Biztosítási kockázatok elemzése befektetések figyelembe vételével

Diplomamunka

Írta: Csisztu Nóra

Alkalmazott matematikus szak

Témavezetők:

Márkus László, egyetemi docens
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
és
Mályusz Károly, vezető aktuárius
Cardif Biztosító Zrt.

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Egyre fontosabb kérdéssé válik a mindennapjainkban is, hogy védve legyünk a nem várt és előre nem látható események ellen, melyek befolyásolják az anyagi helyzetünket. Ezek kivédésére hivatottak a különböző biztosítási formák, amelyek megkönnyítik a kockázat elfogadható mértékű viselését.

A fogyasztási cikkekhez hasonlóan a bizalmon alapuló biztosítási szolgáltatások igénybevétele során is a vásárló kiemelt célja, hogy a megvásárolt termékét minél jobb minőségben és minél alacsonyabb áron kapja meg. Ezért az egyre bővülő piacon minden biztosító arra törekszik, hogy a saját kockázatait nem növelve egyre kedvezőbb áron tudja eladni a termékeit, ezzel minél szélesebb és elégedettebb ügyfélkört szerezve. A kereslet igényeinek megfelelő szolgáltatás kialakításával a biztosító növelheti bevételeit. Kockázatai csökkentéséhez különböző eszközöket használhat. Az egyik lehetőség, hogy a beszedett díjak egy részét nem csupán tárolja, tartalékolja, hanem különböző befektetéseken keresztül hozamot generál és ezt például díjcsökkentés formájában visszautalja az ügyfélnek. A dolgozat célja, hogy megvizsgálja, hogyan hatnak a termékekbe beépített befektetések a biztosítási díjakra, és hogyan változik ezáltal a kockázat, speciális esetként vizsgálva a viszontbiztosításokat. A klasszikus pénzügyi és biztosítási elvekből kiindulva és ezeket kombinálva vizsgáljuk meg azt a feltevést, hogy a befektetések hatására lecsökkennek a biztosítási díjak.

A dolgozat első része azokat az alapvető pénzügyi és biztosítási ismereteket tartalmazza a teljesség igénye nélkül, amelyek elengedhetetlenek a téma megértéséhez, gondolva itt többek között a klasszikus biztosításmatematikai díjkalkulációs elvekre vagy a pénzügyi élet egyik legfontosabb formulájára, a Black-Scholes-egyenletre. A biztosítás és a pénzügy világa közötti kapcsolatot oly módon teremtjük meg, hogy a biztosítási díjkalkulációs elveket átültetjük a pénzügyi számításokba.

Az értekezés következő lépésében a tiszta díjjal foglalkozunk különböző szempontok szerint, többek között azt is vizsglva, hogy hogyan változik a biztosításról kapott információ függvényben. Definiáljuk a biztosítási és pénzügyi kockázatok valószínűségi terének egyesítését és ezen alsó és felső határt számolunk a tiszta díjhoz. Ezekben a fejezetekben Thomas Möller cikkeire támaszkodtunk.

A dolgozat utolsó részében a viszontbiztosításokkal foglalkozunk, azon belül is a stop loss szerződéstípussal. A díjat úgy számoljuk ki, hogy magába a biztosított kockázatba építjük bele a befektetési kockázatot. Gyakorlati alkalmazásként katasztrófa viszontbiztosítással foglalkoztunk, azon belül is földrengés károk biztosításával, ezen szemléltetve a befektetés esetleges jótékony hatását a díjra.

Ezúton szeretném megköszönni konzulemsemnek, Márkus Lászlónak a témában nyújtott szakmai segítséget, és hogy a diplomamunka elkészítése alatt felügyelte a munkámat és ötletekkel látott el . Szintén köszönettel tartozom külső témavezetőmnek, Mályusz Károlynak a hasznos javaslatokért.

2. Általános pénzügyi bevezető

2.1. A piac jellemzői

A pénzügyi matematikában használatos alapvető fogalmakat tekintjük át ebben a fejezetben, ami a későbbiek megértéséhez szükséges.

Tekintsünk egy $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőt és egy T időhorizontot.
Az információk F rendszere $F_0 \subset F_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_t \subset \ldots \subset F_T$, ahol $\mathcal{F}_t$ ami a t időpontig rendelkezésre álló megfigyelhető események $\sigma-$ algebrája. amit a Black-Scholes-féle modellben a Wiener folyamat generál.
Van egy kockázatmentes eszközünk, B, ami egy fix kamatozású kötvény, $B_0 = \beta_t B_t$, ahol β a diszkonttényező és van d db kockázatos termékünk, S^i, $i = 1, ..., d$, amik általában részvények. Az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ -téren P változhat, hiszen az egyének illetve cégek kockázatvállaló magatartása eltérő lehet. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $B_0 = 1$. Ha konstans az r kamat, akkor $\beta_t = (1+r)^{-t}$.
Az árvektort

$$S = \left(B, S^1, ..., S^d\right)$$

írja le, ami a t időpontban $S_t = \left(B_t, S_t^1, ..., S_t^d\right)$. Az egyes papírok az időben fejlődő S_t^k sztochasztikus folyamattal vannak leírva. Feltesszük, hogy ez adaptált az F filtrációhoz, vagyis nem hordoznak magukban a filtráción túlmenő vagy azon belül előre tekintő információt.

Az $(\Omega, \mathcal{F}, P, T, F, S)$ az értékpapír piaci modell.

$\Theta_t = \left\{\Theta_t^0, \Theta_t^1, ..., \Theta_t^d\right\} \in \mathbb{R}^{d+1}$ vektor a portfólió, $t \in [0, T]$.
Az induló vagyon

$$V_0(\Theta) = \Theta_0 S_0.$$

$$V_t(\Theta) = \Theta_t S_t = \sum_{i=1}^{d} \Theta_t^i S_t^i + \Theta_t^0 B_t : t \in T, t \geq 1.$$

Feltesszük, hogy Θ előre jelezhető, azaz Θ_{t+1} F_t mérhető.
Feltesszük továbbá, hogy nincs külső pénzforrás és nincs pénzkihelyezés sem, azaz $\Theta_{t-1} S_{t-1} = \Theta_t S_{t-1}$ $\forall t$.

Egy stratégiát *önfinanszírozó*nak nevezünk, ha a portfólióváltás csupán átrendezi a meglévő vagyont az eszközök között, azaz

$$\Theta_n S_n = \Theta_{n+1} S_n.$$

Ezt folytonos időben is megfogalmazhatjuk. Jelöljük δ_t-vel a kötvények mennyiségét és η_t-vel a részvényekét. Az értékfolyamat ekkor $V_t(\Theta) = \delta_t B_t + \eta_t S_t$. Θ önfinanszírozó stratégia, ha (δ_t, η_t) két mérhető és adaptált folyamat, mely kielégíti az előző egyenletet, és a megfelelő értékfolyamat:

$$V_t(\Theta) = \delta_t B_t + \eta_t S_t = \delta_0 B_0 + \eta_0 S_0 + \int_0^t \delta_s dB_s + \int_0^t \eta_s dS_s.$$

Ha önfinanszírozó a Θ, akkor a vagyon változása:

$$\begin{aligned} V_t(\Theta) - V_{t-1}(\Theta) &= \Theta_t S_t - \Theta_{t-1} S_{t-1} = \\ &= \Theta_t S_t - \Theta_t S_{t-1}. \end{aligned}$$

A nyereségfolyamat: $G_t(\Theta)$, $G_0(\Theta) = 0$.

$$G_t(\Theta) = \sum_{i=1}^{t} \Theta_i (S_i - S_{i-1}).$$

Egy portfóliósorozat akkor és csak akkor önfinanszírozó, ha

$$V_t(\Theta) = V_0 + G_t(\Theta),$$

vagyis a csak a részvényeken és a kötvényen realizált nyereség változtatja a vagyont.

Az X_t *diszkontáltja*:

$$DX_t = \beta_t X_t.$$

Folytonos időben a diszkontált részvényfolyamat: $DS_t = e^{-rt} S_t$, a diszkontált értékfolyamat pedig $DV_t = e^{-rt} V_t$.
Legyen $\boldsymbol{\Theta}$ önfinanszírozó stratégiák osztálya. Ekkor egy $\Theta \in \boldsymbol{\Theta}$ önfinanszírozó stratégia *megengedett*, ha $\forall t \in T$-re teljesül, hogy

$$V_t(\Theta) \geq 0.$$

Jelölje ezek osztályát $\mathbf{\Theta}_a$.

A piacon van *erős arbitrázs*, ha létezik olyan megengedett Θ stratégia, amelyre

$$\begin{aligned} V_0(\Theta) &= 0 \\ V_t(\Theta) &\geq 0 \ \forall t \in T \\ P(V_T(\Theta) > 0) &> 0, \end{aligned}$$

azaz ha a végső hozam pozitív valószínűséggel pozitív.
*Gyenge arbitrázs*ról beszélünk, ha

$$\begin{aligned} V_0(\Theta) &= 0 \\ P(V_T(\Theta) > 0) &= 1. \end{aligned}$$

Ismert, hogy gyenge arbitrázs létezéséből következik az erős arbitrázs létezése, ha diszkrét kereskedést vizsgálunk véges horizontú piacon.

A P^* *martingál mérték*, ha az $\frac{S_t}{B_t} = DS_t$ folyamat $(\mathcal{F}_t, P^*)$ martingál.
A P^*-*ekvivalens martingál mérték*, ha martingál mérték és ha a nulla halmazai megegyeznek az eredeti P mérték nulla halmazaival.

Végesen generált esetben igaz a következő két tétel, amelyek bonyolultabb piaci modellek esetén további technikai feltételek mellett továbbra is érvényben maradnak.

Az eszközárazás I. alaptétele: *A piac akkor és csak akkor arbitrázsmentes, ha létezik ekvivalens martingál mérték.*

A piacot *teljes*nek hívjuk, ha minden X valószínűségi változóhoz létezik Θ önfinanszírozó stratégia, hogy $V_T(\Theta) = X$.

Az eszközárazás II. alaptétele: *A piac akkor és csak akkor teljes, ha az ekvivalens martingál mérték egyértelmű.*

*Hedzs*nek, vagy másnéven *fedezeti stratégiá*nak nevezzük azokat a lehetséges technikákat, amelyek bizonyos kockázati tényezők ellen védenek. Célja nem profitszerzés, hanem a veszteség minimalizálása. Legyen f_T az elvárt hozam a T időszak végén és Θ önfinanszírozó stratégia. Ekkor Θ (v, f_T)-hedzs, ha $v = \Theta_0 S_0$ és $f_T \leq V_T(\Theta)$.

2.2. A Black-Scholes modell

2.2.1. Opciós ügyletek

Az eszközárakból különböző, úgynevezett származtatott terméket képeznek a piaci kereskedés során. Ezek egyike az opciós ügylet, vagy röviden opció fontos szerepet játszik. Ez vásárlójának jogot, a kibocsájtójának kötelezettséget biztosít valamely termék (például értékpapír, részvény) megvételére illetve eladására adott céláron, adott lejáratig. Tehát az opció egy olyan szerződés, ami az egyik félnek jogot biztosít valami megtételére anélkül, hogy kötelezné rá. Az opciós ügyletnek két szereplője van, a kiíró, aki az ajánlatot teszi és egy vevő, aki elfogadja azt. Két fajtájáról beszélhetünk:

- A vételi (call) opció vételi jogot biztosít vevőjének és kötelezettséget a kiírójának.
- Az eladási (put) opció eladási jogot biztosít vevőjének és kötelezettséget a kiírójának.

Az egyszerűség kedvéért beszéljünk csak részvényekre kötött opciókról. A kifizetésfüggvények felírásához vezessük be a következő jelöléseket:

1. T: lejárati dátum, az az időpont, ameddig az opciós szerződés érvényes.
2. K: kötési- vagy lehívási árfolyam, azaz árfolyam, amin a jogosult élhet a jogával. Ez szerződéskötéskor rögzített.
3. S_t: a t időpontban a részvény árfolyama.

A vételi opció kifizetés függvénye: $(S_T - K)^+$, az eladási opció kifizetés függvénye pedig: $(K - S_T)^+$.
A kettőt ki tudjuk fejezni egymással a következőképpen, amit put-call paritásnak hívunk:

$$C^{put} = C^{call} + K\frac{1}{(1+r)^T} - S_0,$$

ahol C^{put} és a C^{call} az eladási- illetve a vételi opció árai, r pedig a kamat.

Az opciónak több típusa létezik attól függően, hogy a vevő mikor érvényesítheti a jogát:

- Európai opcióról akkor beszélünk, ha a beváltás egyetlen időpontban történhet, az opció lejáratakor.
- Amerikai opció esetében a jogot az opció lejáratáig bármikor lehet érvényesíteni.

Piacát tekintve beszélhetünk tőzsdei illetve tőzsdén kívüli (OTC - over the counter) opciókról.

Az opciós ügylet lejárat előtti értékét a szerint határozhatjuk meg, hogy milyen a típusa. A már említett európai opció esetében folytonos részvényáralakulást feltételezve ez a Black-Scholes modell segítségével történik. Amerikai opciók esetében explicit formula nem adható, ezért numerikus módszereket használnak, ezek közül a legismertebb a binomiális modell.

A dolgozatban az európai opciók is szerephez jutnak, ezért nagyon röviden áttekintjük az ide tartozó fogalmakat. Ehhez szükséges a Black-Scholes modell részletes bemutatása.

2.2.2. A modell

Tegyük fel, hogy a piacon következő feltételek teljesülnek:

1. A részvények árfolyama geometriai Brown mozgást követ, azaz a drift és a volatilitás független az időtől.
   A részvényekre felírhatjuk a $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dw_t)$ egyenletet, ahol μdt infinitezimális növekvő ráta, σdw_t pedig infinitezimális ingadozás, rizikó. Ennek megoldása:
   $$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma w_t\right).$$

Ha ennek vesszük a logaritmusát, akkor a $\log S_t = \log S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma w_t$ egyenletet kapjuk, tehát ez egy sodródó Brown mozgás, ahol a drift $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$, a volatilitás pedig σ. Ennek következménye, hogy a részvényárak bármely véges intervallumon lognormális eloszlást követnek.

2. A részvény nem fizet osztalékot.

3. A részvények tökéletesen oszthatóak.

4. A kockázatmentes kamatláb ismert és konstans.

5. Az opciót a lejáratkor lehet érvényesíteni.

6. Nincsenek tranzakciós költségek.

7. Lehetőség van short sellingre, azaz eladhatunk egy olyan részvényt, amely nincs a birtokunkban. Ennek nincsenek többletköltségei.

8. Nincs lehetőség arbitrázsra.

A valóságban nem fordul elő olyan eset, amikor ezek a feltételek maradéktalanul teljesülnek, mégis használják opciók árazásához ezt a modellt.

Az opció értékét a **Black-Scholes formula** segítségével határozhatjuk:

$$C = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

ahol a következő jelöléseket használtuk:

- C: az opció ára
- S_0 : a részvény jelenlegi értéke
- K: az opció kötési árfolyama
- r: kockázatmentes kamatláb
- $T - t$: lejáratig hátralévő időtartam
- $\Phi(x)$: a normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényének értéke az x helyen

- $d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+(T-t)\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$

- $d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+(T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$

- σ: a részvény volatilitása, azaz a részvény logaritmikus hozamának időegységre vonatkozó szórása.

Heurisztikusan úgy fogalmazhatunk, $\Phi(d_i)\,,\ i = \{1,2\}$ annak a valószínűsége, hogy a részvény T-beli árfolyama nagyobb lesz kötési árfolyamánál, és az opciót lehívják. A formulát jobban megérthetjük, ha a két részt külön tekintjük. Az első tagban a részvény jelenértékét szorozzuk meg egy valószínűséggel, amiből kivonjuk a második tagot, ami pedig az opció kötési árfolyamának jelenértéke szorozva egy valószínűséggel.

2.3. Martingál mértékek

Ebben a részben leírjuk azokat az általános tudnivalókat, amik szükségesek a későbbiekben felírt illetve kiszámolt eredmények megértéséhez, ezért elméleti jellegű megállapítások következnek.

Tekintsünk az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ teljes filtrált valószínűségi mezőt, ahol az $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ teljesíti a szokásos feltételeket, azaz jobbról folytonos és teljes, és $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, ahol T fix, véges időpont. Nem tesszük fel, hogy $\mathcal{F}_0$ triviális. Legyen X egy d-dimenziós folytonos szemimartingál $\mathbb{F}$-re, ami felírható a következő alakban:

$$X = X_0 + M + A,$$

ahol X_0 $\mathcal{F}_0$- mérhető, M folytonos lokális P-martingál, A abszolút folytonos és korlátos variációjú. Az a természetes feltevés, hogy X arbitrázsmentes, megköveteli, hogy A abszolút folytonos legyen $< M >$ kvadratikus variációra és hogy létezzen egy $\mathbb{R}^d$-beli előrejelezhető λ folyamat, hogy $A_t = \int_0^t d < M >_s \lambda_s$ és $\int_0^t \lambda_s^{tr} d < M >_s \lambda_s = \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_s^i \lambda_s^j d < M_i, M_j >_s < \infty$ P-majdnem mindenütt minden $t \in [0, T]$-re. Ez a szükséges feltétele egy Q mérték létezésének, ami ekvivalens a P-vel.

Definíció: *$\hat{P}$ legyen a minimális martingál mérték, amit a következőképpen definiálhatunk:*

$$\frac{d\hat{P}}{dP} = exp\left(-\int \lambda dM\right)_T = exp\left(-\int_0^T \lambda_s dM_s - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda_s d < M >_s \lambda_s\right)$$

Legyenek $T_1 \leq T_2 \leq T$ $\mathbb{F}$-megállási idők és legyen h egy korlátos $\mathbb{R}^d$-beli $\mathcal{F}_{T_1}$-mérhető véletlen változó. Legyen ν a $f = h'(X_{T_2} - X_{T_1})$ alakban felírt sztochasztikus integrálok által meghatározott tér.

Legyen $\mathcal{M}^s(P)$ az előjeles $Q \ll P$ mértékek tere, ahol $Q(\Omega) = 1$ és $E\left(\frac{dQ}{dP} f\right) = 0 \; \forall f \in \nu$, és legyen $\mathcal{M}^e(P)$ azon Q valószínűségi mértékek tere, melyekre $Q \in \mathcal{M}^s(P)$ és $Q \sim P$. Ezek után vezessük be a $\mathcal{D}^s$ és $\mathcal{D}^e$ tereket, melyekre

$$\mathcal{D}^x = \left\{ \frac{dQ}{dP} \mid Q \in \mathcal{M}^x(P) \right\},$$

minden $x \in \{s, e\}$.

Definícó: *A szórásnégyzet optimalizáló martingál mérték ,* $\tilde{P}$ *az egyetlen olyan eleme az* $\mathcal{M}^s(P)$*-nek, amelyre* $\tilde{D} = \frac{d\tilde{P}}{dP} \in L^2(P)$ *minimalizálja a* $\|D\|_{L^2(P)} = \left(D^2\left(\frac{d\tilde{P}}{dP}\right)+1\right)^{\frac{1}{2}}$ *normát* $\forall D \in \mathcal{D}^s \cap L^2(P)$.

Ha X folytonos és feltesszük, hogy $\mathcal{D}^e \cap L^2(P) \neq \emptyset$, akkor $\tilde{P} \in \mathcal{M}^e(P)$ hogy egy valószínűségi mérték és $\tilde{P} \sim P$. Ez azt jelenti, hogy $\tilde{D} > 0 P$-majdnem mindenütt. Ezért a továbbiakban tegyük fel, hogy $\mathcal{D}^e \cap L^2(P) \neq \emptyset$.

Vezessük be a korábban már említett megengedett kereskedési stratégiák $\tilde{\Theta}(\mathbb{F})$ terét, amely $\mathbb{R}^d$-beli $\mathbb{F}$-mérhető ϑ-kból áll, amelykre a valós érték folyamat $\int \vartheta dX$ egy $\tilde{P}$-martingál a $[0,T]$-n és $\int_0^T \vartheta_t dX_t \in L^2(P)$, és legyen

$$G_T(\tilde{\Theta}(\mathbb{F})) := \left\{ \int\limits_0^T \vartheta_t dX_t \mid \vartheta \in \tilde{\Theta}(\mathbb{F}) \right\}.$$

Tétel: *A* $H \in L^2(\mathcal{F}_T, P)$ *valószínűségi változóra létezik a következő előállítás*

$$H = c^H + \int\limits_0^T \vartheta_t^H dX_T + N^H,$$

ahol $c \in \mathbb{R}, \vartheta^H \in \tilde{\Theta}(\mathbb{F})$, $E\left(N^H\right) = 0$ *és* $E\left(N^H \int_0^T \vartheta_t dX_t\right) = 0\ \forall \vartheta \in \tilde{\Theta}(\mathbb{F})$.

A H igényhez kapcsolódó $J_0(x)$ *hedzselési hiba* a következő:

$$J_0(x) := \min_{\vartheta \in \tilde{\Theta}(\mathbb{F})} E\left(\left(H - x - \int\limits_0^T \vartheta_t dX_t\right)^2\right).$$

Az $x + \int_0^T \vartheta_t dX_t$ jelentése az x kezdeti tőkével vett értéke a T időpontban az önfinanszírozó ϑ stratégiáknak. Így azt a stratégiát találjuk meg, ami adott kezdeti tőkére a

minimális L^2-eltérést adja.
Vezessük be a következő mennyiséget:

$$J_0 = \min_{x \in \mathbb{R}} J_0(x)$$

ami az „optimális” kezdeti tőkéhez tartozó hedzselési hiba.

3. A biztosításmatematikai díjkalkulációs elvek

A biztosítási matematika egyik alapvető kérdése, hogy elfogadható és a gyakorlatban használható elveket határozzon meg a biztosítási díj kiszámításához. Tömören megfogalmazva a díjkalkulációs elv egy szabály ennek a megvalósításához. A matematika nyelvén szólva ez egy függvény, amely minden szerződéshez egy számot rendel, mégpedig azonos káreloszlással rendelkező szerződésekhez ugyanazt a számot, amit biztosítási díjnak nevezünk. Tehát a díjakat tulajdonképpen káreloszlásokhoz rendeljük. Ezt képlettel is megfogalmazhatjuk:
Legyen K a nemnegatív félegyenesre koncentrált eloszlások halmaza. Ekkor a Π díjkalkulációs elv vagy díjelv, ha

$$\Pi : K_\Pi \subseteq K \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}\,.$$

leképezés. Az eloszláshoz rendelt érték az eloszlás díja.

A díjkalkulációs elveket három csoportra oszthatjuk a kiválasztás módszere alapján. Azonban ez nem általánosan elfogadott részekre bontás és egy elv nem csak egyetlen csoporthoz tartozhat.

- Az első az *"ad hoc" módszer*. Az elnevezés abból fakad, hogy az aktuárius saját döntése, hogy melyik elvet használja. Kiválaszt egyet és megvizsgálja, hogy teljesíti-e a kívánt tulajdonságokat.
- A második módszer az előbbinél jóval szigorúbb szabályokon alapul, a *karakterizáló módszer*. Itt először a tulajdonságok listáját határozza meg, amit teljesíteni-e kell a díjkalkulációs elvnek. Ha nem talál olyat, ami teljes egészében jó lenne, akkor azt választja, ami a legkevésbé tér el az elképzelttől.
- A harmadik a *gazdasági módszer*, ahol az aktuárius elfogad egy gazdasági teóriát és az alapján választ díjkalkulációs elvet.

Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{F}^2, \bar{\mathbb{F}}^2, P)$ valószínűségi mezőt, ahol $\mathbb{F}^2 = (\mathcal{F}_t^2)_{0 \le t \le T}$. Ezen értelmezzük a különböző biztosítási károkat. Jelöljük $X, Y, Z, \ldots$-tal az előbb bevezetett valószínűségi mezőn értelmezett nemnegatív valószínűségi változókat. Π-vel jelöljük továbbra is a díjkalkulációs elveket.

Megjegyezzük, hogy $\Pi(X)$ felveheti a $+\infty$ értéket is.

A következőekben felsoroljuk a különböző díjkalkulációs elvek lehetséges tulajdonságait.

1. *Függetlenség*: $\Pi(X)$ csak az X eloszlásfüggvényétől függ.
   Ez a tulajdonság azt mondja, hogy a biztosítási díj csak a kár értékétől és a kár bekövetkezésének valószínűségétől függ, magától a bekövetkezés okától nem.

2. *Indokolt kockázati ráhagyás*: $\Pi(X) \geq E(X)\ \forall X$.
   A biztosítási díjnak legalább akkorának kell lennie mint a károk várható értékének, ellenkező esetben a biztosító csak veszetséges lehet.

3. *Nem indokolt kockázati ráhagyás*: Ha az $X \equiv c$, ahol $c \geq 0$ konstans, akkor $\Pi(X) = c$.
   Ha biztosan tudjuk, hogy a biztosító kifizetése egyenlő a c konstanssal, akkor nincs indokunk több díjat beszedni.

4. *Maximális veszteség*: $\Pi(X) \leq ess \sup(X)$
   A biztosítási díj biztosan kisebb, mint a lehető legnagyobb veszteség.

5. *Transzláció invariancia*: $\Pi(X + a) = \Pi(X) + a\ \forall X$ és $a \geq 0$-ra.
   Ha egy konstans értékkel növeljük a kockázatunkat, akkor a díj is ugyanazzal a konstanssal növekszik.

6. *Skála invariancia*:$\Pi(bX) = b\Pi(X)\ \forall X$ és $b \geq 0$-ra.
   Ha kétszeresére növekszik a kockázatunk, akkor a biztosítási díj is a duplájára emelkedik.
   Ha $2X$ ára nagyobb lenne, mint a az X árának kétszerese, akkor érdemes lenne két különböző biztosítót bevonni.
   Ha pedig olcsóbb lenne a $2X$ ára, mint az X árának kétszerese, az arbitrázslehetőséget biztosítana a biztosítónak azáltal, hogy továbbadja kockázatot két különböző biztosítónak egyenként X áráért.

7. *Additivitás*: $\Pi(X + Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$.

8. *Szubadditivitás*: $\Pi(X+Y) \leq \Pi(X) + \Pi(Y)$.
   Ez a tulajdonság vitatható fontosságú, mivel sértheti az arbitrázsmentességet azáltal, hogy az egyedi kockázatokat külön tekintve nagyobb díjat kérhetünk el, mint a két kockázatot együtt biztosítva. Olyan esetekben, amikor a két kockázat különbiztosítása nem lehetséges, a szabály használata érthető.

9. *Szuperadditivitás*: $\Pi(X+Y) \geq \Pi(X) + \Pi(Y)$.
   A szabály használata abban az esetben indokolt, ha nagyobb kockázat vállalása több költséggel jár.

10. *Független kockázatok additivitása*: $\Pi(X+Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$, ha X és Y függetlenek.
    Erősnek érezhetjük az additivitás szabályát és feltehetjük, hogy az arbitrázsmentesség csak független kockázatokra vonatkozik.

11. *Monotonitás*: Ha $X(\omega) \leq Y(\omega)\ \forall\omega \in \Omega_1$, akkor $\Pi(X) \leq \Pi(Y)$.

12. *Sztochasztikus dominancia*: Legyen $F_X(t) = P(\omega \in \Omega_1 : X(\omega) > t)$. Ekkor ha $F_X(t) \leq F_Y(t)$, akkor $\Pi(X) \leq \Pi(Y)$.

Klasszikus díjkalkulációs elvek közül felsorolunk néhányat:

$$\tilde{u}_1(H) = E(H) + aD^2(H) \quad (1)$$

$$\tilde{u}_2(H) = E(H) + aD(H) \quad (2)$$

$$\tilde{u}_3(H) = E(H)(1+a) \quad (3)$$

$$\tilde{u}_4(H) = \frac{E\left(He^{aH}\right)}{E\left(e^{aH}\right)} \quad (4)$$

Ezek a megfelelő sorrendben: szórásnégyzet elv (1), szórás elv (2), várható érték elv (3) és az Esscher díjkalkulációs elv (4).

Táblázatba foglalhatjuk, hogy ezek a díjkalkulációs elvek a fent felsorolt tulajdonságok közül melyeket teljesítik:

	Név	Szórásnégyzet elv	Szórás elv	Várható érték elv	Esscher elv
1	*Függetlenség*	*igen*	*igen*	*igen*	*igen*
2	*Indokolt ráhagyás*	*igen*	*igen*	*igen*	*igen*
3	*Nem indokolt ráhagyás*	*igen*	*igen*	*nem*	*igen*
4	*Maximális veszteség*	*nem*	*nem*	*nem*	*igen*
5	*Transzláció invariancia*	*igen*	*igen*	*nem*	*igen*
6	*Skála invariancia*	*nem*	*igen*	*igen*	*nem*
7	*Additivitáa*	*nem*	*nem*	*igen*	*nem*
8	*Szubadditivitás*	*nem*	*nem*	*igen*	*nem*
9	*Szuperadditivitás*	*nem*	*nem*	*igen*	*nem*
10	*Függetlenek additivitása*	*igen*	*nem*	*igen*	*nem*
11	*Monotonitás*	*nem*	*nem*	*igen*	*nem*
12	*Sztochasztikus dominancia*	*nem*	*nem*	*igen*	*nem*

1.táblázat: A díjkalkulációs elvek tulajdonságai

Ezek a díjelvek nem veszik számításba a piaci kereskedés lehetőségét. Egy olyan szemléletmóddal alkották meg őket, amelybe nem fér bele a pénzügyi piacon való kereskedés. A díjat a szerződés aláírásakor határozzák meg és ez marad érvényben egészen a szerződés lejáratáig, addig a T időpontig, amíg a biztosító átvállalja a szerződésben rögzített kockázatokat.

A biztosítót számos tényező korlátozza a pénzügyi piacon való kereskedésben, például a törvények, az üzlet költsége, az információk hiánya és az esetleg aránytalanul megnövekvő kockázat. Mi a legfőképpen az utóbb említettre koncentrálunk majd és megvizsgáljuk, hogy milyen hatással van az információ a különböző díjkalkulációs elvekre.

4. A pénzügyi díjkalkulációs elvek

Tekintsünk egy fix, valószínűségi változót, legyen ez $H \in L^2(P)$. Pénzügyi kontextusba helyezve gondolhatunk úgy a H-ra, mint a nettó eredményére néhány származtatott terméknek, mint néhány származtatott termék, például az európai eladási opció nettó eredményére. Biztosítási szemszögből nézve a H-t tekinthetjük úgy, mint a biztosító által kifizetett károk értékének ellentételezése. Felmerül a kérdés, hogy mennyit fizetünk illetve kapunk, ha megvesszük illetve eladjuk a H-t. Ha az utóbbit nézzük, azaz hogy $-H$ egy biztosítási kockázat, akkor egyszerűen alkalmazhatjuk a biztosításmatematikai díjkalkulációs elvek közül az adott helyzetnek megfelelőt. Most legyen H az az igény, amelyet a szórásnégyzet és szórás elv segítségével vizsgálunk. A $aD^2(H)$ és $aD(H)$ részeket gyakran nevezik biztonsági ráhagyásnak. A további számolások megkönnyítésére használjuk a következőt: $Y = -H$. Vegyünk egy u leképezést az Y véletlen változók teréből a valós számok terébe. Az $u(Y)$-t értelmezhetjük az Y-hoz kapcsolódó hasznosságnak. Választhatjuk például a u-t biztosításmatematikai díjkalkulációs elvek egyikének. Ekkor $u_i(Y) = -\tilde{u}_i(H)$. Ezzel:

$$u_1(Y) = E(Y) - aD^2(Y)$$

$$u_2(Y) = E(Y) - aD(Y)$$

Ezek a függvények írják le a biztosító nyereségét. Feltesszük, hogy a biztosító célja maximalizálni $u_i(Y)$-t.
Tekintsük most a pénzügyi piacot két eszközzel, ahol az egyik egy részvény, aminek a diszkontált árfolyamata X_t, a másik pedig egy megtakarítás aminek a diszkontált értékfolyamata konstans és egyenlő eggyel. Feltesszük továbbá, hogy H és Y diszkontált árak és a T időpontban meglévő tőke is az, ahol a diszkontálás a pénzügyi bevezetőben leírtaknak megfelel.

Jelöljük c-vel a biztosító kezdeti tőkéjét, ϑ-val és $\tilde{\vartheta}$-mal egy-egy önfinanszírozó stratégiát és legyen X_t a részvény diszkontált érték folyamata. A H u_i-árát most defíniáljuk úgy, mint a következő egyenlet h_i megoldását.

$$\sup_{\vartheta \in \tilde{\Theta}} u_i \left(c + h_i + \int_0^T \vartheta dX_t - H \right) = \sup_{\tilde{\vartheta} \in \tilde{\Theta}} u_i \left(c + \int_0^T \tilde{\vartheta}_t dX_t \right)$$

A megoldást a tiszta díjnak hívjuk, a maximalizáló ϑ^* stratégia neve pedig az optimális stratégia. Az egyenlet bal oldalán lévő rész a szuprémuma a $c + h_i + \int_0^T dX_t - H$ kifejezésnek, ami egyszerűen c kezdeti tőke plusz a h_i díj összeadva a kereskedésből származó nyereséggel, $\int_0^T \vartheta_t dX_t$-vel, ahol ϑ az önfinanszírozó stratégia, levonva belőle kárigények H értékét. $\tilde{\Theta}$ a megengedett stratégiák tere, amit később defíniálunk. Az egyenlet jobb oldalán álló rész a szuprémuma annak a nyereségnek, amit a kezdeti tőke befektetésével érhetünk el, ha egy önfinanszírozó stratégiát választunk.

Bár a Black-Scholes modell teljes piacot határoz meg, az átfogóbb kép érdekében most nem teljes piacot tekintünk. Jelölje $G_T\left(\tilde{\Theta}\right) = \left\{\int_0^T \vartheta dX_t \mid \vartheta \in \tilde{\Theta}\right\}$ az önfinanszírozó stratégiával nulla kezdeti tőkéből származó pénzügyi nyereség terét. Legyen $\pi(.)$ projekció $L^2(P)$-ben $G_T\left(\tilde{\Theta}\right)$-ra és vezessük be a $1 - \pi(1) = \int_0^T \tilde{\beta} dX$ mennyiséget, amit később az optimális stratégia meghatározásához fogunk használni. Jelöljük $\tilde{P}$-mal a szórásnégyzet optimálizáló martingál mértéket és az egyszerűség kedvéért használjuk az $\tilde{E}$ jelölést az$E_{\tilde{P}}$ várható értékre. Szintén az optimális stratégia leírásához vezessük be $\tilde{Z}_T = \frac{d\tilde{P}}{dP}$-ot. H-t írhatjuk úgy, mint

$$H = \tilde{E}\left(H\right) + \int\limits_0^T \vartheta_t^H dX_t + N^H \tag{5}$$

ahol $\vartheta^H \in \tilde{\Theta}$ és $N^H \in \left(\mathbb{R} + G_T(\tilde{\Theta})^{\perp}\right)$. N^H a nem-hedzselhető része az igénynek.
A H igényt megengedhetőnek hívjuk, ha $N^H = 0$, azaz ha a H leírható egy önfinanszírozó stratégiával.

Két fontos tétel következik, amiben a H igényhez a pénzügyi szórásnégyzet és a szóráselvek segítségével határozzuk meg az árat :

4.1 Tétel: *$H \in L^2(P)$, $c \in \mathbb{R}$, ekkor az u_1-höz kapcsolódó ár a H-ra:*

$$v_1(H) = \tilde{E}\left(H\right) + aD^2\left(N^H\right)$$

és az optimális stratégia:

$$\vartheta^* = \vartheta^H + \frac{1 + D^2\left(\tilde{Z}_T\right)}{2a}\tilde{\beta}$$

4.2 Tétel: *$H \in L^2(P)$, $c \in \mathbb{R}$, ekkor az u_2-hez kapcsolódó ár a H-ra:*

$$v_2(H) = \tilde{E}(H) + a\sqrt{1 - \frac{D^2\left(\tilde{Z}_T\right)}{a^2}}D\left(N^H\right)$$

feltéve, hogy $a^2 \geq D\left(\tilde{Z}_T\right)$. Ha $a^2 < D\left(\tilde{Z}_T\right)$, akkor u_2 nem definiált. Ha $a^2 \geq D\left(\tilde{Z}_T\right)$, akkor az optimális stratégia

$$\vartheta^* = \vartheta^H + \frac{1 + D^2\left(\tilde{Z}_T\right)}{a\sqrt{1 - \frac{D^2\left(\tilde{Z}_T\right)}{a^2}}}D\left(N^H\right)\tilde{\beta}$$

A tételekben szereplő árakat felbonthatjuk két részre, ahol az első H várható értéke a szórásnégyzet optimalizáló martingál mérték alatt, a második pedig egy megtakarítás, ami az igény nem-hedzselhető részének szórásnégyzetéhez kapcsolódik. Ha H megengedhető, akkor mindkét ár $\tilde{E}(H)$, ami egybeseik a H arbitrázsmentes árával. A két árazási elv nem additív. Nézzük meg a H_1 és a H_2 igényekre N^{H_1} és N^{H_2} nem-hedzselhető részekkel. $v_1(H_1 + H_2) = \tilde{E}(H_1) + \tilde{E}(H_2) + aD^2\left(N^{H_1} + N^{H_2}\right)$. Látható, hogy $v_1(H_1 + H_2) = v_1(H_1) + v_1(H_2)$ ha N^{H_1} és N^{H_2} korrelálatlanok. A szóráselvnél a $v_1(H_1 + H_2) \leq v_1(H_1) + v_1(H_2)$ formulát kapjuk, ami pont a szubadditivitás. Ha a két igény egyszerre merül fel, például ha biztosítási kockázatokra gondolunk, akkor ha ugyanarról a veszélyközösségről van szó és ugyanazoknak adunk el valamilyen fajta biztosítást valamint a kockázatok hasonlóak, vagy például ugyanarra az időtartamra vonatkozik a fedezet köre, akkor logikusabb a H_1 a H_2 igényeket együtt tekinteni és egyetlen árat meghatározni hozzájuk. Ha az egyiket, például H_1-et már eladta a viszontbiztosító, akkor a másodikat úgy kell árazni, hogy a kezdeti tőkét, c-t meg kell változtatni a $c + v_i(H_1) - H_1$-re, azaz egy olyan véletlen kezdőtőkével kell dolgozni, ami leírja az első szerződés hatását. Ezzel egy sokkal realisztikusabb eredményt kapunk.

5. A tiszta díj változó filtráció mellett

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy hogyan változik a tiszta kockázati díj ha egy bővebb filtrációt tekintünk, azaz ha több információnk van a biztosítási kockázatról.

Azzal az alapfeltevéssel élünk, hogy a vizsgált kockázataink, a pénzügyi és a biztosítási károk függetlenek egymástól.

Legyen X a részvény diszkontált értékfolyamat az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett, amely adaptált az $\mathbb{F}^1 = (\mathcal{F}_t^1)_{0 \leq t \leq T}$ filtrációhoz. Azt az esetet vizsgáljuk, amikor az $(X, \mathbb{F}_1)$ teljes és arbitrázsmentes.
A biztosítási kockázatot meghatározza az U folyamat és az $\mathbb{F}^2 = (\mathcal{F}_t^2)_{0 \leq t \leq T}$ filtráció. Feltesszük, hogy U_t $\mathcal{F}_T^2$-mérhető. Feltesszük, hogy $\mathcal{F}_t^1$ és $\mathcal{F}_t^2$ sztochasztikusan függetlenek a P mérték szerint az $\mathbb{F}$ filtráció alatt, ahol $\mathbb{F}$ az $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^1 \vee \mathcal{F}_t^2$ által definiált .

Megmutatható, hogy a 4.1 és 4.2 tételekben a tiszta díj csökken, amikor az $\mathbb{F}^2$ filtráció nő, azaz ha több biztosítás matematikai információt veszünk számításba az alacsonyabb díjhoz vezet. (A [2] hivatkozásban részletesebben megtekinthető.)

Definiáljunk a tiszta díjhoz határokat a két díjkalkulációs elvet használva!

- A szórásnégyzet elvhez a felső és az alsó határ a következő:

$$v_{1,max}(H) = \tilde{E}\left(H\right) + aE\left(D^2\left(H \mid \mathcal{F}_T^1\right)\right)$$

$$v_{1,min}(H) = \tilde{E}\left(H\right) + a_1 D^2\left(\tilde{E}\left(H \mid \mathcal{F}_T^2\right)\right)$$

ahol $a_1 = \frac{a}{E\left(\tilde{Z}_T^2\right)} \leq a$

- A szórás elvhez a határok a következőek:

$$v_{2,max}(H) = \tilde{E}\left(H\right) + a_2\sqrt{E\left(D^2\left(H \mid \mathcal{F}_T^1\right)\right)}$$

$$v_{2,min}(H) = \tilde{E}\left(H\right) + a_3\sqrt{D^2\left(\tilde{E}\left(H \mid \mathcal{F}_T^1\right)\right)}$$

ahol $a_2 = \sqrt{1 - \frac{D^2[\widetilde{Z}_T]}{a^2}}$ és $a_3 = \frac{a_2}{\sqrt{E[\widetilde{Z}_T^2]}}$.

Ezeknek a korlátozó értékeknek a meghatározásához csak a várható értékekre és a szórásnégyzetekre van szükségünk, ezért számításuk egyszerűnek mondható. Az a érték megválasztása nagyban befolyásolhatja kapott eredményeket, de az biztosítónként változó lehet, ezért a kapott eredmények igen különbözőek lehetnek ha más és más biztosítót tekintünk.

6. Hedzselés különböző filtrációk mellett

Ebben a részben megvizsgáljuk, hogy hogyan viselkedik a hedzselési hiba két különböző filtráció mellett.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ egy teljes, filtrált valószínűségi tér, ahol az $\mathbb{F}$ filtráció rendelkezik a szokásos tulajdonságokkal, $\mathcal{F}_0$ a triviális filtráció és $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. Legyen X egy d-dimenziós szemimartingál $\mathbb{F}$-re. Vezessünk be egy kisebb filtrációt, $\mathbb{F}^0 \subseteq \mathbb{F}$, ami szintén rendelkezik a szokásos tulajdonságokkal és X adaptált $\mathbb{F}^0$-ra. Így X $\mathbb{F}^0$-szemimartingál is. Tegyük fel továbbá, hogy $\mathcal{F}_T^0 = \mathcal{F}_T$. $\mathbb{F}^0$ a megszorítása a stratégiák terének.
A $\mathcal{D}^e \cap L^2(P) \neq \emptyset$ feltevés most is érévnyben marad.
A korábbiakhoz hasonlóan legyenek $T_1 \leq T_2 \leq T$ $\mathbb{F}^0$-megállási idők, ahol az X^{T_2} megállítási folyamat korlátos, és legyen h egy korlátos $\mathbb{R}^d$-beli $\mathcal{F}_{T_1}^0$-mérhető véletlen változó. Legyen $\nu\left(\mathbb{F}^0\right)$ $f = h^{'}(X_{T_2} - X_{T_1})$ alakban felírt sztochasztikus integrálok által meghatározott tér. Nyílvánvaló, hogy $\nu\left(\mathbb{F}^0\right) \subseteq \nu\left(\mathbb{F}\right)$. Belátható, hogy a $\tilde{P}$ szórásnégyzet optimalizáló martingál mérték létezik $\mathbb{F}$ alatt.

Vezessük be a $\tilde{\Theta}\left(\mathbb{F}^0\right)$ teret, amely az $\mathbb{F}^0$- mérhető ϑ folyamatok tere, ahol $\int \vartheta dX$ $\tilde{P}^0$-martingál és $\int_0^T \vartheta dX \in L^2(P)$.
Tegyük fel, hogy $\vartheta \in \tilde{\Theta}\left(\mathbb{F}^0\right)$ és belátható, hogy $\tilde{\Theta}\left(\mathbb{F}^0\right) \subseteq \tilde{\Theta}\left(\mathbb{F}\right)$, így $\vartheta \in \tilde{\Theta}\left(\mathbb{F}\right)$.

A kérdés, amire választ szeretnénk kapni, az az, hogy mit mondhatunk a $J_0(\mathbb{F}, x)$ és a $J_0(\mathbb{F}^0, x)$ hedzselési hibák közötti különbségről, ahol a következőképpen definiálhatjuk a hibát:

$$J_0\left(\mathbb{G}, x\right) := \min_{\vartheta \in \tilde{\Theta}(\mathbb{G})} E\left(\left(H - x - \int_0^T \vartheta_t dX_t\right)^2\right),$$

ahol $\mathbb{G} \in \left\{\mathbb{F}, \mathbb{F}^0\right\}$,$H \in L^2\left(P, \mathcal{F}_T\right)$.

Lemma: *Tegyük fel, hogy a $G_T\left(\tilde{\Theta}\left(\mathbb{F}^0\right)\right)$ és a $G_T\left(\tilde{\Theta}\left(\mathbb{F}\right)\right)$ lineáris terek zártak.*
Ekkor

$$J_0(\mathbb{F}^0, 0) - J_0(\mathbb{F}, 0) = E\left(\left(\int_0^T \left(\tilde{\vartheta}_t^{H,0} - \tilde{\vartheta}_t^H\right) dX_t\right)^2\right) \geq 0.$$

Következmény: *Tegyük fel, hogy* $\mathcal{D}^e(\mathbb{F}) \cap L^2(P) \neq \emptyset$.

Ekkor igaz, hogy $D^2\left(N^{H,0}\right) \geq D^2\left(N^H\right)$.

Tehát azt kaptuk , hogy a nem-hedzselhető rész szórásnégyzete $\mathbb{F}^0$ esetében nagyobb, azaz a kockázatunk növekszik kisebb filtráció mellett.

7. Egyesített tér

7.1. A tér definiálása

Két valószínűségi teret határozunk meg, az egyik a pénzügyi piac, a másik a biztosítási kockázatok tere. Ebből a kettőből szeretnénk egy általános valószínűségi teret meghatározni, amiben a kétfajta szemlélet összefonódik, tehát jelen van benne a pénzügyi és a biztosítási kockázat egyaránt.
Ebben a pontban, csak úgy mint a következő háromban bizonyítás nélkül közöljük azokat a legfontosabb állításokat, tételeket, amelyek a terek egyesítésének martingálokra vonatkozó következményeit leírják. Mivel ezek a tételek alapvetően technikai jellegűek, ezért nem térünk ki a bizonyításokra, ezek a [2] hivatkozásban találhatóak meg.

Definiáljuk a két valószínűségi teret a két kockázatunkhoz:

1. Jelölje $(\Omega_1, \mathcal{F}^1, P_1)$ pénzügyi kockázatok terét egy $\bar{\mathbb{F}}^1 = (\mathcal{F}_t^1)_{0 \leq t \leq T}$ filtrációval, amely teljesíti a szokásos feltételeket, azaz teljes és jobbról folytonos. Feltesszük, hogy az $\bar{\mathcal{F}}_0^1$ triviális σ-algebra, $\mathcal{F}^1 = \bar{\mathcal{F}}_T^1$ és lefixáljuk a T véges időintervallumot. Egy tisztán pénzügyi kockázat egy véletlen változó, melyre $H^{(1)} \in L^2\left(P_1, \bar{\mathcal{F}}_T^1\right)$.

2. Legyen $(\Omega_2, \mathcal{F}^2, P_2)$ egy teljes, filtrált valószínűségi mező a jobbról folytonos, de nem feltétlenül teljes $\bar{\mathbb{F}}^2$ filtrációval. Itt $\bar{\mathcal{F}}_0^2$ nem feltétlenül triviális σ-algebra. Egy tisztán biztosítási kockázat egy véletlen változó, melyre $H^{(2)} \in L^2\left(P_2, \bar{\mathcal{F}}_T^2\right)$.

Azzal az alapfeltevéssel élünk, hogy a pénzügyi piac sztochasztikusan független a többi vizsgált kockázattól.

A két tér egyesítéséhez vezessük be az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ teret, mint az $(\Omega, \mathcal{F}^1, \bar{\mathbb{F}}^1, P)$ és az $(\Omega, \mathcal{F}^2, \bar{\mathbb{F}}^2, P)$ terek szorzatát. Legyen $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $P = P_1 \otimes P_2$, így kapunk egy teljes valószínűségi teret.
Vezessük be az $\mathcal{N}$ szigma-algebrát, amely az $\mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2$ nullahalmazainak a részhalmazai által generált:

$$\mathcal{N} = \sigma\left\{F \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 \mid \exists G \in \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2 : F \subset G, \left(P^1 \otimes P^2\right)(G) = 0\right\}.$$

Ezzel már tekinthetjük az $\mathcal{F}$-et, amit a következőképpen írunk fel:

$$\mathcal{F} = \left(\mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2\right) \vee \mathcal{N}.$$

Definiáljuk az $\mathbb{F}^1$-et és $\mathbb{F}^2$-t a szorzattéren a következőkkel:

$$\mathcal{F}_t^1 = \left(\bar{\mathcal{F}}_t^1 \otimes \{\emptyset, \Omega_2\}\right) \vee \mathcal{N},$$

$$\mathcal{F}_t^2 = \left(\{\emptyset, \Omega_1\} \otimes \bar{\mathcal{F}}_t^2\right) \vee \mathcal{N}.$$

Ezek alapvetően ugyanazt az információ mennyiséget hordozzák, mint az $\bar{F}_1$ és az $\bar{F}_2$.

Lemma:

1. *$\bar{F}_1$ és $\bar{F}_2$ teljesítik a szokásos feltételeket.*
2. *$\bar{F}_1$ és $\bar{F}_2$ függetlenek.*
3. *Az $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ az $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^1 \vee \mathcal{F}_t^2$ által defíniált filtráció teljesíti a szokásos feltételeteleket. Továbbá:*

$$\mathcal{F}_t = \left(\bar{\mathcal{F}}_t^1 \otimes \bar{\mathcal{F}}_t^2\right) \vee \mathcal{N}.$$

.

Lemma: *Tegyük fel, hogy $\bar{X}$ folytonos szemimartingál az $\left(\Omega_1, \mathcal{F}^1, \bar{\mathbb{F}}^1, P_1\right)$ téren, mely rendelkezik az $\bar{X} = \bar{X}_0 + \bar{M} + \bar{A}$ kanonikus felbontással. Ekkor X egy folytonos szemimartingál az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ téren az $X = X_0 + M + A$ felbontással.*

Tétel: *Legyen $\hat{P}_1$ és $\hat{P}_2$ a minimális és a szórásnégyzet optimalizáló martingál mérték $\bar{X}$-hez, $\tilde{P}$ pedig a szórásnégyzet optimalizáló martingál mérték X-hez.*
Ekkor

1. *A $\hat{P}$ minimális martingál mérték az X-hez a következőképpen írható: $\hat{P} = \hat{P}_1 \otimes P_2$.*
2. *A $\tilde{P}$ szórásnégyzet optimalizáló martingál mérték az X-hez a következőképpen írható: $\tilde{P} = \tilde{P}_1 \otimes P_2$.*

Következmény: *Tegyük fel, hogy* $\left(\bar{X}, \bar{F}^1\right)$*-hez tartozó martingál mérték létezik és egyértelmű. Ekkor* $\tilde{P} = \hat{P}$*.*

Mivel a két fajta kockázat független, ezért a a minimális és a szórásnégyzet optimalizáló martingál mérték nem függ az $\bar{\mathbb{F}}^2$ választásától az $(\Omega_2, \mathcal{F}^2, P_2)$ téren. Ezért változtathatjuk az $\bar{\mathbb{F}}^2$-et anélkül, hogy ez hatással lenne a két martingál mértékre, tehát a szórásnégyzet optimalizáló martingál mérték megegyezik az $\mathbb{F}_1$ és az $\mathbb{F}$ alatt.

7.2. Az „ utolsó pillanatban " érkező információ esete

Ebben és a következő részben a $H = c^H + \int_0^T \vartheta_t^H dX_T + N^H$ részeinek meghatározásával foglalkozunk speciális esetekben.

Tekintsük azt az $\bar{\mathbb{F}}^2 = \left(\bar{\mathcal{F}_t}^2\right)_{0 \le t \le T}$ filtrációt, ami a következőképpen van megadva:

$$\bar{\mathcal{F}}_t^2 = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega_2\} & t < T, \\ \mathcal{F}^2 & t = T. \end{cases}$$

Ez annak felel meg, mintha a viszontbiztosító nem kapna információt a kockázatokról a $[0, T)$ időintervallumban.

Ekkor a következő tételt fogalmazhatjuk meg a dekompozícióra:

7.2.1 Tétel: *Tegyük fel, hogy* $\bar{\mathbb{F}}^2$ *az előzőekben magadott és hogy az* $\left(\bar{X}, \bar{\mathbb{F}}^1\right)$ *tér teljes. Ekkor* $H \in L^2(P, \mathcal{F}_T)$ *esetén az* $H = c^H + \int_0^T \vartheta_t^H dX_T + N^H$ *megadható a következőképpen:*

$$N^H = H - E_{\tilde{P}}\left(H \mid \mathcal{F}_T^1\right) = H - E_P\left(H \mid \mathcal{F}_T^1\right),$$

és ϑ^H *meghatározható, mint*

$$E_{\tilde{P}}\left(H \mid \mathcal{F}_T^1\right) = H_0 + \int_0^T \vartheta_t^H dX_t,$$

ahol H_0 *valamilyen konstans.*

7.3. A „ független, folyamatosan növekvő " ismeretek esete

Ezt az esetet egy példán keresztül vizsgáljuk meg.
Legyen $\mathbb{F}^1 = \mathbb{F}^{W^{(1)}}$és $\mathbb{F}^2 = \mathbb{F}^{W^{(2)}}$, ahol $W^{(1)}$ és $W^{(2)}$ független standard Wiener-folyamatok az $(\Omega, \mathcal{F})$ téren és tegyük fel, hogy $X = W^{(1)}$. Tekintsük a H-t a következő formában:

$$H = \int_0^T \vartheta_t^{(2)} dW_t^{(1)} + \int_0^T \vartheta_t^{(1)} dW_t^{(2)},$$

ahol $\vartheta^{(i)}$ $\mathbb{F}^i$-mérhető. A triviális estben vizsgáltakra a mostani megoldásunk a következő:

$$N^H = \int_0^T \left(\vartheta_t^{(2)} - E\left(\vartheta_t^{(2)}\right)\right) dW_t^{(1)} + \int_0^T \vartheta_t^{(1)} dW_t^{(2)}.$$

7.4. A „ kezdettől ismert " biztosítási kockázat esete

Ebben az esetben azt vizsgáljuk, amikor az $\bar{\mathbb{F}}^2$ az $\bar{\mathcal{F}}_t^2 = \mathcal{F}^2$, $0 \leq t \leq T$ által definiált. Ebből következik, hogy $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^1 \vee \mathcal{F}_T^2$. Tehát ez az az eset, amikor minden információ rendelkezésre áll a biztosítási kockázatokról már a 0 időpillanatban.

7.4.1 Tétel: *Tegyük fel, hogy $\bar{\mathbb{F}}^2$az előzőek alapján adott és hogy az $\left(\bar{X}, \bar{\mathbb{F}}^1\right)$ tér teljes. Ekkor a $H \in L^2\left(P, \mathcal{F}_T\right)$ a következő egyértelmű dekompozícióval felírható:*

$$H = \tilde{H}_0 + \int_0^T \vartheta_t^H dX_t,$$

ahol $\tilde{H}_0 \in L^2\left(P, \mathcal{F}_0\right)$ és $\vartheta^H \in \tilde{\Theta}\left(\mathbb{F}\right)$.

8. A nem-hedzselhető rész változása

Vezessük be az $\bar{\mathbb{F}}^{2,0} \subseteq \bar{\mathbb{F}}^2$ filtrációkat a biztosítási kockázathoz. Az pénzügyi piac $\bar{\mathbb{F}}^1$ filtrációját rögzítsük le és készítsük el a megfelelő $\mathbb{F}^0 \subseteq \mathbb{F}$ filtrációt a szorzattéren. A $\mathcal{D}^e\left(\bar{\mathbb{F}}^1\right) \cap L^2(P_1) \neq \emptyset$ feltevés garantálja, hogy a

$$\mathbb{R} + G_T\left(\tilde{\Theta}\left(\mathbb{F}\right)\right) = \left\{c + G_T\left(\vartheta\right) \mid c \in \mathbb{R},\ \vartheta \in \tilde{\Theta}(\mathbb{F})\right\}$$

tér zárt az $L^2\left(P\right)$-ben. A $\mathbb{R} + G_T\left(\tilde{\Theta}\left(\mathbb{F}^0\right)\right)$ esetében hasonlót mondhatunk el. Ez garantálja a $H = c^H + \int_0^T \vartheta_t^H dX_T + N^H$ dekompozíció létezését az $\mathbb{F}^0$ és az $\mathbb{F}$ filtrációk alatt.

A következő lemma azt mutatja, hogy a nem-hedzselhető része az H igénynek (N^H illetve$N^{H,0}$) nő, amikor az $\mathbb{F}$ filtrációt kisebb $\mathbb{F}^0$ filtrációra cseréljük.

Lemma: *Jelentse az N^H és az $N^{H,0}$ a nem-hedzselhető részét a H-nak az $\mathbb{F}$ illetve az $\mathbb{F}^0$ filtrációk alatt.*

Ekkor

$$D^2\left(N^{H,0}\right) \geq D^2\left(N^H\right).$$

9. Határok a tiszta díjhoz

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy milyen intervallumban mozoghat a tiszta díj.

Az előző szakasz eredményei alapján határokat határozhatunk meg a valós díjhoz a korábban említett pénzügyi árazási elveket figyelembe véve. Az előző szakaszban bevezetett szorzattéren vizsgálódunk. Az $\bar{F}^1$ filtrációt lefixáljuk. Azzal a feltevéssel élünk, hogy a pénzügyi piac teljes.
Alsó és felső korlátot határozunk meg a díjhoz minden lehetséges filtrációra az $(\Omega_2, \mathcal{F}^2)$ téren a biztosítási kockázathoz és bevezetünk egy minimális és egy maximális filtrációt a téren. A minimális filtráció esetében kapjuk meg a felső korlátot, ami megfelel annak, hogy a szerződés eladója nem kap információt a biztosítási kockázatról, az alsó korlátot pedig úgy kapjuk, hogy az eladás pillanatában minden információ rendelkezésre áll.

Az $\bar{\mathbb{F}}^2$ filtrációra az$(\Omega_2, \mathcal{F}^2)$-téren , ahol $\bar{\mathcal{F}}^2_T = \mathcal{F}^2$, azt kapjuk, hogy $\bar{\mathbb{G}}^0 \subseteq \bar{\mathbb{F}}^2 \subseteq \bar{\mathbb{G}}$, ahol $\bar{\mathbb{G}}^0$ a triviális filtráció és a következőképpen van megadva:

$$\bar{\mathcal{G}}^0_t = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega_2\} & t < T \\ \mathcal{F}^2 & t = T \end{cases}$$

és ahol a $\bar{\mathbb{G}}$ a $\bar{\mathcal{G}}_t = \mathcal{F}^2$ minden $t \in [0, T]$. $\bar{\mathbb{G}}^0$ a minimális filtráció az $(\Omega_2, \mathcal{F}^2)$-en, amely teljesíti, hogy $\bar{\mathcal{G}}^0_T = \mathcal{F}^2$. $\bar{\mathbb{G}}$ a maximális filtáció az $(\Omega_2, \mathcal{F}^2)$ téren ahol $\bar{\mathcal{G}}_T = \mathcal{F}^2$. Vezessük be a megfelelő teljes és jobbról foyltonos filtrációkat: $\mathbb{G}^0 := \bar{\mathbb{F}}^1 \otimes \bar{\mathbb{G}}^0$ és $\mathbb{G} := \bar{\mathbb{F}}^1 \otimes \bar{\mathbb{G}}$.
Az előző fejezet eredményeit felhasználva megkapjuk a felső határt a pénzügyi szórásnégyzet elvhez a $\mathbb{G}^0$ minimális filtráción , az alsó határt pedig a $\mathbb{G}$ maximális filtráción. Használva a 7.2.1 tételt kapjuk, hogy a felső határ a valós díjhoz a szórásnégyzet elvvel a következő:

$$\begin{aligned} v_{1,max}(H) &= \tilde{E}(H) + aD^2\left(H - E\left(H \mid \mathcal{F}^1_T\right)\right) \\ &= \tilde{E}(H) + aE\left(D^2\left(H \mid F^1_T\right)\right). \end{aligned}$$

Az alsó határ vizsgálatához meg kell jegyeznünk, hogy a 7.4.1 tételben szereplő $(X, \mathbb{G})$

teljes és így bármely $H \in L^2(P, \mathcal{F}_T)$-hez létezik a következő dekompozíció:

$$H = \tilde{H}_0 + \int_0^T \vartheta_t^H dX_t,$$

ahol $\tilde{H}_0 = E[H \mid \mathcal{G}_0]$. Ezt úgy írhatjuk, hogy

$$H = c^H + \int_0^T \vartheta_t^H dX_t + L_T^{H,\tilde{P}},$$

ahol $c^H = \tilde{E}[H]$ és $L_t^{H,\tilde{P}} = \tilde{E}[H \mid \mathcal{G}_0] - \tilde{E}[H]$, $t \in [0,T]$. Vezessük be a $\tilde{Z}_t = \tilde{E}\left(\tilde{D} \mid \mathcal{F}_t\right)$ jelölést, ahol $\tilde{D} = \frac{d\tilde{P}}{dP}$. Emlékeztetőül megjegyezzük, hogy P a valószínűségi téren értelmezett mérték, $\tilde{P}$ pedig a szórásnégyzet optimalizáló martingál mérték.
További összefüggéseket használva megkaphatjuk, hogy az alsó határ a valós díjhoz a szórásnégyzet elv mellett a következő:

$$v_{1,min}(H) = \tilde{E}(H) + \frac{a}{E\left(\tilde{Z}_T^2\right)} D^2\left(\tilde{E}(H \mid \mathcal{G}_0)\right).$$

A standard szóráselvhez a megfelelő határok a következőek:

$$v_{2,max} = \tilde{E}(H) + a\sqrt{1 - \frac{D^2\left(\tilde{Z}_T\right)}{a^2}}\sqrt{E\left(D^2\left(H \mid \mathcal{F}_T^1\right)\right)},$$

$$v_{2,min} = \tilde{E}[H] + a\sqrt{1 - \frac{D^2\left(\tilde{Z}_T\right)}{a^2}}\sqrt{\frac{D^2\left(\tilde{E}(H \mid \mathcal{G}_0)\right)}{E\left(\tilde{Z}_T^2\right)}}.$$

Tétel: *Tegyük fel, hogy a pénzügyi piac teljes és a $\mathcal{D}^e\left(\bar{\mathbb{F}}^1\right) \cap L^2(P_1) \neq \emptyset$ teljesül. A $H \in L^2(P)$ igényhez és az biztosítási kockácat $\bar{\mathbb{F}}^2$filtrációjához a $v_i(H)$ valós díj teljesíti a*

$$v_{i,min}(H) \leq v_i(H) \leq v_{i,max}(H)$$

egyenlőtlenséget, ahol $i = 1, 2$ lehet és $v_{i,min}$ és $v_{i,max}$ az előbb meghatározottak.

A biztosítási kockázat egy adott filtrációjához a döntő $H = c^H + \int_0^T \vartheta_t^H dX_T + N^H$ dekompozíció túl bonyolult lehet és nehéz kiszámolni a megfelelő valós díjat. Az előző tétel fontos információkat nyújthat a valós díjról. Továbbá ezeket a határokat viszonylag egyszerű módon ki lehet számolni, mivel csak várható értékeket és a szórásnégyzeteket tartalmaznak.

Meghatározhatjuk a $H = c^H + \int_0^T \vartheta_t^H dX_T + N^H$-ban szereplő ϑ^H-folyamatot a minimális és a maximlis filtrációhoz abban az esetben, amikor a az igény a $H = H^{(1)} H^{(2)}$ alakban van megadva, ahol $H^{(1)}, H^{(2)} \in L^2(P) \cap L^2\left(\tilde{P}\right)$, $H^{(1)}$ $\mathcal{F}_T^1$-mérhető, $H^{(2)}$ $\mathcal{G}_0$-mérhető. Mivel $\left(\bar{X}, \bar{\mathbb{F}}^1\right)$ teljes, $H^{(1)} = H_0^{(1)} + \int_0^T \xi_t^{H^{(1)}} dX_t$ konstans $H_0^{(1)}$-lal előrejelezhető $\xi^{H^{(1)}}$folyamattal, ahol $\int \xi^{H^{(1)}} dX$ egy négyzetesen integrálható $\tilde{P}$-martingál. A minimális filtrációra a kapottak alapján igaz, hogy $\vartheta_t^H = \tilde{E}\left(H^{(2)}\right) \xi_t^{H^{(1)}}$ és a maximális filtrációra egy korábbi tétel alapján adódik, hogy $\vartheta_t^H = H^{(2)} \xi_t^{H^{(1)}}$.

10. Az információ változásának hatásai

Gyakran használt feltevés a biztosítási veszteségek elemzése során, hogy a kárigények Poisson-folyamat szerint érkeznek. Ezt az analógiát követve megvizsgáljuk, hogy hogyan függ a biztosítási díj a kockázatról kapott információ mennyiségétől.

Tekintsük a 2. fejezetben bevezetett Black-Scholes piacot, amely két eszközt tartalmaz, amiknek az értékfolyamata a következőképpen van megadva:

$$B_t = e^{rt}$$

$r > 0$, és

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_u du + \int_0^t \sigma S_u dW_u,$$

ahol $S_0, \mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma \in (0, \infty)$. Vezessük be a $\nu = (\mu - r)/\sigma$ jelölést. Ezzel együtt tekintsünk egy λ-paraméterű N_t Poisson-folyamatot az $(\Omega_2, \mathcal{F}^2, P_2)$ valószínűségi téren. N_t leírja a biztosítási kárszámfolyamatot. A korábbi feltevésekkel összhangban most is függetlenek a pénzügyi és a biztosítási kockázatok.
Feltételezzük, hogy

$$\bar{\mathcal{F}}_t^2 = \bar{\mathcal{F}}_t^N = \sigma\{N_u, u \leq t\}$$

és továbbá hogy $\mathcal{F}^2 = \bar{\mathcal{F}}_T^N$. Az N és az X folyamatokat a már definiált szorzattéren értelmezzük és definiálhatjuk az $\mathbb{F}^1$ és $\mathbb{F}^2$ filtrációkat.

Most tekintsük kárigénynek a következőt:

$$H = N_T X_T$$

ami jelentheti például, hogy a kárfolyamat ingadozásait, változásait is figyelembe vesszük, amit az X ír le.
Négy különböző esetben vizsgáljuk a tiszta díjat és az optimális stratégiát a viszontbiztosító szemszögéből. Mindegyik esetben a $(\Omega_2, \mathcal{F}^2)$ térhez kapcsolódó egy-egy speciális filtrációt tekintünk, ami leírja a rendelkezésre álló információmennyiséget.

1. A triviális filtráció az $\bar{\mathbb{F}}^{2,0} = \left(\bar{\mathcal{F}}_t^2\right)_{0 \leq t \leq T}$, ahol $\bar{\mathcal{F}}_t^{2,0} = \{\emptyset, \Omega_2\}$, $0 \leq t \leq T$ és $\bar{\mathcal{F}}_T^{2,0} = \bar{\mathcal{F}}_T^N$. Ez az az eset, amikor a viszontbiztosítónak nincs információja a Poisson-folyamatról a T időpont előtt.

2. Szakaszonként konstans filtráció $\bar{\mathbb{F}}^{2,p} = \left(\bar{\mathcal{F}}_t^{2,p}\right)_{0 \leq t \leq T}$, ahol $\bar{\mathcal{F}}_t^{2,0} = \{\emptyset, \Omega_2\}$, $0 \leq t \leq t_0$, $\bar{\mathcal{F}}_t^{2,p} = \bar{\mathcal{F}}_{t_0}^N$, $t_0 \leq t \leq T$ és $\bar{\mathcal{F}}_T^{2,p} = \bar{\mathcal{F}}_T^N$. Ekkor az információ egy fix t_0 időpontban válik elérhetővé a $[0, T]$ időintervallumban.

3. Az $\bar{\mathbb{F}}^2 = \left(\bar{\mathcal{F}}_t^2\right)_{0 \leq t \leq T}$ filtrációt fentebb definiáltuk, ez a természetes filtrációja az N Poisson-folyamatnak. Ez azt jeneti, hogy a viszontbiztosító megfigyeli a folyamatot a $[0, T]$ intervallumban.

4. $\bar{\mathbb{F}}^{2,r} = \left(\bar{\mathcal{F}}_t^{2,r}\right)_{0 \leq t \leq T}$ filtráció, ahol $\bar{\mathcal{F}}_T^{2,r} = \bar{\mathcal{F}}_T^N$, $0 \leq t \leq T$, az az eset, amikor a viszontbiztosító már a szerződéskötéskor, a 0 időpillanatban tudja, hogy hogyan fog alakulni a Poisson-folyamat.

A fenti négy esethez vezessük be szorzattéren a megfelelő filtrációkat: $\mathbb{F}^0 = \bar{\mathbb{F}}^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}^{2,0}$, $\mathbb{F}^p = \bar{\mathbb{F}}^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}^{2,p}$,$\mathbb{F} = \bar{\mathbb{F}}^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}^2$, $\mathbb{F}^r = \bar{\mathbb{F}}^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}^{2,r}$.

A könnyebb írásmód kedvéért használjuk a következő jelöléseket: $\tilde{Z} = E_{\tilde{P}_1}\left[\frac{d\tilde{P}_1}{dP_1} \mid \bar{\mathbb{F}}^1\right]$ és $\tilde{\zeta} = -\sup \exp\left(-\int \lambda dX\right) e^{\nu^2 T}\lambda$.

1.eset:

$$N_t^{(2),0} := \tilde{E}\left(N_T \mid \mathcal{F}_t^0\right) = \begin{cases} \lambda T & t < T \\ N_T & t = T \end{cases}$$

$$J_0\left(\mathbb{F}^0\right) = E\left(X_T^2\right) D^2\left(N_T\right) = \lambda T X_0^2 e^{2(\mu - r)T + \sigma^2 T}$$

amiből azt kapjuk, hogy a tiszta díj

$$v_1^0\left(H\right) = \lambda T X_0 + a\lambda T X_0^2 e^{2(\mu - r)T + \sigma^2 T}.$$

Az optimális stratégia a következő:

$$\vartheta_t^* = \lambda T + \frac{\tilde{Z}_t \lambda_t}{2a}.$$

Az első része írja le a $[0, T]$ időintervallum alatt bekövetkező kárigények feltételes várható értékét, amikor nincs információ a bekövetkezésről csak a T időpillanatban. A második rész a pénzügyi díjszámítási elvhez kapcsolódik.

2.eset:

$$N_t^{(2),p} := \tilde{E}\left(N_T \mid \mathcal{F}_t^p\right) = \begin{cases} \lambda T & t < t_0 \\ N_{t_0} + \lambda\left(T - t_0\right) & t_0 \leq t < T \\ N_T & t = T \end{cases}$$

$$J_0\left(\mathbb{F}^p\right) \;=\; \lambda t_0 X_0^2 e^{-\nu(T-t_0)+2(\mu-r)t_0+\sigma^2 t_0} + \lambda\left(T-t_0\right) X_0^2 e^{2(\mu-r)T+\sigma^2 T}$$

A tiszta díj:

$$v_1^p\left(H\right) = \lambda T X_0 + a\left(\lambda t_0 X_0^2 e^{-\nu(T-t_0)+2(\mu-r)t_0+\sigma^2 t_0} + \lambda\left(T-t_0\right) X_0^2 e^{2(\mu-r)T+\sigma^2 T}\right)$$

.

Az optimális stratégia:

$$\vartheta_t^* = \begin{cases} \lambda T + \frac{\tilde{Z}_t \lambda_t}{2a} & t \leq t_0 \\ N_{t_0} + \lambda\left(T-t_0\right) - \tilde{\zeta} X_{t_0}\left(N_{t_0} - \lambda t_0\right) + \frac{\tilde{Z}_t \lambda_t}{2a} & t_0 < t < T. \end{cases}$$

A t_0 időpontig a stratégia megegyezik azzal, amit az első esetben láttunk, majd a viszontbiztosító a kapott információnak megfelelően alakítja a stratégiáját. Az $N_{t_0} + \lambda\left(T-t_0\right)$ a feltételes várható értéke a t_0 után bekövetkező károknak, $X_{t_0}\left(N_{t_0} - \lambda t_0\right)$ a különbség a becslésben az $N_T X_T$-re vonatkozóan.

3.eset:

$$N_t^{(2)} := \tilde{E}\left(N_T \mid \mathcal{F}_t\right) = N_t + \lambda\left(T-t\right) = \lambda T + N_t - \lambda t$$

A hedzselési hibára a következőt kapjuk:

$$J_0\left(\mathbb{F}\right) \;=\; \lambda e^{-\nu^2 T} X_0^2 \frac{1}{\nu^2 + 2\left(\alpha - r\right) + \sigma^2}\left(e^{\left(\nu^2+2(\mu-r)+\sigma^2\right)T} - 1\right).$$

Ebből a tiszta díj:

$$v_1\left(H\right) = \lambda T X_0 + a\frac{\lambda e^{-\nu^2 T} X_0^2}{\nu^2 + 2\left(\mu - r\right) + \sigma^2}\left(e^{\left(\nu^2+2(\mu-r)+\sigma^2\right)T} - 1\right).$$

Az optimális stratégia:

$$\vartheta_t^* = N_{t-} + \lambda (T - t) - \tilde{\zeta}_t \int_0^{t-} \tilde{Z}_s^{-1} X_s dM_s^u + \frac{\tilde{Z}_t \lambda_t}{2a}.$$

Ebből a $N_{t-} + \lambda (T - t)$ rész a $t$előtt bekövetkező károk számának feltételes várható értéke, az integrál pedig a változás a viszontbiztosító előrejelzésének a változása a károk várható értékében.

4.eset:

$$N_t^{(2),r} := \tilde{E} \left(N_T \mid \mathcal{F}_t^r \right) = N_T.$$

A hedzselési hiba:

$$J_0 \left(\mathbb{F}^r \right) = e^{-\nu^2 T} X_0^2 \lambda T,$$

A tiszta díj így:

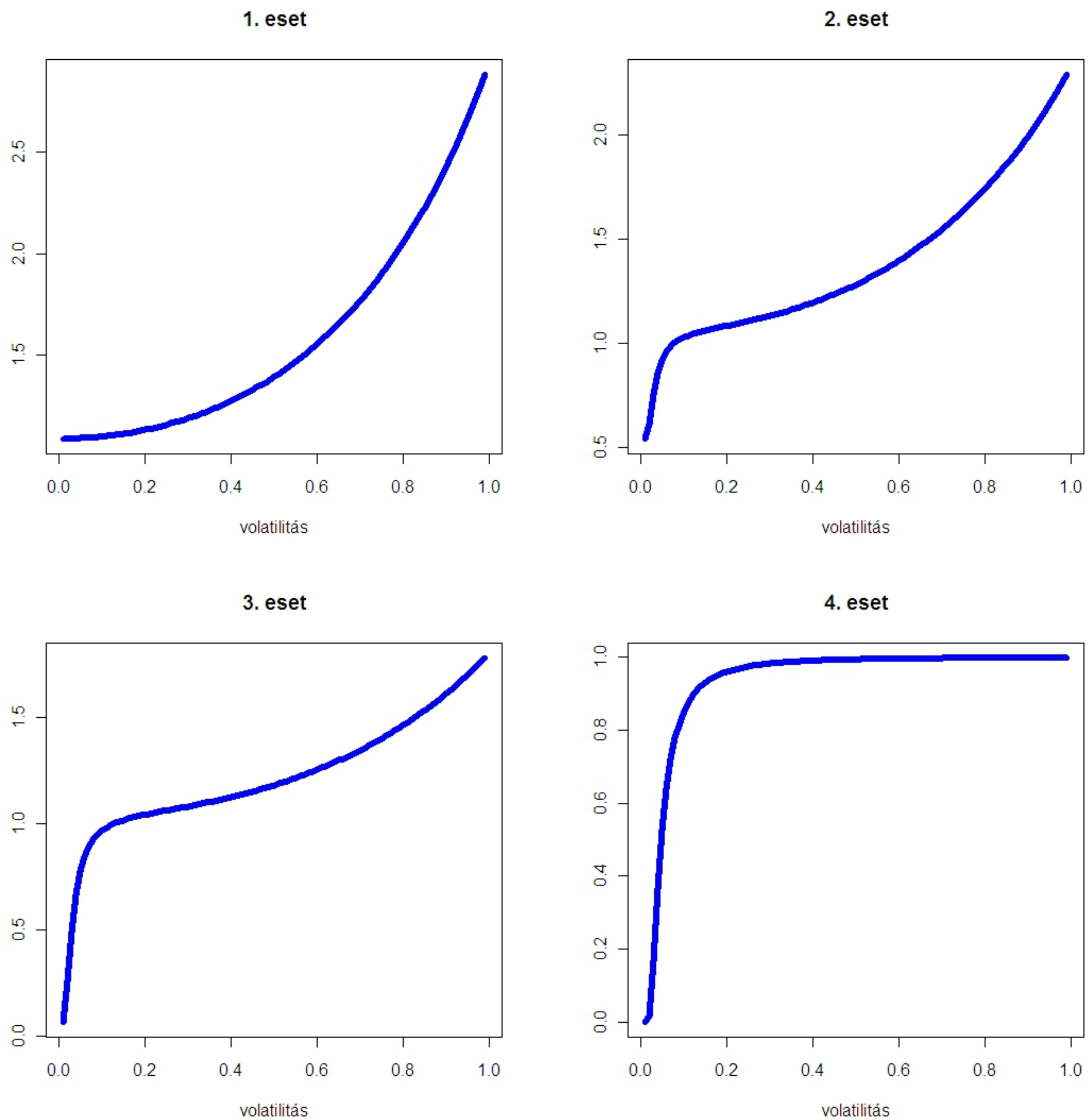
$$v_1^r (H) = \lambda T X_0 + a e^{-\nu^2 T} X_0^2 \lambda T.$$

Az optimális stratégia:

$$\vartheta_t^* = N_T - \tilde{\zeta} \tilde{Z}_0^{-1} X_0 \left(N_T - \lambda T \right) + \frac{\tilde{Z}_t \lambda_t}{2a}.$$

Az első rész, N_T a Poisson-folyamat értéke a T időpillanatban, a második rész a viszontbiztosító becslése az $N_T X_T$-re a kezdeti időpont előtti és a 0 időponti érték közötti különbség.

A következő ábrákon láthatjuk, hogy hogyan változik a hedzselési hiba a volatilitás függvényében a négy esetre.



1. ábra: Hedzselési hiba változása a volatilitás függvényében

Az előző eredmények alapján számolhatunk hedzselési hibát és árat a négy különböző esetre.
A következő táblázatok összefoglalják, hogy milyen feltételezésekkel éltem a számítások során. A bal oldali táblázat értékeit a felhasznál cikk alapján választottam, a jobb oldaliban a ν értékeit számoltam.

T	*1*
λ	*1*
X_0	*1*
μ	*0,1*
r	*0,06*

σ_1	*0,15*	ν_1	*0,267*
σ_2	*0,25*	ν_2	*0,160*
σ_3	*0,35*	ν_3	*0,114*
σ_4	*0,45*	ν_4	*0,089*
σ_5	*0,55*	ν_5	*0,073*
σ_6	*0,65*	ν_6	*0,062*
σ_7	*0,75*	ν_7	*0,053*
σ_8	*0,85*	ν_8	*0,047*
σ_9	*0,95*	ν_9	*0,042*

2. táblázat: A számításhoz szükséges változók értékei

$t_0 = 0,5$ **és** $a = 0,25$								
	$J_0(\mathbb{F}^0)$	$v_1^0(H)$	$J_0(\mathbb{F}^p)$	$v_1^p(H)$	$J_0(\mathbb{F})$	$v_1(H)$	$J_0(\mathbb{F}^r)$	$v_1^r(H)$
1	***1,1079***	***1,2770***	***1,0619***	***1,2655***	***1,0171***	***1,2543***	***0,9314***	***1,2328***
2	***1,1532***	***1,2883***	***1,1067***	***1,2767***	***1,0614***	***1,2654***	***0,9747***	***1,2437***
3	***1,2245***	***1,3061***	***1,1619***	***1,2905***	***1,1015***	***1,2754***	***0,9870***	***1,2468***
4	***1,3264***	***1,3316***	***1,2368***	***1,3092***	***1,1512***	***1,2878***	***0,9921***	***1,2480***
5	***1,4659***	***1,3665***	***1,3368***	***1,3342***	***1,2151***	***1,3038***	***0,9947***	***1,2487***
6	***1,6528***	***1,4132***	***1,4680***	***1,3670***	***1,2969***	***1,3242***	***0,9962***	***1,2491***
7	***1,9012***	***1,4753***	***1,6391***	***1,4098***	***1,4009***	***1,3502***	***0,9972***	***1,2493***
8	***2,2311***	***1,5578***	***1,8616***	***1,4654***	***1,5326***	***1,3832***	***0,9978***	***1,2494***
9	***2,6711***	***1,6678***	***2,1520***	***1,5380***	***1,6996***	***1,4249***	***0,9982***	***1,2496***

3. táblázat: A számítás eredményei 1.

A táblázatban összefoglaltam a különböző hedzselési hibákat és a hozzájuk tartozó árakat a volatilitás változása mellett.

Látható a táblázatban, hogy a kevesebb információ magasabb díjhoz vezet, azaz minél kevesebbet tud a viszontbiztosító a biztosítási kockázatról, annál magasabb díjat határoz meg. Ugyanez a helyzet a hedzselési hibával is.

$t_0 = 0,5$ **és** $a = 0,5$								
	$J_0(\mathbb{F}^0)$	$v_1^0(H)$	$J_0(\mathbb{F}^p)$	$v_1^p(H)$	$J_0(\mathbb{F})$	$v_1(H)$	$J_0(\mathbb{F}^r)$	$v_1^r(H)$
1	***1,1079***	**1,5540**	***1,0619***	**1,5309**	***1,0171***	**1,5085**	***0,9314***	**1,4657**
2	***1,1532***	**1,5766**	***1,1067***	**1,5533**	***1,0614***	**1,5307**	***0,9747***	**1,4874**
3	***1,2245***	**1,6122**	***1,1619***	**1,5810**	***1,1015***	**1,5507**	***0,9870***	**1,4935**
4	***1,3264***	**1,6632**	***1,2368***	**1,6184**	***1,1512***	**1,5756**	***0,9921***	**1,4961**
5	***1,4659***	**1,7330**	***1,3368***	**1,6684**	***1,2151***	**1,6076**	***0,9947***	**1,4974**
6	***1,6528***	**1,8264**	***1,4680***	**1,7340**	***1,2969***	**1,6485**	***0,9962***	**1,4981**
7	***1,9012***	**1,9506**	***1,6391***	**1,8195**	***1,4009***	**1,7005**	***0,9972***	**1,4986**
8	***2,2311***	**2,1156**	***1,8616***	**1,9308**	***1,5326***	**1,7663**	***0,9978***	**1,4989**
9	***2,6711***	**2,3356**	***2,1520***	**2,0760**	***1,6996***	**1,8498**	***0,9982***	**1,4991**

4. táblázat: A számítás eredményei 2.

Az első táblázathoz képest megváltozott a biztonsági ráhagyás, az a értéke, mely 0,25-ről 0,5-re emelkedett, tehát a biztosító biztonságosabb üzletpolitikát folytat. A megnövekedett biztonsági ráhagyás megnövekelte az árak értékeit, ezeket pirossal jelöltem.

$t_0 = 0,75$ **és** $a = 0,25$								
	$J_0(\mathbb{F}^0)$	$v_1^0(H)$	$J_0(\mathbb{F}^p)$	$v_1^p(H)$	$J_0(\mathbb{F})$	$v_1(H)$	$J_0(\mathbb{F}^r)$	$v_1^r(H)$
1	***1,1079***	***1,2770***	**1,0726**	**1,2682**	***1,0171***	***1,2543***	***0,9314***	***1,2328***
2	***1,1532***	***1,2883***	**1,1176**	**1,2794**	***1,0614***	***1,2654***	***0,9747***	***1,2437***
3	***1,2245***	***1,3061***	**1,1763**	**1,2941**	***1,1015***	***1,2754***	***0,9870***	***1,2468***
4	***1,3264***	***1,3316***	**1,2568**	**1,3142**	***1,1512***	***1,2878***	***0,9921***	***1,2480***
5	***1,4659***	***1,3665***	**1,3644**	**1,3411**	***1,2151***	***1,3038***	***0,9947***	***1,2487***
6	***1,6528***	***1,4132***	**1,5055**	**1,3764**	***1,2969***	***1,3242***	***0,9962***	***1,2491***
7	***1,9012***	***1,4753***	**1,6888**	**1,4222**	***1,4009***	***1,3502***	***0,9972***	***1,2493***
8	***2,2311***	***1,5578***	**1,9262**	**1,4815**	***1,5326***	***1,3832***	***0,9978***	***1,2494***
9	***2,6711***	***1,6678***	**2,2341**	**1,5585**	***1,6996***	***1,4249***	***0,9982***	***1,2496***

5. táblázat: A számítás eredményei 3.

Az első táblázathoz képest megváltozott az információ átadásának az időpontja, a t_0 értéke. Ez a különbség a $J_0(\mathbb{F}^p)$ hedzselési hiba és a hozzá tartozó ár, $v_1^p(H)$ értékében jelent változzást. Ezeket zöld színnel jelöltem. Ebben a két oszlopban szereplő értékek megnövekedtek, tehát valóban számít az is, hogy az időintervallumon belül mikor kapjuk az információt a biztosítási kockázatról.

$t_0 = 0,75$ **és** $a = 0,5$								
	$J_0(\mathbb{F}^0)$	$v_1^0(H)$	$J_0(\mathbb{F}^p)$	$v_1^p(H)$	$J_0(\mathbb{F})$	$v_1(H)$	$J_0(\mathbb{F}^r)$	$v_1^r(H)$
1	***1,1079***	**1,5540**	**1,0726**	**1,5363**	***1,0171***	**1,5085**	***0,9314***	**1,4657**
2	***1,1532***	**1,5766**	**1,1176**	**1,5588**	***1,0614***	**1,5307**	***0,9747***	**1,4874**
3	***1,2245***	**1,6122**	**1,1763**	**1,5881**	***1,1015***	**1,5507**	***0,9870***	**1,4935**
4	***1,3264***	**1,6632**	**1,2568**	**1,6284**	***1,1512***	**1,5756**	***0,9921***	**1,4961**
5	***1,4659***	**1,7330**	**1,3644**	**1,6822**	***1,2151***	**1,6076**	***0,9947***	**1,4974**
6	***1,6528***	**1,8264**	**1,5055**	**1,7527**	***1,2969***	**1,6485**	***0,9962***	**1,4981**
7	***1,9012***	**1,9506**	**1,6888**	**1,8444**	***1,4009***	**1,7005**	***0,9972***	**1,4986**
8	***2,2311***	**2,1156**	**1,9262**	**1,9631**	***1,5326***	**1,7663**	***0,9978***	**1,4989**
9	***2,6711***	**2,3356**	**2,2341**	**2,1171**	***1,6996***	**1,8498**	***0,9982***	**1,4991**

6. táblázat: A számítás eredményie 4.

Az első táblázathoz képest megváltozott az információ átadásának időpontja, t_0 és megváltozott a biztonsági ráhagyás is, a. Ez az első táblázathoz képest a színes részekben jelent különbséget. A különböző színek az eddigi táblázatoknak megfelelően lettek beállítva, az azonos értékek azonos színeket kaptak. A $v_1^p(H)$ oszlop az egyetlen olyan, amelynek értékei még egyik táblázatban sem szerepelnek, ezek kék színnel íródtak.

11. Viszontbiztosítási szerződések

A biztosítási piac fontos szereplői a viszontbiztosítók. Olyan típusú kockázatokra adnak fedezetet, melyeket a direkt biztosító már nem tud elvállalni, viszont különböző okok miatt mégis elfogad az ügyfelektől. Példaként említhetjük egy kezdő biztosító esetében a térszerzést, amikor a minél nagyobb ügyfélkör kialakításának érdekében olyan kockázatokat is átvállal, melyekről nincs elég tapasztalata. Egy másik ok lehet a viszontbiztosítási szerződés megkötésére, ha az egyes kockázatok biztosítását valamilyen másik termék értékesítéséhez, amely nem illik bele a biztosító profiljába, viszont csak úgy nyerheti meg a szerződést, ha elvállalja mind a két típusú kockázatot. A legkézenfekvőbb indok viszontbiztosítás igénybevételére, hogy túl nagy a kockáztatott összeg és ezt nem tudja elvállalni a direkt biztosító. A viszontbiztosító több tapasztalattal rendelkezik, nagyobb és kiterjedtebb a veszélyközösség, amit biztosít. Ezek és hasonló okok igazolják a viszontbiztosítók létjogosultságát.

A viszontbiztosítási szerződéseket a kockázatmegosztás módja szerint két nagy csoportra bonthatjuk. Az egyik az ***arányos*** viszontbiztosítás, ahol rögzítik a szerződésben, hogy adott káralakulás mellett mekkora a közvetlen aláíróra jutó rész. Ezen belül is megkülönböztetünk több csoportot. A *quota share* viszontbiztosításban minden szerződésre ugyanazt az arányt használják. A *surplus* szerződésben rögzítenek egy M számot, ami a megtartás aránya S biztosítási összeg esetén. Az M feletti részt pedig arányosan osztják. Amikor a megtartás aránya 0, akkor *fronting*ról beszélünk.
A ***nem-arányos*** viszontbiztosításokban is rögzítenek egy M megtartást. Ha X-szel jelöljük a szóban forgó kárt, akkor a közvetlen aláíró része a kockázatból $X \wedge M$, a viszontbiztosítóé pedig $X - X \wedge M$. Itt is megkülönböztethetünk több csoportot. Az első az *excess of loss* (XL). Ez a forma szerződésenként és káreseményenként fizet. A második a *stop loss*, ahol is a viszontbiztosító egy időszakban történő összes kárt tekinti. A harmadik fontos eset a *katasztrófa XL* (Cat XL), ahol egy káreseményből adódó összes kárt tekintik fizetési alapnak. Annak eldöntése, hogy mi származik egy káreseményből a szerződésben rögzítettek alapján történik, például megadanak egy időablakot és egy területi hatályt. Léteznek a gyakorlatban kevésbé használt nem-arányos formák is. Az egyik a *legnagyobb kár* viszontbiztosítás, ahol abban állapodnak meg, hogy a legnagyobb károk közül hányat térít a viszontbiztosító.

11.1. Stop loss viszontbiztosítási szerződés korláttal

Tekintsük a hagyományos stop loss viszontbiztosítási szerződést egy olyan plusz fedezettel, ami egy pénzügyi piacon történő eseményhez kapcsolódik, például ha a részvény értéke a lejáratkor egy meghatározott intervallumba esik. A pénzügyi események leírására vezessük be a $F \in \mathcal{F}_T^1$ jelölést, és tegyük fel, hogy ezek az események csak a pénzügyi piac változásától függnek. Legyen $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ a diszkontált érték folyamata a részvénynek és legyen $U = (U_t)_{0 \leq t \leq T}$ a biztosítási károk folyamata, ami sztochasztikusan független a pénzügyi piactól. A szerződést a következőképpen lehet megadni:

$$H = \chi_F \left(U_T - M \right).$$

Az $F \subseteq \Omega$ például az az eset, amikor X_T érétke egy $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ halmazon belül van, azaz $F = \{X_T \in B\}$. Például $B = [0, c]$ vagy $B = [c, \infty]$. Az első hasonlít a knock-out, a második a knock-in opcióra. A knock-in illetve a knock-out opciók korlát típusú opciós ügyletek. A vanília típusú opciós ügylet vételi opció esetében kötelezettség az opció eladója számára a lejárat időpontjában egy összeg eladására, illetve vételi opció esetében megvásárlására, ha az opció megvásárlója élni kíván jogával egy bizonyos összeg ellenében, azaz a szokásos, egyszerű feltételű opció. Ennek bonyolultabb esetei a knock-out és a knock-in opciók. A knock-out opciónak az a sajátossága, hogy a kötési árfolyam mellett meghatároznak egy úgynevezett kiütési árfolyamot is. Ha az árfolyam eléri a kiütési szintet, akkor semmissé válik az egyezség, tehát a kiírónak megszűnik a kötelezettsége. A knock-in opció csak abban az esetben aktiválódik, ha az árfolyam a futamidő során eléri, illetve átlépi az előre definiált szintet. A korlátos stop loss szerződés azoknak a biztosítóknak fontos, akik a befektetésekkel próbálnak védelmet nyújtani a biztosítási kockázatok ellen. Ha hosszú távú a befektetés, akkor a biztosító úgy dönthet, hogy csak akkor van szüksége a stop loss fedezetre, ha a részvény értéke nem éri el a c érétket, vagyis a $B = [0, c]$ esetén. Hasonlóan, ha rövid távúról van szó, akkor a $B = [c, \infty]$ eset az érdekes.

Amellett a feltevés mellett, hogy a pénzügyi piac teljes, a korábbi tételek következményeképpen megkaphatjuk a tiszta díj felső korlátját:

$$\begin{aligned}
v_{1,max}(H) &= E\left(\tilde{Z}_T \chi_F (U_T - M)^+\right) + aE\left(D^2\left(\chi_F (U_T - M)^+ \mid \mathcal{F}_T^1\right)\right) = \\
&= E\left(\tilde{Z}_T \chi_F E(U_T - M)^+\right) + aP(F)\, D^2\left((U_T - M)^+\right) = \\
&= \tilde{P}(F)\, E\left((U_T - M)^+\right) + aP(F)\, D^2\left((U_T - M)^+\right),
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk az $\left(X, \tilde{Z}_T\right)$ és az U függetlenségét.
Láthatjuk, hogy a korlátos stop loss szerződésre vonatkozó díj nagyon hasonló a stop loss szerződésre vonatkozó díjhoz, amit a biztosításmatematikai díjkalkulációs elvvel határoznánk meg. A kettő azonban nem egyezik meg, ami abból adódik, hogy általában $P(F) \neq \tilde{P}(F)$
Hasonlóan kapható meg az alsó határ:

$$\begin{aligned}
v_{1,min}(H) &= \tilde{P}(F)\, E\left((U_T - M)^+\right) + \frac{a}{E\left(\tilde{Z}_T^2\right)} D^2\left(\tilde{E}\left(\chi_1 (U_T - M)^+ \mid \mathcal{F}_T^2\right)\right) = \\
&= \tilde{P}(F)\, E\left((U_T - M)^+\right) + \frac{a}{\tilde{Z}_0}\left(\tilde{P}(F)\right)^2 + D^2\left((U_T - M)^+\right).
\end{aligned}$$

Hogy össze tudjuk hasonlítani a hagyományos biztosítási matematikai díjjal, írjuk azt fel:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1(H) &= E\left(\chi_1 (U_T - M)^+\right) + aE\left(D^2\left(\chi_1 (U_T - M)^+ \mid \mathcal{F}_T^2\right)\right) \\
&\quad + aD^2\left(E\left(\chi_1 (U_T - M)^+ \mid \mathcal{F}_T^2\right)\right) = \\
&= P(F)\, E\left(\chi_1 (U_T - M)^+\right) + aP(F)\, D^2\left(\chi_1 (U_T - M)^+\right) \\
&\quad + aP(F)\left(1 - P(F)\right)\left(E(U_T - M)^+\right)^2.
\end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy $\tilde{u}_1(H) > v_{1,max}(H)$ akkor és csak akkor, ha

$$aE\left((U_T - M)^+\right) > \frac{\tilde{P}(F) - P(F)}{P(F)\left(1 - P(F)\right)},$$

feltéve, hogy $P(F) \notin \{0, 1\}$. Ez akkor igaz például, ha $\tilde{P}(F) - P(F) \leq 0$.

11.2. Pénzügyi stop loss viszontbiztosítási szerződés

11.2.1. A biztosítás bemutatása

A pénzügyi stop loss viszontbiztosítási szerződés a korlátos stop loss egy fajtája. A kifizetés egy fix T időpontban történik, értéke pedig:

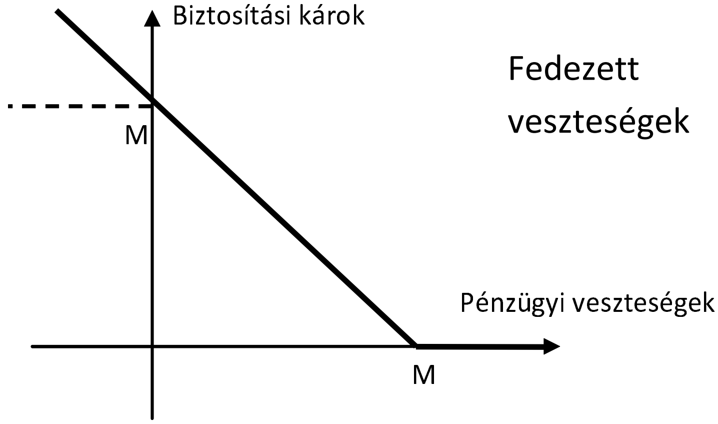
$$H = (U_T + Y_T - M)^+$$

Az U_T jelöli az $[0, T]$ intervallumon bekövetkezett biztosítási károkat. Ha az $Y_T = 0$, akkor hagyományos stop loss szerződést kapjuk vissza. Ez a fajta szerződés nem csak a biztosítási kockázatok ellen nyújt védelmet, hanem a pénzügyi portfólió kedvezőtlen alakulása ellen is, ezáltal a biztosító teljes kockázatára. Y_T lehet egy eladási opció egy részvényre, ekkor $Y_T = (c - S_T)^+$, vagy egy részvény értékének alakulásából adódó veszteség, ekkor pedig $Y_T = S_0 - S_T$. A viszontbiztosítók általában szeretnék egy meghatározott intervallumban tartani az $U_T + Y_T$ veszteséget.
Ha az $(U_T + Y_T - M_1)^+ - (U_T + Y_T - M_2)^+$ alakot használják, akkor ezek a a veszteségek az $(M_1, M_2]$ intervallumban maradnak.
Ha a biztosító nyeresége nagyobb a pénzügyi részen, mint amekkorát veszített a biztosítási kockázaton, akkor a viszontbiztosítónak nem kell fizetnie. Ezáltal a csupán biztosítási károk okozta veszteségből kisebb részt vállal át a viszontbiztosító, csak azokat, amit az esetleges pénzügyi nyereség nem képes fedezni. Éppen ezért a viszontbiztosítási díj is alacsonyabb és csak a valós veszteség kockázatát adják tovább. A hagyományos stop loss szerződésben a biztosító olyan kockázatokat is továbbad, aminek a költségét fedezni tudná, éppen ezért feleslegesen növeli a viszontbiztosítási díjat.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor nem egy szerződésen belül tekintjük biztosítási és a pénzügyi kockázatot, mindkettőhöz saját megtartási arányt defíniálva. Legyenek ezek rendre M_U és M_Y. Ha feltesszük, hogy $M_U + M_Y \leq M$, akkor teljesül, hogy

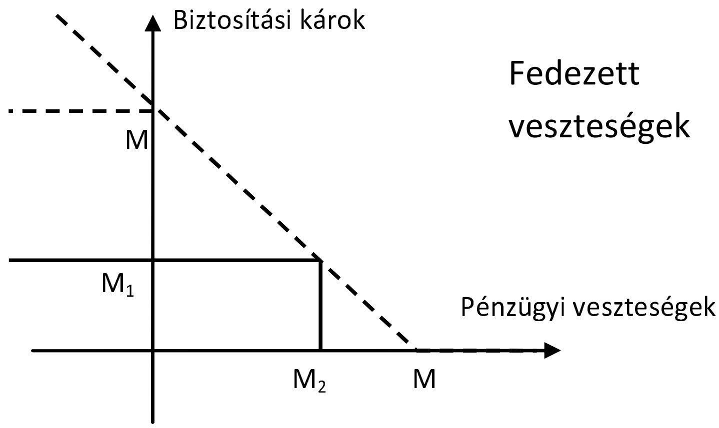
$$(U_T + Y_T - M)^+ \leq (U_T - M_U)^+ + (Y_T - M_Y)^+ .$$

Ebből láthatjuk, hogy a pénzügyi stop loss viszontbiztosítási szerződés olcsóbb, mint ha külön tekintjük a két kockázatot.
A biztosító szemszögéből nézve viszont nagyobb az a kockázat, ami fedezet nélkül marad. Ez abból adódik, hogy az egyiken elért nyereségből fedezik a másikon lévő veszteséget. Ezért a viszontbiztosítónak kisebb a kockázata.



2. ábra: Fedezett károk pénzügyi stop loss viszontbiztosításnál

A fenti ábrán a folytotnos vonal feletti részt téríti a viszontbiztosító M megtartás mellett, ami a pénzügyi és a biztosítási károkból származó veszteséget kumuláltan tartalmazza. A szaggatott és a folytonos vonal közötti része a biztosítási károknak, amit a biztosító a pénzügyi nyereséggel kompenzálni tud. Ha nagy negatív pénzügyi veszteség, azaz nyereség van, az fedezi a bitosításokból származó károkat.



3. ábra: Fedezett károk a hagyományos stop loss és a call opció esetén

Az ábrán a folytonos vonal feletti rész a hagyományos stop loss szerződés és a call opció által fedezett kockázat. A szaggatott vonal feletti rész ugyanaz, mint az előző esetben. Látható, hogy a ebben esetben nagyobb az a rész, amit a viszontbiztosító átvállal.

11.2.2. A biztosítás árazása

Nézzük meg a pénzügyi stop loss szerződés árzazását. Legyen $S_0 = 1$ és $M_1 < M_2 < \infty$ és tekintsük a következő függvényeket:

$$\Psi_1(S_T, U_T) = e^{-rT} min\left\{(U_T + \delta(S_0 - S_T) - M_1)^+, (M_2 - M_1)\right\},$$

$$\Psi_2(S_T, U_T) = e^{-rT} min\left\{\left(U_T + \delta(S_0 - S_T)^+ - M_1\right)^+, (M_2 - M_1)\right\}.$$

U_T jelöli a kárhányadot a biztosítási szerződéseken, azaz a veszteségek és a beérkező díjak hányadosát. $\delta \in [0, 1]$ egy súlyozó konstans, ami a részvény változásának hatását méri. Ha $\delta = 0$, akkor $\Psi_1(S_T, U_T) = \Psi_2(S_T, U_T) = e^{-rT} min\left\{(U_T - M_1)^+, (M_2 - M_1)\right\}$, amiben már nem szerepel az S_T, így megkaptuk a hagyományos stop loss szerződésre vonatkozó függvényt: $\Psi(U_T) = e^{-rT}(U_T - M)^+$.

Az S és az U közötti függetlenséget most is feltesszük. Standard Black-Scholes modellt használunk, ahol a pénzügyi piac, $(S, \mathbb{F}^1)$ teljes.

1. eset: Legyen $\tilde{M}_i(U_T) = (U_T + \delta S_0 - M_i)/\delta$,ahol $\delta > 0$. Ekkor

$$e^{rT}\Psi_1(S_T, U_T) = \delta\left(\tilde{M}_1(U_T) - S_T\right)^+ - \delta\left(\tilde{M}_2(U_T) - S_T\right)^+.$$

A képletből látszik, hogy Ψ_1 két európai eladási opció különbsége.
Legyen p az európai eladási opció Black-Scholes féle ára, azaz

$$p\left(S_0, T, \tilde{M}\right) = \tilde{M}e^{-rT}\Phi\left(-z_2\left(\tilde{M}\right)\right) - S_0\Phi\left(-z_1\left(\tilde{M}\right)\right),$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, és

$$z_1\left(\tilde{M}\right) = \frac{\log\left(S_0/\tilde{M}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$z_2\left(\tilde{M}\right) = \frac{\log\left(S_0/\tilde{M}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_1(U_T) : &= \tilde{E}(\Psi_1(S_T, U_T) \mid U_T) = \\ &= \delta\left(\chi_{\{\tilde{M}_1 > 0\}} p\left(S_0, T, \tilde{M}_1(U_T)\right) - \chi_{\{\tilde{M}_2 > 0\}} p\left(S_0, T, \tilde{M}_2(U_T)\right)\right) \end{aligned}$$

2.eset: Legyen $\hat{M}_i(U_T) = \chi_{\{U_T - M_i < 0\}}(U_T - M_i)/\delta + S_0$, ahol $\delta > 0$.Ekkor

$$e^{rT}\Psi_2(S_T, U_T) = (U_T - M_1)^+ - (U_T - M_2)^+ + \delta\left(\hat{M}_1(U_T) - S_T\right)^+ - \delta\left(\hat{M}_2(U_T) - S_T\right)^+.$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} f_2(U_T) : &= \tilde{E}(\Psi_2(S_T, U_T) \mid U_T) = \\ &= \delta\left(\chi_{\left\{\hat{M}_1 > 0\right\}} p\left(S_0, T, \hat{M}_1(U_T)\right) - \chi_{\left\{\hat{M}_2 > 0\right\}} p\left(S_0, T, \hat{M}_2(U_T)\right)\right) \\ &\quad + e^{-rT}\left((U_T - M_1)^+ - (U_T - M_2)^+\right). \end{aligned}$$

Ezekkel explicit formulát kaptunk az f_i függvényékre.

Az f_i-k várható értékét a következőképpen is felírhatjuk:

$$E(f_i(U_T)) = E\left(\tilde{E}(\Psi_i(S_T, U_T) \mid U_T)\right) = \tilde{E}(\Psi_i(S_T, U_T)).$$

Alsó és felső határokat is meghatározhatunk a Ψ_i-k díjaihoz szórásnégyzet és a szóráselvekkel, mint eddig is, felhasználva, hogy $E\left(\tilde{Z}_T^2\right) = e^{\nu^2 T}$:

$$\begin{aligned} v_{1,min}(\Psi_i) &= E(f_i(U_T)) + ae^{-\nu^2 T} D^2(f_i(U_T)), \\ v_{2,min}(\Psi_i) &= E(f_i(U_T)) + \sqrt{e^{-\nu^2 T}(a^2+1) - 1} D(f_i(U_T)) \end{aligned}$$

A felső határokat is fel tudjuk írni, bár ha az U_T eloszlásfüggvényét ismernénk, akkor jobb eredményt kaphatnánk.

$$\begin{aligned} v_{1,max}(\Psi_i) &= E(f_i(U_T)) + aE\left(D^2(\Psi_i(S_T, U_T) \mid S_T)\right), \\ v_{2,max}(\Psi_i) &= E(f_i(U_T)) + \sqrt{a^2 - (e^{\nu^2 T} - 1)}\sqrt{E(D^2(\Psi_i(S_T, U_T) \mid S_T))}. \end{aligned}$$

12. Katasztrófa viszontbiztosítás

„A világ legnagyobb viszontbiztosítója, a Swiss Re szerint 2007-ben több mint kétszeresére növekedtek a természeti katasztrófákból származó kiadások 2006-ról 2007-re. Az előrejelzéseik szerint a 2007-es évben 35 milliárd dollár körüli volt a kifizetés, míg ez a szám 2006-ban mindössze 12 milliárd volt." Ez is mutatja, hogy szükséges katasztrófa viszontbiztosításról beszélni és minél hatékonyabb módszereket találni a megvalósításához.

Amikor a katasztrófáról beszélünk, először az a kérdés vetődhet fel, hogy valójában mit is jelent az a biztosítók számára, milyen kockázatok tartoznak ide, hogyan jellemezhetőek és hogyan mérhetőek ezek a kockzatok, milyen szerepet tölt be a biztosítás ezeknek a károknak a fedezésében. Nemzetközi kutatások foglalkoznak ezzel a témával, s korántsem egységes az állásfoglalás ezen a területen, hiszen minden ország eltérő geológiai, éghajlati, gazdasági, szabályozási háttérrel rendelkezik. Ebben a dolgozatban a biztosítási illetve viszontbiztosítási oldalról fogjuk megközelíteni ezt a témát magyarországi viszonyokat elemzve.

A katasztrófa kockázat fogalomköre:

Amikor katasztrófa kitettségről beszélünk két nagy kockázati csoportot szokás elkülöníteni:

1. A természet erőivel összefüggő kockázatok.
2. Nem természeti katasztrófák, amelyek emberi tényezővel hozhatóak összefüggésbe. Ezt további csoportokra lehet bontani:

    (a) nem szándékos események, például valamilyen baleset, robbanás, tűz következményei

    (b) szándékos események, például zavargások, terrorista cselekmények hatására bekövetkező károk.

A 2/ (b) pontra példa 2001. szeptember 11-én bekövetkező támadás a Word Trade Center ellen. Eddig az időpontig az ilyen fajta katasztrófa kockázatok nem képeztek nagy részt a katasztrófa károk között nemzetközi vonatkozásban. Ez az esemény lényegesen megnövelte a katasztrófa károkra vonatkozó viszonntbiztosítási tartalékolási kötelezettségeket.

Kétféleképpen kezelhetőek a nagy károk, amelyeket a károsult már nem tud elviesni:

1. ex post (after the fact) például hitel, állami támogatás, közadakozás.
2. ex ante (before the fact) biztosítás.

A kockázatok porlasztásának egy lehetséges formája, ha bevonjuk a piacot. E szerint két fő típust különböztethetünk meg:

1. Hagyományos biztosítási szerződések, viszontbiztosítási típusok használata tőkepiaci technikákkal, mint az értékpapírosított eszközök, például a katasztrófa kötvények (cat-bounds), vagy az egyéb kockázattal összekapcsolt értékpapírok (risk-linked securities) .
2. Speciális banki hitelezési formák, valamint olyan tőkepiaci eszközök, amelyeknél a kockázatot a biztosítási szektor és a tőkepiac együtt fedi le.

Ezek közül a kockázatkezelési formák közül a közvetlen biztosítások és a viszontbiztosítások a legfőbb kezelői katasztrófa kockázatoknak. Mégis az alapvető katasztrófákat (mint például a földrengés vagy az árvíz) kivéve a biztosító társaságok szokásos eljárása, hogy a háborúkat, polgári zavargásokat kizárája a biztosítással fedezett kockázatok közül .
A katasztrófák alapvető jellemzője, hogy előfordulásuk igen bizonytalan, viszont az általuk okoztott kár igen szélsőségesen nagy lehet, ezért nagyon fontosak a viszontbiztosítási szerződések.

13. Földrengésbiztosítás megvalósítása

13.1. A modell kiválasztása

A fejezet célja a földrengéskárokra vonatkozó viszontbiztosítási díjak számolása a hagyományos viszontbiztosítási szerződésre vonatkozóan és abban az esetben is, amikor a károk mellett a direkt biztosító befektetéseiből származó jövedelmeket illetve veszteségeket is figyelembe vesszük.

A katasztrófa viszontbiztosítások esetében használt biztosítási formák közül kiemelkedő jelentőségű a stop loss típusú szerződés.
Ez a forma az egy időszak alatti bekövetkező összes kárra vonatkozóan fizet, nem káreseményenként mint az excess of loss. Jelöljük ezt az összeget X-szel. Bevezetünk egy megtartási számot, amely alatti károkat teljes egészében a direkt biztosító fizeti, legyen ez M. Általában be szokták vezetni a viszontbiztosító teljesítésenek felső korlátját is, legyen ez L. Az M és az L közötti részt a biztosító és a viszontbiztosító arányosan osztja el egymás között, a biztosító megtartási arányát jelöljük c-vel. Ekkor a viszontbiztosító által fedezett Z károkat a következőképpen definiálhatjuk:

$$Z = \begin{cases} 0 & X \leq M \\ (1-c)(X-M) & M \leq X \leq M+L \\ (1-c)L & X \geq M+L \end{cases},$$

ahol $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, az Y_i-k pedig sztochasztikus változók, amelyek az egyes káresemények által okozott veszteségek értékét jelölik, és az N sztochasztikus változó pedig a káresemények számát írja le. Feltesszük, hogy az Y_i változók függetlenek egymástól és az N-től. A továbbiakban feltesszük, hogy $c = 0$.
Jelöljük E-vel a várható veszteséget a portfólión.
A viszontbiztosítónak egy kikötése lehet, hogy a megtartás aránya legalább akkora legyen, mint a várható veszteség költsége a viszontbiztosításba adott portfólión, azaz $M \geq E$. Ezzel azt szeretnék elkerülni, hogy a olyan kockázatokat adjon tovább a direkt biztosító a viszontbiztosítónak, ami ténylegesen nem veszélyezteti.

Egy specális eset, amikor $M = E$. Ekkor egy egyszerű formulát írhatunk fel a biztosítási díjra:

$$u(E) \simeq EP_\lambda([\lambda]),$$

$\lambda = E^2/V$ jelöléssel, ahol E a várható értéke az egész káreloszlásnak, V pedig a szórásnégyzete, σ^2. P_λ a Poisson eloszlás, $[\lambda]$ pedig a λ egész részét jelöli. Megmutatható, hogy $\sigma/\sqrt{2\pi}$ egy jó közelítés a kockázati díjra ebben a speciális esetben.

Most tekintsük az általános esetet az eddig bevezett jelölésekkel. Legyen $F(x)$ az X eloszlásfüggvénye. Ekkor az M-hez és az L-hez tartozó stop loss kockázati díja a következő:

$$u(M,L) = \int\limits_{M}^{M+L} (x-M)\,dF(x) + L\int\limits_{M+L}^{\infty} dF(x).$$

Integrálás után kapjuk:

$$L - \int\limits_{M}^{M+L} F(x)\,dx,$$

ebből pedig az következik, hogy a kockázati díj:

$$u(M,L) = \int\limits_{M}^{M+L} (1-F(x))\,dx = u(M) - u(L),$$

ahol $u(M)$ jelenti azt a stop loss szerződést, amelynek nincs felső korlátja, csak az M megtartást definiálják.

A további vizsgálathoz az éves károk összegének eloszlásfüggvényére van szükségünk. Ennek becsléséhez két módszert használhatunk:

1. ***Az eloszlás függvényt független káradatok segítségével határozzuk meg***

   Ezt a módszert is két csoportra oszthatjuk:

   (a) Gyakran azzal a feltevéssel élnek, hogy az aggregált károk compound poisson eloszlásúak.

$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, ahol Y_i független azonos eloszlású változó és függetlenek a károk N számától, eloszlásfüggvényük pedig $H(y)$. N-ről feltesszük, hogy Poisson eloszlású, λ paraméterrel.

Az aggregált károk eloszlását több módon lehet közelíteni. Rekurzív módszereket szoktak alkalmazni, habár nagy portfólió esetén a kiszámításuk sok időt vehet igénybe.

(b) Tekintsünk egy portfóliót, amely n db független kockázatot tartalmaz. Legyen p_i annak a valószínűsége, hogy egyetlen kár sem keletkezik az i-edik kockázatból, és $q_i = 1 - p_i$ annak a valószínűsége, hogy legalább egy kárunk lesz. Az i-edik kockázatra vonatkozó teljes kárösszeg generátorfüggvénye a következőképpen van felírva:

$$G_i(v) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) v^x.$$

Ebből az aggregált károkra vonatkozó generátorfüggvény:

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} (p_i + q_i G_i(x)).$$

A független károkra vonakozó modellek közül sok rekurzív módszert használ. Ilyen például a Panjer-rekurzió vagy a De Pril algoritmus.

2. ***Az eloszlás függvényt a teljes kárstatisztika segítségével határozzuk meg***

(a) Exponenciális eloszlás felső korlát nélkül:

$$u(M) = Ee^{-M/E}$$

(b) Lognormális eloszlás, ahol az adatok átlaga μ, szórása σ^2:

$$u(M) = E\left\{1 - \Phi\left(\frac{\ln M - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)\right\} - M\left\{1 - \Phi\left(\frac{\ln M - \mu}{\sigma}\right)\right\},$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

(c) Normális eloszlás:
$F(x)$-et a $\Phi((x-E)/\sigma)$ eloszlásfügvénnyel közelítjük. Ha $M > E+\sigma$, akkor a felső korlát nélküli stop loss kockázati díja akövetkezőképpen közelíthető:

$$u(M) = \sigma\left(1+\frac{\gamma}{6}y_M\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(y_M^2/2\right)} - (M-E)\,1-\Phi(y_M),$$

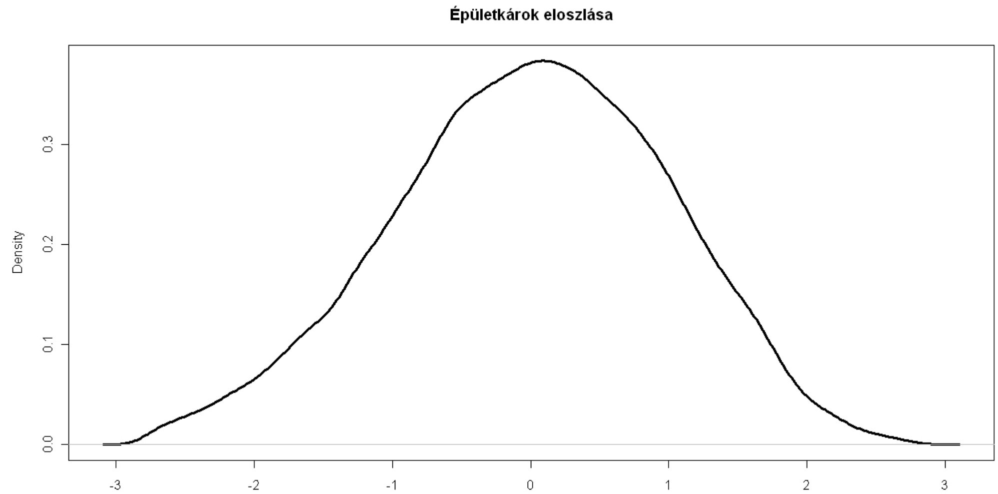
ahol E az átlaga az aggregált kár értékeknek, σ a szórásnégyzete, γ pedig a ferdesége, $y_M = v_y^{-1}\left(\frac{M-E}{\sigma}\right)$, ahol $v_y^{-1}(x) = \sqrt{1+\frac{9}{\gamma^2}+\frac{6x}{\gamma}-\frac{3}{\gamma}}$, és $F(X) \approx \Phi\left(v_y^{-1}(x)\right)$.

A modell kiválasztásakor a káradatok függetlenségét kell figyelembe vennünk, ha ez teljesül, akkor érdemes csak az első modellt válszatanunk. Ha csak a nagy károkat tekintjük a portfólióban, akkor általában teljesül a függetlenség. Ez a helyzet áll fenn akkor is, életbiztosításról beszélünk.

13.2. A megvalósítás

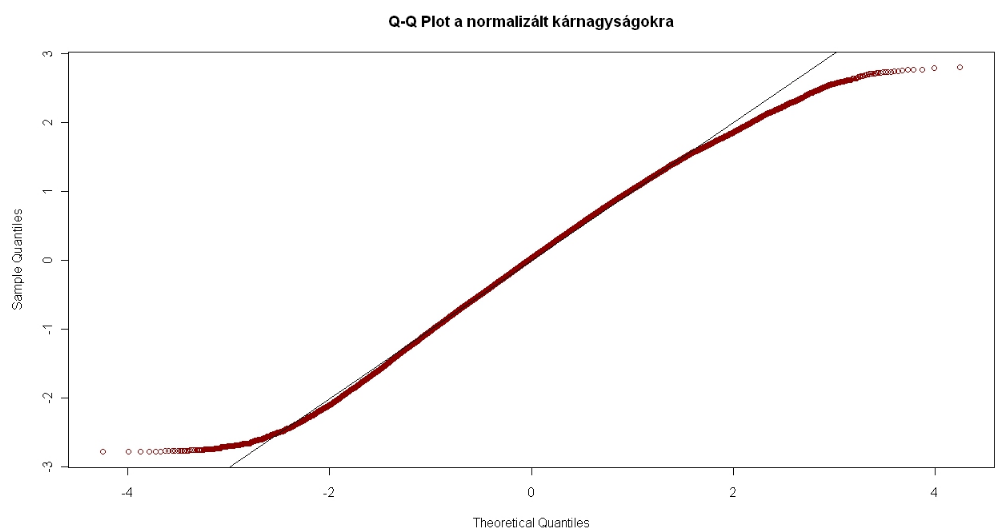
A dolgozat hátralévő részében földrengéskárok viszontbiztosítását szeretnénk kiszámolni. Magyarországon az épületek körülbelül 70 százaléka rendelkezik biztosítással, ami akkora összeget jelent, amit egyetlen biztosító sem hagyhat viszontbiztosítási fedezet nélkül. A portfóliónk alapja Magyarország ingatlan állománya.

Az ELTE Valószínűség elméleti és statisztikai tanszék és a Geofizikai intézet közös projektjében földrengéskárokat szimulált az ebből adódó biztosítási kockázat meghatározására. Egy ilyen szimulációt használtam fel a szerzők engedélyével munkám kiindulópontjául. Ezekkel az előre generált, fiktív épületkárnagyságokkal dolgoztam, amelyek már csak a biztosított épületkre vonatkozó kárösszeget tartalmazzák. Ennek segítségével próbáltam meg egy stop loss visztontbiztosítási szerződés biztosítási díját meghatározni a fentebb leírt módszerekkel. Körülbelül negyvenötezres minta állt rendelkezésre, amiben a károk előfordulása egész Magyarország területére kiterjed. A károk nagyságáról feltehetjük, hogy lognormális eloszlásúak. Az R statisztikai programcsomagot használtam a különböző számítások elvégzéséhez. A kárnagyságokra többféle eloszlást illesztve, azokon hipotézisvizsgálatokat alkalmazva a lognormális tűnt a legjobb közelítésnek, persze az adatok mennyisége miatt ez sem illeszkedik tökéletesen.



4. ábra: Az épületkárok nagyságának eloszlása

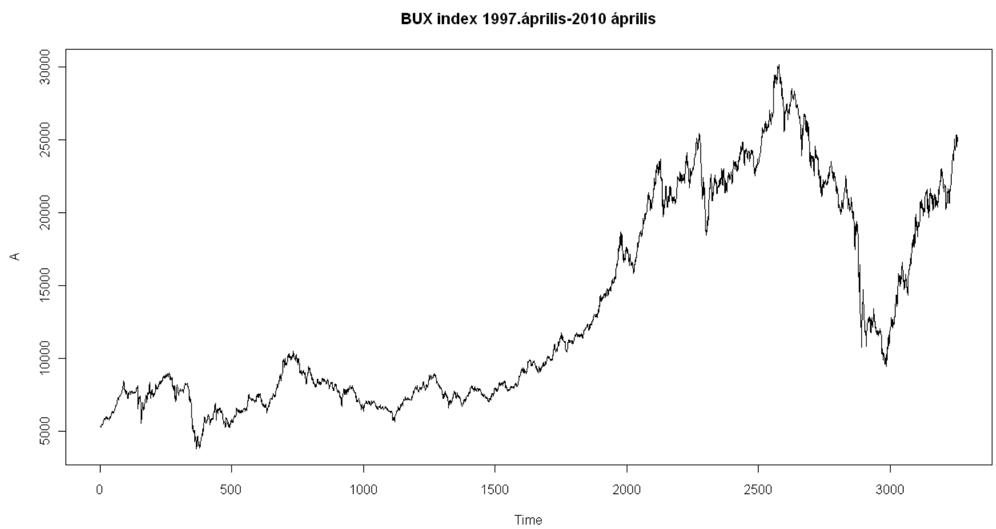
Kvantilis (QQ) plot segítségével megvizsgáltam, hogy valóban illeszkedik-e a lognormális eloszlás az adatokra. Ennek eredménye látható az 5. ábrán:



5. ábra: A káradatok eloszlására a lognormális eloszlás illesztésének vizsgálata

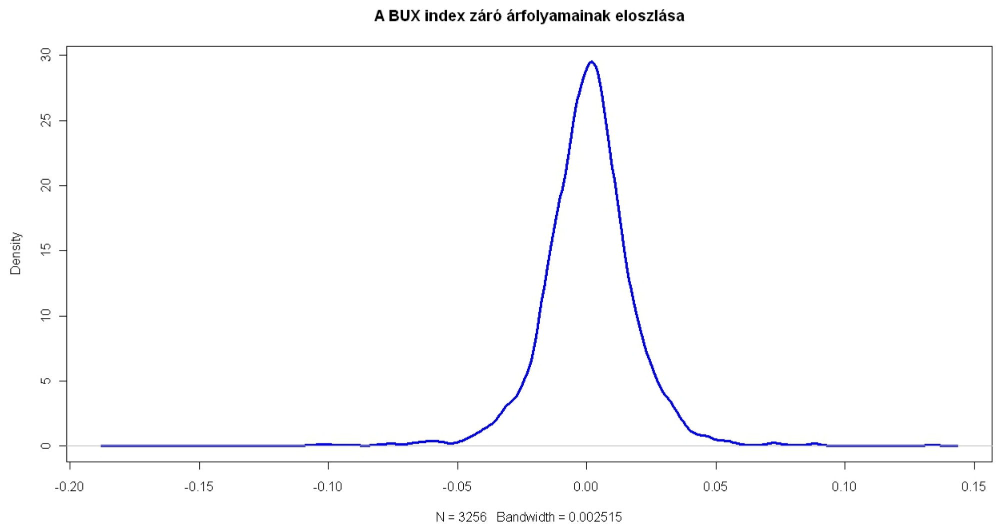
A 11.1.1 fejezetben leírtak alpján számoljuk a díjat, az adatoknak megfelelően a lognormális eloszláshoz tartozó kalkulációt alkalmazzuk. Az ennek segítségével kiszámolt éves viszontbiztosítási díj 1 000 000 Ft megtartás mellett 6 763 560 Ft.

Ezek után a célom az volt, hogy megvizsgáljam, hogyan hat egy befektetés a viszontbiztosítási díjra. Feltehetjük, hogy a biztosító bizonyos összeget kockázatos eszközbe fektet, és az ezen adódó nyereségből kompenzálja az bizosítási kockázatból származó esetleges károkat. Ha a befektetésekből adódó nyereség és biztosítási veszteség összege a biztosító által meghatározott érték alatt marad, akkor a viszontbiztosítónak nem kell fizetnie abban az esetben sem, ha a biztosítási károk önmagukban meghaladták volna a megtartási szintet. Ugyanakkor, ha a befektetésekből veszteség származik, ami a biztosítási kárral összeadva nagyobb, mint a megtartás, a viszontbiztosítónak fizetnie kell abban az esetben is, ha csupán a biztosítási kárnagyságokat tekintve a veszteség a megtartási szint alatt maradna. Ez egy alacsonyabb viszontbiztosítási díjat eredményezehet, ami előnyös a direkt biztosítónak, mivel a tényleges kárai így is le vannak fedve, és a viszontbiztosító is jobban jár, hiszen kedvező részvénymozgás esetén kevesebbszer és kevesebbet kell kifizetnie.



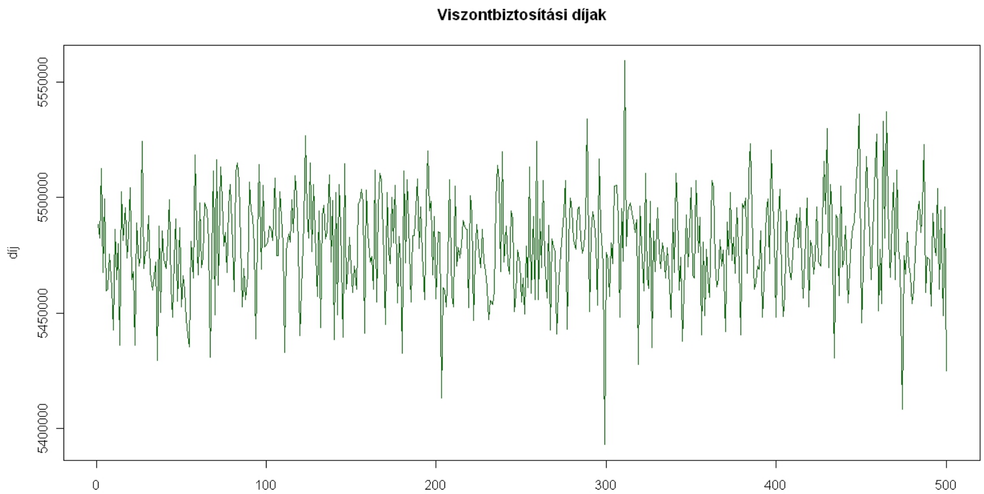
6. ábra: A BÉT honlapjáról letöltött BUX index napi záró árfolyamai

A részvények mozgásának modellezéséhez az alap adatokat a BUX index, a Budapesti Értéktőzsde hivatalos indexe szolgáltatta. 1997 áprilisától 2010 áprilisáig a napi záró árfolyamokat tekintettük. Az adatok elemzésekor megvizsgáltam a trendeket és a szezonalitásokat, mivel ezek nagy mértékben befolyásolhatják a szimuláció során kapott eredményeket, azonban ezek inszignifikánsnak bizonyultak. Ezek az adatok GARCH(1,1) folyamatot követnek t-eloszlású generáló zajjal, melynek szabadsági foka 7 a vizsgálataim szerint. Előrejeleztem a részvények logaritmikus hozamának várható változását. Az ebből kapott adatok segítségével meghatároztam a biztosító befektetésből származó várható eredményét, feltételezve, hogy a biztosítási károk és BUX alakulásának összege lognormális eloszlást követ. Ez a feltevés nem teljesen helytálló, hiszen két lognormális eloszlás összege nem lognormális, de a gyakorlat szempontjából ez egy kényelmes megoldás, valamint közelítésként is elfogadható. Az új eloszlás paramétereinek meghatározásához lognormálisok összegére vonatkozó képletet használtam.

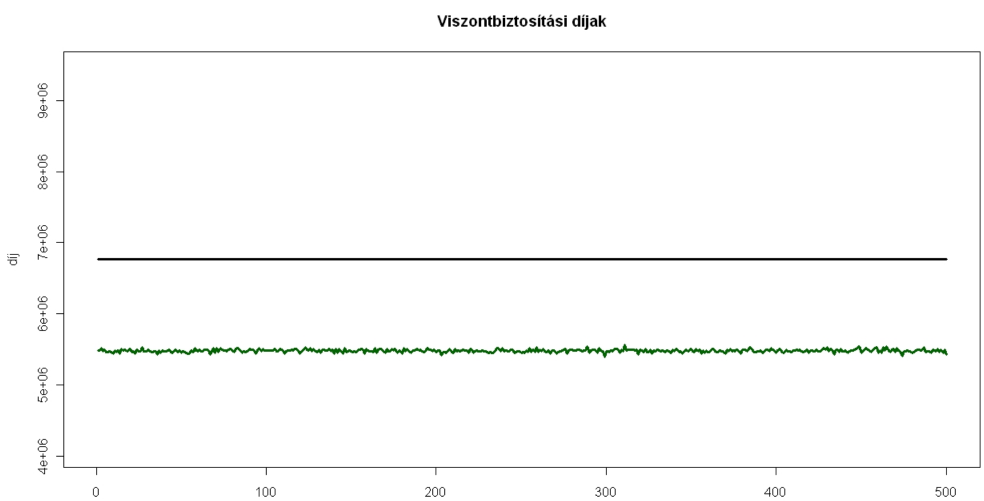


7. ábra: A BUX index 1997. április és 2010. április közötti záró árfolyamainak az eloszlása.

Ezt a kettőt összekapcsolva már kiszámolható a modellezni kívánt viszontbiztosítási szerződés díját. A szimulációt 500-szor lefuttatva azt kapjuk, hogy a biztosítási díj átlagosan 5,4 millió Ft, szemben az eddigi, tiszta biztosítási kockázattal számolt díjjal, ami 6,8 millió Ft. Tehát a várakozásainknak megfelelően csökken a viszontbiztosítási díj, ha ezt a fajta pénzügyi stop loss szerződést használjuk.



8. ábra: Az ábrán az ötszázszor szimulált részvényárból adódó viszontbiztosítási díjak alakulását láthatjuk. Az érték 5,4 és 5,5 millió forint körül mozog.



9. ábra: Az eredeti káradatokból származó viszontbiztosítási díjat láthatjuk fekete egyenes vonallal rajzolva, a befektetéssel számított viszontbiztosítási díjat pedig zölddel ábrázoltam.

13.3. A válság hatása

A 2008-2009-es gazdasági válság az 1929-1933-as nagy gazdasági világválság óta a legnagyobbnak tartott válság. 2006 végén indult el az Amerikai Egyesült Államokból, ott is az ingatlan- és bankszektorból, majd a világ szinte minden részére átterjedt, így Magyarországon is érezni lehetett a hatását.
Egyik következménye, hogy a részvények árfolyamai zuhanni kezdtek, ami nem meglepő, hiszen a tőzsdei részvény az egyik legkockázatosabb befektetési forma, éppen ezért a részvény valódi értékére tekintet nélkül elkezdték eladni azokat a befektetők áron alul.

Mivel ez a gazdasági válság nem egy igen ritka esemény és hatása nagy mértékben befolyásolja az árfolyamok változásait és remények szerint a közeljövőben nem fog megismétlődni, ezért érdemesnek látszik megvizsgálni azt az esetet, amikor a nem vesszük figyelembe azt az időszakot, amikor a részvények árfolyamai nagyon alacsony szinten voltak. Ugyanazzal a számítási elvet használva valamivel alacsonyabb viszontbiztosítási díjat kaptam, de az érték itt is 5,4 millió Ft körül mozgott. Viszont az a díjak szórása lecsökkent. Míg a teljes időszakot tekintve a 21 982 volt az átlagos értéke, addig a válság nélküli időszakban 20 371-ra csökkent, tehát valamivel biztonságosabban tudjuk árazni a viszontbiztosításunkat.

14. Összegzés

A dolgozat célja a befektetések hatásának vizsgálata volt a biztosítási termékeken. A klasszikus biztosításmatematikai díjkalkulációs elvekből kiindulva és ezt a pénzügyi alapelvekbe átültetve eljutottunk egy olyan modellhez, amely egyszerre veszi figyelembe mindkét fajta kockázatot.

A téma megértéséhez alapvető fogalmak ismertetése után megvizsgáltuk, hogyan hat a biztosítási kockázatra vonatkozó információ változás a tiszta díjra. A hedzselési hibát is meghatároztuk különböző filtrációk mellett.

A viszontbiztosításokban nagy szerephez jutnak a befektetések. Speciális típusú stop loss szerződéseket tekintve foglalkoztunk a viszontbiztosítási díj változásával abban az esetben, ha befektetéssel próbáljuk meg csökkenteni a kockázatot.

Gyakorlati alkalmazásként katasztrófa viszontbiztosítást díját határoztuk meg pénzügyi stop loss szerződéstípust használva. Az eredményünk az volt, hogy a befektetés nagy mértékben csökkenti a díjat, ezzel optimális megoldást nyújt mindkét félnek.

15. Függelék

R program:

```
X<-read.csv("g:/R/FR.txt",header=FALSE,sep=",",quote="\"",dec=".",
stringsAsFactors=FALSE)
X<-X[[1]]
Y=log(X)
Z<-(Y-mean(Y))/sd(Y)
plot(density(Z))
qqnorm(Z)
abline(0,1)
library(MASS)
fitdistr(X,"lognormal")
shapiro.test(Y)
jarque.bera.test(Y)
library(nortest)
pearson.test(Y)
lognormfitX<-fitdistr(X,"lognormal")
E=mean(X)
R=1000000
mu=lognormfitX$estimate[1]
szigma=lognormfitX$estimate[2]
Fi.fuggveny<-function(x)
{pnorm(x)}
ln=log(R, base = exp(1))
x=(ln-mu-szigma^2)/szigma
y=(ln-mu)/szigma
piR<-E*(1-Fi.fuggveny(x))-R*(1-Fi.fuggveny(y))
A<-read.csv("g:/R/BUX.txt",header=FALSE,sep=",",quote="\"",dec=".",
stringsAsFactors=FALSE)
A=A[[1]]
stl(A)
K<-diff(log(A))
acf(K)
```

```
K.ar<-ar(K)
K.ar$order
plot(K.ar$aic)
plot(K.ar$resid)
library(tseries)
H<-garch(K)
plot(H)
coef(H)
summary(H)
fitdistr(H$resid[-c(1,2)],"t")
library(lattice)
qqmath(H$resid,distribution=function(p) qt(p,df=7.09))
library(fGarch)
spec=garchSpec(K)
G<-matrix(nr=250,nc=10000)
i=1
while(i<10001){
spec=garchSpec(model=list(K),cond.dist = "std")
a=K$garch
G[,i]=a
i=i+1}
V=vector(mode="numeric", length = 250)
i=1
for(i in 1:250)
V[i]=mean(G[i,])
i=1
for(i in 1:250)
V[i]=exp(V[i])
I=1000000
V[1]=V[1]*I
for(i in 2:250)
V[i]=V[i-1]*V[i]
fitdistr(V,"lognormal")
lognormfitX<-fitdistr(X,"lognormal")
E=mean(X)
R=1000000
```

```
mu1=lognormfitX$estimate[1]
szigma1=lognormfitX$estimate[2]
Fi.fuggveny<-function(x)
{pnorm(x)}
ln=log(R, base = exp(1))
x=(ln-mu1-szigma1^2)/szigma1
y=(ln-mu1)/szigma1
piR<-E*(1-Fi.fuggveny(x))-R*(1-Fi.fuggveny(y))
Z=vector(mode="numeric",length=500)
for(k in 1:500)
{
spec=garchSpec(model=list(K),cond.dist = "std")
L=garchSim(spec,n=250)
b=L$garch
W=vector(mode="numeric", length=250)
W=b
for(i in 1:250)
W[i]=exp(W[i])
I=1000000
W[1]=W[1]*I
for(i in 2:250)
W[i]=W[i-1]*W[i]
lognormfitW<-fitdistr(W,"lognormal")
E=mean(X)-mean(W)+I
R=1000000
mu2=lognormfitW$estimate[1]
szigma2=lognormfitW$estimate[2]
szigma=sqrt(log((exp(2*mu1+szigma1^2)*(exp(szigma1^2)-1)+exp(2*mu2+szigma2^2)*
(exp(szigma2^2-1))/(exp(mu1+((szigma1^2)/2))+exp(mu2+((szigma2^2)/2)))+1),base=10))
mu=log(exp(mu1+(szigma1^2)/2)+exp(mu2+(szigma2^2)/2),base=10)-(szigma^2)/2
Fi.fuggveny<-function(x)
{pnorm(x)}
ln=log(R, base = exp(1))
x=(ln-mu-szigma^2)/szigma
y=(ln-mu)/szigma
piR<-E*(1-Fi.fuggveny(x))-R*(1-Fi.fuggveny(y))
```

```
Z[k]=piR
}
XP=vector(mode="numeric", length=500)
for(i in 1:500)
XP[i]=6763560
plot(XP,type="l",main="Viszontbiztosítási díjak",xlab="",ylab="díj",lwd=3)
lines(Z,col="dark green",lwd=3)
plot(Z,type="l",main="Viszontbiztosítási díjak",ylab="díj",xlab="",col="dark green")
```

Hivatkozások

[1] Thomas Möller: On valuation and risk management at the interface of insurance and finance (2002)

[2] Thomas Möller: Indifference pricing of insurance contracts: Theory (2001)

[3] Thomas Möller: Indifference pricing of insurance contracts: Application (2001)

[4] Thomas Möller: Indifference pricing of insurance contracts in a product space model (2002)

[5] Thomas Möller: Indifference pricing of insurance contracts in a product space model: Application (2003)

[6] Arató Miklós: Nem-élet biztosítási matematika, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest (2001)

[7] Telcs András: Igazságos játék a pénzfeldobástól a tőzsdéig, kézirat (2009)

[8] V. R. Young: Premium principles, Encyclopedia of actuarial science (2004)

[9] M. M. Rytgaard: Stop loss reinsurance (2004)

[10] Hans Föllmer, Martin Schweizer: Hedging of contingent claims under incomplete information (1990)

[11] Martin Schweizer: A minimality property of the minimal martingal measure (1999)

[12] T. Chan, J. Kollar, A. Wiese: Mean-variance hedging in stochastic volatility models driven by Lévy processes (2007)

[13] Szakdolgozat: Csillag Adrienn: A devizaopciók hazai piaca, Budapesti Gazdasági Főiskola (2007)

[14] Vito Ricci: Fitting distributions with R (2005)