Szabályozás és hallgatólagos összejátszás a lineáris városban

Diplomamunka

Írta: Sásdy Gabriella

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:
Kovács Gergely, főiskolai docens
Operációkutatási Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2009.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Először áttekintjük Hotelling 1929-es modelljét, amelyben két cég [0,1] intervallum mentén történő termékdifferenciálásával foglalkozik.

Utána áttérünk a Hotelling-féle lineáris városban történő hallgatólagos összejátszás vizsgálatára kvadratikus utazási költség esetén: először a két cég kiválasztja elhelyezkedését az intervallumon belül, ami ezután örökre rögzített marad, majd ezután végtelen ideig játsszák a többfordulós árválasztó játékot. Belátjuk, hogy az árakban és az elhelyezkedésekben történő teljes összejátszás azt eredményezni, hogy a cégek az intervallumon belül az $\frac{1}{4}$-ben és a $\frac{3}{4}$-ben helyezkednek el.

Végül egy olyan modellt konstruálunk, amelyben megvizsgáljuk annak hatását, amikor egy szabályozó hatalom felső árkorlátot határoz meg az árakban az elhelyezkedésekben történő összejátszás során létrejött egyensúly esetén.

Ekkor azt tapasztaljuk, hogy enyhe szabályozásnak nincs hatása az elhelyezkedések kiválasztására, így a cégek továbbra is $\frac{1}{4}$-ben és $\frac{3}{4}$-ben helyezkednek el. Azonban, ahogy a felső árkorlát csökken, azaz a szabályozás szigorúbbá válik, az összejátszás során létrejött egyensúlyok lehetséges csoportja kiterjed az $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ intervallumra.

A szabályozás jólétre gyakorolt hatása negatív azáltal, hogy a szabályozás hajlamos a cégeket arra késztetni, hogy elmozduljanak a jólét-maximalizáló elhelyezkedésből.

A konklúzió az, hogy lehet, hogy nem kívánatos eredményre vezet a hallgatólagos összejátszás szabályozása.

2. Hotelling lineáris városa

2.1. Elhelyezkedési modellek

Az egyes termékfajták lendületesebben versenyeznek a közeli helyettesítő termékfajtákkal, mint azokkal, amelyeket a fogyasztók kevésbé közeli helyettesítőknek tekintenek. A fogyasztók bizonyos termékfajtákat jobb helyettesítőknek tekintenek, mint másokat. Egyes termékfajták például rendelkeznek olyan közös jellemzővel, amely-
lyel mások nem: néhány gabonapehely-fajta cukorbevonattal készül, míg mások nem. Vagyis minden egyes termékfajta „elhelyezkedik" valahol a termékjellemzők terében. Egy másik példa lehet, hogy az egymáshoz közeli boltokban árult termékek egymás közeli helyettesítői. Vagyis minden egyes vállalat, üzlet a földrajzi tér egy pontján helyezkedik el.

Az elhelyezkedési (térbeli) modellek (location (spartial)models) a monopolisztikus verseny olyan modelljei, amelyekben a fogyasztók az egyes vállalatok termékeire úgy tekintenek, mint amelyek egy adott ponton helyezkednek el a földrajzi térben, vagy a termékek (jellemzőinek) terében. Minél közelebb van egymáshoz két termék a földrajzi térben, vagy a jellemzők terében, annál jobban helyettesítik egymást. Ezekben a modellekben a fogyasztók szintén a földrajzi térben vagy a jellemzők terében helyezkednek el. A fogyasztók számára drágább az otthonuktól távolabb eső üzletben vásárolni, illetve kisebb örömöt szereznek számukra azok a termékek, amelyek jellemzői eltérnek a számukra ideálistól. Mivel a vállalatok vagy a termékek csak a hozzájuk közel eső társaikkal versenyeznek közvetlenül, mindegyik rendelkezik némi piaci erőfölénnyel. A piaci erőfölény a fogyasztók azon preferenciájából származik, hogy szívesebben vásárolnak a közelebbi vállalattól, illetve szívesebben veszik meg kedvenc terméküket.

A termékek vertikális megkülönböztetése a termékek minősége közötti megkülönböztetés, azon alapul, hogy azonos árakon a fogyasztók a magasabb minőségű terméket veszik.

A termékek horizontális megkülönböztetése az eltérő fogyasztói ízlésen vagy az eltérő földrajzi elhelyezkedésen alapuló megkülönböztetés, ilyenkor azonos árak esetén is különböző terméket vehetnek a fogyasztók.

A következőkben megvizsgáljuk az eredeti elhelyezkedési modellt.

2.2. A lineáris város

A horizontális differenciálás legegyszerűbb modelljét – a lineáris várost – Hotelling konstruálta meg 1929-ben [7]. Modelljében a vállalatok helyválasztási és árképzési viselkedését magyarázza. Bár ő a földrajzi térre koncentrált, modellje alkalmas a verseny tanulmányozására, abban a megközelítésben, amikor a termékeket a termékek vagy a jellemzők terében helyezzük el. Hotelling elhelyezkedési (térbeli) modelljében a termékek csak egy dimenzióban különböznek egymástól, például az őket árusító üzletek elhelyezkedésében. Lancaster [12] és mások azonban megmutatták, hogy ez a modell kiterjeszthető olyan termékek vizsgálatára, amelyek több dimenzióban is különböznek egymástól.

A modellben adott két cég: A és B, amelyek egy egység hosszú intervallum mentén árusítják egyforma termékeiket. A fogyasztók egyenletesen oszlanak szét az intervallum mentén. Egy árucikk megvásárlása esetén a termék árán felül a távolság függvényében a fogyasztóknak t ($t > 0$) utazási költséget is kell fizetniük. A modell általános esetében a cégek egy két fordulós játékot játszanak. Az első fordulóban a cégek (azonos időpontban) megválasztják az intervallumon belül az elhelyezkedésüket. Az A cég az intervallum bal végpontjától a távolságra, a B cég pedig az intervallum jobb végpontjától b távolságra helyezkedik el. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezzük, hogy $1 - b \geq a$ (azaz a B cég jobbra, vagy pedig ugyanabban a pontban helyezkedik el, mint az A). A második fordulóban (azonos időpontban) a cégek megállapítják áraikat (mindkét cég $p_i \in [0, \infty)$ árat választ). A fogyasztók hasznossági függvénye a következő:

$$U = R - p - t|x - y|,$$

ahol az x-ben elhelyezkedő fogyasztók p áron vásárolnak egy y-ban elhelyezkedő cégtől, és a fogyasztók rezervációs ára R (a rezervációs ár az az ár, amennyit egy fogyasztó még éppen hajlandó fizetni egy termékért), feltételezzük, hogy a piac teljesen lefedett (azaz R, a rezervációs ár vagy a fogyasztókból származó teljes többlet elég nagy) és feltesszük, hogy minden fogyasztó pontosan egy terméket vásárol. Az ár és az utazási költség együtt megadja az úgynevezett általánosított árat. A fentiek alapján minden fogyasztó attól a cégtől fog pontosan egy terméket vásárolni, amelyik számára alacsonyabb általánosított árat biztosít. Abban az esetben, ha az egyenes egy pontjában elhelyezkedő fogyasztók számára mindkét cég egyforma általánosított áron kínálja termékét, akkor feltételezzük, hogy a cégek egyenlő mértékben osztoznak a fogyasztókon.

A Hotelling-modell a különböző termékek közti differenciálás különböző fokait engedi meg. Az egyenes mentén egymáshoz közelebb elhelyezkedő termékek közelebbi helyettesítői egymásnak. Ez eltér Chamberlin [2] monopolisztikus versennyel foglalkozó modelljétől, amelyben a szimmetria feltételezése azt jelenti, hogy minden termék minden termékkel egyforma mértékben konkurens.

Hotelling modellje sok tekintetben nagyon előremutató vol, azonban lineáris utazási költséget alkalmazva nem volt képes teljes egészében megértetni a rendszer működését, hibásan következtetett a minimális differenciálás alapelvére, amely szerint egyensúlyban a cégek viselkedése azonos. Ha az utazás költség függvénye lineáris, akkor a keresleti függvény nem lesz folytonos, ugyanis a második üzlettől jobbra eső fogyasztók a következőket hasonlítják össze:

$$p_1 + t(x - a) \approx p_2 + t(x - (1 - b)),$$

azaz

$$p_1 \approx p_2 - t(1 - a - b))$$

az egyensúlyi egyenlőség. Ha ezen az első üzlet ε-nal csökkent, akkor a második üzlet összes tőle jobbra lakó vevője átpártol, azaz a keresleti függvény az árban nem folytonos. A kvadratikus utazási költség döntő tulajdonsága az, hogy a fogyasztóknak csak egyetlen pontban elhelyezkedő tömege számára lesz mindegy, hogy a két cég közül melyiket választja (indifferens pont). Így nincs nem folytonos ugrás a keresletben, ahogy az árak változnak, ezért a profit függvény folytonos és jól viselkedik.

D'Aspremont, Gabszewicz és Thisse [1] felismerte Hotelling elméletében a hibát (1979), miszerint ha a cégek túl közel helyezkednek el az egyenes közepéhez, akkor nem fog a második forduló során tiszta stratégiájú Nash-egyensúly kialakulni az árakban (Nash-egyensúlyi helyzet olyan helyzetet jelent, amikor egyik félnek sem éri meg változtatni stratégiáján, ha a másik fél nem változtat). A cégek közelsége azt jelenti, hogy nem kell az áraknak nagyon leesnie ahhoz, hogy megszerezzék a teljes piacot, és így a cégek profit függvénye nem lesz folytonos az árak változásában. Dasgupta és Maskin 1986-ban [4] bebizonyította, hogy abban az esetben, ha $R > t$, akkor az első fordulóban bármely elhelyezkedés-párt választva mindig létezik a lineáris városban lineáris utazási költség esetén kevert stratégiájú Nash-egyensúly a második fordulóban. (Kevert stratégia esetén nem egyértelmű a választás, hanem a lehetőségek bizonyos valószínűségekkel történő választását jelenti.)

D'Aspremont, Gabszewicz és Thisse kvadratikus utazási költség alkalmazásával módosította Hotelling lineáris városának modelljét, így egy x-ben elhelyezkedő fogyasztó hasznossága, aki az y-ban elhelyezkedő cégtől vásárol a következő:

$$U = R - p - t|x - y|^2.$$

2.3. Kvadratikus utazási költség esetén az indifferens pont kiszámítása

$$p_1 + t(x - a)^2 = p_2 + t(x - (1 - b))^2,$$

azaz

$$p_1 + tx^2 + ta^2 - 2tax = p_2 + tx^2 + t(1 - b)^2 - 2t(1 - b)x$$

$$2t(1 - b - a)x = p_2 - p_1 + t((1 - b)^2 - a^2)$$

$$x = \frac{p_2 - p_1}{2t(1 - a - b)} + \frac{(1 - b) + a}{2}$$

A keresleti függvény az adott termék keresletének mennyiségét fejezi ki a termék árának függvényében. Jele: D.

$$D_1(p_1,p_2) = x = \frac{p_2 - p_1}{2t(1-b-a)} + \frac{1-b-a}{2} + a,$$

$$D_2(p_1,p_2) = 1 - x = \frac{p_1 - p_2}{2t(1-b-a)} + \frac{1-a-b}{2} + b$$

és $0 \leq D_1,\ D_2 \leq 1$.

Megjegyzés: A fenti képletből következik, hogyha $p_1 = p_2$, akkor az első üzlet megkapja a hátsó udvarát (a-t) és a közös sáv felét ($\frac{1-b-a}{2}$). A kereslet harmadik része az árkülönbségre való érzékenységet mutatja.

Továbbiakban tegyük fel, hogy minden egyes termék elkészítésének költsége c a darabszámtól függetlenül.

Ebben az esetben a nyereségfüggvény a következő:

$$\Pi_1 = (p_1 - c)\Big(\frac{p_2 - p_1}{2t(1-a-b)} + \frac{1-b+a}{2}\Big),$$

$$\Pi_2 = (p_2 - c)\Big(\frac{p_1 - p_2}{2t(1-a-b)} + \frac{1-a+b}{2}\Big).$$

2.4. Az optimális árak meghatározása az elsőrendű feltételek segítségével

$$0 = \frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = \frac{p_2 - p_1}{2t(1-a-b)} + \frac{1-b+a}{2} - \frac{p_1 - c}{2t(1-a-b)} \tag{1}$$

$$0 = \frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = \frac{p_1 - p_2}{2t(1-a-b)} + \frac{1-a+b}{2} - \frac{p_2 - c}{2t(1-a-b)} \tag{2}$$

Az (1) és a (2) egyenletet összeadva adódik, hogy:

$$1 - \frac{p_1 + p_2 - 2c}{2t(1-a-b)} = 0.$$

Beszorozva az egyenlet mindkét oldalát $2t(1-a-b)$-vel kapjuk, hogy

$$2t(1-a-b) + 2c = p_1 + p_2. \tag{3}$$

Ha az (1) egyenletből levonjuk a (2) egyenletet, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{2(p_2-p_1)}{2t(1-a-b)}+a-b+\frac{p_2-p_1}{2t(1-a-b)}=0,$$

ezt beszorozva $2t(1-a-b)$-vel, majd átrendezve adódik, hogy:

$$p_2-p_1=\frac{2}{3}t(b-a)(1-a-b). \tag{4}$$

Összeadva a (3) és (4) egyenletet:

$$p_2^*(a,b)=c+(1-a-b)t(1+\frac{b-a}{3})$$

$$p_1^*(a,b)=c+(1-a-b)t(1+\frac{a-b}{3}).$$

Megjegyzés: ha a két cég azonos helyen van, akkor $p_1=p_2=c$, ez az eset a Bertrand-paradoxont adja.

2.5. A hely (azaz a termék) megválasztása a két fordulós játék első fordulójában

$$\Pi_1(a,b)=(p_1^*(a,b)-c)\cdot D_1(a,b,p_1^*(a,b),p_2^*(a,b))$$

$$\frac{\partial\Pi_1}{\partial a}=\frac{\partial\Pi_1}{\partial p_1}\frac{dp_1}{da}+(p_1-c)(\frac{\partial D_1}{\partial p_2}\frac{dp_2}{da}+\frac{\partial D_1}{\partial a})=$$

$$=(p_1-c)[\frac{1}{2t(1-a-b)}t(-1+\frac{a-b}{3}+(1-a-b)(-\frac{1}{3}))+\frac{1}{2}+\frac{p_2-p_1}{2t(1-a-b)^2}]=$$

$$=(p_1-c)[\frac{-3+a-b-1+a+b+3-3a-3b+2b-2a}{6(1-a-b)}]=$$

$$=(p_1-c)\frac{-1-3a-b}{6(1-a-b)}<0$$

Ebből következik, hogy:

$$a^*=0$$

és hasonlóan kapjuk azt is, hogy

$$b^*=0.$$

Tehát a két cég a város két szélén van, így kerülik el leginkább az árversenyt.

Megjegyzés: Ha a két cég a város két szélén van, akkor speciálisan az egyensúlyi árak:

$$p_1 = p_2 = t + c,$$

valamint az optimális profitok:

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \frac{t}{2}.$$

2.1. Állítás. *Ha $a = 1 - b$, akkor a második forduló tiszta stratégiájú Nash-egyensúlya az árakban: $p_1^* = p_2^* = c$.*

Ha $a < 1 - b$, akkor a második forduló tiszta stratégiájú Nash-egyensúlya az árakban a következő:

$$p_1^* = c + t(1 - a - b)\Big[1 + \frac{b - a}{3}\Big], \tag{5}$$

$$p_2^* = c + t(1 - a - b)\Big[1 + \frac{b - a}{3}\Big]. \tag{6}$$

Ezekből az árakból a következő profit függvény származtatható (ha az A cég elhelyezkedése tetszőleges helyen rögzítve van):

$$\Pi_1 = \frac{t(1 - a - b)[3 + a - b]^2}{18}. \tag{7}$$

Ugyanígy egy hasonló profit függvény adódik a B cég számára is.

2.2. Állítás. *D'Aspremont, Gabszewicz és Thisse-féle maximális differenciálás elve: A kétfordulós játék tiszta stratégiájú részjáték-tökéletes egyensúlya esetén a cégek az egyenes különböző végén helyezkednek el.*

Tirol (1988) [9] kifejtette, hogy két különböző hatás befolyásolja egyidejűleg a cégeket elhelyezkedésük megválasztásában. „A kereslet hatása" arra ösztönzi a cégeket, hogy egymás felé közeledjenek, annak érdekében, hogy növeljék a piaci részesedésüket, a „stratégiai hatás" pedig arra készteti őket, hogy amennyire csak lehetséges, differenciálódjanak (az egyenes mentén távolodjanak egymástól) azért, hogy mérsékeljék az árversenyt, és így emeljék az egyensúlyi árat.

D'Aspremont, Gabszewicz és Thisse Maximális differenciálás elve azt mutatja, hogy kvadratikus utazási költség esetén a „stratégiai hatás" mindig dominánsabb, mint a „kereslet hatása".

3. Ismételt játékok és hallgatólagos összejátszás

3.1. Összejátszás

Jelöljük p_m-mel azt az árat, amit monopol helyzetben választunk. Többfordulós játékban a monopol ár (p_m) hozza a maximális profitot.

- *Ha valaki emeli az árat, akkor kereslete* 0*-vá válik, így új profitja* 0 *lesz.*
- *Ha valaki csökkenti az árat, akkor az ellenfél is csökkent és így kisebb lesz a profitja.*

Az egyensúlyi helyzetet az tartja fenn, hogy ha valaki a rövidtávú nagyobb profit miatt csökkentené az árat, akkor későbbi veszteséget okozó árversenyt indítana el. Továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, hogy a hallgatólagos összejátszás megvalósul-e vagy sem.

3.2. Ismételt játékok

- *jelölje T a játékok számát, ahol $T \in N \cup \infty$,*
- *a játékban két játékos vesz részt,*
- *jelölje p_{it}, p_{jt} a t időszak stratégiáit,*
- *δ diszkontfaktor,*
- *a játék története: $H_t = p_{1,0}, p_{2,0}, ...p_{1,t-1}, p_{2,t-1}$.*

Ilyen feltételek mellett az i-edik játékos nyeresége úgy kapható meg, hogy összegezzük jelenértékben a nyereményeket T-ig:

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t \Pi_i(p_{i,t}, p_{j,t}).$$

3.2.1. Első eset: ha T véges

Visszafele fogjuk vizsgálni az eseteket és indukciót fogunk alkalmazni. $t = T$ esetén $p_{1,T} = p_{2,T} = c$. Ezután úgy járunk el, mintha a $T - 1$ lenne az utolsó periódus, mivel a T-beli történések függetlenek $T - 1$-től. Ekkor $p_{1,T-1} = p_{2,T-1} = c$ lesz az egyensúlyi ár, és így tovább minden korábbi fordulóra.

3.2.2. Második eset: ha $T = +\infty$

Ha két azonos versenyzőről van szó, akkor feltehető, hogy mindketten a piac felét kapják azonos árnál.

3.1. Állítás. *A $p_{i,t} = c$ egyensúly.*

3.2. Állítás. *Tekintsük a következő stratégiát $p_{1,0} = p_{2,0} = p_m$, és amíg az ellenfél nem csökkent, addig $p_{i,t} = p_{p_m}$, de amint csökkent, akkortól $p_{i,t} = c$. Ez a stratégia egyensúlyi, ha $\delta > \frac{1}{2}$. Ekkor $p_{i,t} = p_m$ lesz örökre.*

Bizonyítás. Ha nem térünk el:

$$\frac{\Pi^m}{2}(1 + \delta + \delta^2 + ...) = \frac{\Pi^m}{2}\frac{1}{1-\delta}.$$

Ha eltérünk:

$$\Pi^m + 0 + 0 + ... = \Pi^m.$$

Érdemes eltérni, ha:

$$\Pi^m > \frac{\Pi^m}{2}\frac{1}{1-\delta}$$
$$1 - \delta > \frac{1}{2}$$
$$\delta < \frac{1}{2}$$

□

3.3. Tétel. *(Folk-tétel) Legyen* Π_1 *és* Π_2 *két olyan nyereségszint, hogy* $\Pi^m \geq \Pi_1 + \Pi_2$*, ahol* $\Pi_1, \Pi_2 > 0$*. Ha* δ *elég közel van 1-hez, akkor van olyan kifizetés, hogy egyensúlyi helyzethez tartozik, és a nyereségek* Π_1 *és* Π_2*.*

Bizonyítás. Legyen p az az ár, ami mellett

$$\Pi(p) = \Pi_1 + \Pi_2,$$

továbbá legyen α olyan, hogy

$$\Pi_1 = \alpha\Pi(p),$$

$$\Pi_2 = (1-\alpha)\Pi(p),$$

és legyen $\frac{m}{n}$ az $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ egy közelítése.

A stratégia legyen a következő: az első m periódusban az 1. üzem ára p, a 2. üzemé nagyobb, majd a következő periódusban a 2. üzem ára p és az első nagyobb. Ez ismétlődik a végtelenségig. Ha valaki eltér: akkortól kezdve az ár c. □

3.2.3. Többszereplős piac

Tegyük fel, hogy n egyenlő cég van a piacon. Ekkor a hallgatólagos összejátszás nyeresége:

$$\frac{\Pi^m}{n}(1+\delta+\delta^2+...) = \frac{\Pi^m}{n}\frac{1}{1-\delta}.$$

Ha felrúgja a hallgatólagos összejátszást, ekkor nyeresége:

$$\Pi^m.$$

Érdemes felrúgni, ha:

$$\Pi^m > \frac{\Pi^m}{n}\frac{1}{1-\delta}$$

$$1-\delta > \frac{1}{n}$$

$$\delta < \frac{n-1}{n}$$

Megjegyzés: Tehát megállapítható, hogy a büntetés hatásos, ha $\frac{n-1}{n} < \delta$. Kevés szereplős piacokon az összejátszások életképesebbek.

3.2.4. Az információ hiánya

Két szereplő van, és az egyik cég úgy dönt, hogy kiugrik az összejátszásból, akkor a másik cég erre csak két periódussal később tud reagálni. Ha a két cég összejátszik:

$$\frac{\Pi^m}{2}\frac{1}{1-\delta}.$$

Ha az egyik cég kiugrik az összejátszásból:

$$\Pi^m(1+\delta).$$

Érdemes kiugrani, ha

$$\begin{aligned} \Pi^m(1+\delta) &> \frac{\Pi^m}{2}\frac{1}{1-\delta} \\ 1-\delta^2 &> \frac{1}{2} \\ \delta^2 &< \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \delta &< \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Azaz az információhiány megakadályozhatja az összejátszást.

4. Chang 1991-es modellje: az árban történő összejátszás vizsgálata adott elhelyezkedések esetén

Chang a Hotelling-modell D'aspremont, Gabszewicz és Thisse által, kvadratikus utazási költéggel módosított változatát vizsgálta rögzített elhelyezkedések esetén. Tehát adottak a cégek elhelyezkedései, és a cégek megszámlálható végtelen ideig játsszák a többfordulós árválasztó játékot, amelyben egyszerre választanak árakat. Adott egy diszkont faktor ($\delta \in (0,1)$), továbbá adott a fogyasztók egy véges rezervációs ára (R). Tehát a cégek kénytelenek az áraikat a $[c, R]$ intervallumból választani, azaz $p_i \in [c, R]$.

Leszűkítettük vizsgálatunkat arra az esetre, amikor a cégek elhelyezkedése nem azonos, de szimmetrikus, azaz $a = b$ és $a < 1/2$. (Továbbá a tiszta stratégiájú egyensúlyokra korlátozzuk vizsgálatunkat.) Elrettentő büntetéssel támogatott összejátszott egyensúlyokat tanulmányozunk, leszűkítjük vizsgálatunkat a részjáték-tökéletes egyensúlyok esetére (subgame-perfect equilibria, SPE). A rettenetes büntetéssel való fenyegetés stratégiájának lényege, hogyha bármely cég eltér, akkor a cégek örökre visszatérnek a nem-összejátszott egyensúlyhoz. Továbbá feltételezzük, hogy az R elég nagy ahhoz, hogy a piac teljesen lefedett legyen bármely nem-összejátszott egyensúly esetén.

Gyakran sokkal nehezebb a termék tulajdonságait megváltoztatni, mint az árat, ezzel indokolható, hogy abból indultunk ki, hogy az elhelyezkedések örökre rögzítettek.

4.1. Állítás. *Legyen $R \geq (5/4)t$, bármely elhelyezkedés-pár esetén (szimmetrikus és nem szimmetrikus) a többfordulós árválasztó játék nem-összejátszott Nash-egyensúlya ugyanaz, mint a feltétel nélküli esetben, azaz még mindig (5) és (6) szerint adott.*

4.2. Állítás. *Bármely szimmetrikus, nem azonos elhelyezkedés estén akkor* *lesz az összprofit maximális, ha mindkét cég a*

$$p_m(a) = \begin{cases} R - t[\frac{1}{2} - a]^2 & \forall a \in [0, \frac{1}{4}] \\ R - ta^2 & \forall a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

árat választja.

Ez azt jelenti, hogy a cégek azáltal maximalizálják az összprofitjukat, ha mindketten azt a legmagasabb árat választják, ami mellett a piac még teljesen lefedett.

Bizonyítás. Keressük a két cég összprofitját maximalizáló árvektort. Tekintsük a következő állítást, amit később be is fogunk bizonyítani:

4.3. Állítás. *A két cég összprofitját maximalizáló árak alkalmazása esetén a teljes piac lefedett* ($[0, 1]$).

1. eset: $a \in [0, \frac{1}{4}]$.

A fenti állítás miatt a piac két részpiacra válik szét, amelyek éppen csak akkor érintik egymást, amikor a két cég összprofitja maximális. Így mindkét cég egy helyi monopolista.

A piac felosztását a marginális fogyasztóval (jelöljük $\widehat{x}$-pal) definiálhatjuk, aki esetében a teljes költség (a termék ára és az utazási költség) éppen R. Ha $\widehat{x}$ A-tól vásárol, akkor a teljes költsége:

$$t(a - \widehat{x})^2 + p_1 = R,$$

Ha B-től vásárol, mivel $b = 1 - a$, ezért:

$$t(1 - a - \widehat{x})^2 + p_2 = R.$$

Ebből megkapjuk p_1-et és p_2-t $\widehat{x}$ függvényében:

$$p_1 = R - t(a - \widehat{x})^2,$$

$$p_2 = R - t(1 - a - \widehat{x})^2.$$

Ebből adódóan a cégek összprofitja, ha p_1 és p_2 áron árulják termléküket:

$$\Pi(\widehat{x}) = (p_1 - c)\widehat{x} + (p_2 - c)(1 - \widehat{x})$$

$$= [R - t(a - \widehat{x})^2 - c]\widehat{x} + [R - t(1 - a - \widehat{x})^2 - c](1 - \widehat{x}).$$

Ebből az optimális $\widehat{x}^* = \frac{1}{2}$, ami maximalizálja $\Pi(\widehat{x})$-et. Mivel a cégek elhelyezkedése szimmetrikus, ezért $\widehat{x}^* = \frac{1}{2}$ maga után vonja azt, hogy a két vég összprofitját maximalizáló árak is azonosak:

$$p_1 = p_2 = p_m(a) = R - t\Big[\Big(\frac{1}{2} - a\Big)\Big]^2 \quad a \in [0, \frac{1}{4}].$$

Most megmutatjuk, hogy minden $a \in [0, \frac{1}{4}]$ esetén a kezdeti feltevésünk igaz, azaz a teljes piac lefedett $p_1 = p_2 = p_m(a)$ alkalmazása esetén.

Ugyanis, ha a cégek $p_m(a)$ felé emelik az áraikat, akkor a piac két részpiaca között egy olyan rész keletkezne, amelyben elhelyezkedő fogyasztók egyik cégtől sem vásárolnának. Ha a cégek éppen annyira emelik fel az áraikat, hogy a piac éppen szétváljon, akkor az összprofit-függvény a következő alakban áll elő:

$$\Pi(p_1, p_2) = p_1\Big[a + \Big(\frac{R - p_1}{t}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] + p_2\Big[a + \Big(\frac{R - p_2}{t}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big].$$

Ebből megkapható, hogy

$$\frac{\partial \Pi(p_m(a), p_m(a))}{\partial p_i} < 0 \quad \forall a \in [0, \frac{1}{4}] \text{ és } i = 1, 2.$$

Így a cégek egyáltalán nincsenek ösztönözve arra, hogy áraikat $p_m(a)$ fölé emeljék, és $(p_m(a), p_m(a))$ mellett a teljes piac lefedett.

2. eset: $a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

Bármely fenti a esetén az összprofit függvény szigorúan növekedik p_1-ben és p_2-ben addig, amíg a piac éppen lefedetté válik. Ebből következik, hogy p_1-et és p_2-t addig kéne emelni, amíg a piac mindkét végén a teljes költség eléri a rezervációs árat. Ennél a pontnál az árak $p_1 = p_2 = p_m(a)$, ahol $p_m(a) = R - ta^2$.

Most belátjuk a kezdő állítást arra vonatkozóan, hogy a teljes piac lefedett és $p_1 = p_2 = p_m(a)$ esetén. Definiáljuk x_1-et a legbaloldalibb fogyasztónak, aki még vásárol A-tól, az A cég terméke iránti kereslet, ahogy A $p_m(a)$ fölé emeli a terméke árát $(\widehat{x} - x_1)$, ahol

$$\widehat{x} = \frac{p_2 - p_1}{2t(1-2a)} + \frac{1}{2}$$

és

$$x_1 = a - \left[\frac{R - p_1}{t}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ha x_2 a legjobboldalibb fogyasztó, aki még vásárol B-től, akkor a B cég terméke iránti kereslet amikor B $p_m(a)$ fölé emeli terméke árát $(x_2 - \widehat{x})$, ahol

$$x_2 = (1-a) + \left[\frac{R - p_2}{t}\right]^{\frac{1}{2}}$$

és

$$x_2 = x_1.$$

Így x_1 és x_2 jelöli ki a piac két szélén elhelyezkedő fogyasztónak a helyét, akinek a teljes költsége éppen eléri a rezervációs árat. Ekkor az összprofitot maximalizáló függvény a következő alakban áll elő:

$$\Pi(p_1, p_2) = (\widehat{x} - x_1)(p_1 - c) + (x_2 - \widehat{x})(p_2 - c).$$

Behelyettesítve x_1-et, x_2-t és $\widehat{x}$-ot és deriválva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \Pi(p_m(a), p_m(a)}{\partial p_i} < 0 \quad \forall a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \text{ és } i = 1, 2 \text{ esetén.}$$

Ezért a cégek nincsenek ösztönözve arra, hogy áraikat $p_m(a)$ fölé emeljék. Így $p_1 = p_2 = p_m(a) = R - ta^2$ maximalizálja a cégek összprofitját és a teljes piac lefedett ennél az árnál. □

4.4. Állítás. *Bármely szimmetrikus, nem azonos elhelyezkedés-pár esetén létezik egy kritikus diszkont faktor* $\underline{\delta}(a) < 1$, *amelyre teljesül, hogy minden* $\delta \geq \underline{\delta}(a)$ *esetén* p_m *fenntartható lesz, mint egy részjáték-tökéletes egyensúly az ismételt játékok során, amikor az eltérés kiküszöbölése érdekében az „elrettentő büntetés” stratégiát alkalmazzák.*

Bizonyítás. Legyen a, $1-a$ rögzített, $a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Ekkor

$$p_m = R - ta^2$$

és a monopol profit körönként

$$\Pi_m = (p_m - c)\frac{1}{2}.$$

Ezt az esetet vetjük össze azzal az esettel, amikor az összejátszást felrúgjuk és versenyhelyzet alakul ki. Az (5)-ös képlet alapján a versenyhelyzethez tartozó ár a következő alakú:

$$p_1(a,b) = c + (1-a-b)t\Big(1 + \frac{a-b}{3}\Big)$$

Esetünkben $a = b$, ekkor

$$p_1(a,a) = c + (1-2a)t$$

árat alkalmaz mindkét cég, és ekkor a versenyhelyzethez tartozó profit:

$$\Pi_v = (1-2a)t\frac{1}{2}.$$

Tehát ebben az esetben sem lesz egyik cég profitja sem 0, mivel a cégek távol vannak egymástól. Jelöljük Π_f -fel a felrúgás pillanatában szerzett extra profitot. Meg fogjuk vizsgálni, hogy a felrúgás által nyert profitunk mikor lesz kevesebb annál a profitnál, amennyit körönként el fogunk veszíteni abban az esetben, ha az összejátszás felrúgása mellett döntünk:

$$\Pi_f - \Pi_m < \delta\frac{\Pi_m - \Pi_v}{1-\delta}.$$

Célunk azt meghatározni, hogy milyen δ mellett nem érdemes felrúgnunk az összejátszást. Először megvizsgáljuk, hogy mekkora árat érdemes választanunk abban az esetben, ha felrúgjuk az összejátszást. Az optimális p_1 meghatározásához Π_f-et kell maximalizálnunk p_1-ben. Ahogy korábban már láttuk, versenyhelyzetben a profit függvény a következő alakú:

$$\Pi = (p_1 - c)\Big(\frac{p_2 - p_1}{2t(1-a-b)} + \frac{1-b+a}{2}\Big).$$

Esetünkben $a = b$ rögzített, és $p_2 = p_m = R - ta^2$. A továbbiakban jelöljük v-vel egy adott terméken a nyereséget versenyhelyzet esetén, azaz legyen

$$v = t(1-2a).$$

Ezek alapján Π_f a következő alakú:

$$\Pi_f = (p_1 - c)\Big(\frac{p_m - p_1}{2v} + \frac{1}{2}\Big).$$

Amiből

$$\Pi_f' = \frac{p_m - p_1}{2v} + \frac{1}{2} + (p_1 - c)\frac{-1}{2v} = 0.$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $2v = 2t(1-2a)$-val. (Ez nem 0, mivel $a < \frac{1}{2}$.) Ekkor a következő kifejezés adódik:

$$p_m - p_1 + v - p_1 + c = 0.$$

Mivel $\Pi_f" < 0$, ezért Π_f-nek maximumhelye van p_1-ben, ahol

$$p_1 = \frac{p_m + v + c}{2}.$$

Megjegyzés: A fenti képletből látszik, hogy az optimális p_1 választás a versenyhelyzetbeli ár és a monopol ár között félúton van.

Ezek után kiszámoljuk Π_f értékét:

$$\Pi_f = (p_1 - c)\Big(\frac{p_m - p_1}{2v} + \frac{1}{2}\Big) = (p_1 - c)\big(\frac{p_m - p_1 + v}{2v}\big).$$

Mivel

$$\frac{p_m - p_1 + v}{2v} = \frac{p_m - \frac{p_m+v+c}{2} + v}{2v} = \frac{p_m + v - c}{4v},$$

ezért

$$\Pi_f = \frac{p_m + v - c}{2}\frac{p_m + v - c}{4v}.$$

Ezután már meghatározhatjuk, hogy milyen δ értékek mellett nem érdemes felrúgni az összejátszást, azaz milyen δ-ák esetén teljesül, hogy

$$\Pi_f - \Pi_m < \delta\frac{\Pi_m - \Pi_v}{1 - \delta},$$

ez azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{(p_m + v - c)^2}{8v} - \frac{p_m - c}{2} < \frac{1}{2}\delta\frac{p_m - c - v}{1 - \delta},$$

mindkét oldalt megszorozva 2-vel:

$$\frac{(p_m + v - c)^2}{4v} - (p_m - c) < \delta\frac{p_m - c - v}{1 - \delta}.$$

Közös nevezőre hozva a baloldalon azt kapjuk, hogy

$$\frac{p_m^2 + v^2 + c^2 + 2p_m v - 2p_m c - 2vc - 4vp_m + 4vc}{4v} < \delta\frac{p_m - c - v}{1 - \delta},$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{(p_m - c - v)^2}{4v} < \delta\frac{p_m - c - v}{1 - \delta}.$$

Mivel $p_m - c$ a monopolnyereség és v a versenynyereség, ezért $p_m - c - v$ biztosan pozitív, így mindkét oldalt elosztva $(p_m - c - v)$-vel ekvivalens átalakítás után következő kifejezés adódik:

$$\frac{p_m - c - v}{4v} < \frac{\delta}{1 - \delta},$$

azaz

$$(1 - \delta)(p_m - c - v) < 4v\delta,$$

amiből adódik, hogy

$$\delta > \frac{p_m - c - v}{p_m - c + 3v},$$

azaz az ilyen δ értékekre nem érdemes felrúgni az összejátszást.

Megjegyzés: $\underline{\delta}$, v és p_m az a-tól függő mennyiségek ($\underline{\delta}(a)$, $v(a)$, $p_m(a)$). Speciálisan, ha $a = \frac{1}{4}$, akkor

$$\underline{\delta}\Big(\frac{1}{4}\Big) = \frac{R - \frac{t}{16} - c - \frac{t}{2}}{R - \frac{t}{16} - c + \frac{3t}{2}} = \frac{R - c - \frac{9}{16t}}{R - c + \frac{23}{16t}},$$

ami olyan inflációs mérték, ami fölötti δ-ákra nem érdemes felrúgni az összejátszást, alatta lévőkre viszont igen. $\square$.

5. A hely és az árak megválasztásában történő teljes összejátszás

Friedman és Thisse (1993) megjegyezte, hogy a hely és az árak megválasztásában történő teljes összejátszás azonos profitok esetén azt eredményezi, hogy a cégek az $a = b = 1/4$-ben helyezkednek el. A következőképpen bizonyítjuk ezt.

A modell ugyanaz, mint a Hotelling-modell D'Aspremont, Gabszewicz és Thisse-féle kvadratikus utazási költséggel átdolgozott változata. Első lépésben a cégek azonos időpontban megválasztják az elhelyezkedésüket, majd megszámlálható végtelen ideig játsszák az árválasztó játékot, amelyben mindig egyszerre választják meg áraikat. A cégek jövőbeli kifizetéseinek diszkontfaktora $\delta \in (0, 1)$. Ahogy Chang 1991-es modelljében is, itt is adott a fogyasztóknak egy véges rezervációs ára, ami biztosítja azt, hogy az összejátszás által keletkező profit véges lesz. Tehát a cégek kénytelenek áraikat úgy megválasztani, hogy azok $[c, R]$-be essenek. Ez a modell ugyanaz, mint a 2. részben áttekintett Chang-féle modell.

Elemzésünket a továbbiakban megszorítjuk arra az esetre, amikor az elhelyezkedések megválasztása szimmetrikusan történik, azaz $a = b$. Továbbá vizsgálatainkat megszorítjuk a részjáték-tökéletes egyensúly esetére: ahogy Chang modelljében is, itt is a „rettenetes" bűntetés stratégia biztosítja az összejátszás fennmaradását.

Legyen $R \geq 3t$. Ebből következik, hogy $R \geq (5/4)t$, így a 3.1., 3.2., és 4.1. Állítás továbbra is fennáll, ha az árválasztó játékban a cégek először elhelyezkedésüket választják meg.

Mivel $R \geq 3t$, ezért alkalmazhatjuk Friedman és Thisse (1993) lemmáját (ld. később 6.7. Lemma), ami azt mondja, hogy ha egy monopolista az $1/2$-ben helyezkedik el, akkor a teljes piac kiszolgálásával és a $p = R - t(1/2)^2$ választással maximalizálja a profitját. Ezekből és a 4.2. Állításból együttesen következik a következő Állítás:

5.1. Állítás. *Ha a két cég elhelyezkedése szimmetrikus, akkor ha a helyüket az* $a = b = 1/4$*-nél választjuk meg, utána az ármeghatározó játékban a* $p_m = R - t(1/2)^2$ *árat választva (azért, hogy a teljes piac fedett legyen) maximalizálhatjuk az összprofitot.*

A 4.4. Állításból adódik a következő:

5.2. Állítás. *Ha a cégek örökre az* $a = b = 1/4$*-nél helyezkednek el, akkor az összprofitjukat maximalizáló* $p_m = R - t(1/2)^2$ *ár részjáték-tökéletes egyensúlyt fog eredményezni, ha* $\delta \geq \underline{\delta}(1/4)$.

Ebből adódik a következő:

5.3. Állítás. *Az* $a = b = 1/4$ *és* $p_m = R - t(1/2)^2$ *választás az elhelyezkedés és az ármeghatározó játékban egy részjáték-tökéletes egyensúlyt fog eredményezni, ha* $\delta \geq \underline{\underline{\delta}}(1/4)$*, ahol* $\underline{\underline{\delta}}(1/4) < 1$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a teljes piac lefedett. A cégek stratégiája legyen a következő. Ha $a = b = 1/4$, akkor minden fordulóban válasszuk az ármeghatározó játékban részjáték-tökéletes egyensúlyt eredményező $p_1 = p_2 = R - t(1/2)^2$ árat (ld. 4.2. Állítás). Ha nem ezt az elhelyezkedést választjuk, akkor játsszunk a nem-összejátszott esetben rögzített elhelyezkedések esetén Nash-egyensúlyt eredményező árakkal, melyek (5) és (6) szerint adottak. Tehát abban az esetben, ha az egyik cég felrúgja az összejátszást, akkor a következő fordulótól a cégek kimennek a [0,1] intervallum két szélére. Annyit kell megmutatnunk, hogy megfelelő δ esetén, ha mindkét cég az $a = b = 1/4$ szerint és a fenti árakkal játszik, akkor egyiknek sem érdemes eltérni, és felrúgni a hallgatólagos összejátszást.

Abban az esetben, ha a cégek összejátszanak, a profit:

$$\Pi_m = \frac{R - t(1/2)^2 - c}{2} = \frac{p_m - c}{2}.$$

A nem-összejátszott játékban ($a = b = 0$) a profit:

$$\Pi_v = t/2.$$

Abban az esetben, ha felrúgom az összejátszást, akkor a cégemnek érdemes ugyanoda költözni, ahol a másik cég is van, azaz $\frac{1}{4}$-ből $\frac{3}{4}$-be, és $\epsilon > 0$-val csökkenteni fogom az áramat, ami azt fogja eredményezni, hogy abban az egy körben, a teljes profitot én fogom megszerezni, a másik cég profitja pedig 0 lesz. Jelöljük ebben a körben a profitot Π_f-fel. Nem érdemes felrúgni az összejátszást, ha annak a bizonyos körnek a nyeresége, melyben felrúgom az összejátszást kisebb lesz annál a profitnál, amennyit az utána következő körök során összesen el fogok veszíteni jelenértékben számolva. Így meg fogjuk vizsgálni, hogy mikor fog teljesülni, hogy

$$\Pi_f - \Pi_m < \frac{\delta}{1-\delta}(\Pi_m - \Pi_v),$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{p_m - c}{2} < \frac{(p_m - c - t)\delta}{1-\delta},$$

mindkét oldalt megszorozva $2(1-\delta)$-val azt kapjuk, hogy

$$p_m - c - \delta p_m + \delta c < (p_m - c - t)2\delta,$$

minkét oldalhoz hozzáadva $\delta(p_m - c)$-t adódik, hogy

$$p_m - c < (3p_m - 3c - 2t)\delta,$$

azaz,

$$\delta > \frac{p_m - c}{3p_m - 3c - 2t} = \frac{R - \frac{1}{4}t - c}{3R - \frac{11}{4}t - 3c}.$$

Tehát ilyen δ-k esetén nem érdemes eltérni. $\square$

6. Az összejátszás szabályozása a lineáris városban

6.1. A szabályozás modellezése

A fenti modellek teljesen figyelmen kívül hagyták azt, hogy szabályozó hatalmak korlátozhatják a hallgatólagos összejátszás fokát a lineáris városban. Léteznek hatóságok, melyeknek feladata az összejátszás megelőzése, mivel az összejátszás hajlamos növelni a fogyasztókból kicsikart többletet, így csökkenti a fogyasztók hasznosságát, és hajlamos arra is, hogy a termelékenység mértékét a szociálisan elégséges szint alá csökkentse. A következőkben az összejátszás szabályozásának hatását fogjuk tanulmányozni a lineáris városban.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a szabályozó hatóság meghatároz egy p^r árkorlátot, úgy hogy ha valamelyik cég efölötti árat választ, akkor a szabályozó hatóság összejátszott árképzésért meg fogja büntetni. Továbbá feltesszük azt is, hogy ez a büntetés meglehetősen magas ahhoz, hogy modellünkben a cégek árai p^r alá lesznek kényszerítve. Tehát egy fix korláttal szabályozza a hatóság az árakban történő összejátszás legfelső mértékét. A korlát nagysága függ a termékek közötti eltérés mértékétől.

Feltesszük, hogy a szabályozó hatóság nem fogja a hely megválasztásában történő összejátszásokat büntetni, ami vagy azért van, mert a szabályozó hatóság számára túl nehéz feladat különbséget tenni az összejátszott, illetve a nem összejátszott helymegválasztás között, vagy egyszerűen csak az árakban történő összejátszás vizsgálatára fektet hangsúlyt, és nem foglalkozik az egyéb változókkal, amelyekben a cégek esetleg még összejátszhatnak.

A hallgatólagos összejátszásnak ez a modellje nincs messze az EU ténylegesen létező tröszt ellenes törvényétől (Római Egyezmény 82. cikkelye), ami egy vállalatnak, vagy vállalatok egy csoportjának tiltja meg a domináns pozícióikkal való visszaélést, ahol a visszaélések lehetséges formái között a túl magas mértékű árképzés is taglalva van.

Modellünkben legyen adott a cégek számára egy olyan diszkont faktor, ami meglehetősen közel van 1-hez. A cégek árakban és helymegválasztásban történő hallgatólagos összejátszása részjáték-tökéletes egyensúlyt eredményez. Látni fogjuk, hogy ahogy a korlátozás egyre szigorúbbá válik (azaz ahogy p^r csökken), a lehetséges összejátszott elhelyezkedések csoportja az $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ intervallumra fog kiterjedni.

A modell, amelyet használunk ugyanaz, mint a 5. részben szereplő modell, továbbá az árképzésekre vonatkozó szabályozások miatt feltesszük, hogy a cégek minden forduló során kénytelenek $p_i \leq p^r$ árat választani (azaz $p_i \in [c, p^r]$). Valamint feltesszük, hogy $p^r < R$ (azért, hogy elkerüljük azt a triviális esetet, amikor a cégek a szabályozó hatóságok által ténylegesen nincsenek is korlátozva, mivel olyan magas árat választhatnak, amekkorát csak akarnak, amíg R-et nem lépik túl).

6.1. Állítás. *Ha $p^r \geq t + c$, akkor (5) és (6) még mindig Nash-egyensúlyai lesznek a többfordulós árválasztó játéknak bármely elhelyezkedés esetén.*

Bizonyítás. Ahogy a két cég közötti távolság csökken, a $p^*(a, b)$ egyensúlyi árak is csökkennek, így a legmagasabb egyensúlyi árak abban az esetben adódnak, ha a két cég a szakasz két végén helyezkedik el. Ha $a = b = 0$, akkor az árak $p_1 = p_2 = t + c$.

Így a $p^r \geq t + c$ feltétel még mindig biztosítja, hogy a fenti egyensúlyi árak továbbra is lehetségesek maradnak bármely elhelyezkedés esetén is. A 4.1. Állításból következik, hogy ezek az árak az eltérésekre vonatkozó korlátozások hiányában Nash-egyensúlyt eredményeznek. Mivel az eltérések nem számítottak, mielőtt definiáltuk a Nash-egyensúlyt, ezért most sem számítanak. □

A továbbiakban ezért feltesszük, hogy $p^r \geq t + c$. Továbbá feltesszük azt is, hogy $p^r \geq t + c + k$, ahol k fix a modellben, szigorúan pozitív, tetszőlegesen kis érték.

Azért van szükség erre a megszorításra, hogy biztosítsuk, hogy miközben p^r

az alsó határáig csökken, akkor az a $\overline{\delta}$, mellyel az összejátszás fenttartható, 1 alatt fog maradni. Hogy ez pontosan hogy működik, arra a későbbiekben még vissza fogunk térni. Ez a megszorítás p^r-re azt jelenti, hogy a szabályozó hatóság engedélyez az árválasztó játék legmagasabb nem-összejátszott egyensúlyi áránál szigorúan nagyobb árakat, így a szabályozó hatóság engedélyez némi mértékű összejátszást bármely elhelyezkedés esetén.

Definiáljuk z-t a következőképpen: $tz^2 = R - p^r$, ahol z a cégnek (ami p^r áron kínálja termékét) és a fogyasztónak (aki számára ezen termék árához hozzászámítva még az útiköltséget, együttesen éppen az ő rezervációs árát kapjuk) a távolsága.

Megjegyzés: alacsonyabb p^r, azaz magasabb $R - p^r$, magasabb z-t fog eredményezni. Ezért a z jól fejezi ki a szabályozó hatóság szigorúságának mértékét. A legszigorúbb szabályozó rendszer esetében (azaz amikor legalacsonabb a p^r /R-től függően/), a legnagyobb a z.

Megjegyzés: ha $z \geq 1/2$, akkor ha a két cég az egyenes két végpontján helyezkedik el és $p = p^r$ árat választ, akkor a piac teljesen lefedett lesz, míg ha $z < 1/2$, akkor ugyanebben az esetben a piac nem lesz lefedve.

6.2. A modell egyensúlya összejátszás és nem-összejátszás esetén

Ha a cégek nem játszanak össze az árválasztási fordulók során, akkor az 2.1. Állításból következik, hogy a cégek minden fordulóban (5) és (6) szerint játszanak, ami minden forduló során Nash-egyensúlyt fog eredményezni, azaz ez a stratégia részjáték-tökéletes lesz. Viszont abban az esetben, ha ezekkel az árakkal játszanak egy kitüntetett fordulóban, a részjáték-tökéletes helyválasztás $a = b = 0$ lesz. Így nem-összejátszás esetén a játék maximális differenciáltságot fog eredményezni a modellben.

Nagyon érdekes megvizsgálni, hogy milyen feltételek mellett tartható fenn egyensúly a játékban hallgatólagos összejátszás esetén.

6.2. Állítás. *Ha $z \geq 1/4$, szimmetrikus elhelyezkedésű vállalat-pár esetén az összprofit akkor és csak akkor maximalizálható, ha a két vállalat p^r ár választása esetén a piac teljesen lefedett lesz. Emellett az olyan szimmetrikus elhelyezkedés-pároknál, melyeknél az összprofit maximalizálható, p^r árat választva mindkét vállalat számára az összprofit maximális lesz.*

Most meg fogjuk határozni a szimmetrikus elhelyezkedés-párok azon csoportját, amelyek esetén az összprofit maximalizálható.

6.3. Állítás. *Ha $z \geq 1/2$, akkor bármely elhelyezkedés-pár esetén az összprofit maximalizálható.*

Ha $z = 1/4$, akkor csak egyetlen szimmetrikus elhelyezkedés-pár esetén maximalizálható az összprofit, nevezetesen, ha $a = b = 1/4$.

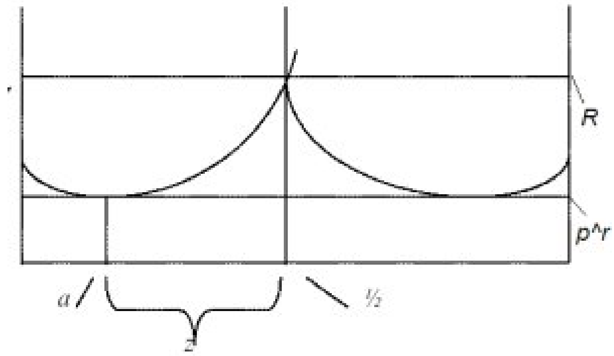
Ha $z \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, akkor a szimmetrikus elhelyezkedés-pároknak létezik egy csoportja, melyek esetén az összprofit maximalizálható, mégpedig minden $a \in (\frac{1-2z}{2}, z)$ és $b = a$.

Bizonyítás. Ha $z \geq 1/2$, akkor a piac teljesen lefedett a p^r árválasztás mellett, és így az Állítás következik a 6.2. Állításból.

Ha $z = 1/4$, $a = b = 1/4$ az egyetlen szimmetrikus elhelyezkedés-pár, amely esetén p^r árválasztás mellett a piac teljesen lefedett, így az állítás következik a 6.2. Állításból.

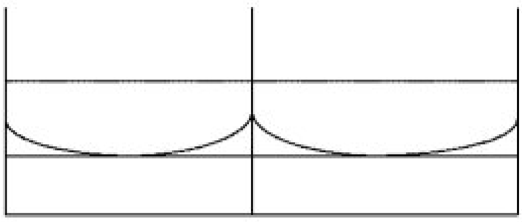
Ha $z \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, akkor a következő diagrammok illusztrálják a szimmetrikus elhelyezkedés-párok azon csoportját, melyek esetén p^r ár mellett a piac teljesen lefedett:

<u>kisebb a</u>, melynél a piac teljesen lefedett p^r ár esetén



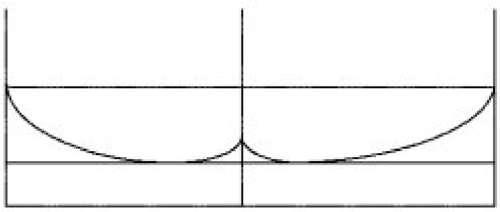
1. ábra

<u>középső eset</u>



2. ábra

<u>nagyobb a</u>, melynél a piac teljesen lefedett p^r esetén



3. ábra

Az a értéke akkor a legkisebb, ha a $= \frac{1}{2} - z$, így $a = \frac{1-2z}{2}$, és $b = a$. Az a értéke akkor a legnagyobb, ha $a = z$ és ismét $b = a$. Így az Állítás következik a 6.2. Állításból. □

Azt szeretnénk megmutatni, hogy ha a szabályozó hatalmak által adott z, akkor az összejátszás bármely fent meghatározott összprofitot maximalizáló ár és szimmetrikus elhelyezkedés-pár esetén a játék részjáték-teljes egyensúlyaként fenntartható, adott 1-hez megfelelően közeli δ esetén.

Amennyiben ez lehetséges, akkor feltételezzük, hogy a cégek olyan árakat és szimmetrikus elhelyezkedést fognak választani, amelyek esetén az egyensúly fenntartható lesz, ha δ 1-hez megfelelően közel van. Azaz a cégek játéka olyan egyensúlyt fog eredményezni, melyben maximalizálni fogják összprofitjukat, valamint a szimmetrikus helyválasztás folytán az összprofiton egyenlő mértékben fognak osztozni.

Mielőtt rátérünk az egyensúly fenntarthatóságának a feltételeire ezen párok esetén, először azt mutatjuk meg, hogy bármely olyan szimmetrikus elhelyezkedés esetén, amely mellett az összprofit maximalizálható, a p^r ár választása mindkét cég számára minden forduló során, mint egy részjáték-teljes egyensúly fenntartható lesz, ha δ elég nagy.

Definíció: $\lambda = p^r - t - c$.

6.4. Állítás. *Ha adott p^r és adott bármely olyan elhelyezkedéspár is, amely esetén a p^r árválasztás maximalizálni fogja az összprofitot, akkor a p^r árválasztás mindkét cég számára minden forduló során, mint egy részjáték-tökéletes egyensúly fenntartható lesz, ha $\delta \geq \overline{\delta} = \frac{p^r - c}{2\lambda + p^r - c} < 1$, azaz az összprofit maximum, mint egy részjáték-tökéletes egyensúly fenntartható, ha a diszkont faktor elég közel van 1-hez.*

Bizonyítás. Ahogy megjegyeztük a 6.1. Állítás bizonyítása során, könnyen megmutatható, hogy a cégek profitja a többfordulós játék nem-összejátszott Nash-egyensúlya során a 2 cég távolságának növekedésével gyarapodik. A cégek profitja akkor maximális a nem-összejátszás esetén, ha $a = b = 0$. Így adódik, hogy

$$\Pi_v = \frac{t}{2}.$$

Ha a cégek elhelyezkesése olyan, hogy mellette a cégek összprofitja maximalizálható és p^r (ld. 6.2. Állítás) árat választva maximalizálja az összprofitot, akkor

$$\Pi_m = \frac{p^r - c}{2}.$$

Bármely olyan szimmetrikus elhelyezkedés esetén, amely mellett az összprofit maximalizálható, játsszanak a cégek a következő stratégia szerint: válasszák p^r árat minden forduló során, ha senki nem tér el az előző fordulók során. Ha valaki korábban már eltért, akkor az „elrettentő büntetés" stratégia alapján a továbbiakban örökre játsszák a többfordulós játék nem-összejátszott Nash-egyensúlyát.

Korábban már megmutattuk, hogy a rettenetes büntetés stratégia részjáték-tökéletes. Így minden fordulóban úgy fognak játszani a cégek, hogy az egy Nash-egyensúlyt fog eredményezni, ha korábban valaki eltért. Így ahhoz, hogy ellenőrizzük, vajon a fenti stratégia részjáték-tökéletes-e, azt kell ellenőriznünk, hogy egy olyan adott fordulóban, ahol nem történt korábban eltérés, az „elrettentő büntetés" stratégia folytán az optimális választás, ha soha nem térünk el p^r-től.

Ha egy fordulóban az eltérő szigorúan kisebb árat választ, mint p^r, a teljes piacot meg fogja szerezni. Azonban, ha soha nem tér el, akkor örökre az összejátszott kifizetést fogja megszerezni. Így akkor nem érdemes eltérni, ha

$$\Pi_f - \Pi_m < \frac{\delta}{1-\delta}\Big(\Pi_m - \Pi_v\Big),$$

azaz

$$\frac{p^r - c}{2} < \frac{\delta}{1-\delta}\Big(p^r - c - t\Big). \tag{8}$$

(8) fennáll akkor és csak akkor:

$$(1-\delta)(p^r - c) < 2\delta(p^r - c - t),$$

azaz

$$p^r - c < \delta(3p^r - 3c - 2t),$$

azaz

$$\delta > \frac{p^r - c}{2\lambda + p^r - c} = \overline{\delta}.$$

Mivel $\lambda > 0$, ezért $\frac{p^r - c}{2\lambda + p^r - c} < 1$ és az összejátszás fenntartható lesz, mint egy részjáték-tökéletes egyensúly minden $\delta < \overline{\delta}$ esetén. □

6.5. Következmény. *Ha $\delta > \overline{\delta}$, azaz, ha δ elég közel van 1-hez, akkor egy gyenge szabályozó rendszer, ami $z = \frac{1}{4}$ -t határoz meg, az összejátszásban $a = b = 1/4$ helyszínt és p^r árat fog eredményezni.*

Egy erősebb szabályozó rendszer, ami $z \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$-et határoz meg, az összejátszás során az $a \in (\frac{1-2z}{2}, z)$ és $b = a$ helyválasztást fogja eredményezni a p^r árakkal.

Egy nagyon erős szabályozó rendszer, ami $z \geq \frac{1}{2}$ -et határoz meg, az összejátszott helykijelölés során az $a \in [0, 1]$ és $b = a$ választást fogja eredményezni a p^r árral.

Abban az esetben, amikor $z \geq \frac{1}{4}$, már meghatároztuk a lehetséges összejátszásra alkalmas helyválasztások csoportját. Úgy tűnik, hogy meglehetősen nehéz különbséget tenni ezek között az egyensúlyok között, és így például a játékot előrejelezni.

Mindenesetre ha van egy kis esély arra, hogy az összejátszás félbeszakadjon, az befolyásolhatja azt, hogy a lehetséges összejátszásra alkalmas elhelyezkedések közül melyiket fogják kiválasztani a cégek. Ahogy korábban már megemlítettük, a nem-összejátszott egyensúly magasabb profitot fog biztosítani a továbbiakban a cégek számára, ha messze vannak egymástól. Így akkor, ha a lehetséges, összejátszásból fakadó egyensúlyok csoportja egynél több elemet tartalmaz, a cégeknek érdemes azt a szimmetrikus elhelyezkedést választani, amelyben a két cég a lehető legtávolabb helyezkedik el egymástól, mivel ennél az elhelyezkedésnél lesz a lehető legmagasabb a cégek profitja, ha esetleg félbeszakad az összejátszás.

Mindezidáig elhanyagoltuk azt az esetet, amikor a szabályozó rendszer nagyon elnéző, és csak azzal az esettel foglalkoztunk, amikor $z \geq \frac{1}{4}$, azaz $p^r \leq R - (1/16)t$. Most megvizsgáljuk a nagyon elnéző szabályozó rendszer esetét is, azaz legyen most $z < 1/4$, ezzel ekvivalensen $p^r > R - (1/16)t$, alkalmazhatjuk a szabályozás nélküli, árakban és helyválasztásban történő teljes összejátszás eredményeit. A 3. szakaszban feltettük, hogy $R \geq 3t$, az elnéző szabályozó rendszer megadható nemkorlátozóan is:

$$p_m = R - t(\frac{1}{4})^2 = R - (\frac{1}{16})t < p^r.$$

6.6. Állítás. *Ha δ elég közel van 1-hez, az elnéző szabályozó rendszer (azaz $z < 1/4$) az összejátszásban $a = b = 1/4$ és $p_1 = p_2 = R - t(1/4)^2$-t fog eredményezni (amellyel a piac teljesen lefedett).*

6.3. Az összejátszás hatása a jólétre

Először belátunk egy utazási költséggel kapcsolatos állítást, aminek a bizonyítása során szükség van a következő lemmára:

6.7. Lemma. *Adott egy egység hosszú szakasz, rajta valahol egy cég a-ban, és feltesszük, hogy a fogyasztók egyenletes sűrűséggel oszlanak el a szakasz mentén, ekkor a teljes utazási költség abban az esetben lesz minimális, ha $a = 1/2$.*

A lemma bizonyítása. Az utazási költséget a következőképpen számolhatjuk ki:

$$t\Big[\int_a^0 y^2 dy + \int_1^a (1-y)^2 dy\Big]$$
$$= t\Big(\Big[\frac{y^3}{3}\Big]_a^0 + \Big[y\Big]_1^a - 2\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_1^a + \Big[\frac{y^3}{3}\Big]_1^a\Big)$$
$$= t\Big(\frac{a^3}{3} + 1 - a - 1 + a^2 + \frac{1}{3} - \frac{a^3}{3}\Big)$$

Így ahhoz, hogy minimalizáljuk az utazási költséget, $(a^2 - a)$-t kell minimalizálnunk, aminek a megoldása nyilván $a = \frac{1}{2}$. □

Definíció: a jólét a fogyasztói többlet és az eladói többlet összege.

Minden fogyasztó többlete egy áru megvásárlása esetén: $R-p-$utazási költség, és 0 különben. Az eladói többlet egy áru eladása esetén $p-c$. Így a jólét minden termék értékesítése esetén: $R-c-$utazási költség.

A továbbiakban feltesszük, hogy a fenti R érték kellőképpen nagy, hogy a piac teljesen lefedett legyen. A jólét ugyanis csak abban az esetben maximális, ha a piac teljesen lefedett. Teljesen fedett piac esetén a szociális jólét akkor és csak akkor maximális, ha az utazási költség minimális, azaz akkor és csak akkor, ha $a = b = 1/4$ és az árak egyenlőek.

Az előző rész összejátszással létrejött egyensúlyai esetében, a piac teljesen lefedett, ha a cégek p^r árat választanak, ha $p^r \leq R-(1/16)t$; és $p = R-(1/16)t$ árat, ha $p^r > R-(1/16)t$. Így ezek az egyensúlyok akkor és csak akkor fogják a jólétet maximalizálni, ha $a = b = 1/4$. Így ha $z \leq \frac{1}{4}$ ($p^r \geq R-(1/16)t$), azaz a szabályozó rendszer elnéző, akkor a szociális jólét maximális, hiszen ekkor $a = b = 1/4$.

Nagyobb z esetén a szociális jólét csak akkor maximális, ha $a = b = 1/4$. Ha ez nem így van, akkor az utazási költség nem lesz minimális. Azonban ahogy megjegyeztük korábban, egy kis esély az összejátszás félbeszakadására már a cégeket egymástól való eltávolodásra késztetheti, ami nem maximális jólétet eredményezhet.

Összefoglalva, azt tapasztaljuk, hogy a szociális jólét definíciója (szociális jólét = eladói többlet + vásárlói többlet) maga után vonja, hogy egy gyenge szabályozó redszer maximalizálja a jólétet, de ha e szabályozás túl szigorúvá válik, akkor a jólét lecsökkenhet a maximális szintje alá, attól függően, hogy a cégek a lehetséges egyensúlyok csoportjából melyik egyensúlyt választják. Továbbá egy kis kockázat az összejátszás félbeszakadására nem-jólétmaximalizáló helyválasztásra késztetheti a cégeket.

Ha a szabályozó hatóság szigorú, akkor a cégeket olyan alacsony árválasztásra kényszeríti, hogy a maximális megengedett ár mellet a piac teljesen lefedett legyen, ez a helyzet pedig egyáltalán nem ösztönzi a cégeket olyan elhelyezkedés-választásra, amelyek mellett az utazási költség alacsony lenne és ezáltal a szociális többlet növekedne, ezért a fogyasztókból származó többlet nem fog emelkedni. Így bármely helyválasztás megvalósulhat és ezért lehet, hogy a szociális többlet nem lesz maximális.

Kevésbé szigorú szabályozás esetén az árak nincsenek ennyire alacsonyra kényszerítve. A maximálisan megengedett árválasztás esetén csak az elhelyezkedések egy részhalmaza mellett lesz a piac lefedett, ami ösztönzőleg fog hatni a cégekre, hogy úgy válasszák meg elhelyezkedésüket, ami csökkenteni fogja az utazási költséget.

Ha úgy választják meg elhelyezkedésüket a cégek, hogy eléggé lecsökkenek ennek hatására az utazási költségek ahhoz, hogy a piac lefedetté váljon, ez előnyös lesz a cégek számára, mert növelni fogja a fogyasztókból származó többletet. Mindenesetre bármely olyan elhelyezkedés esetén, ami benne van a piacot teljesen lefedő elhelyezkedések részhalmazában, a megszerezhető többlet ugyanaz lesz, így a cégeknek nem lesz oka, hogy teljesen minimalizálják az utazási költséget, ami azt eredményezné, hogy maximalizálnák a szociális többletet, és bármely részcsoporton belüli helyválasztás megvalósulhat.

Ahogy a szabályozás egyre és egyre elnézőbbé válik, az elhelyezkedések azon csoportja, melyek mellett a piac teljesen lefedett egyre kisebb lesz, mivel a maximális megengedett ár egyre nagyobb lesz. Így a cégek jobban ösztönözve lesznek arra, hogy csökkentsék az utazási költséget, ugyanis az utazási költség csökkentsével garantálható, hogy a piac teljesen lefedett legyen. Így a szociális többlet minimum szintje emelkedni fog, ahogy a szabályozó rendszer egyre elnézőbbé válik.

Amikor z eléri az $1/4$-et, az árak korlátozása enyhe. A piac csak a maximális megengedett ár mellett lesz teljesen lefedett, ahol az utazási költség minimálisra történő lecsökkentése által a cégek maximalizálni fogják a fogyasztókból származó többletet. Így a szociális többlet maximális lesz.

Ha a szabályozás még elnézőbbé válik, azaz $z < 1/4$, a szabályozás nem fog kötöttséget jelenteni, és a cégek ugyanazt az összejátszással létrejött játékot fogják választani, mint a szabályozás nékül tennék. Ezért le fogják teljesen fedni a piacot és minimalizálni fogják az utazási költséget $a = b = 1/4$-nél.

7. Összefoglalás

Először áttekintettük d'Aspremant, Gabsewicz, és Thisse (1979)-es eredményeit, amelyben a horizontális termék-differenciálásnak a Hotelling-modell kvadratikus utazási költséggel módosított változatát elemezték, ahol a cégek az első fordulóban megválasztják az elhelyezkedési helyüket, és utána egyetlen alkalommal árat választanak. Abban az esetben fog részjáték-tökéletes egyensúly kialakulni, ha a cégek az szakasz két végén helyezkednek el.

Az ösztönzés, hogy differenciálják termékeiket azért, hogy enyhítsék az árversenyt mindig dominánsabb lesz, mint az ösztönzés arra, hogy a cégek egymás felé mozogjanak piaci részesedésük növelése érdekében (kvadratikus utazási költség esetén).

Utána az összejátszás esetét vizsgáltuk meg a Hotelling-modell kvadratikus utazási költséggel módosított változatában, abban az esetben, amikor a cégek első lépésben kijelölik elhelyezkedési helyüket, és utána végtelen ideig játsszák a többfordulós árválasztó versenyt. Adott egy diszkont faktor, ami megfelelően közel van 1-hez. Friedmanite "elrémítő büntetés stratégiája" folytán a cégek együtt tudnak működni az összprofit maximalizáló elhelyezkedések és árak kiválasztásában. A cégek $a = b = 1/4$ elhelyezkedést választanak, mivel ezáltal minimális lesz a fogyasztók utazási költsége és ezért maximális lesz a megszerezhető többlet.

Hivatkozások

[1] d'Aspremont,Gabszewicz,Thisse (1979),*"On Hotelling's "Stability in Competition","* *Econometrica*,47:1145-1150.

[2] Chamberlin (1933), *The Theory of Monopolistic Competition*, Harvard University Press.

[3] Chang (1991), *"The Effects of Product Differentiation on Collusive Pricing," International Journal of Industrial Organization*, 9:453-469.

[4] Dasgupta, and Maskin,(1986) *"The Existence of Equilibrium in Discontinuos Economic Games," Review of Economic Studies*, 53: 1-41.

[5] Friedman (1971), *A Non-Cooperative Equilibrium for Supergames "Review of Economic Studies"* 38:1-12.

[6] Friedman és Thisse (1993), *"Partial Collusin Fosters Minimum Product Differenciation" Rand Journal of Economics* 24:631-645.

[7] Hotelling (1929) , *"Stability in Competition", Economic Journal,* 39:41-57.

[8] Jehiel (1992), *"Product Differenciation and Price Collusion," International Journal of Industrial Organization* 10:633-641.

[9] Tirole (1988), *The Theory of Industrial Organization,* MIT Press.

[10] David Gill, *Tacit Collusion and Regulation in Hotelling's Linear City.*

[11] *Piaci szerkezetek.*

[12] *Lancaster, Kelvin J. [1966] A New Approach to Consumer Theory. Journal of Political Economy, 74, 132-157; Lancaster's New Approach to Consumer Demand and Its Limitations (1971),American Economic Association; Lancaster, Kelvin (1979), Variety, Equity and Efficiency: Product Variety in an Industrial society, New York: Columbia University Press.*

[13] Kovács Gergely, *Az ELTE-n elhangzott Vállalatgazdaságtan és logisztika című előadásának anyaga.*

[14] D. W. Carlton - J.M. Perloff , *Modern Piacelmélet. Panem, Budapest 2003.*.