econet.hu	5 500			1 988	5 500	-1 988	7 488	15	112 320
S.FOTEX		4 800	3 000		-3 000	4 800	7 800	20	156 000
S.OTP	48	20	50	436	-2	-416	418	310	129 580
								Biztosíték összesen/Napi garancia:	**397 900**
								Árkülönbözet:	**22 464**
								Alapbiztosíték:	**420 364**

7. ábra: Napi alapbiztosíték

A valóságban természetesen ezt sokkal több kereskedésre, összetettebb pozíciókra és nem csak részvényekre, hanem más termékekre (pl. opciók) kell elképzelni, illetve az alapbiztosítékot nem csak az azonnali, hanem a derivatív piacra vonatkozóan is ki kell számítani, de ezt most itt nem részletezzük.

A továbbiakban a termékenkénti (és most csak a részvények/indexek) alapbiztosíték értékével foglalkozunk. Ezek meghatározásánál a VaR értékének is fontos szerepe van. Minden hónapban lefuttatunk egy ún. historikus-VaR programcsomagot, mely valójában Excel makrók együttese. Rendelkezésünkre áll egy VaR-adatbázis, amely tartalmazza az egyes részvények/indexek napi árfolyamait. A historikus-VaR makró a szórás többszöröseként adja meg a VaR-t minden részvényre/indexre, viszont a szórás számítására kétféle közelítést ad. A lineáris közelítésben a volatilitást állandó hosszúságú mozgóátlaggal számítja az alábbi képlet alapján:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{i=1}^{\mathrm{M}} (\mathrm{R}_{t-i} - \overline{\mathrm{R}})^2.$$

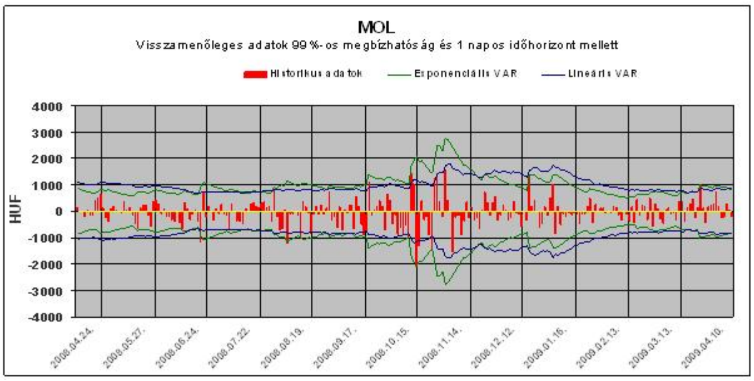
A figyelembe vett időszak hossza 60 kereskedési nap, M a megfigyelések száma. Látható, hogy a múltbéli hozamok súlya azonos, $\frac{1}{\mathrm{M}}$ nagyságú, ez a modell legsúlyosabb hibáját tükrözi, mivel a legfrissebb információ ugyanazzal a súllyal szerepel, mint a régebbiek, pedig nyilvánvaló, hogy a mostani adatoknak fontosabbaknak kellene lenniük.

A másik megközelítésben a volatilitás exponenciális súlyozású mozgóátlag segítségével számítódik, melynek képlete:

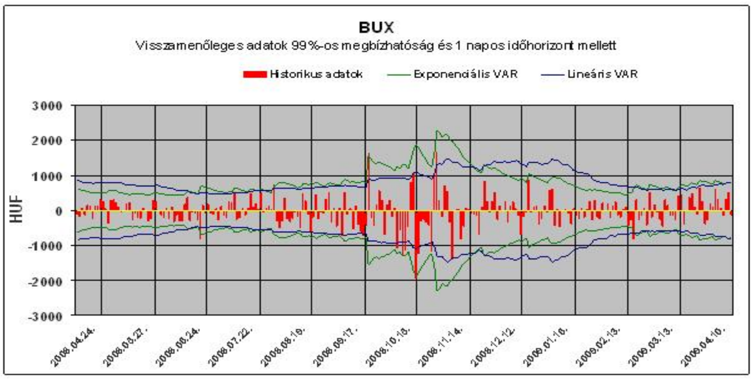
$$\sigma_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{M}} \lambda^{i-1} (\mathrm{R}_{t-i} - \overline{\mathrm{R}})^2}{\sum_{i=1}^{\mathrm{M}} \lambda^{i-1}}.$$

A képlet kifejezi, hogy a legutolsó hozammegfigyelés kapja a legnagyobb súlyt, majd időben visszafelé haladva egyre kisebb súlyokat adunk a megfigyeléseknek.

A historikus-VaR program az alábbiakhoz hasonló ábrákat rajzol ki minden részvény, index, kamat, deviza esetén. A „historikus" vonalak a napi hozammegváltozások mértékét mutatják.



8. ábra: A MOL VaR-ja



9. ábra: A BUX VaR-ja

Az alapletét módosításának napján a következőket vesszük figyelembe:

a, korábbi alapletét értékének és az aznapi árfolyam értékének hányadosa,
b, a számított lineáris-exponenciális VaR-ok értékei,
c, a javasolt új alapletét értékének és az aznapi árfolyam értékének hányadosa.

Az utolsó, termékek tekintetében szélesebb körű módosítás 2008.12.13-án volt, ekkor például a BUX esetében a VaR/Árfolyam értéke 10% körül volt, így az új alapletét értékét is úgy javasoltuk beállítani, hogy az új alapletét/Árfolyam értéke 10% legyen. A többi részvény esetében hasonlóan jártunk el.

A fenti ábrák arra is jók, hogy az VaR-t utóteszteljük. Ha sok olyan eset van, amikor a VaR görbéket meghaladják a historikus vonalak értékei, akkor felmerül a gyanú, hogy a VaR alapján számolt alapletét nem lesz elegendő a hozamváltozások révén bekövetkezett veszteségek kivédésére. Ha a VaR-ok tartósan nagyon megnövekszenek/lecsökkenek, akkor emelni/csökkenteni kell az alapletét értékét.

9. Összefoglalás

Dolgozatom célja alapvetően a leggyakrabban használt kockázatkezelési eszköz, a Value at Risk körüljárása volt. Először definiáltam ennek jelentését és mérésének módszereit, utóbbiakat példákon is szemléltettem. Részletesebben bemutattam a delta-normál mérési módszert, melyet akkor javasolt alkalmazni, ha portfóliónk részvényekből áll, és ezáltal portfóliónk kockázata csak a részvények árfolyamától függ, azaz lineáris kapcsolat van a portfólió jövőbeli értéke és a portólióra ható kockázati faktorok között. Annak ellenére, hogy a VaR egy elterjedt kockázatkezelési eszköz, nem felel meg a koherens kockázati mérték elvárásainak, ugyanis a szubadditivitást – mely szerint az összeolvadás nem okoz extra veszteséget („a merger does not create extra risk") – nem teljesíti. Ennek okán több olyan eszközt is bemutattam, melyek valóban koherens kockázati mértékek, viszont ezek a való életben sokszor konzervatívabbak a VaR-nál, ezért egyelőre kevésbé elterjedtek. Dolgozatom utolsó fejezetében a VaR egy valódi alkalmázását mutattam be, melyet a KELER Zrt.-ben ismerhettem meg. Ennek lényege, hogy a Budapesti Értéktőzsdére bevezetett termékek esetében az elszámolóháznak termékenkénti alabiztosítékszintet (margint) kell megállapítania, és ehhez egy ún. historikus-VaR programot futtat le, mely kiszámolja a termékenkenkénti VaR-okat. Ezután össze kell hangolnia a VaR/Árfolyam és az Alapbiztosíték/Árfolyam hányadosokat, és így kap egy javasolt értéket arra, hogy mennyi legyen egy termék alapbiztosítéka.

Hivatkozások

[1] Philippe Jorion, *A kockáztatott érték*, Panem (1999).

[2] Erdős Péter, *Jegyzet a Piaci kockázatokhoz és a kockáztatott érték (VaR, Value at Risk) módszertanához*, BME, Pénzügyek Tanszék (2008).

[3] Rajesh Kondapaneni *A study of the Delta Normal Method os Measuring VaR*, Worchester Polytechnic Institue, (1-25) (2005).

[4] Csóka Péter, *Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció*, Közgazdasági Szemle L. évf., (855-880) (2003).

[5] Gál József, Pap Gyula *Bevezetés a hasznosság alapú portfólió menedzsmentbe* Egyetemi Jegyzet, MobiDiák Könyvtár (73-89) (2004).

[6] Gál József-Nagy Gábor, *A működési kockázat veszteségeloszlás-alapú modellezése*, Hitelintézeti Szemle 6. évf. 4. szám (386-390) (2007).

[7] Lamanda Gabriella, *Bankismeretek jegyzet*, BME, Pénzügyek Tanszék (2008).

[8] Armai Zsolt-Ostoróczky Tünde, *A Var és azon túl*, Nemzetközi Bankárképző Központ, a VaR kritikái szeminárium (2008).

[9] Soczó Csaba, *A VaR kritikája*, Nemzetközi Bankárképző Központ, a VaR kritikái szeminárium (2008).

[10] Kóbor Ádám, *A piaci kockázatmérési eszközök alkalmazási lehetőségei a pénzügyi stabilitás elemzésében*, BCE Befektetések Tanszék (2003).

[11] Szűcs Nóra, *A szabályozói mértékek hátrányos tulajdonságai*, Empirikus pénzügyek szeminárium (2008).

[12] Mandelbrot, B.B. *The variation of certain speculative prices*, Journal of Business 36 (394-419) (1963).

[13] Kondor Imre, *Bank és kockázat* http://www.dura.hu/html/mindentudas/kondormre.htm.

[14] http://en.wikipedia.org/wiki/Expected_shortfall