IBNR tartalékolási módszerek összehasonlítása

Diplomamunka

Írta: Kalocsai Ákos

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Arató Miklós, egyetemi docens
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2009

Tartalomjegyzék

Előszó

A biztosító társaságok számára egy adott időszak eredményének kimutatásához elengedhetetlen a jövőbeli kifizetések becslése. Ha például egy kár egy adott évben következik be, de az ügyintézés késlekedése miatt a kifizetés a következő évre tolódik, akkor csökkenteni kell az adott év eredményeit, hiszen a kár még ahhoz az évhez tartozik, a kifizetést az akkor beszedett díjakból kell fedezni. Ez úgy küszöbölhető ki, ha a biztosító megbecsli a jövőbeli kifizetéseket, és azokat nem számolja bele az adott időszak eredményébe. Ezt a célt szolgálja a biztosítástechnikai tartalék képzése, ami a legtöbb esetben a jövőbeli várható kifizetések és várható bevételek különbségeként írható fel.

Többféle tartalék létezik, melyek más-más szolgáltatás típushoz tartoznak. Egy adott tartalék megképzésére, mint ahogy azt később látni fogjuk, többféle módszer is lehetséges. Ezek nagyban eltérő eredményeket is szolgáltathatnak. Mivel a biztosító fizetőképessége és biztonságos működése függ a tartalék elégségességétől, ezért a tartalékképzés törvényileg szabályozott. Van egy másik oka is a szabályozásnak, mégpedig az, hogy az indokolatlanul magas tartalékképzés csökkenti az eredményt, és ezáltal a befizetendő adó mértékét.

A nem-élet ági tartalék típusok között nagysága miatt messze a legjelentősebb a *függőkárok tartaléka*. Ezt azokra a már megtörtént károkra képzik, melyeknél a kifizetés még csak részben történt meg. A kárkifizetés esetenként éveket is csúszhat, a kárrendezés, vagy a kárbejelentés késlekedése miatt. Ez főleg felelősségbiztosításoknál jellemző. A függőkár tartalékok megképzésének két megközelítése ismeretes. Az egyik a becslések elkészítéséhez statisztikai módszereket alkalmaz. Több ország elemzése szerint ez a pontosabb meghatározás, ám Magyarországon mégis a következő megközelítést használják. A már bejelentett károkra egyedileg, kárszakértők által képeznek tartalékot, ez a tételes függőkár tartalék. A már bekövetkezett, de még be nem jelentett károkra *(incurred but not reported)* képzik az IBNR tartalékot.

Szakdolgozatom témája a különböző IBNR tartalékolási módszerek összehasonlítása. Mivel a tartalékokat csak bizonyos időközönként vizsgálják felül és nagyságuk az említett okok miatt nem lehet sem túl nagy, sem pedig túl kicsi, ezért meglehetősen fontos a megfelelő tartalékolási módszer kiválasztása. Az első két fejezet tartalmazza az általam vizsgált módszerek leírását. A klasszikus módszerek forrásaként Arató Miklós Nem-élet biztosítási matematika [1] című könyve szolgált, míg a müncheni lánc-létra bemutatásához Dr. Gerhard Quarg és Dr. Thomas Mack Munich Chain Ladder [2] című publikációját használtam és követtem. Az utóbbiból ábrákat is tartalmaz a dolgozat. Az összehasonlításokat egy általam írt program segítségével végzem el, melyet a melléklet tartalmaz. Az alapadatok egy magyarországi biztosítótól származnak. A módszerek eltérését a program egyértelműen kimutatja, ami alapján a valós adatoktól való eltérés akár a tényleges kifizetés többszöröse is lehet. Az összhasonlítást nem csak a különböző módszerek között, hanem a különbözőképpen csoportosított káradatok (kifutási háromszögek - részletesen az 1. fejezet elején) között is végzem. Attól, hogy egy módszer jó becslést ad egy adott kifutási háromszögre nézve, még nem biztos, hogy más szempont szerint csoportosított adatokat is ugyanolyan jól előrejelez. Sőt, az adatok időbeni megbontása (éves, negyedéves) is különböző eredményeket hozhat. Bővebb leírását a 3. fejezet tartalmaz. A 4. fejezetben vázolom az általam számolt eredményeket. Kifejtem, hogy ezek alapján, mely kifutási háromszögek, mely módszerek felhasználásval adnak a valóságot jól közelítő becsléseket. A százalékos eltéréseket alapul véve grafikonok segítségével elemzem az egyes módszerek hatékonyságát. Végül felállítok egy sorrendet a vizsgált IBNR tartalékolási módszerek között.

1. fejezet

Klasszikus módszerek

1.1. Kifutási háromszögek

A kifutási háromszög (1.1 ábra) egy összesített kártáblázat, amiben a korábbi évek kárstatisztikáit foglalják össze. Többféle kifutási háromszöget különböztetünk meg. A káradatok lehetnek a kár bekövetkezésének és kifizetésének időpontja szerint, vagy akár a bekövetkezés és bejelentés időpontja szerint csoportosítva:

Kár keletkezésének éve	Kár kifizetésének / bejelentésének késése a kár évéhez képest				
	1	2	...	t-1	t
1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	...	$X_{1,t-1}$	$X_{1,t}$
2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	...	$X_{2,t-1}$	
...	...	...	...		
...	...	...			
t	$X_{t,1}$				

1.1. ábra. Kifutási háromszög

Ahol $X_{i,j}$ az alábbiak valamelyikét jelentheti:

- az i-edik évben az (i+j−1)-edik évben bejelentett/kifizetésre került kárösszeget
- az i-edik évben az (i+j−1)-edik évben bejelentett/kifizetésre került kárösszeget és tartalékváltozást
- az i-edik év káraira az (i+j−1)-edik év végéig összesen kifizetett/bejelentett kárösszeget (kumulált kifizetéseket tartalmazó kifutási háromszög)
- az i-edik év káraira az (i+j−1)-edik év végéig összesen kifizetett/bejelentett kárösszeget és tartalékváltozást (kumulált ráfordításokat tartalmazó kifutási háromszög)

A különböző tartalékolási módszerek összehasonlításához az utóbbi két kifutási háromszöget fogom használni, mind a kifizetés éve szerinti, mind pedig a bejelentés éve szerinti csoportosításban. A 1.2 ábrán egy kumulatív ráfordításokat tartalmazó kifutási háromszögre [7] látható példa. Maga a tartalékolási feladat a táblázat

Accident Year *i*	Development Year *j*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5,012	8,269	10,907	11,805	13,539	16,181	18,009	18,608	18,662	18,834
2	106	4,285	5,396	10,666	13,782	15,599	15,496	16,169	16,704	
3	3,410	8,992	13,873	16,141	18,735	22,214	22,863	23,466		
4	5,655	11,555	15,766	21,266	23,425	26,083	27,067			
5	1,092	9,565	15,836	22,169	25,955	26,180				
6	1,513	6,445	11,702	12,935	15,852					
7	557	4,020	10,946	12,314						
8	1,351	6,947	13,112							
9	3,133	5,395								
10	2,063									

1.2. ábra. Kumulált ráfordításokat tartalmazó kifutási háromszög (az (i,j) elem az i-edik bekövetkezési évhez tartozó j éves késéssel bejelentett/kifizetett kumulált ráfordítás értéket jelenti)

hiányzó elemeinek (az alsó háromszögnek) megbecslése. A táblázat akkor írja le jól a károk kifutását, ha a kár bekövetkezését követő t-edik év után már nincsenek kárkifizetések. Ha vannak, akkor még egy értéket tüntetünk fel a táblázatban, amit $X_{1,t+}$-szal jelölünk. Ez nem más, mint az első év becsült kifizetése a t-edik év után.

A következőkben a klasszikus IBNR tartalékolási módszereket mutatom be. Ezek közös alapgondolata az, hogy a j-edik kifutási év végéig történő összes kárkifizetés nem függ erősen a kárbekövetkezés évétől.

1.2. Jéghegy módszer

"A módszer arról kapta a nevét, hogy a jéghegy teljes tömegét meg lehet becsülni a látható része alapján." (Arató, 2001) [1] Az imént említettek alapján jelölje $X_{i,t+}$ az i-edik évben bekövetkezett károkra történő összes kárkifizetést. Ez korábbi évek, vagy más biztosítók tapasztalata alapján, esetleg a tételes függőkárok segítségével becsülhető. Ezen érték meghatározása után a következő hányadosokat számoljuk ki:

$$d_{t-1} = \frac{X_{1,t-1}}{\widehat{X}_{1,t+}}, \quad d_{t-2} = \frac{X_{1,t-2}}{\widehat{X}_{1,t+}}, \quad \dots \quad , \quad d_1 = \frac{X_{1,1}}{\widehat{X}_{1,t+}}$$

Az együtthatók segítségével becslés adható a többi bekövetkezési év összkárkifizetésére:

$$\widehat{X}_{2,t+} = \frac{X_{2,t-1}}{d_{t-1}}, \quad \widehat{X}_{3,t+} = \frac{X_{3,t-2}}{d_{t-2}}, \quad \dots \quad , \quad \widehat{X}_{t,t+} = \frac{X_{t,1}}{d_1}$$

Végül az i-edik év káraira képzett függőkártartalék, és a teljes tartalék:

$$V_i = \widehat{X}_{i,t+} - X_{i,t+1-i}, \qquad V = \sum_{i=1}^{t} V_i$$

Ennél a módszernél az első évnek kizárólagos szerepe van a többi év becslésében, így egyetlen kiugró érték eltorzíthatja az előrejelzést. Ahhoz, hogy ezt csökkenthessük, bevezetünk néhány módosítást.

1. módosítás: Ennél a módszernél nemcsak az első, hanem a kifutási háromszög minden sorára kiszámoljuk a d_i értékeket (amiket $d_i(1)$, $d_i(2)$, stb.-vel jelölünk a sor száma szerint) a következő módon. Az $X_{1,t+}$ és $d_i(1)$ értékek kiszámítása az előző módszerhez hasonlóan történik. Ezt követően becsüljük meg a 2. év összkárkifizetését:

$$\widehat{X}_{2,t+} = \frac{X_{2,t-1}}{d_{t-1}(1)},$$

Ez megegyezik az eredeti becsléssel. Az $\widehat{X}_{2,t+}$ értékének segítségével felírhatóak a 2. évhez tartozó együtthatók:

$$d_{t-2}(2) = \frac{X_{2,t-2}}{\widehat{X}_{2,t+}}, \quad \dots \quad , \qquad d_1(2) = \frac{X_{2,1}}{\widehat{X}_{2,t+}}$$

A d_{t-2} -t a két együttható átlagaként adjuk meg. Így a 3. évi kárkifizetésére vonatkozó becslés:

$$d_{t-2} = \frac{d_{t-2}(1) + d_{t-2}(2)}{2}, \qquad \widehat{X}_{3,t+} = \frac{X_{3,t-2}}{d_{t-2}}$$

A d_{t-3} értéke 3 év átlagaként adódik. Az eljárást folytatjuk egészen az utolsó bekövetkezési évig.

2. módosítás: Megegyezik az 1. módosítással, csak az együtthatók átlaga helyett azok minimumát vesszük:

$$d_{t-2} = \min(d_{t-2}(1), d_{t-2}(2)), \qquad \widehat{X}_{3,t+} = \frac{X_{3,t-2}}{d_{t-2}}$$

1.3. Láncszemhányados módszer

Ez a módszer nagyban hasonlít a jéghegy módszerhez, azzal a különbséggel, hogy a kifutási háromszög felhasználása balról jobbra történik. Azzal a feltételezéssel élünk, hogy a $c_j(i) = \frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}}$ hányadosok a bekövetkezés évétől nem függnek erősen, és körülbelül c_j-vel egyenlőek. Első lépésben ezeket a hányadosokat számoljuk ki. A $c_t = \frac{1}{d_t} \approx \frac{X_{i,t+}}{X_{i,t}}$ együttható meghatározása a jéghegy módszernél már alkalmazott módon zajlik, korábbi évek tapasztalata, vagy a tételes függőkártartalék alapján. A többi c_j előállítása a tényleges $c_j(i)$ hányadosok valamilyen függvényének segítségével történik. Ez adja a módszer különböző módosításait. A kárkifizetések becsléséhez és a tartalék meghatározásához a következő formulákat használjuk.

$$\widehat{X}_{1,t+} = c_t X_{1,t}, \quad V_1 = \widehat{X}_{1,t+} - X_{1,t} = (c_t - 1) X_{1,t},$$

$$\vdots$$

$$\widehat{X}_{i,t+} = c_t c_{t-1} \cdots c_i X_{i,t+1-i}, \quad V_i = \widehat{X}_{i,t+} - X_{i,t+1-i} = (c_t c_{t-1} \cdots c_i - 1) X_{i,t+1-i},$$

$$\vdots$$

$$\widehat{X}_{t,t+} = c_t c_{t-1} \cdots c_1 X_{t-1}, \quad V_t = \widehat{X}_{t,t+} - X_{t,1} = (c_t c_{t-1} \cdots c_1 - 1) X_{t,1}.$$

A módszer leggyakoribb változatai a következők:

Alapváltozat. Az együtthatók csak az első évtől függnek:

$$c_j = c_j(1), \quad j = 1, \ldots, t-1.$$

1. módosítás. Az együtthatókat az átlaggal határozzuk meg:

$$\frac{c_j(1) + c_j(2) + \ldots + c_j(t-j)}{t-j}, \quad j = 1, \ldots, t-1.$$

2. módosítás. Az együtthatókat a maximummal határozzuk meg (pesszimista becslés):

$$c_j = \max(c_j(1) + c_j(2) + \ldots + c_j(t-j)), \quad j = 1, \ldots, t-1.$$

1.4. Lánc-létra módszer

Egyszerűsége és a tapasztalatok szerinti megbízhatósága miatt az egyik legnagyobb népszerűségnek örvendő módszer. Az együtthatókat a lánszemhányados módszerhez hasonlóan számoljuk, de itt azok súlyozott átlagát vesszük:

$$c_j = \frac{X_{1,j} c_j(1) + X_{2,j} c_j(2) + \ldots + X_{t-j,j} c_j(t-j)}{X_{1,j} + X_{2,j} + \ldots + X_{t-j,j}} =$$

$$= \frac{X_{1,j+1} + X_{2,j+1} + \ldots + X_{t-j,j+1}}{X_{1,j} + X_{2,j} + \ldots + X_{t-j,j}}, \quad j = 1, \ldots, t-1.$$

Az együtthatók kiszámítása nem is feltétlenül szükséges, hiszen elég a kifutási háromszög oszlopaiban szereplő értékeket összeadni, azonban ajánlatos a számításokat mégis elvégezni, mert azokból trend, anomália olvasható le.

2. fejezet

A Müncheni lánc-létra módszer (Munich Chain Ladder)

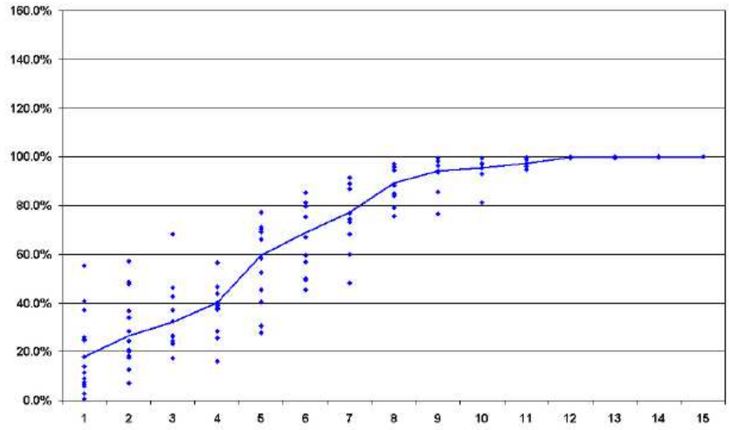
2.1. Bevezetés

A következőkben bemutatásra kerülő módszer egy viszonylag új eljárás, ami a klasszikusnak számító lánc-létra módszeren alapszik. Egy portfólió megképzendő IBNR tartalékát gyakran mind a kifizetéseket *(paid)*, mind pedig a kifizetéseket és tartalékváltozásokat *(incurred)* tartalmazó kifutási háromszögek alapján kiszámolják. Gyakori jelenség, hogy a két becslés nagyban eltér egymástól. Sőt, az is előforulhat, hogy míg az egyik évben a paid háromszögön alapuló becslés jócskán meghaladja az incurred háromszögön alapulót, addig a következő évben épp az ellenkezőjét látjuk. Ezt küszöböli ki a münchei lánc-létra módszer, mégpedig úgy, hogy a paid és incurred háromszögek közt megfigyelhető korrelációt használja fel a pontosabb becslés előállításához.

2.2. A lánc-létra módszer hibája

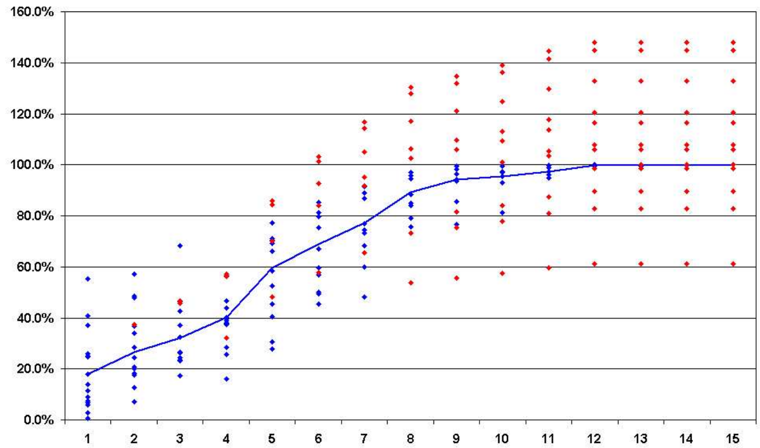
A következőkben egy példával szemléltetem, hogyan térnek el egymástól a függetlenül elvégzett, paid és incurred háromszögön alapuló lánc-létra becslések. Ezután pedig egy explicit formula segítségével megmutatom, hogy ez az eltérés nemcsak ennél a példánál mutatkozik, hanem ez a lánc-létra módszer hibája.

Tekintsünk egy ázsiai kötelező gépjármű-biztosítás portfóliót. A paid és incurred háromszög is 15-15 bekövetkezési és kifizetési évet tartalmaz. A 2.1 ábra az adott kifizetési évhez tartozó (P/I) arányokat szemlélteti, tehát a paid és incurred háromszög megfelelő elemeinek hányadosát. A folytonos vonal mutatja ezen múltbeli értékek átlagát, amely 12 év után megközelítőleg eléri a 100%-ot. Egy adott kifizetési évben a pontok az átlag körül szóródnak. Az évek előrehaladtával a szóródás mértéke csökken, és ez nemcsak a pontok számának csökkenéséből fakad.



2.1. ábra. A (P/I) arányok

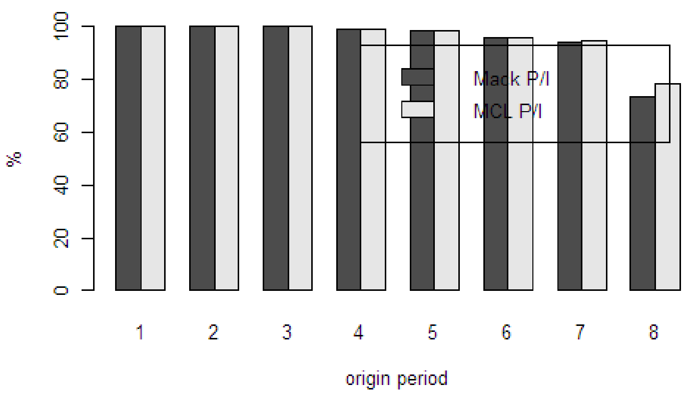
A 2.2 ábrán a lánc-létra módszer által extrapolált (P/I) hányadosok láthatóak. Az értékek 61% és 148% között mozognak, ami azt jelenti, hogy az egyik évben a paid háromszög értékei szignifikánsan kisebbek az incurred háromszög értékeinél, a másik évben pont fordítva. Az előrejelzett értékek teljesen máshogy viselkenek, mint a múltbeliek: divergálnak, nem konvergálnak. Ha egy érték átlag alatti, vagy feletti, akkor ezen tulajdonsága csak erősödik a lánc-létra becslés által.



2.2. ábra. Extrapolált (P/I)arányok

A 2.3 ábrán egy általam készített MCL és lánc-létra becslés (P/I) arányainak összehasonlítása látható.

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy az imént észlelt eltérés nem az adott portfólió-nak köszönhető, hanem magának a lánc-létra mószernek a hibája, vezessük be a



2.3. ábra. Az MCL és lánc-létra módszerek (P/I) arányainak összehasonlítása

következő jelöléseket. Legyenek $P_{i,t}$ és $I_{i,t}$ $(i, t = 1, \ldots, n)$ a paid és incurred háromszög i-edik évben bekövetkezett és t évvel később kifizetett értékei. Ha $a_i := n+1-i$ az aktuális kifizetési év az i-edik bekövetkezési évben, akkor a $P_{i,t}$ és $I_{i,t}$ értékei adottak, ha $1 \leq t \leq a_i$, és előrejelzettek, ha $a_i < t \leq n$. Másképpen megfogalmazva P_{i,a_i} és I_{i,a_i} az adott kifutási háromszög átlójának eleme. A (P/I) arányt a következőképpen definiáljuk:

$$(P/I)_{i,t} := \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}}$$

Az összes bekövetkezési év átlagos (P/I) aránya a t-edik évben:

$$(P/I)_t := \frac{\sum_{j=1}^{n} P_{j,t}}{\sum_{j=1}^{n} I_{j,t}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} I_{j,t}} \cdot \sum_{j=1}^{n} I_{j,t} \cdot (P/I)_{j,t},$$

Ez nem más mint a (P/I) hányadosoknak a t-edik kifizetési évbeli incurred értékkel súlyozott átlaga. Végül legyen $f^P_{s \to s+1}$ és $f^I_{s \to s+1}$ $(s = 1, \ldots, n-1)$ az átlagos paid és incurred fejlődési faktor az s-edik kifizetési évről az s+1-edikre:

$$f^P_{s \to s+1} := \frac{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s}} \quad \text{és} \quad f^I_{s \to s+1} := \frac{\sum_{j=1}^{n-s} I_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{n-s} I_{j,s}}$$

Az előrejelzett $P_{i,s+1}$ és $I_{i,s+1}$ $(s \geq a_i)$ értékek definíció szerint:

$$P_{i,s+1} = P_{i,s} \cdot f^P_{s \to s+1} \quad \text{és} \quad I_{i,s+1} = I_{i,s} \cdot f^I_{s \to s+1}$$

Ezen jelölésekkel felírható a jövőbeli (P/I) arány $(t > a_i)$:

$$(P/I)_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}} = \frac{P_{i,a_i} \cdot f^P_{a_i \to a_{i+1}} \cdot \ldots \cdot f^P_{t-1 \to t}}{I_{i,a_i} \cdot f^I_{a_i \to a_{i+1}} \cdot \ldots \cdot f^I_{t-1 \to t}} \tag{2.1}$$

A paid kifutási faktorra a következő egyenletet kapjuk:

$$f^P_{s \to s+1} \cdot \sum_{j=1}^{n} P_{j,s} = f^P_{s \to s+1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s} + \sum_{j=n-s+1}^{n} P_{j,s} \right) =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s}} \cdot \sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s} + \sum_{j=n-s+1}^{n} f^P_{s\to s+1} \cdot P_{j,s} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s+1} + \sum_{j=n-s+1}^{n} P_{j,s+1} = \sum_{j=1}^{n} P_{j,s+1}$$

Ebből és az incurred kifutási faktoroknak megfelelő egyenletből kapjuk:

$$f^P_{s\to s+1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} P_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{n} P_{j,s}} \quad \text{és} \quad f^I_{s\to s+1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} I_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{n} I_{j,s}}$$

Ezt a (2.1) egyenletbe helyettesítve a (P/I) arányokra a következő összefüggés adódik:

$$(P/I)_{i,t} = \frac{P_{i,a_i} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} P_{j,t}}{\sum_{j=1}^{n} P_{j,a_i}}}{I_{i,a_i} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} I_{j,t}}{\sum_{j=1}^{n} I_{j,a_i}}}$$

Ugyanez szavakban:

Az előrejelzett (P/I) érték és a hozzá tartozó átlag aránya minden bekövetkezési évben megegyezik az aktuális (P/I) érték és a hozzá tartozó átlag arányával. Így ez az arány nem változik a lánc-létra előrejelzés során.

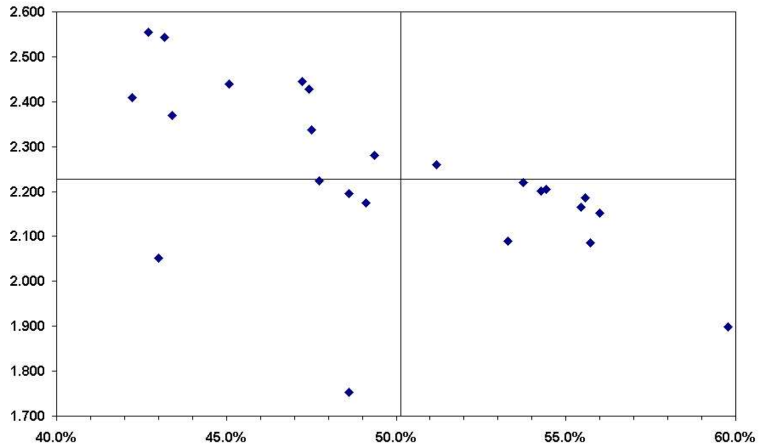
Ez az állítás tökéletesen leírja az ábrán megfigyelt viselkedést, ami, mint látszik, nem az adott portfólió, hanem a lánc-létra módszer szisztematikus hibája. Egy átlag alatti/feletti (P/I) aránnyal rendelkező bekövetkezési év előrejelzése szintén átlag alatti/feletti (P/I) aránnyal fog rendelkezni az n-edik kifutási évben.

2.3. Korreláció a paid és incurred adatok között

Az előző példa és egyenlet megmutatta, hogy a két, külön elvégzett lánc-létra módszer néha valószínűtlen előrejelzéseket ad, ellentmondva a múlt tapasztalatainak. A teljesen kifutott bekövetkezési éveknél is megfigyelhető, hogy átlag alatti vagy feletti (P/I) aránnyal rendelkeznek, de a végén elérik a 100%-os (P/I) arányt. Ebből az alábbi következtetés vonható le:

Egy relatív alacsony múltbeli (P/I) arányt egy relatív magas kifutási faktor követ a paid háromszögben, vagy egy ralatív alacsony az incurred háromszögben (esetleg mindkettő). Egy relatív magas (P/I) arányra a helyzet fordított.

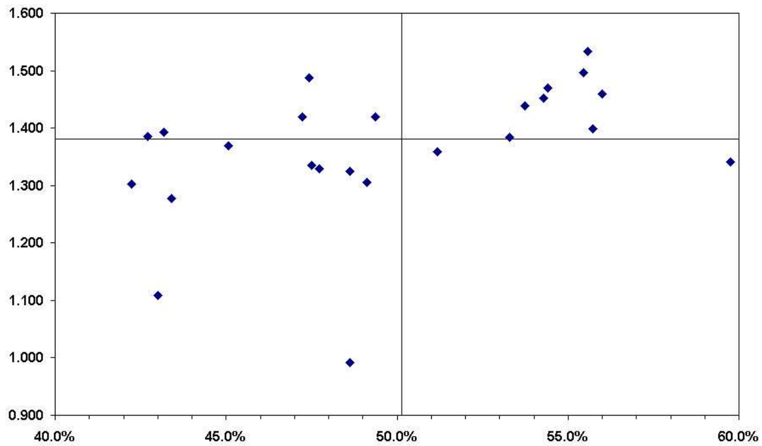
Álljon itt egy példa az imént leírtakra. A 2.4 ábra az első és második év közötti paid háromszög szerinti kifutási faktorokat ($f^P_{i,1\to 2} := P_{i,2}/P_{i,1}$) ábrázolja a (P/I) arányok függvényében. A könnyebb eligazodás kedvéért az átlagos kifutási faktort és (P/I) arányt egy vízszintes és függőleges vonal mutatja.



2.4. ábra. Paid kifutási faktorok a (P/I) arányok függvényében

Az ábrán egyértelműen látszik az előbb megfogalmazott állítás. A pontok tisztán kivehető trendet mutatnak -60%-os korrelációval. Ha a két kiugró értéket nem vesszük figyelembe a korreláció -89%-os.

A 2.5 ábra hasonló az előzőhöz, csak itt az incurred háromszög kifutási faktorai ($f^I_{i,1\to 2} := I_{i,2}/I_{i,1}$) látszanak a (P/I) arányok függvényében. Itt is megfigyelhető a trend, 46%-os korrelációval (kiugró értékek nélkül 51%-os).



2.5. ábra. Incurred kifutási faktorok a (P/I) arányok függvényében

Ezen észrevételek azt sugallják, hogy az IBNR előrejelzések során nem ugyanazt az átlagos kifutási faktort kell használni minden évben (mint ahogy tesszük ezt az eredeti lánc-létra módszernél), hanem a múlt tapasztalatainak függvényében a következő szabályt kell alkalmazni:

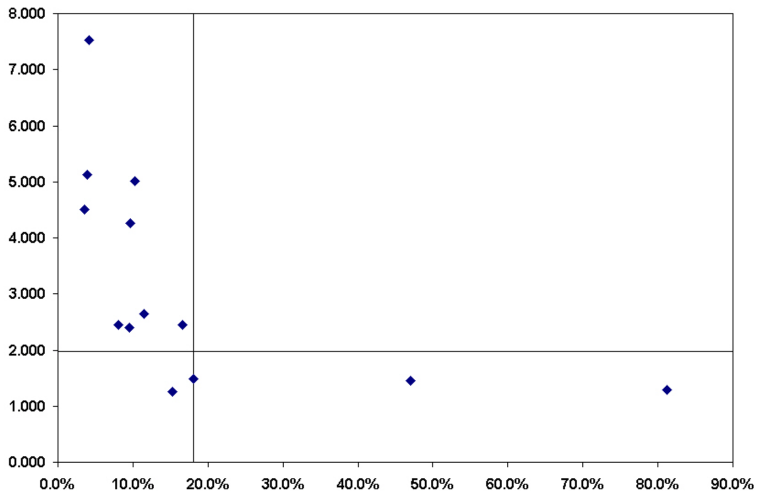
Attól függően, hogy az aktuális (P/I) arány átlag alatti vagy feletti, egy átlag feletti vagy alatti paid háromszög szerinti kifutási faktort és/vagy

egy átlag alatti vagy feletti incurred háromszög szerinti kifutási faktort kell használni.

Minden egyes ábrába rajzolunk egy regressziós egyenest, ami áthalad a két átlagvonal metszéspontján. A horizontális vonal által meghatározott átlagos kifutási faktor helyett a regressziós egyenes adta értékeket használjuk a (P/I) aránytól függően. Ezt nemcsak az első, hanem minden egyes kifutási évre megcsináljuk. Ily módon kitölthetjük a teljes paid és incurred háromszöget balról jobbra haladva.

Habár a gyakorlat azt mutatja, hogy ez a megközelítés nem vezet nagy nehézségekhez és valószínűtlen hibákhoz, mégis előfordulhatnak az alábbiak:

1. Gyakran a lineáris megközelítés nem megfelelő a paid kifutási faktorok modellezésére, ahogy ezt az 2.6 ábra is mutatja. Egy hiperbolikus görbe sokkal alkalmasabb volna.



2.6. ábra. Paid kifutási faktorok hiperbolikus trenddel

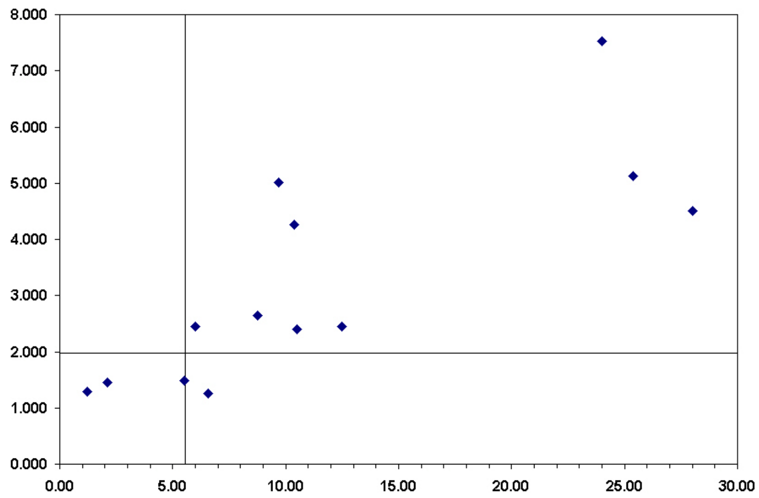
2. A regressziós egyenes hajlásszögének becslése gyakran nagyon bizonytalan, főleg ha kevés kifizetési év van, ami a késői kifutási éveknél fordul elő. Néha a becsült emelkedés még rossz előjelű is. Ez nem mond ellent az eddigieknek, hiszen bizonyos valószínűséggel bekövetkezhet. A paraméterek simítása nehezen megoldható, mert nem egyértelmű, hogy az emelkedésnek milyen irányt kellene követnie.

3. Néha a becslések relatív meredek emelkedést mutatnak, annak ellenére, hogy az ábra pontjai közt kismértékű korreláció figyelhető meg. Ebben az esetben a kifutási faktorok és a végső előrejelzés közti korreláció valószínűtlenül magas (ellentétben a sima lánc-létra módszerrel).

2.4. A (P/I) probléma megoldása: a Müncheni lánc-létra

Az imént felsorolt három hibalehetőség megoldásai elvezetnek minket a Müncheni lánc-létra módszerhez.

Az első probléma megoldásaképpen, ha a paid kifutási faktorok (P/I) arányai helyett azok reciprokát, az (I/P) arányokat nézzük, az ábrára alkalmazható lesz a lineáris modell. A 2.7 ábra a 2.6 ábra kifutási faktorait mutatja az (I/P) arányok függvényében. Az incurred kifutási faktoroknál fordított a helyzet, a (P/I) arányok

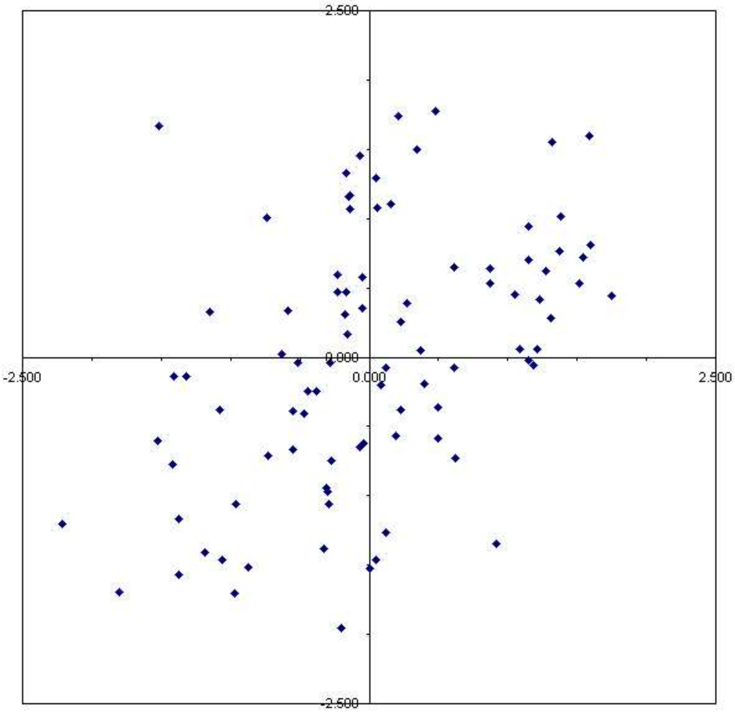


2.7. ábra. Paid kifutási faktorok az (I/P) arányok függvényében

mutatnak lineáris trendet.

A második és harmadik probléma orvoslásához elengedhetetlen, hogy a kifutási faktorokat együttesen tekintsük, ne külön-külön. Ez azért fontos, mert az átlag alatti/feletti (P/I) arányokat nem csak a rákövetkező, hanem az összes kifutási év megfelelő kifutási faktoraival kompenzálni kell. Ahhoz, hogy az összes kifutási év kifutási faktorait, (P/I) és (I/P) faktorait együttesen tekintsük, standardizálnunk kell azokat. Ezt az értékek reziduálisokra történő átváltásával érjük el, amihez viszont szükségünk van feltevésekre a várható értékre és varianciára vonatkozóan. (Ezek formalizálása a következő fejezetben található.) A reziduális nem más, mint az értékek átlagtól való eltérésének standardizált mérőszáma, egy összehasonlítható érték, ami 0 körül ingadozik.

A következő két ábra (2.8, 2.9) a paid kifutási faktor reziduálisait mutatja az (I/P), illetve az incurred kifutási faktor reziduálisait a (P/I) arányok függvényében. A standardizálásnak köszönhetően az összes kifutási évet egyszerre ábrázolhatjuk.



2.8. ábra. Paid reziduálisok

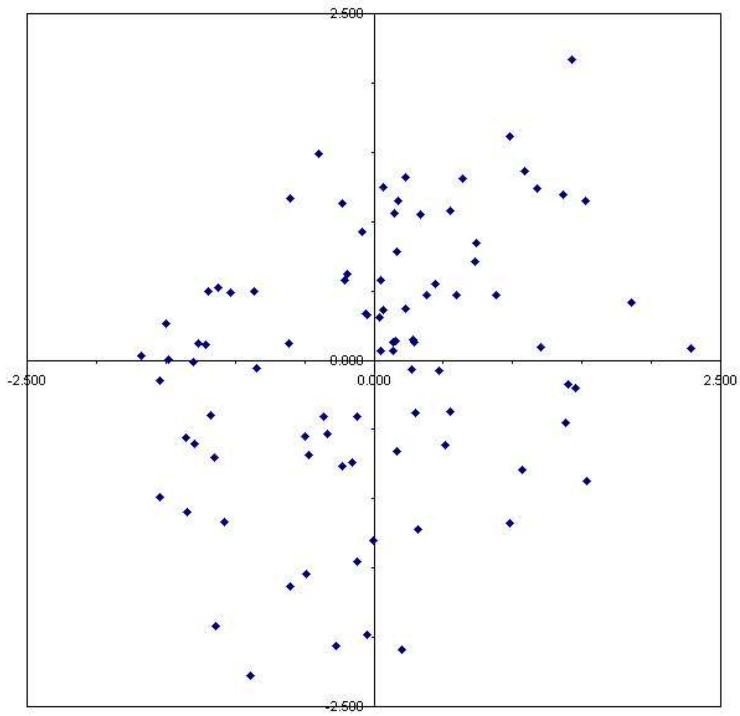
A 2.8 ábra egyenletesen növekvő trendet mutat kevés kiugró értékkel, 45%-os korrelációs együtthatóval és 0,48-as meredekségű regressziós egyenessel. Ezért, ha például egy bekövetkezési évben az (I/P) arány +1-es reziduálissal rendelkezik, akkor a következő kifutási évhez +0,48-as reziduálissal rendelkező paid kifutási faktort fogunk használni. A 2.9 ábráról hasonlóak mondhatók el.

A 2.10 ábrán egy általam készített MCL becslés reziduálisai láthatóak.

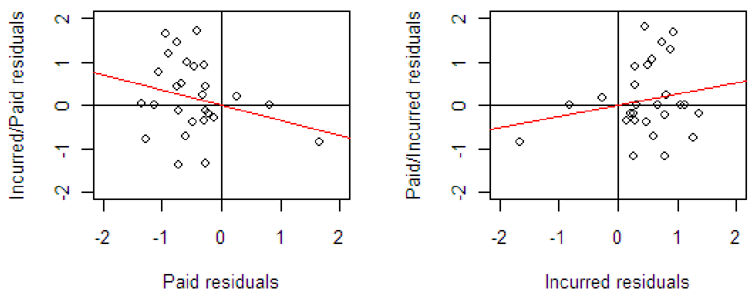
Ez a példa illusztrálta az általános eljárást. Elsőként előállítjuk a két, összes kifutási évet tartalmazó reziduális ábrát. Ezután megrajzoljuk a két, origón átmenő regressziós egyenest. Egy adott (I/P) vagy (P/I) arányhoz leolvassuk a hozzá tartozó kifutási faktor reziduális-értékét, és ezt használjuk az átlagos kifutási érték helyett.

2.5. Elméleti alapok és formalizálás

Először néhány jelölést vezetünk be. Legyen $n \in \mathbb{N}$ a bekövetkezési évek száma és T a kifutás éve ($T \subset \mathbb{N}$; általában $T = \{1, \ldots, n\}$). Jelölje $P_i = (P_{i,t})_{t \in T}$ ($i = 1, \ldots, n$) a paid értéket az i-edik bekövetkezési évben t kifutási év eltelte után és, $I_i = (I_{i,t})_{t \in T}$ ($i = 1, \ldots, n$) az incurred értéket az i-edik bekövetkezési évben t kifutási év eltelte után. A $\mathcal{P}_i(s) := \{P_{i,1}, \ldots, P_{i,s}\}$ jelölés azt a feltételezést jelképezi, hogy az i-edik bekövetkezési év paid értékei adottak az s-edik kifutási évig, és ugyanez



2.9. ábra. Incurred reziduálisok



2.10. ábra. Általam készített becslés reziduálisai

mondható el az $\mathcal{I}_i(s) := \{I_{i,1}, \ldots, I_{i,s}\}$ értékekről.

A következőkben a modell által támasztott paid és incurred értékekre vonatkozó feltételek láthatóak.

PE (várható érték feltétel)
Minden $i = 1, \ldots, n$ -re és $s, t \in T$ -re $(t = s+1)$ létezik egy kifutási faktor, $f^P_{s\to t} > 0$, hogy

$$\mathbf{E}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{P}_i(s)\right) = f^P_{s\to t}.$$

PV (szórásnégyzet feltétel)
Minden $i = 1, \ldots, n$ -re és $s, t \in T$ -re $(t = s + 1)$ létezik egy arányossági tényező, $\sigma^P_{s\to t} > 0$, hogy

$$\mathbf{Var}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{P}_i(s)\right) = \frac{(\sigma^P_{s\to t})^2}{P_{i,s}}.$$

PU (függetlenségi feltétel)
A különböző bekövetkezési évek függetlenek, vagyis a $\{P_{i,t}|t \in T\}, \ldots, \{P_{n,t}|t \in T\}$ értékek sztochasztikusan függetlenek.

A hasonló feltételek az incurred értékekre:

IE (várható érték feltétel)
Minden $i = 1, \ldots, n$ -re és $s, t \in T$ -re $(t = s+1)$ létezik egy kifutási faktor, $f^I_{s\to t} > 0$, hogy

$$\mathbf{E}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathcal{I}_i(s)\right) = f^I_{s\to t}.$$

IV (szórásnégyzet feltétel)
Minden $i = 1, \ldots, n$ -re és $s, t \in T$ -re $(t = s + 1)$ létezik egy arányossági tényező, $\sigma^I_{s\to t} > 0$, hogy

$$\mathbf{Var}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathcal{I}_i(s)\right) = \frac{(\sigma^I_{s\to t})^2}{I_{i,s}}.$$

IU (függetlenségi feltétel)
A különböző bekövetkezési évek függetlenek, vagyis a $\{I_{i,t}|t \in T\}, \ldots, \{I_{n,t}|t \in T\}$ értékek sztochasztikusan függetlenek.

Tehát a lánc-létra modell feltételezései azt jelentik, hogy a bekövetkezési évek sztochasztikusan függetlenek, de ugyanazzal a kifutási faktorral és σ értékkel rendelkeznek minden egyes kifutási évben.

A fenti feltételek csak egy háromszög feltételezéseiről szólnak, és nem mondanak semmit a paid és incurred értékek közti kapcsolatról. Ha nemcsak a paid, vagy csak az incurred háromszögek ismertek, hanem mindkettő együtt, akkor a következő feltételes várható értékeket írjuk föl:

$$\mathbf{E}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{B}_i(s)\right) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{E}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathcal{B}_i(s)\right),$$

ahol $\mathcal{B}_i(s) = \{P_{i,1}, \ldots, P_{i,s}, I_{i,1}, \ldots, I_{i,s}\}$ jelöli mindkét folyamat adatait az s-edik kifutási évig. A függetlenségre vonatkozó feltételt is módosítjuk a két folyamat együttes függetlenségére:
PIU$\{P_{i,t}, I_{i,t}|t \in T\}, \ldots, \{P_{n,t}, I_{n,t}|t \in T\}$ sztochasztikusan függetlenek.
Szükség lesz továbbá a feltételes reziduális fogalmának bevezetésére. Ha X egy valószínűségi változó, $\mathcal{C}$ a feltétel és

$$\sigma(X|\mathcal{C}) := \sqrt{\mathbf{Var}(X|\mathcal{C})}$$

a feltéles szórás, akkor X feltételes reziduálisa a $\mathcal{C}$ feltétel mellett:

$$\mathbf{Res}(X|\mathcal{C}) := \frac{X - \mathbf{E}(X|\mathcal{C})}{\sigma(X|\mathcal{C})}$$

A feltételes reziduális a feltételes várható érték és feltételes szórásnégyzet figyelembe vételével standardizált.

$$\mathbf{E}\big(\mathbf{Res}(X|\mathcal{C})|\mathcal{C}\big) = 0 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{Var}\big(\mathbf{Res}(X|\mathcal{C})|\mathcal{C}\big) = 1$$

Jelölje

$$Q_i := \frac{P_i}{I_i} = \left(\frac{P_{i,t}}{I_{i,t}}\right)_{t \in T}$$

a (P/I) folyamatot. A következő két feltétel az ábrákon megfigyelt reziduálisok feltételes várható értékeinek (I/P) és (P/I) arányoktól való lineáris függését fordítja le matematikai egyenlőségre.

PQ Minden $i = 1, \ldots, n$ -re és $s, t \in T$ -re $(t = s+1)$ létezik egy konstans, λ^P, hogy

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{Res}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{P}_i(s)\right)|\mathcal{B}_i(s)\right) = \lambda^P \cdot \mathbf{Res}(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s))$$

vagy ezzel ekvivalensen

$$\mathbf{E}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{B}_i(s)\right) = f_{s\to t}^P + \lambda^P \cdot \frac{\sigma\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{P}_i(s)\right)}{\sigma\left(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s)\right)} \cdot \Big(Q_{i,s}^{-1} - \mathbf{E}\big(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s)\big)\Big)$$

IQ Minden $i = 1, \ldots, n$ -re és $s, t \in T$ -re $(t = s+1)$ létezik egy konstans, λ^I, hogy

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{Res}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathcal{I}_i(s)\right)|\mathcal{B}_i(s)\right) = \lambda^I \cdot \mathbf{Res}(Q_{i,s}|\mathcal{I}_i(s))$$

vagy ezzel ekvivalensen

$$\mathbf{E}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathcal{B}_i(s)\right) = f_{s\to t}^I + \lambda^I \cdot \frac{\sigma\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathcal{I}_i(s)\right)}{\sigma\left(Q_{i,s}|\mathcal{I}_i(s)\right)} \cdot \Big(Q_{i,s} - \mathbf{E}\big(Q_{i,s}|\mathcal{I}_i(s)\big)\Big)$$

A λ^P és λ^I paraméterek fejezik ki a regressziós egyenesek meredekségét.

Mindent egybe vetve a Müncheni lánc-létra model a bekövetkezési évekre megfogalmazott **PIU** függetlenségi feltételből, a lánc-létra módszerre is igaz **PE**, **PV**, **IE** és **IV**, paid és incurred károkra elvárt előfeltételekből, valamint a **PQ** és **IQ** feltételekből áll. Ez utóbbiak a paid és incurred kifutási faktorok (I/P) és (P/I) arányoktól való függését írják le.

Vizsgáljuk meg kicsit jobban a **PQ** és **IQ** egyenleteket, feltételezve, hogy $\lambda^P, \lambda^I \geq 0$.

Az $\mathbf{E}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathcal{B}_i(s)\right)$ feltételes várható érték, azaz az i-edik bekövetkezési év s-ről a t-edik kifutási évre történő előrejelzésének incurred kifutási faktora, a (P/I) aránynak ($Q_{i,s}$) egy monoton növő, lineáris függvénye. Ez azt mutatja, hogy a gyakorlati megfigyelések elméleti feltételekkel kifejezhetőek. Még precizebben, az **IQ** egyenlet a feltételes várható értéket a szokásos lánc-létra kifutási faktor ($f^I_{s\to t}$) és egy $Q_{i,s}$-ben lineáris korrekciós kifejezés összegeként fejezi ki. A korrekciós kifejezés három részből áll:

- A λ^I faktor a kifutási faktorok reziduálisainak és a (P/I) arányok reziduálisainak egy általános korrelációs együtthatója. Értéke 0 és 1 közötti, és a kifutási fakorok (P/I) arányoktól való függőségét méri. Ha meglehetősen kevés összefüggés van az adatok között, akkor $\lambda^I \approx 0$. Ez esetben az átlagos kifutási faktorokkal végezzük el az előrejelzést, akárcsak az eredeti lánc-létra módszer esetében.

- A szórás faktor az incurred kifutási faktor és a pillanatnyi (P/I) arány feltételes szórásának a hányadosa. Minél nagyobb a kifutási faktor szórása, annál valószínűbb, hogy az átlagtól való eltérés szignifikáns lesz és nagyobb lesz a korrekciós tag. Minél kisebb a (P/I) arány szórása, annál kevésbé valószínű, hogy az átlagtól való eltérés szignifikáns lesz és nagyobb lesz a korrekciós tag.

- A $Q_{i,s} - \mathbf{E}(Q_{i,s}|\mathcal{I}_i(s))$ lineáris tag tartalmazza a (P/I) arányt az előrejelzésben. Az átlag feletti pillanatnyi (P/I) arány a kifutási faktor növelését eredményezi, míg az átlag alatti arány a csökkenését. Minél távolabb van a pillanatnyi (P/I) arány az átlagtól, annál nagyobb lesz a korrekciós tag. Ha a (P/I) arány átlag közeli, akkor a kifutási faktor is átlag közeli lesz, úgy mint az eredeti lánc-létra módszer esetében.

A fenti, incurred kifutási faktorokról és (P/I) arányokról szóló állítások természetesen analóg módon igazak a paid kifutási faktorokra és (I/P) arányokra.

A λ^P és λ^I korrelációs paraméterek jelentik a kapcsolatot a paid és incurred háromszögek között. Ezen paraméterek nagysága jelzi, hogy a paid és incurred károk mennyire vannak hatással egymásra, és hogy melyik milyen súllyal szerepel a végső előrejelzésben. A reziduálisos megközelítés egyrészt lehetővé teszi az összes kifutási év együttes vizsgálatát, másrészt megfelelő mennyiségű adatot szolgáltat, ezzel a becslést relatív stabillá teszi. Ily módon a Müncheni lánc-létra modell kiküszöböli a második számú problémát.

Jelölje X a (P/I) és (I/P) arányok reziduálisait, és Y a kifutási faktorok reziduálisait. A **PQ** és **IQ** reziduális-egyenletek a következőképpen írhatóak fel: $\mathbf{E}(Y|X) = \lambda \cdot X$, ahol X és Y valószínűségi változó és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár. X és Y kovarianciájára az alábbi egyenlet írható fel:

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(X, \mathbf{E}(Y|X)) = \lambda \cdot \mathbf{Var}(X)$$

A $\sigma(X) := \sqrt{\mathbf{Var}(X)}$ és $\sigma(Y) := \sqrt{\mathbf{Var}(Y)}$ jelöléssel X és Y korrelációs együtthatójára kapjuk:

$$\mathbf{Corr}(X, Y) = \lambda \cdot \frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}$$

Mivel X és Y standardizált ($\sigma(X) = \sigma(Y) = 1$), ezért $\lambda = \mathbf{Corr}(X, Y)$. Tehát a λ paraméter és a megfelelő reziduálisok korrelációs együtthatói megegyeznek.

$$\mathbf{Corr}\left(\mathbf{Res}(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s)), \mathbf{Res}\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{P}_i(s)\right)\right) = \lambda^P$$

és

$$\mathbf{Corr}\left(\mathbf{Res}(Q_{i,s}|\mathcal{I}_i(s)), \mathbf{Res}\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathcal{I}_i(s)\right)\right) = \lambda^I$$

Hasonló számolás vezet a feltételes korrelációs együtthatók reziduálisok nélküli formuláihoz.

$$\mathbf{Corr}\left(Q_{i,s}^{-1} \cdot \frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{P}_i(s)\right) = \lambda^P$$

és

$$\mathbf{Corr}\left(Q_{i,s} \cdot \frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathcal{I}_i(s)\right) = \lambda^I$$

Ez egy automatikus biztonsági mechanizmus a harmadik probléma elkerülésére. A paid és/vagy incurred reziduálisok közti gyenge korreláció alacsony λ^P és/vagy λ^I értékeket szolgáltat. Ez esetben a Müncheni lánc-létra módszer csak kis mértékben tér el az eredeti lánc-létra módszertől.

2.6. Gyakorlati megvalósítás

A reziduálisok és várható kifutási faktorok kiszámolásához először becslést kell adni a modell paramétereire. Legyen megint $t = s + 1$. Az $f_{s\to t}^P$ és $f_{s\to t}^I$

$(s = 1, \ldots, n-1)$ kifutási faktorok becslése ugyanaz, mint az eredeti lánc-létra módszer esetében:

$$\widehat{f^P_{s\to t}} := \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s}} \cdot \sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s} \cdot \frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s}}$$

és

$$\widehat{f^I_{s\to t}} := \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s}} \cdot \sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s} \cdot \frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} I_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s}}$$

A σ paraméter becslése szintén a szokásos módon történik $(s = 1, \ldots, n-2)$:

$$\widehat{(\sigma^P_{s\to t})^2} := \frac{1}{n-s-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s} \cdot \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} - \widehat{f^P_{s\to t}} \right)^2$$

és

$$\widehat{(\sigma^I_{s\to t})^2} := \frac{1}{n-s-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s} \cdot \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} - \widehat{f^I_{s\to t}} \right)^2$$

Innen $\widehat{\sigma^P_{s\to t}} = \sqrt{\widehat{(\sigma^P_{s\to t})^2}}$ és $\widehat{\sigma^I_{s\to t}} = \sqrt{\widehat{(\sigma^I_{s\to t})^2}}$. Ahhoz, hogy kiszámolhassuk a (P/I) és (I/P) arányok reziduálisait, meg kell becsülni az $\mathbf{E}(Q_{i,s}|\mathcal{I}_i(s))$ és $\mathbf{E}(Q^{-1}_{i,s}|\mathcal{P}_i(s))$ feltételes várható értékeket valamint a $\sigma(Q_{i,s}|\mathcal{I}_i(s))$ és $\sigma(Q^{-1}_{i,s}|\mathcal{P}_i(s))$ feltételes szórásokat.

Az **IE** feltétel miatt nyilvánvalóan tekinthetjük az $\mathbf{E}(Q_{i,s}|\mathcal{I}_i(s))$ feltételes várható értéket konstansnak, továbbá az **IV** feltétel miatt kézenfekvő azt feltételezni, hogy a (P/I) arány feltételes szórásnégyzete függ az incurred értéktől. Nagyobb értékhez kisebb (P/I) szórásnégyzet tartozik. Ezen feltételek a következő becslést indokolják $\mathbf{E}(Q_{i,s}|\mathcal{I}_i(s))$ -re $(s = 1 \ldots, n)$:

$$\widehat{q_s} := \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s}} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s} \cdot Q_{j,s} = \frac{\sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s}}{\sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s}}$$

Ez az érték minden bekövetkezési évben ugyanaz.

A javasolt becslés $\sigma(Q_{i,s}|\mathcal{I}_i(s))$ -ra:

$$\frac{\widehat{\rho^I_s}}{\sqrt{I_{i,s}}}$$

ahol $s = 1, \ldots, n-1$ -re

$$\widehat{\rho^I_s}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s} \cdot \left(Q_{j,s} - \widehat{q_s}\right)^2$$

$\widehat{\rho^I_s}$ értéke független a bekövetkezési évtől.

Az imént leírtak analóg módon igazak az (I/P) arányok feltételes várható értékeire és szórásnégyzeteire is.

$\mathbf{E}(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s))$ becslése:

$$\widehat{q_s}^{-1} := \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s}} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s} \cdot Q_{j,s}^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s}}{\sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s}}$$

$\sigma(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s))$ becslése:

$$\frac{\widehat{\rho_s^P}}{\sqrt{P_{i,s}}}$$

ahol

$$\widehat{\rho_s^P}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s} \cdot \left(Q_{j,s}^{-1} - \widehat{q_s}^{-1}\right)^2$$

Mostmár minden rendelkezésre áll ahhoz, hogy a feltételes reziduálisokat megbecsüljük. Hogy egyszerűsítsük a jelölést, a $\mathbf{Res}\Big(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{P}_i(s)\Big)$, $\mathbf{Res}\Big(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathcal{I}_i(s)\Big)$, $\mathbf{Res}\Big(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s)\Big)$ és $\mathbf{Res}\Big(Q_{i,s}|\mathcal{I}_i(s)\Big)$ helyett a következőket használjuk: $\widehat{\mathbf{Res}}(P_{i,t})$, $\widehat{\mathbf{Res}}(I_{i,t})$, $\widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1})$ és $\widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s})$.

$$\widehat{\mathbf{Res}}(P_{i,t}) = \frac{\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} - \widehat{f_{s\to t}^P}}{\widehat{\sigma_{s\to t}^P}} \cdot \sqrt{P_{i,s}}, \quad \widehat{\mathbf{Res}}(I_{i,t}) = \frac{\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} - \widehat{f_{s\to t}^I}}{\widehat{\sigma_{s\to t}^I}} \cdot \sqrt{I_{i,s}}$$

és

$$\widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1}) = \frac{Q_{i,s}^{-1} - \widehat{q_s}^{-1}}{\widehat{\rho_s^P}} \cdot \sqrt{P_{i,s}}, \quad \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}) = \frac{Q_{i,s} - \widehat{q_s}}{\widehat{\rho_s^I}} \cdot \sqrt{I_{i,s}}$$

A λ^P és λ^I korrelációs paraméterekre olyan becslést adunk, ami minimalizálja az átlagos négyzetes eltérést a rezuiduális ábra pontjainak y koordinátája és az origón átmenő λ^P vagy λ^I meredekségű regressziós egyenes között.

$$\widehat{\lambda^P} := \frac{1}{\sum_{i,s} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1})^2} \cdot \sum_{i,s} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1})^2 \cdot \frac{\widehat{\mathbf{Res}}(P_{i,t})}{\widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1})} = \frac{\sum_{i,s} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1}) \cdot \widehat{\mathbf{Res}}(P_{i,t})}{\sum_{i,s} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}^{-1})^2}$$

és

$$\widehat{\lambda^I} := \frac{1}{\sum_{i,s} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s})^2} \cdot \sum_{i,s} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s})^2 \cdot \frac{\widehat{\mathbf{Res}}(I_{i,t})}{\widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s})} = \frac{\sum_{i,s} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s}) \cdot \widehat{\mathbf{Res}}(I_{i,t})}{\sum_{i,s} \widehat{\mathbf{Res}}(Q_{i,s})^2}$$

Mindegyik szummánál s 1-től n−2-ig, i 1-től n−s-ig megy.

A **PQ** és **PQ** feltételeknek megfelelően a következő rekurzív formulákat kapjuk:

$$\widehat{P_{i,t}} := \widehat{P_{i,s}} \cdot \left(f_{s\to t}^P + \widehat{\lambda^P} \cdot \frac{\widehat{\sigma_{s\to t}^P}}{\widehat{\rho_s^P}} \cdot \left(\frac{\widehat{I_{i,s}}}{\widehat{P_{i,s}}} - \widehat{q_s}^{-1}\right)\right)$$

és

$$\widehat{I_{i,t}} := \widehat{I_{i,s}} \cdot \left(f_{s\to t}^I + \widehat{\lambda^I} \cdot \frac{\widehat{\sigma_{s\to t}^I}}{\widehat{\rho_s^I}} \cdot \left(\frac{\widehat{P_{i,s}}}{\widehat{I_{i,s}}} - \widehat{q_s}\right)\right)$$

3. fejezet

Bootstrap eljárás

3.1. A valós adatok struktúrája

Az IBNR tartalékolási módszerek összehasonlításához valós kárkifizetéseket veszek alapul. A rendelkezésemre álló adatokat Acces táblákban tárolom az alábbi megbontásban (később ezekre a sorok elején található jelölésekkel hivatkozom):

- **T1** Az összes szerződést (402.092 darab) tartalmazó tábla.
  Oszlopai: azonosító szám, szerződésszám, a szerződéshez tartozó károk száma.

- **T2** Káradatokat tartalmazó tábla, éves összesítésben.
  Oszlopai: azonosító szám, bekövetkezés éve, bejelentés éve, ráfordítások[1] kumulált összege (1994-től 2001-ig), 2008 végi állapot szerinti összráfordítás az adott kárra, 2001 végi tételes függőkár[2].

- **T3** Káradatokat tartalmazó tábla, negyedéveséves összesítésben.
  Oszlopai: azonosító szám, bekövetkezés negyedéve, bejelentés negyedéve, ráfordítások kumulált összege (1994 1. negyedévétől 2001 4. negyedévéig), 2008 4. negyedéve szerinti összráfordítás az adott kárra, 2001 4. negyedévében beállított függőkár.

- **T4** Káradatokat tartalmazó tábla, éves összesítésben.
  Oszlopai: azonosító szám, bekövetkezés éve, kárkifizetés éve, kifizetések kumulált összege (1994-től 2001-ig), 2008 végi állapot szerinti összráfordítás az adott kárra, 2001 végi tételes függőkár.

- **T5** Káradatokat tartalmazó tábla, negyedéveséves összesítésben.
  Oszlopai: azonosító szám, bekövetkezés negyedéve, kárkifizetés negyedéve, ki-

[1] Kifizetés és tartalékváltozások összege
[2] A tételes függőkár a kárszakértők által a kár bekövetkezésekor tartalékba beállított összeg

fizetések kumulált összege (1994 1. negyedévétől 2001 4. negyedévéig), 2008 4. negyedéve szerinti összráfordítás az adott kárra, 2001 4. negyedévében beállított függőkár.

Az 1994 és 2001 közötti adatokat használom fel a becsléshez, és az így kapott értékeket hasonlítom össze a 2008 végi összráfordítással, hiszen ez az az érték, amenynyit ténylegesen kifizettek egy adott kárra. Előfordulhat, hogy egy kár kumulált értékei egészen 2001-ig nullák, de a 2008 végi összráfordítás nem nulla. Ekkor a kár 2001 után került bejelentésre, de mivel ez is egy későbbi kifizetés, a becslésnek erre is előrejelzést kell adnia.

3.2. Az eljárás rövid leírása

A módszerek összhasonlítását Bootstrap eljárással végzem. Valós szerződésadatokat tartalmazó táblázatból visszatevéssel egy ugyanannyi sorból álló minta-táblát hozok létre. Ez a tábla egyes szerződéseket többször is tartalmazhat, némelyeket pedig egyáltalán nem. Az így kiválasztott adatokat kifutási háromszögekbe rendezem, majd lefuttatom rájuk az előző két fejezetben vázolt becslési módszereket. Az előrejelzéseket összehasonlítom a mintában szereplő szerződéseknek megfelelő, rendelkezésemre álló, valós értékekkel. Mindezt százszor végzem az összes kifutási háromszögre. A kapott eredményeket összesítve, azokból statisztikákat készítve állapítom meg, hogy melyik módszer, melyik kifutási háromszögre lefutattva adja a legpontosabb előrejelzést.

3.3. Kifutási háromszögek

Az eljárás során az adatokat a következő kifutási háromszögekbe rendezem (később ezekre a sorok elején található jelölésekkel hivatkozom):

- **H1** sor: bekövetkezés éve, oszlop: bejelentés éve,
  érték: adott évben bekövetkezett és bejelentett károkra történt 2001 végéig kumulált ráfordítás
- **H2** sor: bekövetkezés negyedéve, oszlop: bejelentés negyedéve,
  érték: adott negyedévben bekövetkezett és bejelentett károkra történt 2001 4. negyedévéig kumulált ráfordítás
- **H3** sor: bekövetkezés éve, oszlop: kifizetés éve,
  érték: adott évben bekövetkezett károkra történt kumulált kifizetések a kifizetés éve szerinti bontásban

- **H4** sor: bekövetkezés negyedéve, oszlop: kifizetés negyedéve,
  érték: adott negyedévben bekövetkezett károkra történt kumulált kifizetések a kifizetés negyedéve szerinti bontásban

- **H5** sor: bekövetkezés éve, oszlop: ráfordítás éve,
  érték: adott évben bekövetkezett károkra történt kumulált ráfordítások a ráfordítás éve szerinti bontásban

- **H6** sor: bekövetkezés negyedéve, oszlop: ráfordítás negyedéve,
  érték: adott negyedévben bekövetkezett károkra történt kumulált ráfordítások a ráfordítás negyedéve szerinti bontásban

- **H7** sor: bekövetkezés éve, oszlop: kifizetés éve,
  érték: adott évben bekövetkezett és bejelentett károkra történt 2001 végéig kumulált kifizetés

- **H8** sor: bekövetkezés negyedéve, oszlop: kifizetés negyedéve,
  érték: adott negyedévben bekövetkezett és bejelentett károkra történt 2001 4. negyedévéig kumulált kifizetés

A Müncheni lánc-létra módszer paid háromszögének a **H7**, **H8**, incurred háromszögének pedig a **H1**, **H2** háromszögek felelnek meg.

3.4. Gyakorlati megvalósítás

A Bootstrap eljárás lépéseit, azaz a minta kiválasztását, kifutási háromszögbe rendezését, a különböző módszerekkel történő előrejelzéseket és az összehasonlításokat az R programban írtam meg. A program főbb lépéseinek leírása a Mellékletben olvasható.

A program először visszatevéses mintát vesz a **T1** táblából, majd az így kiválasztott szerződéseknek megfelelő sorokat veszi ki a **T2**, ..., **T5** kártáblákból, és kifutási háromszögekbe rendezi azokat. Azon szerződések, melyekhez nem tartozik káradat (azaz a 2008 végi összkifizetésük is nulla), nem kerülnek be a kifutási háromszögbe, vagyis nulla értékkel szerepelnek benne. A **H1**, **H5** háromszögekhez a **T2**-es, a **H2**, **H6** háromszögekhez, a **T3**-as, a **H3**, **H7** háromszögekhez a **T4**-es, végül a **H4**, **H8** háromszögekhez a **T5**-ös táblát használja. A megfelelő kifutási háromszögek létrehozásához a minta-táblákat a bekövetkezés dátuma (**H3**, **H4**, **H5**, **H6** háromszögek esetén) vagy a bekövetkezés és bejelentés dátuma (**H1**, **H2**, **H7**, **H8** háromszögek esetén) szerint csoportosítja, és létrehozza a kumulált kifutási háromszögeket.

Ezután lefuttatja a becslési módszereket (ez ugyanúgy működik minden háromszögre). Az így elkészült teljes kumulált kifutási háromszög utolsó oszlopa tartalmazza a 2008-ig becsült összkárkifizetést. Ha az utolsó oszlop összegéből kivonjuk a 2001-es (éves vagy negyedéves) kumulált értékeket, akkor a jövőbeli várható kifiztések összértékét kapjuk. Ezt kell összehasonlítani a valós jövőbeli kifizetéssel, ami a 2008 végi adatok ismeretében rendelkezésemre áll. Ez az összehasonlítás a különböző kifutási háromszögeknél különbözőképpen zajlik, mivel a becslések nem ugyanarra vonatkoznak.

A **H1**, **H2**, **H7**, **H8** háromszögeknél a becslés az IBNR értékét becsli. Így a várható jövőbeli kifizetéseknek és a 2001-es tételes függőkárnak az összege kell, hogy minél jobban közelítse a mintában lévő károk valós, jövőbeli kifizetés értékeinek összegét.

A **H3**, **H4** háromszögeknél a becslés az IBNR és a tételes függőkár értékét becsli. Így a várható jövőbeli kifizetések összege kell, hogy minél jobban közelítse a mintában lévő károk valós, jövőbeli kifizetés értékeinek összegét.

A **H5**, **H6** háromszögeknél a becslés az IBNR és nem megfelelően tartalékolt károk értékét becsli. Így a várható jövőbeli kifizetéseknek és a 2001-es tételes függőkárnak az összege kell, hogy minél jobban közelítse a mintában lévő károk valós, jövőbeli kifizetés értékeinek összegét.

Az összehasonlításokat kétféleképpen végzem el:

- $\frac{\text{fent vázolt becsült érték}}{\text{jövőbeli kifizetés értékeinek öszege}} - 1$
- $\left(\frac{\text{fent vázolt becsült érték}}{\text{jövőbeli kifizetés értékeinek öszege}} - 1\right)^2$

Azaz a program normált eltéréseket, és normált négyzetes eltéréseket számol, így a különböző módszerek és kifutási háromszögek becsléseinek eltérése a valóságtól összehasonlítható egymással. A száz futás során keletkezett összehasonlítások eredményeiből a program átlagot, mediánt, minimumot, maximumot, 5%-os, ill. 95%-os kvantilist számol, valamint a valós összkifizetés és a becslés utolsó oszlapa összegének különbségét adja meg, végül kimenti azokat .txt fájlokba. Az így keletkezett, átlátható elrendezésű adatokból már könnyedén lehet következtetéseket levonni. Ezek a következő fejezetben olvashatóak.

3.5. Az infláció beépítése

A becslés pontosítása érdekében érdemes megpróbálkozni az infláció kiszűrésével a kifutási háromszögekből. Így, ha az egyik évről a másikra megnő a kifizetések összege, az tisztán a károk változásának, nem pedig az inflációnak köszönhető.

Az infláció kiszűréséhez a **H3**, **H4** háromszögeket érdemes alapul venni. A program a háromszögek értékeit 2001-re (vagy annak 4. negyedévére) inflálja, majd lefuttatja a becslési módszereket. Az így kapott előrejelzéseket a kifizetés dátumának megfelelő (negyed)évre inflálja, végül összehasonlítja a 2008 végi összkifizetéssel.

Az infláció értékeit a Magyar Nemzeti Bank honlapjáról töltöttem le. Természetesen 2001 végén, amikorra a becsléseket készítettem, még nem voltak ismertek a későbbi inflációs adatok, azokra csupán becslések léteztek. Érdemes azonban megvizsgálni, hogy az inflációtól megtisztított kifutási háromszögön alapuló becslések vajon jobban közelítik-e a tényleges adatokat, mint az eredeti kifutási háromszögön alapulók. Ha a válasz nemleges, a becsült inlációs adatok sem hozhatnak pontosabb előrejelzést.

4. fejezet

Eredmények

Az értékeléskor nem árt figyelembe venni azt a tényt, hogy az adatok között találhatók adminisztrációs hibák, amik torzítják az eredményeket. Előfordult ugyanis, hogy egy kár kifizetése után sokáig elmaradt a tartalék felszabadítása. Ez a **H5**, **H6** háromszögek esetében azt jelenti, hogy a kár kifizetésétől a tartalék felszabadításáig nagyobb érték szerepel a kifutási háromszögben, mint kellene. Az is megtörtént, hogy a tartalékot tévedésből kétszer szabadították fel. Ekkor jócskán negatívba megy át a tartalékváltozás, ami ahhoz vezet, hogy a kumulált háromszög egy későbbi (negyed)évéhez kisebb érték tartozik, mint az azt megelőzőhöz. Ezt eredményezi az is, hogy a kárkifizetés negatív is lehet, abban az esetben, ha a már kifizetett pénzt jogosulatlanság (például biztosítási csalás) miatt visszaigényli a biztosító. Ezt hívják regressznek.

Ezen okokból kifolyólag az adatoknak elkészítettem egy "javított változatát". Abban az esetben, ha a 2001-es kumulált kifizetés és kumulált tartalékváltozás is nulla, valamint a 2001 végi tételes függőkár érték nem nulla, akkor az utóbbit kinulláztam. Az eredmények taglalásakor mindkét adathalmazon elvégzett becslést elemezni fogom, az eltérések szembetűnőek lesznek. Az előrejelzést nyolc évre előre készítettem. Mivel a károk ennyi idő alatt kifutottak, nem volt szükség az első bekövetkezési év 8 év utáni kárait, vagyis az $X_{1,t+}$ értéket megbecsülni.

Az eredmények összehasonlítását kifutási háromszögenként végzem el. Mindegyiknél leírom, hogy az egyes módszereknél hogyan alakult az eltérések átlaga és mediánja, illetve, hogy a 100 előrejelzés értékei mennyire szóródnak.

4.1. Eredeti adatok alapján készült becslések

H3, H4 háromszögek

A legjobb becslést az éves és negyedéves bontásnál is a kifizetés éve szerint csoportosított és kumulált kifizetéseket tartalmazó kifutási háromszög (**H3**, **H4**) eredményezte. A várakozásoknak megfelelően a kifutási faktorok minimumát és maximumát felhasználó jéghegy és láncszemhányados módszerek (későbbiekben J3 és L3) igen nagy eltérést mutattak a valós adatoktól. Ez nem meglepő, hiszen a lehető legrosszabbat feltételezik. Az átlag és medián értékek éves adatoknál 1 körüliek, negyedéves bontásban pedig még a 4-et is meghaladják. Ez azt jelenti, hogy ezen módszerek jóval túlbecsülik a tartalékot a kelleténél. A nagy eltérésekhez nagy szóródás is párosul, ami teljes mértékben megbízhatatlanná teszi a módszereket, így ezek eredményeit a későbbiekben nem is taglalom.

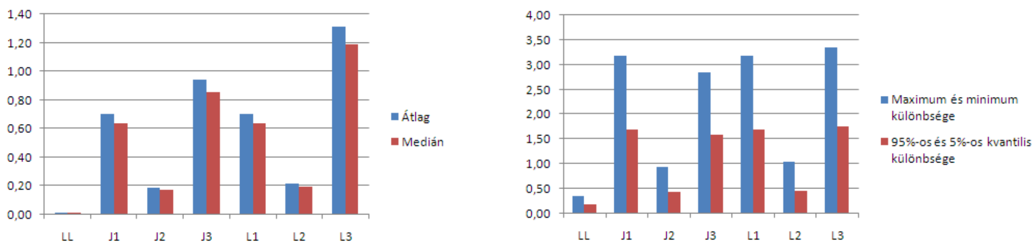
Az első sorokat felhasználó jéghegy és láncszemhányados módszerek (későbbiekben J1 és L1) valamivel jobb eredményt adnak, de még ez sem mondható megbízhatónak. Éves bontásnál az átlag és medián értékek 0,7 körüliek, míg negyedévesnél -0,7 körüliek, ami a tartalék alulbecslését jelenti. A nagy eltérések nem véletlenek, az első bekövetkezési év kifutási faktorainak kizárólagos szerepe van a becslésben, és ezek többnyire nem megfelelőek a későbbi évek előrejelzéseihez. A szóródás mértéke éves bontásnál a J3, L3 módszerhez hasonló, de negyedevésnél csökken a mértéke.

A kifutási faktorok átlagát felhasználó jéghegy és láncszemhányados módszerek (későbbiekben J2 és L2) átlag és medián értékei már belül vannak a 20%-os hibahatáron. Sőt, negyedéves bontásnál az J2 módszer csupán 1%-os eltérést mutatott, viszont a 95%-os és 5%-os kvantilis értékek között 45%-os az eltérés (negyedéves L2-nél 70%-os). A nagy szóródási érték miatt hiába jó az átlag és medián értéke, mert lehet, hogy a kis átlagos eltérés nagy negatív és nagy pozitív eltérések átlagaként adódik. Az éves bontásnál a szóródás mértéke még ennél is nagyobb.

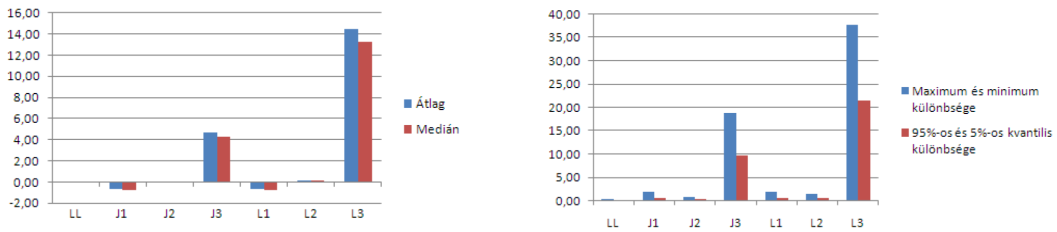
A lánc-létra becslés (későbbiekben LL) bizonyult a legjobbnak, mert éves bontásban csupán 1% az eltérése, negyedévesben -9%, és a szóródása is 0,2 körüli.

Az 4.1 és 4.2 ábra a (**H3**, **H4**) kifutási háromszögek eredményeit foglalja össze.

Az infláció kiszűrésével a (**H3**, **H4**) háromszögeken végrehajtott becslési módszerek eredményei javultak. Az átlag, medián és szóródás értékek minden vizsgált módszer esetében legalább olyan jók, de többnyire jobbak lettek, mint az inflációt tartalmazó, előbb tárgyalt háromszögek esetében. A jéghegy módszerekkel azért nem végeztem előrejelzést, mert azok csak az utolsó oszlop értékeit becsülik. A jövőbeli kifizetéseknek csak az összértékét tudom, az évenkénti bontását nem, ezért nem lehet az adott év kifizetéseit a megfelelő évre előre inflálni. A módszerek teljesítménye az



4.1. ábra. H3, H4 háromszög éves eredményei

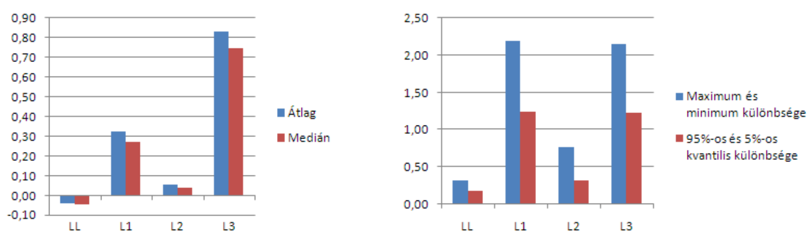


4.2. ábra. H3, H4 háromszög negyedéves eredményei

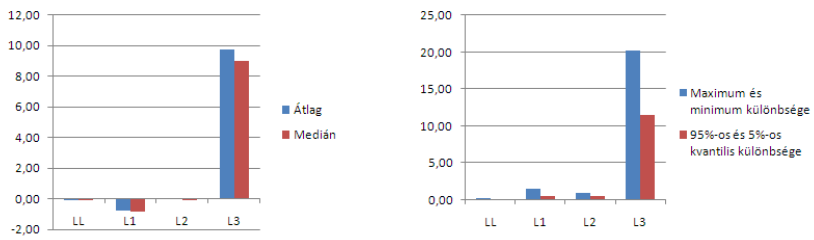
előzőekhez hasonlóan alakul.

A legjobb megintcsak az LL, éves bontásban -4%-os, negyedévesben -12%-os átlag és medián értékekkel. A szóródás mindkét esetben 0,16 körüli. Az L2 módszer itt is jó átlag és medián értékekkel rendelkezik, de a szóródása negyedéves bontásban eléri az 50%-ot. Az L1, L3 módszerek az inflációt tartalmazó becslésekkel egyező eredményt hozzák, habár az L1 éves bontásnál a korábbi 0,7 helyett most 0,3-as eltérést mutat.

Az 4.3 és 4.4 ábra az inflációtól megtisztított (**H3**, **H4**) kifutási háromszögek eredményeit foglalja össze.



4.3. ábra. Az inflációtól megtisztított H3, H4 háromszög éves eredményei



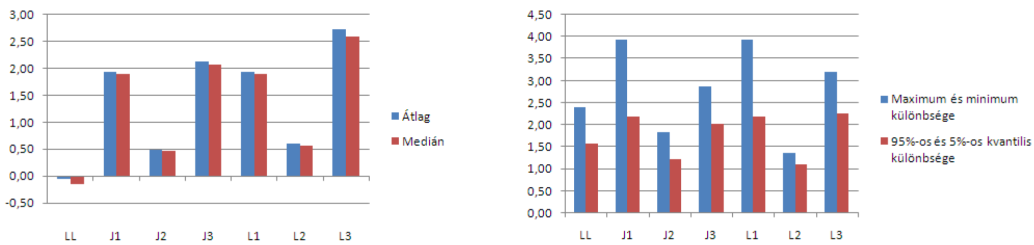
4.4. ábra. Az inflációtól megtisztított H3, H4 háromszög negyedéves eredményei

H5, H6 háromszögek

A kifizetés éve szerint csoportosított kumulált kifizetéseket és tartalékváltozásokat tartalmazó kifutási háromszögek kevésbé jó becslést adnak. Egyedül az LL módszer erményezett 10% körüli hibát. A J2, L2 előrejelzés 0,5 körüli, míg a többi 1-et is meghaladó értékeket adott. A szóródás mértéke viszont mindegyik módszernél igen magas, kettő kivételével 1-et meghaladó.

Mivel ezek a kifutási háromszögek kumulált tartalékváltozásokat is tartalmaznak, elképzelhető lehet, hogy a nagy eltérések a fejezet elején leírt adminisztrációs hibáknak köszönhetőek. Azonban a következő pontban, ahol a hibáktól megtisztított adatokon végzett becslések eredményeit mutatom be, látható lesz, hogy ez a kifutási háromszög ott sem ad jó közelítéseket.

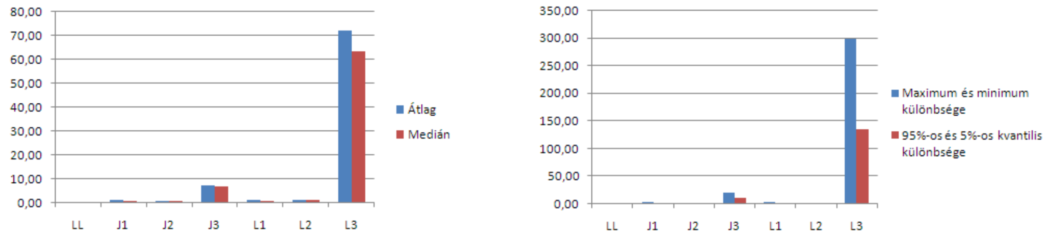
Az 4.5 és 4.6 ábra a (**H5**, **H6**) kifutási háromszögek eredményeit foglalja össze.



4.5. ábra. H5, H6 háromszög éves eredményei

H1, H2 háromszögek

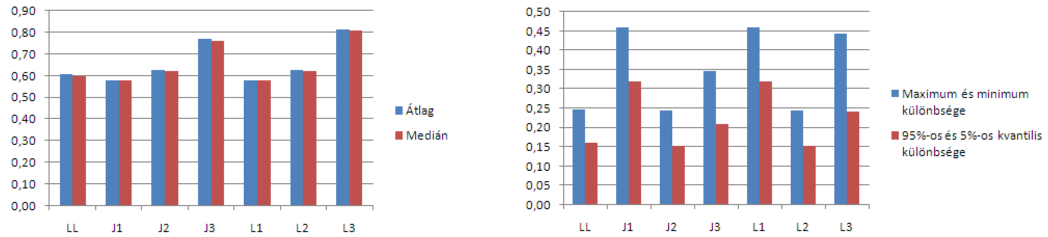
A bejelentés éve szerint csoportosított kumulált kifizetéseket és tartalékváltozásokat tartalmazó kifutási háromszögek éves és negyedéves bontásban is minden módszernél 44%-os vagy azt meghaladó hibát adnak. A szóródás értéke viszont többnyire alacsonynak mondható (0,2 körüli), ami azt jelenti, hogy a becslések a legtöbb esetben nagy eltérést produkáltak. Mint ahogy azt a későbbiekben látni fogjuk a rossz



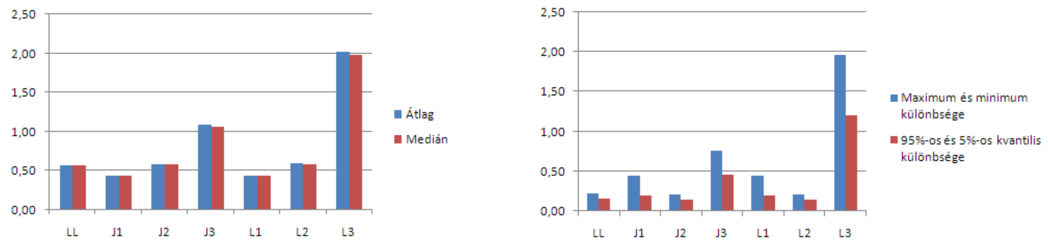
4.6. ábra. H5, H6 háromszög negyedéves eredményei

előrejelzések itt tényleg az adminisztrációs hibák következményei.

Az 4.7 és 4.8 ábra a (**H1**, **H2**) kifutási háromszögek eredményeit foglalja össze.



4.7. ábra. H1, H2 háromszög éves eredményei

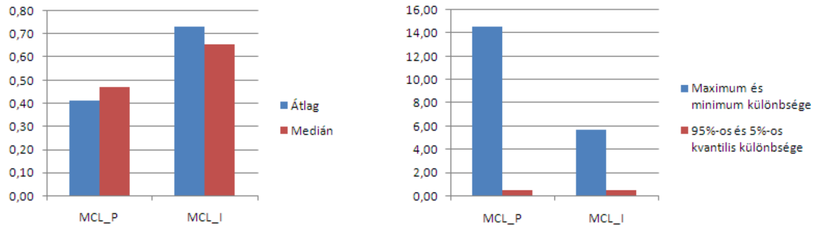


4.8. ábra. H1, H2 háromszög negyedéves eredményei

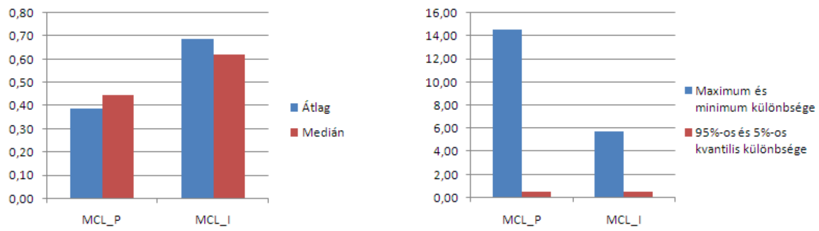
Müncheni lánc-létra módszer

A Müncheni lánc-létra módszer két kifutási háromszöggel dolgozik egyszerre, így két előrejelzést ad. A (**H7**, **H8**) háromszögek a paid (későbbiekben MCL-P), és a (**H1**, **H2**) háromszögek az incurred (későbbiekben MCL-I) becslések alapjául szolgálnak. Mindkét háromszög a bejelentési év szerint csoportosított, az első kumulált kifizetéseket, a második kumulált kifizetéseket és tartalékváltozásokat tartalamaz. A helyes függőkár tartalék értéke valahol a paid és incurred becslés között helyezkedik el, mert a paid háromszög rendszerint alul-, az incurred pedig felülbecsli a tartalékot. Az átlag és medián értékek éves és negyedéves bontásban is a paid háromszög esetében 0,4, míg az incurred háromszögnél 0,7 körüliek. A szóródás mértéke minden esetben 0,5. A módszer felé tanusított elvárásaink nem igazolódnak, ami szintén az adminisztrációs hibák következménye. Ezt a következő pontban bemutatott, javított alapadatokon elvégzett becslések eredményei alátámasztják.

Az 4.9 és 4.10 ábra az MCL módszer eredményeit foglalja össze.



4.9. ábra. H1, H2 háromszög éves eredményei



4.10. ábra. H1, H2 háromszög negyedéves eredményei

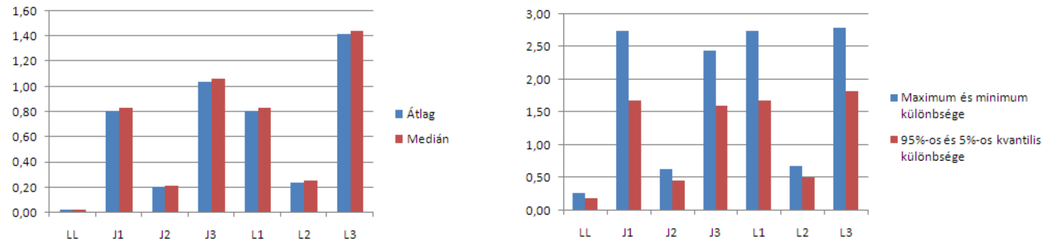
4.2. Javított adatok alapján készült becslések

A fejezet elején ismertetett adminisztrációs hibákat az ott leírtak alapján kiküszöbölve készültek a következő becslési eredmények. Az adatok kijavítása azoknál a háromszögeknél okoz eredményjavulást, amelyek tartalmazzák a tartalékváltozások értékeit.

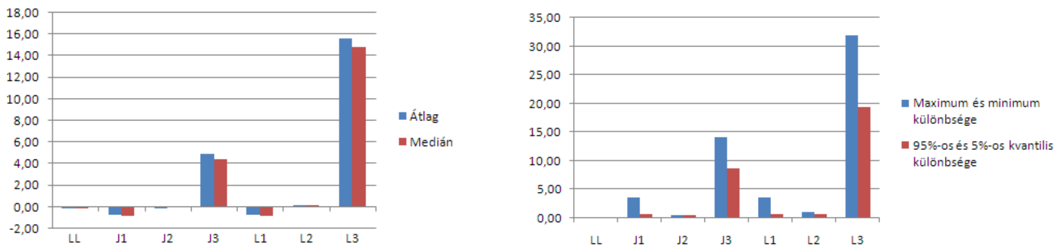
H3, H4 háromszögek

Ezek a kifutási háromszögek, mivel nem tartalmaznak tartalékváltozás értékeket, az eredeti adatokon alapuló becsléseknek megfelelő eredményeket szolgáltatnak. Minimális eltérés abból adódik, hogy ezen előrejelzések a program egy külön futásának eredményei. Az itt alapul vett 100 minta a véletlen kiválasztásnak köszönhetően eltér a másik esetben futtatott program 100 mintájától.

Az 4.11 és 4.12 ábra a (**H3**, **H4**) kifutási háromszögek eredményeit foglalja össze.



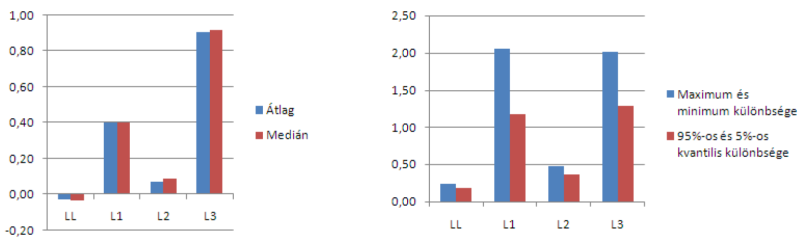
4.11. ábra. H3, H4 háromszög éves eredményei



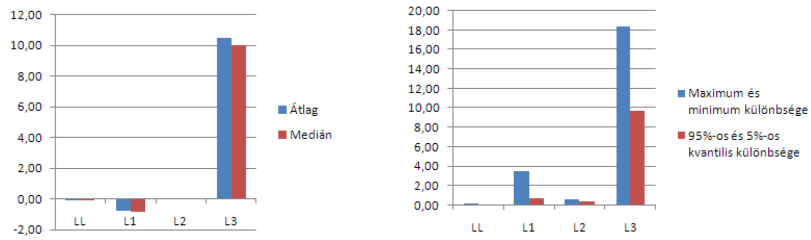
4.12. ábra. H3, H4 háromszög negyedéves eredményei

Az inflációtól megtisztított adatok esetében hasonló mondható el, az eredmények nagyságrendileg megfelelnek az eredeti adatokon futtatott előrejelzésnek.

Az 4.13 és 4.14 ábra az inflációtól megtisztított (**H3**, **H4**) kifutási háromszögek eredményeit foglalja össze.



4.13. ábra. Az inflációtól megtisztított H3, H4 háromszög éves eredményei

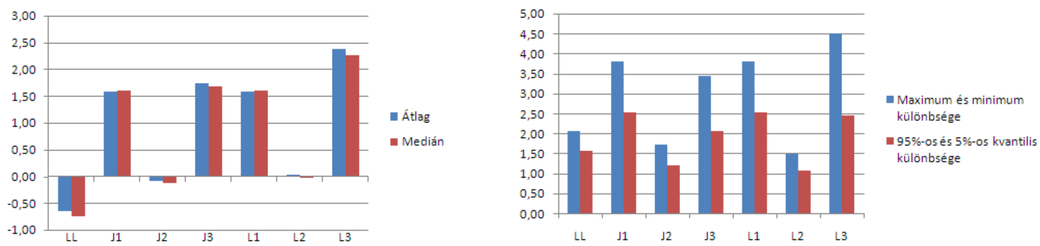


4.14. ábra. Az inflációtól megtisztított H3, H4 háromszög negyedéves eredményei

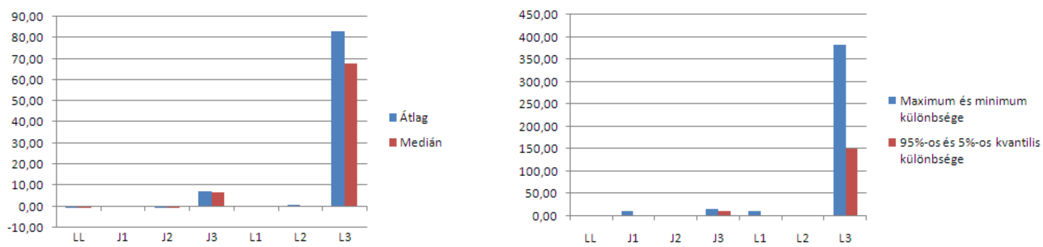
H5, H6 háromszögek

Mint azt az előző pont ennek megfelelő részében leírtam, az adminisztrációs hibák kijavítása nem eredményez jobb becsléseket ezeknél a kifutási háromszögeknél. Az LL módszer hibájának átlaga és mediánja még romlott is az előzőekhez képest, míg a többi módszernél javultak az eredmények. A szóródás mértéke nagyságrendileg ugyanaz. Éves bontásnál az L2, negyedévesnél a J2 módszer 2-3% körüli értékeket adott, ám a szóródás mindkét esetben meghaladja a 0,8-at. Ez a fajta kifutási háromszög, úgy tűnik, nem szolgáltat megbízható eredményeket.

Az 4.15 és 4.16 ábra a (**H5**, **H6**) kifutási háromszögek eredményeit foglalja össze.



4.15. ábra. H5, H6 háromszög éves eredményei

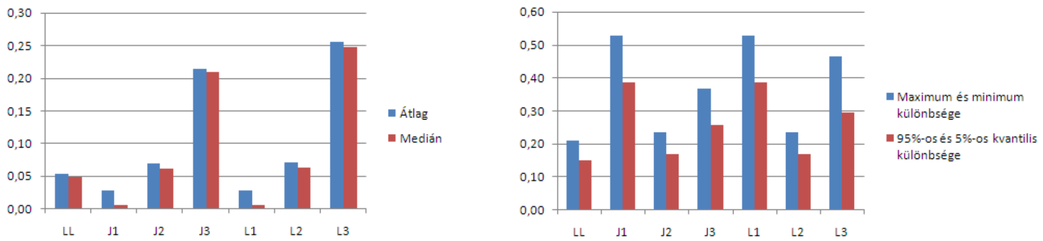


4.16. ábra. H5, H6 háromszög negyedéves eredményei

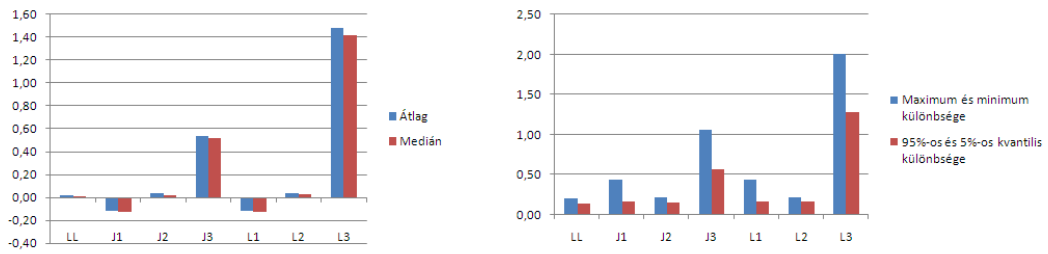
H1, H2 háromszögek

Ezeknél a kifutási háromszögeknél a változás szembetűnő. Minden módszernél javultak az eltérések átlag és medián értékei, míg a szóródások kis (többnyire 0,2 körüli) ingadozást mutatnak. Éves bontásban az LL 0,05, a J1 és L1 0,02 valamint a J2 és L2 módszerek 0,06 körüli eltérést eredményeztek. Egyedül a a J3, L3 hibája nagy, de el is várható egy legrosszabbat feltételező előrejelzéstől. Negyedéves bontásban 3% körüli hibát csak az LL, J2 és L2 módszerek produkáltak. A J1, L1 hibája 12% körüli, míg a J3, L3 eltérése itt is nagy, előbbinél 0,54, utóbbinál 1,48. Mindent egybevetve ezek a kifutási háromszögek adják a legtöbb jó becslést, ráadásul a szóródások mértéke is itt a legkisebb.

Az 4.17 és 4.18 ábra a (**H1, H2**) kifutási háromszögek eredményeit foglalja össze.



4.17. ábra. H1, H2 háromszög éves eredményei



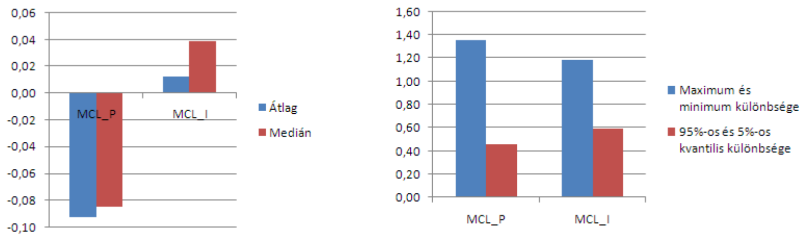
4.18. ábra. H1, H2 háromszög negyedéves eredményei

Müncheni lánc-létra módszer

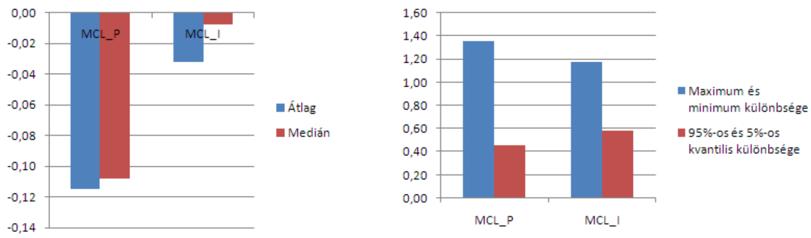
A Müncheni lánc-létra módszer eredményei jobbak lettek, mint az eredeti adatok alapán készültek, de mégsem annyira jók, mint azt várnánk. Az eltérések átlaga éves és negyedéves bontásban is -0,1 körüli a paid, és 0,02-0,03 körüli az incurred háromszögek esetében. A szóródások értéke pedig rendre 0,45 és 0,6 körüli.

A módszer alulteljesítésének magyarázata további vizsgálódást igényel.

Az 4.19 és 4.20 ábra az MCL módszer eredményeit foglalja össze.



4.19. ábra. H1, H2 háromszög éves eredményei



4.20. ábra. H1, H2 háromszög negyedéves eredményei

5. fejezet

Összefoglalás

Az alapadatok adminisztrációs hibáktól való megtisztítása jobb becsléseket eredményezett, így ezek kiszűrése minden esetben fontos lehet. A következőkben a javított adatokon elvégzett előrejelzések eredményeit foglalom össze.

Az összes kifutási háromszögnél megfigyelhető volt, hogy a J3 és L3 módszerek rendre nagy eltéréseket mutattak. A túlzottan pesszimista előrejelzések nem modellezik jól a valóságot, hiszen a lehető legrosszabb bekövetkezésének kicsi a valószínűsége.

A legpontosabb becslések alapjául a bejelentési év és negyedév szerint csoportosított háromszögek szolgáltak. Az MCL módszer is ezeket használta, ám meglepő módon nem az adta a legjobb közelítéseket. Az eltérések átlagát valamint a 95%-os és 5%-os kvantilisek különbségét figyelembe véve éves és negyedéves bontásban is az LL módszer bizonyult a legjobbnak. Ezt követték a J2, L2, J1, L1 módszerek, és csak ezek után foglal helyet a sorban az MCL becslés. Az incurred kifutási háromszögön alapuló MCL módszer ugyan csak 1%-os hibával rendelkezik, de ehhez 60%-os szóródás párosul. Összességében viszont a szóródási értékek ennél a típusú kifutási háromszögnél a legkisebbek.

Az eltérések alapján a kifizetési év és negyedév szerint csoportosított kumulált kifizetéseket tartalmazó kifutási háromszögek foglalják el a második helyet. Éves bontásnál az átlagok alapján a legjobb módszer az LL, majd ezt követi a J2 és L2, ám ezek eltérése már 20% körüli, és szóródásuk is igen nagy. Negyedéves bontásnál J2, LL, L2 a sorrend, ám kis szóródása itt is csak az LL-nek van.

Az infláció kiküszöbölése a kifutási háromszögekből jobb becsléseket eredményezett. Viszon annyival nem jobbakat, hogy az előrejelzésekhez használt valós inflációs adatokat becsült értékekre cserélve még mindig kisebb eltéréseket kapjunk. Az infláció előrejelzése még talán a függőkártartalékok meghatározásánál is nehezebb.

A kifizetési év és negyedév szerint csoportosított kumulált kifizetéseket és tartalékváltozásokat tartalmazó kifutási háromszögek alapján készült becslések lettek a legrosszabbak. 10%-os eltérés alá csak két módszer tudott menni az éves és negyedéves bontást együttvéve. Ám a szóródások mértéke még ezeknél is 1 körüli volt. Az előrejelzések helyességén még az adminisztrációs hibák javítása sem segített.

Az éves és negyedéves bontású becslések között nem figyelhető meg egyértelmű összefüggés. Nem állítható biztosan, hogy a negyedéves bontás pontosabb előrejelzést eredményezne. A kisebb időintervallumoknak köszönhetően ugyan nagyobb az adathalmaz, ami miatt jobb becsléseket kéne, hogy kapjunk, de ugyanezen okból kifolyólag gyakran fordul elő, hogy egy adott negyedévben kifizetett kár tartaléka az adminisztráció késlekedése miatt csak a következő negyedévben kerül felszabadításra, ami az adatok ingadozásához vezet. Megfigyelhető viszont egyes esetekben, hogy míg éves bontásban túl magas a tartalék értéke, addig ugyanarra a módszerre és kifutási háromszögre negydéves bontásban a tartalék értéke alacsonyabb lesz a kelleténél. Fordított eset viszont nem fordul elő.

A 5.1 ábra a kifutási háromszögek és módszerek rangsorolását bemutató táblázat. A sorrendet úgy állapítottam meg, hogy a kvantilisek különbsége alapján csoportosítottam az eredményeket, és a legkevésbé szóródókat raktam a lista elejére. Ezen csoportokon belül pedig a százalékos eltérések átlaga alapján rendeztem sorba az elemeket. Tehát hiába kicsi egy módszer becslésének átlagos eltérése a valós adatoktól, ha nagy a szóródása, nem megbízható, így csak hátrébb foglalhat helyet a rangsorban.

Összességében tehát elmondható, hogy a kiutási háromszögek közül a bejelentés negyedéve szerint csoportosított bizonyult a legjobbnak, míg a módszerek közül a lánc létra. Nem véletlenül ez az egyik legnépszerűbb eljárás, és mint látszik, nemcsak az egyszerűségének köszönhetően.

Helyezés	Kifutási háromszög és módszer	Átlag abszolút értéke	Medián abszolút értéke	95%-5%	Max-min
1.	H2_LL	0,02	0,01	0,15	0,20
2.	H3_LL	0,03	0,03	0,19	0,27
3.	H2_J2	0,03	0,02	0,16	0,22
4.	H3+infl_LL	0,03	0,04	0,18	0,24
5.	H2_L2	0,04	0,03	0,16	0,22
6.	H1_LL	0,05	0,05	0,15	0,21
7.	H1_J2	0,07	0,06	0,17	0,23
8.	H1_L2	0,07	0,06	0,17	0,23
9.	H4_LL	0,09	0,09	0,14	0,25
10.	H4+infl_LL	0,11	0,11	0,14	0,24
11.	H2_J1	0,12	0,13	0,17	0,43
12.	H2_L1	0,12	0,13	0,17	0,43
13.	H1_J3	0,21	0,21	0,26	0,37
14.	H1_L3	0,25	0,25	0,29	0,46
15.	H1_J1	0,03	0,00	0,38	0,53
16.	H1_L1	0,03	0,00	0,38	0,53
17.	H3+infl_L2	0,07	0,08	0,36	0,48
18.	H4_J2	0,03	0,06	0,44	0,59
19.	H4+infl_L2	0,04	0,03	0,46	0,69
20.	H7_MCL-Paid	0,09	0,09	0,46	1,35
21.	H8_MCL-Paid	0,11	0,11	0,46	1,36
22.	H3_J2	0,21	0,21	0,45	0,64
23.	H3_L2	0,24	0,25	0,51	0,68
24.	H7_MCL-Incurred	0,01	0,04	0,59	1,19
25.	H8_MCL-Incurred	0,03	0,01	0,59	1,18
26.	H2_J3	0,54	0,52	0,57	1,06
27.	H6_L2	0,62	0,58	0,61	1,02
28.	H4_L2	0,18	0,18	0,69	1,00
29.	H4+infl_L1	0,76	0,85	0,70	3,49
30.	H6_J2	0,02	0,08	0,82	1,02
31.	H4_J1	0,73	0,83	0,77	3,68
32.	H4_L1	0,73	0,83	0,77	3,68
33.	H6_LL	0,47	0,51	1,00	1,38
34.	H5_L2	0,03	0,01	1,08	1,49
35.	H5_J2	0,09	0,14	1,20	1,71
36.	H3+infl_L1	0,40	0,40	1,17	2,05
37.	H6_J1	0,31	0,14	1,32	9,34
38.	H6_L1	0,31	0,14	1,32	9,34
39.	H3+infl_L3	0,91	0,92	1,28	2,01
40.	H2_L3	1,48	1,42	1,29	2,00
41.	H5_LL	0,66	0,75	1,57	2,07
42.	H3_J3	1,04	1,06	1,60	2,45
43.	H3_J1	0,81	0,83	1,68	2,75
44.	H3_L1	0,81	0,83	1,68	2,75
45.	H3_L3	1,42	1,45	1,83	2,80
46.	H5_J3	1,74	1,69	2,07	3,45
47.	H5_L3	2,37	2,26	2,45	4,51
48.	H5_J1	1,59	1,60	2,53	3,81
49.	H5_L1	1,59	1,60	2,53	3,81
50.	H4_J3	4,89	4,42	8,68	14,06
51.	H4+infl_L3	10,49	10,05	9,73	18,37
52.	H6_J3	7,22	6,57	10,42	15,00
53.	H4_L3	15,64	14,83	19,30	31,92
54.	H6_L3	83,01	67,67	149,97	382,91

5.1. ábra. Az eredmények összefoglalása

Irodalomjegyzék

[1] Arató Mikós, Nem-élet biztosítási matematika, Tartalékolás fejezet, 127-146, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001.

[2] G. Quarg and T. Mack, Munich Chain Ladder, *Blätter der DGVFM*, V. 26, 4, 597-630, 2004.

[3] England, P.D., Verrall, R.J, Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving *Insurance: Mathematics and Economics*, 25, 281-293, 1999.

[4] England, P.D., Verrall, R.J, Stochastic claims reserving in general insurance, *British Actuarial J.* 8/3, 443-544, 2002.

[5] Tom Hoedemakers, Modern reserving techniques for the insurance buisness, Leuven, PhD dolgozat, 2005.

[6] Paulo J. R. Pinheiro, Joao Manuel Andrade e Silva and Maria de Lourdes Centeno, Bootstrap Methodology In Claim Reserving, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 70, No. 4, 701-714, 2003.

[7] P. de Jong, Forecasting Runoff Triangles, NAAJ V.10, no.2, 28-38, 2006.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Arató Miklósnak, aki nemcsak publikációkkal és szakmai tanácsokkal látott el engem, hanem elvárta részeredményeim rendszeres bemutatását, és már októbertől hetente szakított rám időt, így érve el azt, hogy dolgozatomat ne az utolsó pillanatban, kapkodva kelljen befejeznem.

Köszönöm továbbá Bánhidi Szabolcs és Felvidéki Tamás aktuáriusoknak, hogy segítségemre voltak a becslések alapjául szolgáló adatok összerendezésében és egyéb szakmai kérdésekben.

Nem utolsó sorban szeretnék köszönetet mondani családomnak és barátnőmnek, hogy mindvégig támogattak.

Melléklet

A melléklet a Bootstrap eljárás R-ben írt programjának parancsait tartalmazza. Csak a leglényegesebb utasításokat közlöm, mert a teljes program terjedelme meghaladná a 20 oldalt is.

```
c=100 #Hányszor fusson le a Bootstrap ciklus
ev=8 #Hány év adatait tartalmazza a kifutási háromszög

###IBNR BECSLÉSI MŐDSZEREK

#LÁNC LÉTRA

LancLetra<-function(kifut2)
{Cj=c()
k=dim(kifut2)[1]-1
for (i in 1:(dim(kifut2)[2]-1))
{Cj[i]=sum(as.numeric(kifut2[1:k,i+1]))/sum(as.numeric(kifut2[1:k,i]))
if (sum(as.numeric(kifut2[1:k,i+1]))==0) Cj[i]=0
k=k-1}
LL=kifut2
for (i in 2:dim(kifut2)[1])
{for (j in (dim(kifut2)[2]-i+2):dim(kifut2)[2])
{LL[i,j]=LL[i,j-1]*Cj[j-1]}}
return(LL)}

#JÉGHEGY 1 (a kifutási háromszög első során alapuló)

Jeghegy1<-function(kifut2)
{D1=c()
for (i in 1:(dim(kifut2)[2]-1))
{D1[i]=kifut2[1,i]/kifut2[1,dim(kifut2)[2]]}
J1=c()
for (i in 1:(dim(kifut2)[1]-1))
{J1[i]=kifut2[i+1,dim(kifut2)[2]-i]/D1[length(D1)-i+1]}
return(J1)}

#JÉGHEGY 2 (a hányadosok átlagán alapuló)

Jeghegy2<-function(kifut2)
{Da=rep(0,dim(kifut2)[2]-1)
J2=c()
s=2
k=1
for (j in (dim(kifut2)[2]-1):1)
{while (k<s)
{if (k==1) {Da[j]=Da[j]+kifut2[k,j]/kifut2[1,dim(kifut2)[2]]}
else {Da[j]=Da[j]+kifut2[k,j]/J2[k-1]}
k=k+1}
Da[j]=Da[j]/(k-1)
J2[s-1]=kifut2[k,j]/Da[j]
k=1
s=s+1}
return(J2)}

#JÉGHEGY 3 (a hányadosok minimumán alapuló)

Jeghegy3<-function(kifut2)
```

```
{Dm=rep(10,dim(kifut2)[2]-1)
J3=c()
s=2
k=1
for (j in (dim(kifut2)[2]-1):1)
{while (k<s)
{if (k==1) {if (Dm[j]>kifut2[k,j]/kifut2[k,dim(kifut2)[2]])
{Dm[j]=kifut2[k,j]/kifut2[k,dim(kifut2)[2]]}}
else {if (Dm[j]>kifut2[k,j]/J3[k-1]) {Dm[j]=kifut2[k,j]/J3[k-1]} }
k=k+1}
J3[k-1]=kifut2[k,j]/Dm[j]
k=1
s=s+1}
return(J3)}

#LÁNCSZEM HÁNYADOS 1 (a kifutási háromszög első során alapuló)

Lancszem1<-function(kifut2)
{C1=c()
for (i in 1:(dim(kifut2)[2]-1))
{C1[i]=kifut2[1,i+1]/kifut2[1,i]}
L1=kifut2
for (i in 2:dim(kifut2)[1])
{for (j in (dim(kifut2)[2]-i+2):dim(kifut2)[2])
{L1[i,j]=L1[i,j-1]*C1[j-1]} }
return(L1)}

#LÁNCSZEM HÁNYADOS 2 (a hányadosok átlagán alapuló)

Lancszem2<-function(kifut2)
{Ca=rep(0,dim(kifut2)[2]-1)
s=2
k=1
for (j in (dim(kifut2)[2]-1):1)
{while (k<s)
{Ca[j]=Ca[j]+kifut2[k,j+1]/kifut2[k,j]
k=k+1 }
Ca[j]=Ca[j]/(k-1)
k=1
s=s+1 }
L2=kifut2
for (i in 2:dim(kifut2)[1])
{for (j in (dim(kifut2)[2]-i+2):dim(kifut2)[2])
{L2[i,j]=L2[i,j-1]*Ca[j-1]} }
return(L2)}

#LÁNCSZEM HÁNYADOS 3 (a hányadosok maximumán alapuló)

Lancszem3<-function(kifut2)
{Cm=rep(0,dim(kifut2)[2]-1)
s=2
k=1
for (j in (dim(kifut2)[2]-1):1)
{while (k<s)
{if (Cm[j]<kifut2[k,j+1]/kifut2[k,(j)]) {Cm[j]=kifut2[k,j+1]/kifut2[k,j]}
k=k+1}
k=1
s=s+1}
L3=kifut2
for (i in 2:dim(kifut2)[1])
{for (j in (dim(kifut2)[2]-i+2):dim(kifut2)[2])
{L3[i,j]=L3[i,j-1]*Cm[j-1]} }
return(L3)}

###INFLÁLÁS 2001-RE

Inflalas2001re<-function(kifut2)
{for (i in 1:(dim(kifut2)[1]-1)) #Hogy ne legyen kumulálva
{for (j in (dim(kifut2)[2]-i+1):2)
{kifut2[i,j]=kifut2[i,j]-kifut2[i,j-1]} }
for (i in 1:(dim(kifut2)[1]-1)) #Inflálás 2001-re
{for (j in 1:(dim(kifut2)[2]-i))
{kifut2[i,j]=kifut2[i,j]*Infl2001[j+i-1,3]}}
```

```
for (i in 1:(dim(kifut2)[1]-1)) #Hogy kumulálva legyen
{for (j in 2:(dim(kifut2)[2]-i+1))
{kifut2[i,j]=kifut2[i,j]+kifut2[i,j-1]} }
return(kifut2)}

###INFLÁLÁS 2001 4. NEGYEDÉVRE

Inflalas200104re<-function(kifut2)
{for (i in 1:(dim(kifut2)[1]-1)) #Hogy ne legyen kumulálva
{for (j in (dim(kifut2)[2]-i+1):2)
{kifut2[i,j]=kifut2[i,j]-kifut2[i,j-1]} }
for (i in 1:(dim(kifut2)[1]-1)) #Inflálás 2001 4. negyedévre
{for (j in 1:(dim(kifut2)[2]-i))
{kifut2[i,j]=kifut2[i,j]*Infl200104[j+i-1,3]}}
for (i in 1:(dim(kifut2)[1]-1)) #Hogy kumulálva legyen
{for (j in 2:(dim(kifut2)[2]-i+1))
{kifut2[i,j]=kifut2[i,j]+kifut2[i,j-1]} }
return(kifut2)}

###INFLÁLÁS ADOTT ÉVRE ELŐRE

Inflalas<-function(Becsles)
{for (i in 1:(dim(kifut2)[1])) #Hogy ne legyen kumulálva
{for (j in (dim(kifut2)[2]):2)
{Becsles[i,j]=Becsles[i,j]-Becsles[i,j-1]}}
for (i in 2:dim(kifut2)[1]) #Inflálás adott évre előre
{for (j in (dim(kifut2)[2]-i+2):dim(kifut2)[2])
{Becsles[i,j]=Becsles[i,j]*Infl[j-1,3]} }
for (i in 1:(dim(kifut2)[1])) #Hogy kumulálva legyen
{for (j in 2:(dim(kifut2)[2]))
{Becsles[i,j]=Becsles[i,j]+Becsles[i,j-1]}}
return(Becsles)}

###INFLÁLÁS ADOTT NEGYEDÉVRE ELŐRE

Inflalasnegyed<-function(Becsles)
{for (i in 1:(dim(kifut2)[1])) #Hogy ne legyen kumulálva
{for (j in (dim(kifut2)[2]):2)
{Becsles[i,j]=Becsles[i,j]-Becsles[i,j-1]}}
for (i in 2:dim(kifut2)[1]) #Inflálás adott negyedévre előre
{for (j in (dim(kifut2)[2]-i+2):dim(kifut2)[2])
{Becsles[i,j]=Becsles[i,j]*Inflnegyed[j-1,3]}}
for (i in 1:(dim(kifut2)[1])) #Hogy kumulálva legyen
{for (j in 2:dim(kifut2)[2])
{Becsles[i,j]=Becsles[i,j]+Becsles[i,j-1]}}
return(Becsles)}

###ADATOK BEOLVASÁSA

setwd ("c:/diploma/ibnr")
db <- odbcConnectAccess("Tablak_jav.mdb")
adat <- sqlFetch(db, "Szerzodesek")
adat2 <- sqlFetch(db, "Karok_raford_jav")
adat3 <- sqlFetch(db, "Karok_raford(negyed)_jav")
adat4 <- sqlFetch(db, "Karok_kifiz_jav")
adat5 <- sqlFetch(db, "Karok_kifiz(negyed)_jav")
Infl2001 <- sqlFetch(db, "Infl2001")
Infl200104 <- sqlFetch(db, "Infl200104")
Infl <- sqlFetch(db, "Infl")
Inflnegyed <- sqlFetch(db, "Inflnegyed")

###SZÁMMÁ KONVERTÁLÁS, mert az Accesből nem számként olvassa be

for (j in 1:dim(adat2)[2])
{adat2[,j]=as.numeric(adat2[,j])}
for (j in 1:dim(adat3)[2])
{adat3[,j]=as.numeric(adat3[,j])}
for (j in 1:dim(adat4)[2])
{adat4[,j]=as.numeric(adat4[,j])}
for (j in 1:dim(adat5)[2])
{adat5[,j]=as.numeric(adat5[,j])}
for (j in 1:dim(Infl2001)[2])
{Infl2001[,j]=as.numeric(Infl2001[,j])}
```

```
for (j in 1:dim(Infl200104)[2])
{Infl200104[,j]=as.numeric(Infl200104[,j])}
for (j in 1:dim(Infl)[2])
{Infl[,j]=as.numeric(Infl[,j])}
for (j in 1:dim(Inflnegyed)[2])
{Inflnegyed[,j]=as.numeric(Inflnegyed[,j])}

###AZONOSÍTÓ SZERINTI NÖVEKVŐ SORBA RENDEZÉS

adat=adat[order(adat[,1]),]
adat2=adat2[order(adat2[,1],adat2[,12]),]
adat3=adat3[order(adat3[,1],adat3[,36]),]
adat4=adat4[order(adat4[,1],adat2[,12]),]
adat5=adat5[order(adat5[,1],adat3[,36]),]

###ÜRES VEKTOROK LÉTREHOZÁSA az eredmények tárolására

###BOOTSTRAP CIKLUS

for (b in 1:c)
{

#SZERZŐDÉSEK KIVÁLASZTÁSA

azon = sort(sample(adat[,1],replace=TRUE)) #Visszatevéses mintavétel

#KÁROK KIVÁLASZTÁSA

l=dim(adat2)[1]
k=1
ism=0
a=c() #A károk "széthúzása" az azonosítójának megfelelő sorszámú helyre, így subset
for (i in 1:length(azon)) #függvénnyel kiválaszthatóak a kívánt károk az adattáblából
{if (i>1)
{if (azon[i]==azon[i-1])
{ism=ism+1
 k=max(k-j+1,1) }
if (azon[i]!=azon[i-1]) ism=0 }
j=0
while (azon[i]>=adat2[k,1] & k<=l)
{if (azon[i]==adat2[k,1])
{a[ism*l+k]=adat2[k,1]
 j=j+1}
k=k+1}
k=max(k-1,1)}

s=ceiling(length(a)/l)
minta1=subset(adat2,adat2[,1]==0) #Üres data.frame
for (i in 1:s)
{m=subset(adat2,adat2[,1]==a[((i-1)*l+1):(i*l)])
minta1=rbind(minta1,m)}
s=ceiling(length(a)/l)
minta2=subset(adat3,adat3[,1]==0) #Üres data.frame
for (i in 1:s)
{m=subset(adat3,adat3[,1]==a[((i-1)*l+1):(i*l)])
minta2=rbind(minta2,m)}
s=ceiling(length(a)/l)
minta3=subset(adat4,adat4[,1]==0) #Üres data.frame
for (i in 1:s)
{m=subset(adat4,adat4[,1]==a[((i-1)*l+1):(i*l)])
minta3=rbind(minta3,m)}
s=ceiling(length(a)/l)
minta4=subset(adat5,adat5[,1]==0) #Üres data.frame
for (i in 1:s)
{m=subset(adat5,adat5[,1]==a[((i-1)*l+1):(i*l)])
minta4=rbind(minta4,m)}

###H3: KIFIZETÉS, KIFIZETÉS ÉVE SZERINT

K=aggregate(minta3,list(minta3[,2]),sum)

#KIFUTÁSI HÁROMSZÖG
```

```
kifut=matrix(0,ev,ev)
for (i in 1:dim(K)[1])
{kifut[i,]=as.numeric(K[i,5:12])}
kifut2=matrix(0,ev,ev) #Az értékek balra tolása (a háromszög már kumulált)
for (i in 1:ev)
{for (j in 1:(ev-i+1))
{kifut2[i,j]=kifut[i,j+i-1]}}
kifut2=matrix(as.numeric(kifut2),nr=dim(kifut)[1])

#BECSLÉSI MÓDSZEREK

LL=LancLetra(kifut2)[2:ev,ev]
J1=Jeghegy1(kifut2)
J2=Jeghegy2(kifut2)
J3=Jeghegy3(kifut2)
L1=Lancszem1(kifut2)[2:ev,ev]
L2=Lancszem2(kifut2)[2:ev,ev]
L3=Lancszem3(kifut2)[2:ev,ev]
v3BLL[,b]=LL
v3BJ1[,b]=J1
v3BJ2[,b]=J2
v3BJ3[,b]=J3
v3BL1[,b]=L1
v3BL2[,b]=L2
v3BL3[,b]=L3

# A BECSLÉS ELTÉRÉSE A 2008-AS ÉRTÉKEKTŐL

atlo=0
for (i in 1:8)
{atlo=atlo+kifut2[i,9-i]}
inc=sum(as.numeric(K[,13]))
teteles=sum(as.numeric(K[,14]))
valos_e=inc-atlo

v3HabsLL[b]=(kifut2[1,8]+sum(LL)-atlo)/(valos_e)-1
v3HabsJ1[b]=(kifut2[1,8]+sum(J1)-atlo)/(valos_e)-1
v3HabsJ2[b]=(kifut2[1,8]+sum(J2)-atlo)/(valos_e)-1
v3HabsJ3[b]=(kifut2[1,8]+sum(J3)-atlo)/(valos_e)-1
v3HabsL1[b]=(kifut2[1,8]+sum(L1)-atlo)/(valos_e)-1
v3HabsL2[b]=(kifut2[1,8]+sum(L2)-atlo)/(valos_e)-1
v3HabsL3[b]=(kifut2[1,8]+sum(L3)-atlo)/(valos_e)-1
v3HnegyLL[b]=((kifut2[1,8]+sum(LL)-atlo)/(valos_e)-1)^2
v3HnegyJ1[b]=((kifut2[1,8]+sum(J1)-atlo)/(valos_e)-1)^2
v3HnegyJ2[b]=((kifut2[1,8]+sum(J2)-atlo)/(valos_e)-1)^2
v3HnegyJ3[b]=((kifut2[1,8]+sum(J3)-atlo)/(valos_e)-1)^2
v3HnegyL1[b]=((kifut2[1,8]+sum(L1)-atlo)/(valos_e)-1)^2
v3HnegyL2[b]=((kifut2[1,8]+sum(L2)-atlo)/(valos_e)-1)^2
v3HnegyL3[b]=((kifut2[1,8]+sum(L3)-atlo)/(valos_e)-1)^2
v3JovokifLL[b]=kifut2[1,8]+sum(LL)
v3JovokifJ1[b]=kifut2[1,8]+sum(J1)
v3JovokifJ2[b]=kifut2[1,8]+sum(J2)
v3JovokifJ3[b]=kifut2[1,8]+sum(J3)
v3JovokifL1[b]=kifut2[1,8]+sum(L1)
v3JovokifL2[b]=kifut2[1,8]+sum(L2)
v3JovokifL3[b]=kifut2[1,8]+sum(L3)
v3Incurr[b]=inc


###H4: KIFIZETÉS, KIFIZETÉS NEGYEDÉVE SZERINT

K=aggregate(minta4,list(minta4[,2]),sum)

#KIFUTÁSI HÁROMSZÖG

#BECSLÉSI MÓDSZEREK

# A BECSLÉS ELTÉRÉSE A 2008-AS ÉRTÉKEKTŐL


###H1: KIFIZETÉS+TARTALÉKVÁLTOZÁS ÖSSZEGE, BEJELENTÉS ÉVE SZERINT

K=aggregate(minta1,list(minta1[,2],minta1[,3]),sum)
```

```
#KIFUTÁSI HÁROMSZÖG

#BECSLÉSI MÓDSZEREK

# A BECSLÉS ELTÉRÉSE A 2008-AS ÉRTÉKEKTŐL


###H2: KIFIZETÉS+TARTALÉKVÁLTOZÁS ÖSSZEGE, BEJELENTÉS NEGYEDÉVE SZERINT

K=aggregate(minta2,list(minta2[,2],minta2[,3]),sum)

#KIFUTÁSI HÁROMSZÖG

#BECSLÉSI MÓDSZEREK

# A BECSLÉS ELTÉRÉSE A 2008-AS ÉRTÉKEKTŐL


###H5: KIFIZETÉS+TARTALÉKVÁLTOZÁS ÖSSZEGE, KIFIZETÉS ÉVE SZERINT

K=aggregate(minta1,list(minta1[,2]),sum)

#KIFUTÁSI HÁROMSZÖG

#BECSLÉSI MÓDSZEREK

# A BECSLÉS ELTÉRÉSE A 2008-AS ÉRTÉKEKTŐL


###H6: KIFIZETÉS+TARTALÉKVÁLTOZÁS ÖSSZEGE, KIFIZETÉS NEGYEDÉVE SZERINT

K=aggregate(minta2,list(minta2[,2]),sum)

#KIFUTÁSI HÁROMSZÖG

#BECSLÉSI MÓDSZEREK

# A BECSLÉS ELTÉRÉSE A 2008-AS ÉRTÉKEKTŐL



###H3: KIFIZETÉS+INFLÁCIÓ, KIFIZETÉS ÉVE SZERINT

K=aggregate(minta3,list(minta3[,2]),sum)

#KIFUTÁSI HÁROMSZÖG

kifut2=Inflalas2001re(kifut2) #INFLÁLÁS 2001-RE

#BECSLÉSI MÓDSZEREK

# A BECSLÉS ELTÉRÉSE A 2008-AS ÉRTÉKEKTŐL


###H4: KIFIZETÉS+INFLÁCIÓ, KIFIZETÉS NEGYEDÉVE SZERINT

K=aggregate(minta4,list(minta4[,2]),sum)

#KIFUTÁSI HÁROMSZÖG

kifut2=Inflalas200104re(kifut2) #INFLÁLÁS 2001 4. NEGYEDÉVÉRE

#BECSLÉSI MÓDSZEREK

# A BECSLÉS ELTÉRÉSE A 2008-AS ÉRTÉKEKTŐL


#MÜNCHENI LÁNC LÉTRA - ÉVES

K=aggregate(minta3,list(minta3[,2],minta3[,3]),sum) #bejelentés éve szerinti kifizetés-háromszög

#KIFUTÁSI HÁROMSZÖG (Paid)
```

```
#KIFUTÁSI HÁROMSZÖG (Incurred)

#BECSLÉSI MÓDSZER

MCLEP=as.matrix(MunichChainLadder(P, I,est.sigmaP = "log-linear", est.sigmaI = "log-linear",
tailP=FALSE, tailI=FALSE)$MCLPaid)[2:8,8]
MCLEI=as.matrix(MunichChainLadder(P, I,est.sigmaP = "log-linear", est.sigmaI = "log-linear",
tailP=FALSE, tailI=FALSE)$MCLIncurred)[2:8,8]
BMCLEP[,b]=MCLEP
BMCLEI[,b]=MCLEI
A BECSLÉS ELTÉRÉSE A 2008-AS ÉRTÉKEKTŐL


#MÜNCHENI LÁNC LÉTRA - NEGYEDÉVES

K=aggregate(minta4,list(minta4[,2],minta4[,3]),sum) #bejelentés éve szerinti kifizetés-háromszög

#KIFUTÁSI HÁROMSZÖG (Paid)

#KIFUTÁSI HÁROMSZÖG (Incurred)

#BECSLÉSI MÓDSZER

MCLNEP=as.matrix(MunichChainLadder(P, I,est.sigmaP = "log-linear", est.sigmaI = "log-linear",
tailP=FALSE, tailI=FALSE)$MCLPaid)[2:32,32]
MCLNEI=as.matrix(MunichChainLadder(P, I,est.sigmaP = "log-linear", est.sigmaI = "log-linear",
tailP=FALSE, tailI=FALSE)$MCLIncurred)[2:32,32]
BMCLNEP[,b]=MCLNEP
BMCLNEI[,b]=MCLNEI
# A BECSLÉS ELTÉRÉSE A 2008-AS ÉRTÉKEKTŐL


} #Bootsrap ciklus vége

### EREDMÉNYEK ÖSSZEGZÉSE, KIMENTÉSE

v1Habs_atl=c(mean(v1HabsLL), mean(v1HabsJ1), mean(v1HabsJ2), mean(v1HabsJ3),
mean(v1HabsL1), mean(v1HabsL2), mean(v1HabsL3))
v1Hnegy_atl=c(mean(v1HnegyLL), mean(v1HnegyJ1), mean(v1HnegyJ2), mean(v1HnegyJ3),
mean(v1HnegyL1), mean(v1HnegyL2), mean(v1HnegyL3))
v1Habs_med=c(median(v1HabsLL), median(v1HabsJ1), median(v1HabsJ2), median(v1HabsJ3),
median(v1HabsL1), median(v1HabsL2), median(v1HabsL3))
v1Hnegy_med=c(median(v1HnegyLL), median(v1HnegyJ1), median(v1HnegyJ2),
median(v1HnegyJ3), median(v1HnegyL1), median(v1HnegyL2), median(v1HnegyL3))
v1Habs_min=c(min(v1HabsLL), min(v1HabsJ1), min(v1HabsJ2), min(v1HabsJ3),
min(v1HabsL1), min(v1HabsL2), min(v1HabsL3))
v1Hnegy_min=c(min(v1HnegyLL), min(v1HnegyJ1), min(v1HnegyJ2), min(v1HnegyJ3),
min(v1HnegyL1), min(v1HnegyL2), min(v1HnegyL3))
v1Habs_max=c(max(v1HabsLL), max(v1HabsJ1), max(v1HabsJ2), max(v1HabsJ3),
max(v1HabsL1), max(v1HabsL2), max(v1HabsL3))
v1Hnegy_max=c(max(v1HnegyLL), max(v1HnegyJ1), max(v1HnegyJ2), max(v1HnegyJ3),
max(v1HnegyL1), max(v1HnegyL2), max(v1HnegyL3))
v1Habs_kvan5=c(quantile(v1HabsLL,0.05), quantile(v1HabsJ1,0.05), quantile(v1HabsJ2,0.05),
quantile(v1HabsJ3,0.05), quantile(v1HabsL1,0.05), quantile(v1HabsL2,0.05), quantile(v1HabsL3,0.05))
v1Hnegy_kvan5=c(quantile(v1HnegyLL,0.05), quantile(v1HnegyJ1,0.05), quantile(v1HnegyJ2,0.05),
quantile(v1HnegyJ3,0.05), quantile(v1HnegyL1,0.05), quantile(v1HnegyL2,0.05), quantile(v1HnegyL3,0.05))
v1Habs_kvan95=c(quantile(v1HabsLL,0.95), quantile(v1HabsJ1,0.95), quantile(v1HabsJ2,0.95),
quantile(v1HabsJ3,0.95), quantile(v1HabsL1,0.95), quantile(v1HabsL2,0.95), quantile(v1HabsL3,0.95))
v1Hnegy_kvan95=c(quantile(v1HnegyLL,0.95), quantile(v1HnegyJ1,0.95), quantile(v1HnegyJ2,0.95),
quantile(v1HnegyJ3,0.95), quantile(v1HnegyL1,0.95), quantile(v1HnegyL2,0.95), quantile(v1HnegyL3,0.95))
v1Jovokif=c(mean(v1JovokifLL),mean(v1JovokifJ1),mean(v1JovokifJ2),mean(v1JovokifJ3),
mean(v1JovokifL1),mean(v1JovokifL2),mean(v1JovokifL3))
v1Incurred=mean(v1Incurr)
HBe=data.frame(v1Habs_atl, v1Hnegy_atl, v1Habs_med, v1Hnegy_med, v1Habs_min, v1Hnegy_min,
v1Habs_max, v1Hnegy_max, v1Habs_kvan5, v1Hnegy_kvan5, v1Habs_kvan95, v1Hnegy_kvan95,
v1Jovokif, v1Incurred, row.names = c("LL", "J1", "J2", "J3", "L1", "L2", "L3"))
write(t(HBe),"Eltérés_Be.txt",ncolumns =14)
```

$\vdots$