

A sztatikus mágneses tér hatása az idegsejt akciós potenciáljának kialakulására

Diplomamunka

Írta: Horváth Katalin

Alkalmazott matematikus szak

Témavezetők:

Stoyan Gisbert, egyetemi tanár
Numerikus Analízis tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar

László János, fizikus
Magyar Tudományos Akadémia, Matematikai Tudományok Osztálya



Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Természettudományi Kar
2009

Tartalomjegyzék

| | |
|--|-----------|
| Előszó | 5 |
| 1. Bevezetés | 7 |
| 1.1. Biológiai háttér | 7 |
| 1.2. Célkitűzések | 8 |
| 1.3. A sztatikus mágneses terekről | 9 |
| 2. A modell | 10 |
| 2.1. Matematikai megfogalmazás | 10 |
| 2.1.1. A rendszerben előforduló paraméterek, jelölések | 11 |
| 2.1.2. Mozgásegyenlet | 11 |
| 2.1.3. Differenciálegyenlet | 12 |
| 2.1.4. A feszültség-paraméter értéktartományának pontosítása | 13 |
| 2.2. A feladat megoldásának lehetőségei | 16 |
| 2.2.1. Elemi megközelítés | 16 |
| 2.2.2. A modell egyszerűsítése | 17 |
| 3. A modell becsléses vizsgálata | 19 |
| 3.1. A koordinátafüggvények becslései | 20 |
| 3.2. Megengedett megoldások kizárása | 23 |
| 3.3. Eredmények | 27 |
| 4. Elegendő mágneses indukció keresése | 28 |
| 4.1. Kontrollelméleti alapfogalmak | 28 |
| 4.2. Lineáris rendszerek irányíthatósága | 29 |
| 4.3. A modell irányíthatósága | 30 |
| 4.4. Eredmények. | 35 |
| 4.5. A paramétereiben linearizált rendszer megoldásának vizsgálata | 36 |
| 5. Egy módosított modell: nyugalomból induló ion | 38 |
| 5.1. A becsléses vizsgálat lépései | 38 |
| 5.2. A koordinátafüggvények becslései | 39 |
| 5.3. Megengedett megoldások kizárása | 39 |
| 5.4. További megoldások vizsgálata | 41 |
| 6. Eredmények, következtetések | 44 |
| Irodalomjegyzék | 45 |

Előszó

Napjainkban számos okból fontossá vált a mágneses terek fiziológiás hatásának vizsgálata. Ilyenek például a mobil kommunikáció, a nagyfeszültségű távvezetékek használata, az MR-módszerek alkalmazása az orvosi diagnosztikában, vagy a fájdalomcsillapítást szolgáló mágneses termékek piaci megjelenése. Ebben az írásban egy, a sztatikus mágneses térrel történő fájdalomcsillapítással kapcsolatos kérdésre próbálok válasz adni.

A különböző mágneses terek fájdalomcsillapító hatását vizsgáló állatkísérletek eredményei azt támasztják alá, hogy már egy 1 T körüli indukciójú mágneses tér alkalmas a fájdalomérzet nagymértékű csökkentésére. A kutatások során az erős homogén, illetve az erősen inhomogén mágneses terek esetében tapasztaltak jelentős hatást. A mérési eredmények jelentősége, hogy olyan fájdalomcsillapító módszert kaphatunk, amely gyógyszer-mentes, tartós alkalmazása nem okoz függőséget, kevesebb mellékhatással járhat mint a konzervatív kezelések, mindenki számára elérhető és nem utolsó sorban olcsó.

Magyarországon a sztatikus mágneses tér hatását az akut fájdalomérzetre az egereken végzett ún. writhing- (vonaglási) teszt segítségével tanulmányozták [2], ami a farmakológia általánosan használt módszere a fájdalom okozta reakció mérésére. A kísérlethez használt mágneses teret létrehozó készülék optimalizációja után a kezelés 83%-ban csökkentette a fájdalomérzetet, és ideje alatt, illetve az azt követő 96 órában káros mellékhatást nem volt megfigyelhető. Ezen eredmények reprodukálhatónak és statisztikailag szignifikánsnak bizonyultak. Az eredmények tehát kecsegtetőek, azonban egyelőre ismeretlen a hatásmechanizmus komplex képe. További kutatásokban azt is vizsgálták, hogy melyek azok a receptorok, amelyek a fájdalom sztatikus mágneses tér okozta csökkenésében részt vehetnek, és azt találták, hogy a sztatikus mágneses tér inkább a végtagokon, mint a központi idegrendszerben hat.

A dolgozatban azzal az esettel foglalkozom, amikor a perifériás fájdalomérzet egy külső mechanikai inger következtében lép fel. Ilyenkor a fájdalomérzet kialakulásához vezető folyamat első lépése, hogy a szervezet perifériáján található érző idegsejtek sejtfalán keresztül ion-áram valósul meg. Azt vizsgálom, hogy lehet-e a sztatikus mágneses tér fájdalomcsillapító hatásának (egyik) oka, hogy ezt a jelenséget a Lorentz-erő által leírt módon nagymértékben befolyásolja.

Dolgozatom első fejezetében összefoglalom a probléma modellezéséhez szükséges biológiai ismereteket, majd a második fejezetben a modell leírása következik. Ezután a harmadik fejezetben bebizonyítom, hogy legfeljebb 10 T indukciójú térrel nem lehetséges befolyásolni az ionok mozgását. A negyedik fejezetben azzal a kérdéssel foglalkozom, hogy vajon mekkora indukció volna elegendő a kívánt hatás eléréséhez, végül az utolsó részben a modellt módosítva újrazvizsgálom a fenti kérdéseket.

Ezúton mondok köszönetet témavezetőimnek, László Jánosnak és Stoyan Gisbertnek, továbbá Simon Péternek a hasznos ötletekért.

1. Bevezetés

Ebben az írásban arra a kérdésre szeretnénk választ kapni, hogy egy sztatikus mágneses tér segítségével meg tudjuk-e akadályozni, hogy valamilyen periférián ható külső inger hatására szervezetünkben fájdalomérzet jöjjön létre.

A fájdalom érzetének kialakulásáért idegrendszerünk üzenetközvetítő képessége a felelős. Az üzenetátadásban részt vevő idegsejtek a következőképpen működnek: a neuron egyik pólusán felveszi az üzenetet és két egymást követő elektromos jellé alakítja. Az első jel változtatható nagyságú, lokalizált, ún. *elektrotónusos potenciálváltozás*. A második, ha létrejön, mindig azonos nagyságú, nem marad lokalizált, hanem az ún. *akciós potenciál* formájában a neuron másik pólusához vezeti az üzenetet. Az akciós potenciál végül kémiai anyagot szabadít fel, és ez maga a jelzés akár a következő neuron, akár a végrehajtó célsejt részére. Amikor a fájdalom a periférián egy külső inger hatására alakul ki, akkor ez a folyamat az ingerülettel alakításra hivatott ún. fájdalom érző idegsejtekben (nociceptorokban) veszi kezdetét. Az ingerlést követően tehát, a fájdalomérzet nem jöhet létre, ha már az érző idegsejtben sem alakul ki az akciós potenciál.

A későbbiekben azt fogom vizsgálni, hogy ezt egy sztatikus mágneses tér jelenlétével el lehet-e érni.

1.1. Biológiai háttér [1], [4]

Az ingerlés bekövetkezte előtt a receptor, illetve annak membránja nyugalmi állapotban van. A szervezetünket érő külső inger hatására vegyi folyamatok indulnak be, amelyek a receptor membránján ún. ioncsatornákat nyithatnak meg, és fiziológiásan közvetlenül ez a jelenség váltja ki a lokalizált potenciálváltozásokat. A létrejött potenciálváltozások nagysága, térbeli kiterjedése, időbeli változása meghatározó jelentőségűek az akciós potenciál kialakulása szempontjából.

A nyugalmi membránpotenciál:

A nyugalmi membránpotenciál fenntartásáért két tényező felelős: a sejt belső anyagának és a sejtet körülvevő közeg összetételének különbsége, illetve a sejtmembrán speciális tulajdonságai.

A sejteket folyadék veszi körül — lényegében közönséges fiziológiás sóoldat —, amely túlnyomórészt nátrium- (Na^+) és klorid- (Cl^-) ionokat tartalmaz. A sejt belsejében viszonylag kevés a nátrium, csupán tizedrésze az extracelluláris folyadékban levőnek, de aránylag sok van káliumból (K^+), és ez a koncentráció harmincszorosa is lehet a külsőnek. Ugyancsak alacsony a belső kloridkoncentráció, tizennegyed része az extracellulárisnak. A sejt belsejében nagy molekulájú fehérjék is vannak, amelyek negatív töltésűek.

A membrán speciális szerkezetét nem ismerve jogosan kérdezhetnénk, hogy hogyan lehetségesek ezek a nagy ionkoncentrációbeli eltérések. Hiszen az egyes ionoknak a diffúzió hatására addig kellene mozogniuk a magasabb koncentrációtól az alacsonyabb felé, amíg koncentrációjuk kint és bent azonos lesz. Hogy ez mégsem így van, azt alapvetően a sejtmembrán szelektív átjárhatósága és a fehérje molekulák jelenléte magyarázza.

A membrán szerkezete olyan, hogy a kálium- és a kloridion szabadon átjuthat rajta, a nátrium viszont nem. (A nátriumionokra vonatkozó impermeabilitás ezen kívül egy aktív kémiai mechanizmus, az ún. nátriumion-pumpa eredménye is.) Másrészt a K^+ ionok mozgását a negatív töltésű fehérjemolekulák akadályozzák meg, lekötve őket.

Összefoglalva tehát, a fehérjemolekulákat a membrán belső felszínéhez közel kell elképzelnünk a K^+ ionok kíséretében, amelyek próbálnak kijutni a sejtből a koncentrációgradiens parancsára. Ezzel a membrán belső felszínén felhalmozódó negatív töltéssel egyenértékű pozitív Na^+ koncentráció jön létre a membrán külső oldalán. Az eredmény az, hogy a membrán elválasztja egymástól a pozitív töltéseket, ami egy kb. -70 mV értékű nyugalmi membránpotenciált okoz.

Az akciós potenciál (AP):

Az ingerlés bekövetkeztekor a sejtmembrán az ioncsatornák megnyitásával a nátriumionok számára átmenetileg átjárhatóvá válik. Így a nátriumionok betódulnak a nociceptorba, és közben csökkentik a membrán belsejének a külsejéhez viszonyított negatív polaritását. Minél inkább csökkentik, annál nagyobb lesz a sejtmembrán permeabilitása, tehát egyre több nátrium áramlik a sejtbe. A beáramlás addig tart, amíg a membrán nemcsak hogy depolarizálódik, hanem a polaritás meg is fordul: a membrán belül pozitívvá válik, amíg a $+40$ mV értéket el nem éri. Ezzel létrejön az akciós potenciál. Az eddig a pillanatig lejátszódott eseménysorra a későbbiekben mint "AP-folyamatra" fogunk hivatkozni.

Ekkor a membránszerkezet ismét változni kezd, a Na^+ számára fokozatosan teljesen átjárhatatlanná, a K^+ számára pedig fokozatosan átjárhatóvá válik. A kálium a sejt belsejéből kiáramlik, amíg a polaritás újból meg nem fordul és el nem éri az eredeti -70 mV-ot.

Az akciós potenciál kialakulásáig eltelt idő 0.5 ms-ra tehető.

1.2. Célkitűzések

A fájdalomérzet kialakulását tehát úgy szeretnénk elkerülni, hogy már az érző idegsejtben megakadályozzuk az akciós potenciál kialakulását. Mint láttuk, a folyamat első lépése — az ioncsatornák megnyílása után — a nátriumionok sejtbe áramlása.

Minthogy egy elektromosan töltött, véges sebességgel rendelkező részecske mágneses térben eltéríthető, ezért célunk az lesz, hogy azt a mágneses teret megtaláljuk, amelynek jelenlétében a nátrium-ionok olyan mértékben térnek ki eredeti pályájukról, hogy már nem jutnak át a csatornákon a receptor belsejébe, vagy hogy bebizonyítsuk, nem létezik erre alkalmas, reális nagyságú mágneses tér.

1.3. A sztatikus mágneses terekről

Ebben a pontban néhány szót szentelünk annak, hogy mit értünk reális nagyságú mágneses téren. Ehhez először nézzünk néhány példát:

- a Föld mágneses mezeje az egyenlítőn $31 \mu\text{T}$, azaz $3.1 \cdot 10^{-5} \text{T}$,
- egy nagy patkómágnes mágneses tere a mágnes felületén 1 mT ,
- az orvosi MRI-ben 8 T , kísérleti, klinikai berendezésekben 14 T a legnagyobb érték,
- a legerősebb előállított tartós mágneses tér a Floridai Állami Egyetem laboratóriumában 45 T ,
- a legerősebb mágneses tér, amit pillanatnyi időre állítottak elő robbanás nélkül 80 T (Osaka Egyetem), robbanással 2800 T (Szarov Intézet),
- a legnagyobb elméletileg lehetséges mágneses tér neutroncsillagban, és bármely ismert jelenségben 10^{13} T .

Mindezek alapján, és figyelembe véve a kísérleti berendezésekben használt mágneses terek nagyságát is, azt tartjuk reálisnak, hogy a modell vizsgálata során a keresett mágneses indukció nagyságát 10 T -ban maximalizáljuk.

2. A modell

Modellünkben nem tekintjük az egész nociceptort, csupán annak egyetlen, már nyitott állapotú nátriumcsatornáját, és egy ezen a csatornán átjutni kívánó ion pályáját vizsgáljuk. Az ion az akciós potenciál kialakulásának ideje alatt bármikor indulhat. A rendszerre egy időtől független, homogén, \underline{B} indukciójú sztatikus mágneses tér hat.

Modellünk *merev test modell*, amelyben az ion egy véges sugarú merev gömb, a csatornában homogén, izotróp, összenyomhatatlan folyadék van, maga a csatorna pedig egy szintén merev, téglalap alapú egyenes hasáb.

Figyelembe vesszük:

- Az elektrosztatikus kölcsönhatást, azaz a potenciálkülönbséget a csatorna külső és belső felülete között.
- A diffúziót. Ezt a jelenséget a koncentrációkülönbség vezérli.
- A mágneses kölcsönhatást, a Lorentz-erőt.
- A közegeellenállást.

Elhanyagoljuk:

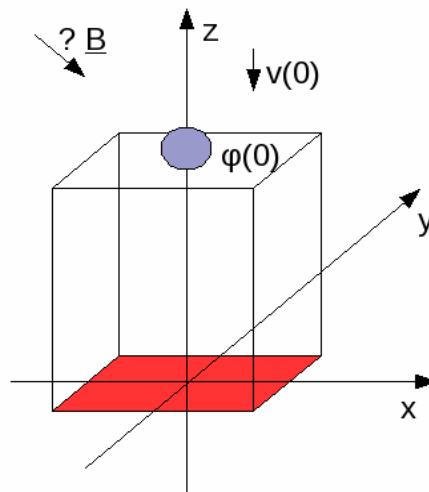
- A potenciálkülönbség időfüggését. Egyetlen ion csatornán való áthaladásának ideje alatt ugyanis a membránpotenciál változása elhanyagolhatóan kicsi.
- A gravitációt és a felhajtóerőt, mert ezek kiegyenlítik egymást.
- Az inter- és szubatomi kölcsönhatásokat. Ezek nem lehetnek részesei a modellnek, hiszen egyetlen merev test mozgását vizsgáljuk.

2.1. Matematikai megfogalmazás

Az ioncsatorna egy téglalap alapú egyenes hasáb [5], amelyet a koordináta rendszerben az x-y síkra állítva helyezünk el úgy, hogy alapjának középpontja az origóba essen. A nátriumion kezdeti pozíciója a csatorna fedőlapjának középpontjában van, kezdeti sebessége 1 m/s.

A pillanatnyilag rá ható elektromos potenciálgradiens nagysága: U , a mágneses tér indukcióvektora : \underline{B} .

Célunk, hogy az ion pályája a csatorna másik végét, azaz a hasáb alapját képező téglalapot ne érje el.



2.1.1. A rendszerben előforduló paraméterek, jelölések

Rendszerünkben az időt percben, a távolságokat méterben fogjuk meghatározni.
Az ion kezdősebessége: 1 m/s.

A nátriumion pályája: $\varphi: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$: $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$, $\varphi(0) = (0, 0, 5 \cdot 10^{-9})$,
és sebessége: $\dot{\varphi}(t) = v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$, $v(0) = (0, 0, 0)$.

A csatorna keresztmetszete: $5,1 \times 3,1 \text{ \AA}$ [5], így az alaplap (x, y) pontjaira:
 $x \in [-2,55 \cdot 10^{-10}, 2,55 \cdot 10^{-10}] \text{ m}$, $y \in [-1,55 \cdot 10^{-10}, 1,55 \cdot 10^{-10}] \text{ m}$.
A membrán vastagsága, azaz a csatorna hossza: $h = 5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ [5].

$Q = 1,76 \cdot 10^{-18} \text{ C}$: a nátriumion töltése,
 $m = 3,84 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$: az ion tömege,
 $r = 9,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$: az ion sugara [5].

A vér viszkozitása $4 \cdot 10^{-3}$ és $2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Ns/m}^2$ között változhat. A csatornafolyadék viszkozitását ennek átlagos értékével becsülve kapjuk, hogy: $\eta = 1,45 \cdot 10^{-2} \text{ Ns/m}^2$.

$U \in [-70 \cdot 10^{-3}, 40 \cdot 10^{-3}] \text{ V}$: a membránpotenciál aktuális értéke [4].

$\underline{B} = (b_1, b_2, b_3)$: a mágneses tér indukcióvektora, ahol feltesszük, hogy $|\underline{B}| \in [0, 10] \text{ T}$.

2.1.2. Mozgásegyenlet

Az ionok mozgását a valóságban az elektromos- és a kémiai potenciálgradiensük határozza meg. Ezért a modellben szereplő egyetlen ionra ható erőket ezekből fogjuk származtatni.

Feltesszük, hogy egyetlen ion mozgása alatt ezek az erők állandóak.

Az elektromos potenciálgradiens:

Mechanikából tudjuk, hogy a munka: $W = \int_s \underline{F} ds$ megegyezik azzal az energiával, amellyel egy testet az \underline{F} erő segítségével adott s úton el lehet mozdítani. Ha a test ugyanabban az irányban mozog és a ráható erő párhuzamos a mozgás irányával, akkor $W = |\underline{F}| \cdot |s|$.

Modellünkben ez utóbbi tulajdonság fennáll, hiszen mágneses tér híján az ion az elektromos tér gradiensevel párhuzamosan, egyenesen halad végig a csatornán.

Másrészt az elektromos erő nagyságára vonatkozóan, az egyetlen információ, amiből kiindulhatunk, hogy ismerjük a membránpotenciál aktuális értékét: $U \text{ V}$. Ebből a $W = Q \cdot U$ összefüggés segítségével fel tudjuk írni a munkát. Végül, ha a csatorna hossza h , akkor az erő nagyságát az $|\underline{F}_{eg}| = \frac{Q \cdot |U|}{h}$ kifejezéssel becsülhetjük.

A kémiai potenciálgradiens:

A membránpotenciál létrehozásáért felelős ionok száma elhanyagolható a sejt egészében megtalálható ionok mennyiségéhez képest.

Például 6000 db Na^+ ion átvándorlása $1 \mu\text{m}^2$ membránfelületen 100 mV -tal változtathatja meg a membrán potenciálját, míg a sejt citoplazmájának $1 \mu\text{m}^3$

térfogatában kb. $3 \cdot 10^7$ Na^+ ion található [3].

Ezért a koncentrációkülönbségből fakadó kémiai gradiens lényegében állandó a vizsgált folyamat alatt.

A potenciálgradiens U nagysága $-70 \cdot 10^{-3}$ és $+40 \cdot 10^{-3}$ V között mozog, és tudjuk hogy az utóbbi értéknél a nátriumion transzportja megszűnik.

Mivel az iontranszport hajtóerejét a koncentrációgradiens és az elektromos potenciálgradiens összege adja, ezért a $+40 \cdot 10^{-3}$ V-os dinamikus egyensúlyi állapot akkor áll be, amikor ez a két erő éppen ellensúlyozza egymást.

Mindezek alapján, ha az elektromos erő nagyságát adott pillanatban az $|E_{eg}| = \frac{Q \cdot |U|}{h}$ képlettel definiáltuk, akkor a koncentrációkülönbségből fakadó erő állandó nagyságát az $|E_{kg}| = \frac{Q \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{h}$ kifejezéssel becsülhetjük.

Ezután már felírhatjuk a teljes mozgásegyenletet:

Ha a részecske mozgásban van, azaz $U \neq 40$ mV, akkor Newton 2. törvénye alapján $\underline{a} = \frac{E_{eg}}{m} + \frac{E_{kg}}{m} + \frac{E_k}{m} + \frac{E_B}{m}$, ahol \underline{a} a gyorsulás, m a részecske tömege, az erők pedig rendre: elektromos gradiens, koncentrációgradiens, mechanikai közegellenállás, Lorentz-erő.

Az erők az alábbi módon jellemezhetők:

$$E_{eg} = \frac{Q \cdot (-U)}{h} \cdot \underline{v}(0), \quad E_{kg} = \frac{Q \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{h} \cdot \underline{v}(0), \quad E_k = -6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot \underline{v}(t) \quad [8], \quad E_B = Q \cdot \underline{v}(t) \times \underline{B} \quad [8].$$

Itt a Lorentz-erő képletében a sebesség és a mágneses indukció vektoriális szorzata szerepel. Tehát az erővektor merőleges \underline{B} -re és \underline{v} -re, velük jobbrándszert alkot.

Ha $U = 40$ mV, akkor a részecske mozdulatlan, ezzel az esettel nem kell foglalkoznunk.

2.1.3. Differenciálegyenlet

$$\varphi(t): \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \dot{\varphi}(t) = \underline{v}(t), \quad \ddot{\varphi}(t) = \underline{a}(t)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{-Q \cdot U}{h \cdot m} \cdot \dot{\varphi}(0) + \frac{Q \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{h \cdot m} \cdot \dot{\varphi}(0) - \frac{6\pi \cdot \eta \cdot r}{m} \cdot \dot{\varphi}(t) + \frac{Q}{m} \cdot \dot{\varphi}(t) \times \underline{B},$$

$$\varphi(0) = (0, 0, 5 \cdot 10^{-9}), \quad \dot{\varphi}(0) = (0, 0, -1).$$

Az első két tag összevonásával, és $V := 40 \cdot 10^{-3} - U$, $V \in (0, 110 \cdot 10^{-3}]$ bevezetésével:

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{Q \cdot V}{h \cdot m} \cdot \dot{\varphi}(0) - \frac{6\pi \cdot \eta \cdot r}{m} \cdot \dot{\varphi}(t) + \frac{Q}{m} \cdot \dot{\varphi}(t) \times \underline{B}.$$

A konstansok behelyettesítésével:

$$\ddot{\varphi}(t) = 9.16 \cdot 10^{15} \cdot V \cdot \dot{\varphi}(0) - 6.76 \cdot 10^{14} \cdot \dot{\varphi}(t) + 4.58 \cdot 10^7 \cdot \dot{\varphi}(t) \times \underline{B},$$

ahol V és $\underline{B}=(b_1, b_2, b_3)$ a fent leírt korlátok között választható szabad paraméterek.

Az egyszerűség kedvéért a rendszerben szereplő konstansokat helyettesítsük az alábbi módon:

$$6.76 \cdot 10^{14} := c_1, \quad 4.58 \cdot 10^7 := c_2, \quad 9.16 \cdot 10^{15} := c_3, \quad 5 \cdot 10^{-9} := c_4.$$

Koordinátánkénti rendszer:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1(t) &= -c_1 \cdot \dot{\varphi}_1(t) + c_2 \cdot b_3 \cdot \dot{\varphi}_2(t) - c_2 \cdot b_2 \cdot \dot{\varphi}_3(t) \\ \ddot{\varphi}_2(t) &= -c_2 \cdot b_3 \cdot \dot{\varphi}_1(t) - c_1 \cdot \dot{\varphi}_2(t) + c_2 \cdot b_1 \cdot \dot{\varphi}_3(t) \\ \ddot{\varphi}_3(t) &= c_2 \cdot b_2 \cdot \dot{\varphi}_1(t) - c_2 \cdot b_1 \cdot \dot{\varphi}_2(t) - c_1 \cdot \dot{\varphi}_3(t) - c_3 \cdot V \\ \varphi(0) &= (0, 0, c_4), \quad \dot{\varphi}(0) = (0, 0, -1) \end{aligned}$$

A differenciálegyenletrendszer mátrixos alakja:

Legyen: $x(t) := (\varphi(t), v(t))^T \in \mathbb{R}^6$.

Ekkor $\dot{x}(t) = (\dot{\varphi}(t), \dot{v}(t))^T$ és $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + d$, ahol $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $d \in \mathbb{R}^6$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -c_1 & c_2 b_3 & -c_2 b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -c_2 b_3 & -c_1 & c_2 b_1 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 b_2 & -c_2 b_1 & -c_1 \end{pmatrix}, \quad d = (0, 0, 0, 0, 0, -c_3 \cdot V)^T,$$

továbbá: $x(0) = (\varphi(0), v(0)) = (0, 0, c_4, 0, 0, -1)$.

2.1.4. A feszültség-paraméter értéktartományának pontosítása

Ebben a pontban néhány sort szánunk annak igazolására, hogy a modell eleget tesz a legalapvetőbb elvárásoknak. Ezután a V paraméter lehetséges értékeivel kapcsolatban egy olyan észrevételt rögzítünk, ami a modell vizsgálata során fontos szerepet fog játszani.

2.1.1. ÁLLÍTÁS:

Tegyük fel, hogy a mágneses indukció zérus.

Ekkor a modell szerint a részecske a térben függőlegesen lefelé halad, és tetszőleges pozitív feszültségi állapot mellett el is éri a csatorna túlsó végét, azaz a $\varphi_3(t) = 0$ egyenletnek $\forall V \in (0, 110 \cdot 10^{-3}]$ érték mellett van nemnegatív megoldása.

Bizonyítás. Minthogy $\underline{B} \equiv 0$, a rendszer az alábbi alakra írható:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1(t) &= -c_1 \cdot \dot{\varphi}_1(t), \\ \ddot{\varphi}_2(t) &= -c_1 \cdot \dot{\varphi}_2(t), \\ \ddot{\varphi}_3(t) &= -c_1 \cdot \dot{\varphi}_3(t) - c_3 \cdot V, \quad \varphi(0) = (0, 0, c_4), \quad \dot{\varphi}(0) = (0, 0, -1). \end{aligned}$$

Ebből elemi módszerekkel kapjuk, hogy a részecske pályája:

$$\varphi_1(t)=0, \varphi_2(t)=0, \varphi_3(t)=\left(\frac{c_1-c_3V}{c_1^2}\right)\cdot e^{-c_1t}-\frac{c_3V}{c_1}\cdot t+\frac{c_3V}{c_1^2}-\frac{1}{c_1}+c_4.$$

Ha most $t>0 \Rightarrow \dot{\varphi}_3(t)=\left(\frac{-c_1+c_3V}{c_1}\right)\cdot e^{-c_1t}-\frac{c_3V}{c_1}=\frac{c_3V}{c_1}\cdot(e^{-c_1t}-1)-e^{-c_1t}<0$, ezért az ion a modell szerint egyenesen halad a csatorna túlsó vége felé.

$$\text{Másképp } \varphi_3(t)=0 \Leftrightarrow (c_1-c_3V)\cdot e^{-c_1t}-c_1c_3V\cdot t+c_3V-c_1+c_1^2c_4=0.$$

Ha $c_1-c_3V=0 \Rightarrow t=c_4$ megoldása az egyenletnek.

$$\text{Ha } c_1-c_3V\neq 0 \Rightarrow \varphi_3(t)=0 \Leftrightarrow e^{-c_1t}=\frac{c_3V}{c_1-c_3V}\cdot c_1t+\frac{c_1-c_3V-c_1^2c_4}{c_1-c_3V}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$c_1t:=x, \frac{c_3V}{c_1-c_3V}:=a, \frac{c_1-c_3V-c_1^2c_4}{c_1-c_3V}:=b.$$

Azt szeretnénk látni, hogy az $e^{-x}=ax+b$ egyenletnek van nemnegatív megoldása.

Tekintsük az együtthatókat, mint c_3V hiperbolikus függvényeit, és vizsgáljuk meg a lehetőségeket.

Figyelembe véve, hogy $0 < c_3V \leq c_3 \cdot 0.11$, az eredményt az alábbi táblázat mutatja:

| | | |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| c_3V | $(0, c_1)$ | $(c_1, c_3 \cdot 0.11]$ |
| a | $a > 0$ | $a < -1$ |
| b | $b \leq 1 - c_1c_4 < 0$ | $b > 1$ |
| nemnegatív megoldásszám: | 1 | 1 |

Ezzel az állítást beláttuk. \square

2.1.2. LEMMA:

Tekintsük a $\varphi_3(t)=0$ egyenlet egyértelmű $\hat{t}>0$ megoldását.

Ekkor $V \rightarrow 0$ esetén $\hat{t} \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. Elegendő azt belátni, hogy ha $c_3V \rightarrow 0$, akkor az előző bizonyítás során bevezetett $e^{-x}=ax+b$ egyenlet nemnegatív $\hat{x}=c_1\hat{t}$ megoldása tart a végtelenbe.

Ez pedig következik abból, hogy $c_3V \rightarrow 0$ ($c_3V < c_1$) esetén $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 1 - c_1c_4$, ahol $1 - c_1c_4 < 0$. \square

Gondoljuk meg, mit is jelent ez az állítás a modell helyességére nézve.

A biológusok mérései szerint a sejtmembrán két oldala közötti potenciálkülönbség az AP-folyamat 0.5 ms-os időtartama alatt -70 mV-ról +40-re változik, és amikor ezt a határt elérte, létrejön az akciós potenciál. Ez a modellünkben úgy jelenik meg, hogy a feszültség értéke 0.11 V-ról csökken fokozatosan 0-ra. A feszültség csökkenését az ionok sejtbe áramlása okozza, másrészt az ionokat a pozitív feszültségi állapot készletti mozgásra. A fenti eredmény tehát azt jelenti, hogy a modellünk szerint az

apró feszültségi állapotok mellett az ionok átjutása oly mértékben lelassul, hogy a 0 V-os értéket csak a végtelenben érhetjük el. Azaz az AP sosem jön létre!
 Ez a látszólag paradox tulajdonság azonban kiküszöbölhető, ha a 0 V értéket egy kellően apró ε -nal helyettesítve teljesül, hogy az ε feszültség mellett induló ion 0.5 ms alatt átjut a csatornán. Ugyanis, ha ε a mV-os nagyságrendhez képest elhanyagolhatóan kicsi, akkor így nem hamisítjuk meg a 0-nak megfelelő, eredetileg mérési eredményként kapott +40 mV-os kritikus értéket.

2.1.3. ALLÍTÁS:

Legyen $\varepsilon = 7.38 \cdot 10^{-7}$. Ekkor egy adott $V \geq \varepsilon$ feszültség-érték mellett induló ion 0.5 msec alatt átjut a csatornán.

Bizonyítás. Legyen $0.5 \cdot 10^{-3} = \hat{t}$.

Elég azt belátni, hogy $V = \varepsilon$ esetén $\varphi_3(\hat{t}) < 0$, hiszen $\varphi_3(t)$ szigorúan monoton csökkenő.

$$\varphi_3(\hat{t}) = \left(\frac{c_1 - c_3 V}{c_1^2} \right) \cdot e^{-c_1 \hat{t}} - \frac{c_3 V}{c_1} \cdot \hat{t} + \frac{c_3 V}{c_1^2} - \frac{1}{c_1} + c_4 < \left(\frac{c_1 - c_3 V}{c_1^2} \right) \cdot \frac{1}{c_1 \hat{t} + 1} - \frac{c_3 V}{c_1} \cdot \hat{t} + \frac{c_3 V}{c_1^2} - \frac{1}{c_1} + c_4.$$

Itt a jobboldal:

$$\left(\frac{c_1 - c_3 V}{c_1^2} \right) \cdot \frac{1}{c_1 \hat{t} + 1} - \frac{c_3 V}{c_1} \cdot \hat{t} + \frac{c_3 V}{c_1^2} - \frac{1}{c_1} + c_4 < 0 \Leftrightarrow -c_3 V \cdot \hat{t}^2 + (c_1 c_4 - 1) \hat{t} + c_4 < 0 \Leftrightarrow$$

$$V > \frac{(c_1 c_4 - 1) \hat{t} + c_4}{c_3 \cdot \hat{t}^2} = \frac{(6.76 \cdot 5 \cdot 10^5 - 1) \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-9}}{9.16 \cdot 25 \cdot 10^7} \approx 7.3799 \cdot 10^{-7}. \quad \square$$

A V paraméter lehetséges értékeinek pontosítása:

Az előbbi eredmény tehát azt jelenti, hogy a modell jól írja le a valóságos folyamatot, ha azt tesszük fel, hogy az akciós potenciál létrejöttét eredményező kritikus membránpotenciál értéke $40 \cdot 10^{-3} - \varepsilon = 40 \cdot 10^{-3} - 7.38 \cdot 10^{-7}$ V. Ezt a feltételezést pedig nyilvánvalóan elfogadhatjuk, hiszen ez a módosított kritikus érték mindössze 7.38 tizedred mV-tal tér el az eredetileg mért +40 mV kritikus értéktől.

Így a modellben a továbbiakban azt fogjuk feltenni, hogy $U \in [-70, 40 - 7.38 \cdot 10^{-4}]$ mV, azaz $V \in [7.38 \cdot 10^{-7}, 0.11]$ V.

2.2. A feladat megoldásának lehetőségei

Azokat a \underline{B} , V paraméter értékeket keressük, amelyek mellett az ion nem jut át a csatornán. A továbbiakban a (\underline{B}, V) paraméterpárt *megengedettnek* hívjuk, ha:

$$V \in [7.38 \cdot 10^{-7}, 0.11], \quad |\underline{B}| \in [0, 10].$$

Amennyiben léteznek ilyen megengedett párok és már a rendelkezésünkre állnak, meg tudjuk vizsgálni, hogy van-e olyan mágneses tér, amely kellő mennyiségű feszültségi állapot mellett kitéríti az iont, és így a valóságban kellően sok ion sejtbe jutását akadályozhatjuk meg általa. Hiszen az AP létrejötte azon múlik, hogy hány ion jut át a csatornákon.

A megfelelő paraméter értékeket az alábbi módokon találhatjuk meg:

Azokat a párokat keressük, amelyek mellett az ion:

1) nem éri el a csatorna túlsó végét, azaz, amely paraméter értékek mellett nincs olyan $t \in [0, 5 \cdot 10^{-4}]$, amelyre $\varphi(t) = (x, y, 0)$, ahol $x \in [-2.55 \cdot 10^{-10}, 2.55 \cdot 10^{-10}]$ m, $y \in [-1.55 \cdot 10^{-10}, 1.55 \cdot 10^{-10}]$ m,

2) mindvégig az x-y sík fölött marad, azaz $\forall t \in [0, 5 \cdot 10^{-4}]$ -re $\varphi_3(t) > 0$,

3) a csatorna falának ütközik, még mielőtt a túlsó végét elérné.

Itt elegendőnek tekintjük, ha a részecske a csatorna falához ér, ugyanis feltehető hogy ekkor olyan kémiai reakciók indulnak be, amelyek az ion további mozgását végleg megghiúsítják. Tehát itt azokat a párokat keressük, amelyek mellett $\exists \hat{t} \in [0, 5 \cdot 10^{-4}]$, amelyre $\varphi(\hat{t}) = (x, y, z)$, ahol $z > 0$ és $|x| = 2.55 \cdot 10^{-10} - r$ vagy $|y| = 1.55 \cdot 10^{-10} - r$.

2.2.1. Elemi megközelítés

Amennyiben ismerjük a rendszer φ megoldását, megpróbálhatjuk a lehetséges paraméter-értékeket egy egyenlőtlenségrendszer megoldásával megtalálni.

A differenciálegyenletrendszer megoldása:

2.2.1. TÉTEL: Ha A és d konstans mátrixok, akkor az $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + d$, $x(0) = p$

$$\text{rendszer megoldása: } x(t) = e^{A \cdot t} \cdot p + \int_0^t e^{A \cdot (t-s)} \cdot d \, ds, \text{ ahol } e^{A \cdot t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A \cdot t)^n}{n!}. \quad \square$$

A tételt alkalmazva, a szükséges számítások elvégzésével kapjuk, hogy a koordinátánkénti megoldás:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = & \left[\frac{c_3 V (c_2 |\underline{B}|^2 (2c_1 b_2 - c_2 b_1 b_3) + c_1^2 b_1 b_3)}{|\underline{B}|^2 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)^2} - \frac{c_1 b_1 b_3 + c_2 b_2 |\underline{B}|^2}{|\underline{B}|^2 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)} \right] \cdot \cos(c_2 |\underline{B}| t) \cdot e^{-c_1 t} - \\ & \left[\frac{c_3 V (c_2 (2c_1 b_1 b_3 + c_2 b_2 |\underline{B}|^2) - c_1^2 b_2)}{|\underline{B}| (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)^2} + \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1 b_3}{|\underline{B}| (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)} \right] \cdot \sin(c_2 |\underline{B}| t) \cdot e^{-c_1 t} + \\ & \frac{b_1 b_3 (c_1 - c_3 V)}{c_1^2 |\underline{B}|^2} \cdot e^{-c_1 t} + \frac{-c_2 c_3 V (c_2 b_1 b_3 - c_1 b_2)}{c_1 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)} \cdot t + \frac{c_3 b_1 b_3 V}{c_1^2 |\underline{B}|^2} - \frac{c_2 (c_2 b_1 b_3 - c_1 b_2)}{c_1 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)} - \\ & \frac{c_3 V (c_2 |\underline{B}|^2 (2c_1 b_2 - c_2 b_1 b_3) + c_1^2 b_1 b_3)}{|\underline{B}|^2 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\varphi_2(t) = \left[\frac{-c_3 V (c_2 |\underline{B}|^2 (c_2 b_2 b_3 + 2 c_1 b_1) - c_1^2 b_2 b_3)}{|\underline{B}|^2 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)^2} - \frac{c_1 b_2 b_3 - c_2 b_1 |\underline{B}|^2}{|\underline{B}|^2 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)} \right] \cdot \cos(c_2 |\underline{B}| t) \cdot e^{-c_1 t} -$$

$$\left[\frac{c_3 V (c_2 (2 c_1 b_2 b_3 - c_2 b_1 |\underline{B}|^2) + c_1^2 b_1)}{|\underline{B}| (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)^2} - \frac{c_1 b_1 + c_2 b_2 b_3}{|\underline{B}| (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)} \right] \cdot \sin(c_2 |\underline{B}| t) \cdot e^{-c_1 t} +$$

$$\frac{b_2 b_3 (c_1 - c_3 V)}{c_1^2 |\underline{B}|^2} \cdot e^{-c_1 t} + \frac{-c_2 c_3 V (c_2 b_2 b_3 + c_1 b_1)}{c_1 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)} \cdot t + \frac{c_3 b_2 b_3 V}{c_1^2 |\underline{B}|^2} - \frac{c_2 (c_2 b_2 b_3 + c_1 b_1)}{c_1 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)} +$$

$$\frac{c_3 V (c_2 |\underline{B}|^2 (c_2 b_2 b_3 + 2 c_1 b_1) - c_1^2 b_2 b_3)}{|\underline{B}|^2 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)^2},$$

$$\varphi_3(t) = \left[\frac{-c_3 V (b_1^2 + b_2^2) (c_1^2 - c_2^2 |\underline{B}|^2)}{|\underline{B}|^2 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)^2} + \frac{c_1 (b_1^2 + b_2^2)}{|\underline{B}|^2 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)} \right] \cdot \cos(c_2 |\underline{B}| t) \cdot e^{-c_1 t} +$$

$$\left[\frac{2 c_1 c_2 c_3 V (b_1^2 + b_2^2)}{|\underline{B}| (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)^2} - \frac{c_2 (b_1^2 + b_2^2)}{|\underline{B}| (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)} \right] \cdot \sin(c_2 |\underline{B}| t) \cdot e^{-c_1 t} + \frac{b_3^2 (c_1 - c_3 V)}{c_1^2 |\underline{B}|^2} \cdot e^{-c_1 t} -$$

$$\frac{c_3 V (c_1^2 + c_2^2 b_3^2)}{c_1 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)} \cdot t + \frac{c_3 V (b_1^2 + b_2^2) (c_1^2 - c_2^2 |\underline{B}|^2)}{|\underline{B}|^2 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)^2} + \frac{c_3 b_3^2 V}{c_1^2 |\underline{B}|^2} - \frac{c_1^2 + c_2^2 b_3^2}{c_1 (c_1^2 + c_2^2 |\underline{B}|^2)} + c_4.$$

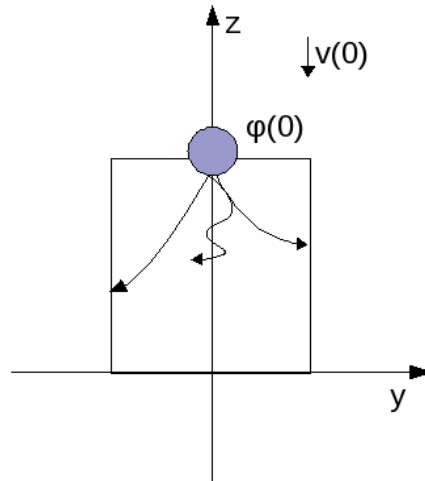
Mint hogy φ koordinátái bonyolult transzcendens kifejezések, a számításokkal egykönnyen egyik megközelítésben sem végezhetnénk.

2.2.2. A modell egyszerűsítése

A Lorentz-erő $\underline{E}_B = Q \cdot \underline{v}(t) \times \underline{B}$ képletéből látható, hogy a mágneses erő merőleges \underline{B} -re és \underline{v} -re, velük jobbrendszert alkot, és nagysága $|\underline{E}_B| = |Q| \cdot |\underline{B}| \cdot |\underline{v}(t)| \cdot \sin \alpha$, ahol α a \underline{B} és \underline{v} vektorok által bezárt szög. A sebességvektor a mágneses tértől mentes folyamatban mindvégig a z-tengellyel párhuzamos. Ez azt jelenti, hogy a mágneses erő az ion mozgásának kezdőpillanatában akkor a legnagyobb, amikor a tér indukcióvektora merőleges a z-tengelyre. Ekkor a részecskét a mágneses tér vízszintes irányban mozdíthatja el. Így a csatorna keresztmetszetét tekintetbe véve, az ion leghamarabb akkor érhetné el a csatorna falát, ha \underline{B} párhuzamos az x-tengellyel.

Tekintsük tehát ezt a speciális esetet, azaz amikor $\underline{B} = (b_1, 0, 0)$, ahol $b_1 \in [0, 10]$. Ekkor az ion mindvégig az y-z síkban marad, tehát $\varphi_1(t) = \varphi_1(t) = 0$.

Célunk, hogy az ion a csatorna alját ne érje el.



A rendszer az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\varphi(t) = (\varphi_2(t), \varphi_3(t)),$$

$$\ddot{\varphi}_2(t) = -c_1 \cdot \dot{\varphi}_2(t) + c_2 b_1 \cdot \dot{\varphi}_3(t),$$

$$\ddot{\varphi}_3(t) = -c_2 b_1 \cdot \dot{\varphi}_2(t) - c_1 \cdot \dot{\varphi}_3(t) - c_3 V,$$

$$\varphi(0) = (0, c_4), \quad \dot{\varphi}(0) = (0, -1).$$

Mátrixos alakban:

$$x(t) = (\varphi(t), v(t))^T, \quad \dot{x}(t) = (\dot{\varphi}(t), \dot{v}(t))^T \text{ és } \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + d, \text{ ahol } A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad d \in \mathbb{R}^4,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c_1 & c_2 b_1 \\ 0 & 0 & -c_2 b_1 & -c_1 \end{pmatrix}, \quad d = (0, 0, 0, -c_3 \cdot V)^T, \text{ és } x(0) = (\varphi(0), v(0))^T = (0, c_4, 0, -1)^T.$$

Az ion pályája:

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \left[\frac{-2c_1 c_2 c_3 V b_1}{(c_1^2 + c_2^2 b_1^2)^2} + \frac{c_2 b_1}{(c_1^2 + c_2^2 b_1^2)} \right] \cdot \cos(c_2 b_1 t) \cdot e^{-c_1 t} + \\ & \left[\frac{c_3 V (c_2^2 b_1^2 - c_1^2)}{(c_1^2 + c_2^2 b_1^2)^2} + \frac{c_1}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} \right] \cdot \sin(c_2 b_1 t) \cdot e^{-c_1 t} - \frac{c_2 c_3 V b_1}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} \cdot t - \frac{c_2 b_1}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} + \frac{2c_1 c_2 c_3 V b_1}{(c_1^2 + c_2^2 b_1^2)^2}, \\ \varphi_3(t) &= \left[\frac{c_3 V (c_2^2 b_1^2 - c_1^2)}{(c_1^2 + c_2^2 b_1^2)^2} + \frac{c_1}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} \right] \cdot \cos(c_2 b_1 t) \cdot e^{-c_1 t} + \\ & \left[\frac{2c_1 c_2 c_3 V b_1}{(c_1^2 + c_2^2 b_1^2)^2} - \frac{c_2 b_1}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} \right] \cdot \sin(c_2 b_1 t) \cdot e^{-c_1 t} - \frac{c_1 c_3 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} \cdot t + \frac{c_3 V (c_1^2 - c_2^2 b_1^2)}{(c_1^2 + c_2^2 b_1^2)^2} - \frac{c_1}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} + c_4. \end{aligned}$$

Arra, hogy a feladatot egyenlőtlenségekkel oldjuk meg, még ez az egyszerűbb rendszer sem alkalmas, mégis kihasználhatjuk, hogy a pálya lényegesen leegyszerűsödött és a paraméterek száma négyről kettőre csökkent.

A továbbiakban ezzel a rendszerrel fogunk foglalkozni.

3. A modell becsléses vizsgálata

Ebben a részben arra fogunk törekedni, hogy minél több megengedett V feszültségi állapotról belássuk, nincs hozzá megfelelő megengedett mágneses tér, amellyel az iont a csatorna falának ütköztethetnénk.

Pontosabban azt szeretnénk belátni, hogy amennyiben a paraméterek olyanok, hogy az ion 0.5 ms alatt eléri a csatorna aljának síkját, akkor a részecske függőleges irányú mozgása minden esetben annyival gyorsabb az oldalirányúnál, hogy mire vízszintesen elérné a csatorna falát, addigra már mindig leér az aljáig.

A megoldás menete a következő lehetne:

Tegyük fel, hogy a $\varphi_3(t)=0$ egyenletnek van megoldása a $[0, 5 \cdot 10^{-4}]$ intervallumon.

Előállítjuk a $\varphi_2(t)$ és $\varphi_3(t)$ függvényeknek egy-egy $\tilde{\varphi}_2(t)$ és $\tilde{\varphi}_3(t)$ becslését úgy, hogy ezekre kezdetben ugyanaz teljesüljön, mint az eredeti koordinátákra, azaz: $\tilde{\varphi}_2(0)=0$, $\tilde{\varphi}_3(0)=c_4$, $\dot{\tilde{\varphi}}_2(0)=0$, $\dot{\tilde{\varphi}}_3(0)=-1$.

Ezenkívül $|\varphi_2(t)| < \tilde{\varphi}_2(t)$, $\varphi_3(t) < \tilde{\varphi}_3(t)$ és a $\tilde{\varphi}_3(t)=0$ egyenletnek is van megoldása a $[0, 5 \cdot 10^{-4}]$ intervallumon.

Ez azt jelentené, hogy a becslésekből kapott rendszerben a részecske a vízszintes irányban előrébb, a függőleges irányban hátrébb jár, mint az eredetiben, azaz ha a fenti tulajdonság a becsült rendszerben teljesül, akkor biztosan teljesül az eredetiben is.

Ezután a következőt mutatjuk meg:

Ha adott paraméterértékek mellett az ion eléri a csatorna falának egyenesét, azaz a $\tilde{\varphi}_2(t)=1.55 \cdot 10^{-10} - r$ egyenletnek van nemnegatív megoldása, akkor legyenek t_1 és t_2 azok a legkorábbi időpontok, amikor $\tilde{\varphi}_3(t_1)=0$ és $\tilde{\varphi}_2(t_2)=1.55 \cdot 10^{-10} - r$. Ekkor $t_1 < t_2$.

(Ha $\nexists t \geq 0: \tilde{\varphi}_2(t)=1.55 \cdot 10^{-10} - r$, akkor rögtön készen vagyunk.)

Megjegyzés:

1) Ha a paraméterek olyanok, hogy a $[0, 5 \cdot 10^{-4}]$ intervallumon a $\tilde{\varphi}_3(t)=0$ egyenletnek van megoldása, akkor $\varphi_3(t) < \tilde{\varphi}_3(t)$ miatt a $\varphi_3(t)=0$ egyenletnek is van. Ezért az utóbbi feltételt nem fogjuk előre ellenőrizni.

2) Ha a fejezet elején megfogalmazott negatív eredményre törekszünk, akkor mindkét koordinátánál erős becslésre van szükség. $\varphi_2(t)$ esetében azért, hogy a becsült rendszerben ne "túl hamar" elérjük a csatorna falát. $\varphi_3(t)$ esetében pedig azért, hogy a $\tilde{\varphi}_3(t)=0$ egyenletnek a lehető legtöbb olyan esetben legyen megoldása, amikor a $\varphi_3(t)=0$ egyenletnek van, azaz a lehető legtöbb paraméter beállítás mellett elmondhassuk, hogy az ion átjut a csatornán.

3.1. A koordinátafüggvények becslései

A becsléseket az eredeti

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_2(t) &= -c_1 \cdot \dot{\varphi}_2(t) + c_2 b_1 \cdot \dot{\varphi}_3(t), \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0, \\ \ddot{\varphi}_3(t) &= -c_2 b_1 \cdot \dot{\varphi}_2(t) - c_1 \cdot \dot{\varphi}_3(t) - c_3 V, \quad \varphi_3(0) = c_4, \quad \dot{\varphi}_3(0) = -1\end{aligned}$$

differenciálegyenletekből fogjuk származtatni úgy, hogy az új rendszernek megfelelő egyenletek egymástól függetlenné váljanak.

Az alábbiakban figyelembe vesszük, a konstansok és a paraméterek lehetséges értékeit: $c_1 = 6.76 \cdot 10^{14}$, $c_2 = 4.58 \cdot 10^7$, $c_3 = 9.16 \cdot 10^{15}$, $c_4 = 5 \cdot 10^{-9}$, $b_1 \in [0, 10]$,

$V \in [7.38 \cdot 10^{-7}, 0.11]$, illetve hogy a 2. részben kiszámított megoldás alapján:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_2(t) &= \left(\frac{c_1 c_3 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} - 1 \right) \cdot \sin(c_2 b_1 t) \cdot e^{-c_1 t} + \frac{c_2 c_3 b_1 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} \cdot \cos(c_2 b_1 t) \cdot e^{-c_1 t} - \frac{c_2 c_3 b_1 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2}, \\ \dot{\varphi}_3(t) &= \frac{-c_2 c_3 b_1 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} \cdot \sin(c_2 b_1 t) \cdot e^{-c_1 t} + \left(\frac{c_1 c_3 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} - 1 \right) \cdot \cos(c_2 b_1 t) \cdot e^{-c_1 t} - \frac{c_1 c_3 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2}.\end{aligned}$$

Mindkét koordináta becslésénél használni fogjuk a következő két lemmát.

3.1.1. LEMMA [7]:

Tegyük fel, hogy $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, a második változójukban lokálisan Lipschitz típusú függvények, melyekre $f \leq g$.
Legyen még $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $\dot{y}(t) = g(y(t))$ és $x(t_0) \leq y(t_0)$.
Ekkor $x(t) \leq y(t) \quad \forall t \geq t_0$.

3.1.2. LEMMA:

Legyenek $x, y: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények, melyekre $\dot{x}(t) \leq \dot{y}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_0$ és $x(0) \leq y(0)$. Ekkor $x(t) \leq y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_0$.

Most rátérünk a becslésekre.

3.1.3. ÁLLÍTÁS:

Legyen $\tilde{\varphi}_2(t) = \frac{3c_2 b_1}{c_1} \cdot \left(t + \frac{1}{c_1} \cdot e^{-c_1 t} - \frac{1}{c_1} \right)$. Ekkor $|\varphi_2(t)| \leq \tilde{\varphi}_2(t)$ és $\tilde{\varphi}_2(0) = \varphi_2(0) = 0$, $\dot{\tilde{\varphi}}_2(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$.

Bizonyítás. $|\varphi_2(t)|$ becsléséhez először a $\dot{\varphi}_2(t) = -c_1 \cdot \dot{\varphi}_2(t) + c_2 b_1 \cdot \dot{\varphi}_3(t)$ egyenlet jobb-oldalát fogjuk megbecsülni úgy, hogy közben $\dot{\varphi}_3(t)$ -t kiküszöböljük.

A $\dot{\varphi}_3(t) = \frac{-c_2 c_3 b_1 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} \cdot \sin(c_2 b_1 t) \cdot e^{-c_1 t} + \left(\frac{c_1 c_3 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} - 1 \right) \cdot \cos(c_2 b_1 t) \cdot e^{-c_1 t} - \frac{c_1 c_3 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2}$ kifejezés

tagjainak együtthatóira:

$$0 < \frac{c_2 c_3 b_1 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} < \frac{c_2 c_3 (b_1)_{\max} V_{\max}}{c_1^2 + c_2^2 (b_1)_{\min}^2} = \frac{4.58 \cdot 9.16 \cdot 0.11}{6.76^2} 10^{-5} < 0.101 \cdot 10^{-5} = 1.01 \cdot 10^{-6},$$

$$0 < \frac{c_1 c_3 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} < \frac{c_1 c_3 V_{\max}}{c_1^2 + c_2^2 (b_1)_{\min}^2} = \frac{9.16 \cdot 0.11 \cdot 10}{6.76} < 1.5.$$

Ebből $\dot{\phi}_3(t) \leq \frac{c_2 c_3 b_1 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} + \left| \frac{c_1 c_3 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} - 1 \right| - \frac{c_1 c_3 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} \leq \frac{c_2 c_3 b_1 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} + 1 < 1.01 \cdot 10^{-6} + 1$, illetve

$$\dot{\phi}_3(t) \geq \frac{-c_2 c_3 b_1 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} - \left| \frac{c_1 c_3 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} - 1 \right| - \frac{c_1 c_3 V}{c_1^2 + c_2^2 b_1^2} > -1.01 \cdot 10^{-6} - 1 - 1.5 \text{ adódik.}$$

Bőven teljesül tehát, hogy $-3 < \dot{\phi}_3(t) < 2$, és így $\ddot{\phi}_2(t) = -c_1 \cdot \dot{\phi}_2(t) + c_2 b_1 \cdot \dot{\phi}_3(t)$ miatt $-c_1 \cdot \dot{\phi}_2(t) - 3c_2 b_1 < \ddot{\phi}_2(t) < -c_1 \cdot \dot{\phi}_2(t) + 2c_2 b_1$.

Legyen $\ddot{\phi}_2(t) = -c_1 \cdot \dot{\phi}_2(t) + 2c_2 b_1$ és $\ddot{\phi}_2(t) = -c_1 \cdot \dot{\phi}_2(t) - 3c_2 b_1$, és rögzítsük még a $\dot{\phi}_2(0) = \ddot{\phi}_2(0) = \phi_2(0) = 0$ kezdeti feltételeket.

A 3.1.1. lemma jelöléseinek megfelelően legyen $\ddot{\phi}_2(t) = f(t, \dot{\phi}_2(t))$, $\ddot{\phi}_2(t) = g(t, \dot{\phi}_2(t))$.

($f, \dot{\phi}_3(t)$ által függ t -től, g valójában nem függ t -től.)

$f(t, z) = -c_1 \cdot z + c_2 b_1 \cdot \dot{\phi}_3(t)$, $g(t, z) = -c_1 \cdot z + 2c_2 b_1$ nyilván folytonosak és z -ben lokálisan Lipschitz tulajdonságúak, továbbá $f < g$ és $\dot{\phi}_2(0) = \dot{\hat{\phi}}_2(0)$.

Ezért a lemma alapján $\dot{\phi}_2(t) \leq \dot{\hat{\phi}}_2(t)$, $\forall t \geq 0$.

Hasonlóan a $\ddot{\phi}_2(t) = g(t, \dot{\phi}_2(t))$, $\ddot{\phi}_2(t) = f(t, \dot{\hat{\phi}}_2(t))$ választással kapjuk, hogy $\dot{\hat{\phi}}_2(t) \leq \dot{\phi}_2(t)$, $\forall t \geq 0$.

A differenciálegyenletek megoldásával, a kezdeti feltételt is figyelembe véve:

$$\dot{\hat{\phi}}_2(t) = \frac{2c_2 b_1}{c_1} - \frac{2c_2 b_1}{c_1} \cdot e^{-c_1 t}, \quad \dot{\phi}_2(t) = \frac{-3c_2 b_1}{c_1} + \frac{3c_2 b_1}{c_1} \cdot e^{-c_1 t}.$$

Tegyük még fel, hogy $\hat{\phi}_2(0) = \bar{\phi}_2(0) = \phi_2(0) = 0$.

Mint hogy $\dot{\hat{\phi}}_2(t) \leq \dot{\phi}_2(t) \leq \dot{\phi}_2(t) \quad \forall t \geq 0$ és $\hat{\phi}_2(0) = \bar{\phi}_2(0) = \phi_2(0) = 0$, ezért az 3.1.2. lemma alkalmazásával kapjuk, hogy $\bar{\phi}_2(t) \leq \phi_2(t) \leq \hat{\phi}_2(t) \quad \forall t \geq 0$.

A fenti egyenleteket integrálva és a kezdeti feltételt is figyelembe véve, végül a

$$\hat{\phi}_2(t) = \frac{2c_2 b_1}{c_1} \cdot t + \frac{2c_2 b_1}{c_1^2} \cdot e^{-c_1 t} - \frac{2c_2 b_1}{c_1^2} \quad \text{és} \quad \bar{\phi}_2(t) = \frac{-3c_2 b_1}{c_1} \cdot t - \frac{3c_2 b_1}{c_1^2} \cdot e^{-c_1 t} + \frac{3c_2 b_1}{c_1^2}$$

függvényekre teljesül, hogy $\bar{\phi}_2(t) \leq \phi_2(t) \leq \hat{\phi}_2(t) \quad \forall t \geq 0$.

Azonnal látszik, hogy $\bar{\phi}_2(t) \leq 0$, $\hat{\phi}_2(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$, ezért

$|\phi_2(t)| \leq \max(\hat{\phi}_2(t), -\bar{\phi}_2(t)) = -\bar{\phi}_2(t)$ (ahol az utolsó egyenlőség szintén nyilvánvaló). \square

3.1.4. ÁLLÍTÁS:

$$\text{Legyen } \tilde{\phi}_3(t) = \frac{30c_2^2 b_1 - c_1 c_3 V}{c_1^2} \cdot t + \frac{c_1^2 + 30c_2^2 b_1 - c_1 c_3 V}{c_1^3} \cdot (e^{-c_1 t} - 1) + c_4.$$

Ekkor $\phi_3(t) < \tilde{\phi}_3(t)$, $\tilde{\phi}_3(0) = \phi_3(0) = c_4$, $\dot{\tilde{\phi}}_3(0) = \dot{\phi}_3(0) = -1$.

Bizonyítás. Most a $\dot{\varphi}_3(t) = -c_2 \cdot b_1 \cdot \varphi_2(t) - c_1 \cdot \varphi_3(t) - c_3 \cdot V$ egyenletből indulunk ki, és $\varphi_2(t)$ kiküszöbölésével szeretnénk becslést adni.

Az előbbi bizonyításban már láttuk, hogy $\dot{\varphi}_2(t) = \frac{-3c_2 b_1}{c_1} + \frac{3c_2 b_1}{c_1} \cdot e^{-c_1 t}$ szigorú alsó becslése $\varphi_2(t)$ -nek. Ebből most egy számszerű alsó becslést adunk.

Ha $b_1 = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}_2(t) = 0$, tehát $\varphi_2(t) > 0$.

Ha $b_1 \neq 0$, akkor legyen $a \geq 0$ és tegyük fel, hogy $\dot{\varphi}_2(t) \geq -a$. Ez azt jelenti, hogy $e^{-c_1 t} \geq 1 - \frac{c_1 a}{3c_2 b_1}$. Az egyenlőtlenség teljesül, ha a jobb oldal nem pozitív, azaz

$$\frac{3c_2 b_1}{c_1} \leq a. \text{ Minthogy } b_1 \leq 10 \text{ az } a := \frac{3c_2}{c_1} \cdot 10 \text{ választással } \varphi_2(t) > \dot{\varphi}_2(t) \geq -a.$$

Tehát $\ddot{\varphi}_3(t) = c_2 b_1 a - c_1 \cdot \dot{\varphi}_3(t) - c_3 V$ felső becslése $\dot{\varphi}_3(t)$ -nek.

Tegyük még fel, hogy $\dot{\varphi}_3(0) = \varphi_3(0) = -1$.

Legyen $\ddot{\varphi}_3(t) = f(t, \varphi_3(t))$ és $\dot{\varphi}_3(t) = g(t, \dot{\varphi}_3(t))$ (f a $\varphi_2(t)$ által függ t -től, g valójában nem függ t -től).

$f(t, z) = -c_1 \cdot z - c_2 b_1 \cdot \varphi_2(t) - c_3 V$, $g(t, z) = -c_1 \cdot z + c_2 b_1 a - c_3 V$ nyilván folytonosak és z -ben lokálisan Lipschitz tulajdonságúak, továbbá $f \leq g$ és $\varphi_3(0) = \dot{\varphi}_3(0)$.

Ezért az 3.1.1. lemma alapján $\varphi_3(t) \leq \dot{\varphi}_3(t) \quad \forall t \geq 0$.

Integrálva és a kezdeti feltételt is figyelembe véve kapjuk, hogy:

$$\dot{\varphi}_3(t) = \frac{c_2 b_1 a - c_3 V}{c_1} - \frac{c_1 + c_2 b_1 a - c_3 V}{c_1} \cdot e^{-c_1 t}.$$

Ha most $\tilde{\varphi}_3(0) = \varphi_3(0) = c_4$ teljesül, akkor az 3.1.2. lemmával $\varphi_3(t) \leq \tilde{\varphi}_3(t) \quad \forall t \geq 0$.

Újabb integrálással kapjuk a kezdeti feltételnek is eleget tevő

$$\tilde{\varphi}_3(t) = \frac{c_2 b_1 a - c_3 V}{c_1} \cdot t + \frac{c_1 + c_2 b_1 a - c_3 V}{c_1^2} \cdot e^{-c_1 t} - \frac{c_1 + c_2 b_1 a - c_3 V}{c_1^2} + c_4 \text{ függvényt, amely tehát}$$

felső becslése $\varphi_3(t)$ -nek. Ezután a -t visszahelyettesítve kapjuk az állítást. \square

Az utolsó feltétel, amit ellenőriznünk kell, hogy a $\varphi_3(t) = 0$ illetve $\dot{\varphi}_3(t) = 0$ egyenleteknek mely paraméter párok mellett van nemnegatív megoldásuk.

3.1.5. ÁLLÍTÁS:

Tekintsük a $\tilde{\varphi}_3(t) = \frac{30c_2^2 b_1 - c_1 c_3 V}{c_1^2} \cdot t + \frac{c_1^2 + 30c_2^2 b_1 - c_1 c_3 V}{c_1^3} \cdot (e^{-c_1 t} - 1) + c_4$ függvényt.

Ekkor a $\tilde{\varphi}_3(t) = 0$ egyenletnek van megoldása a $[0, 5 \cdot 10^{-4}]$ intervallumon minden $b_1 \in [0, 10]$, $V \in [7.38 \cdot 10^{-7}, 0.11]$ paraméter párra.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $\tilde{\varphi}_3(t)$ szigorúan monoton csökken, hiszen

$$\dot{\tilde{\varphi}}_3(t) = \frac{30c_2^2 b_1 - c_1 c_3 V}{c_1^2} - \frac{c_1^2 + 30c_2^2 b_1 - c_1 c_3 V}{c_1^2} \cdot e^{-c_1 t} = \frac{30c_2^2 b_1 - c_1 c_3 V}{c_1^2} \cdot (1 - e^{-c_1 t}) - e^{-c_1 t}, \text{ ahol}$$

$$30c_2^2 b_1 - c_1 c_3 V \leq 30c_2^2 b_{1 \max} - c_1 c_3 V_{\min} = 30 \cdot 4.58^2 \cdot 10^{15} - 6.76 \cdot 9.16 \cdot 7.38 \cdot 10^{22} < 0.$$

Mint ahogy $\tilde{\varphi}_3(0)=c_4>0$, elegendő azt belátni, hogy $\hat{t}=5\cdot 10^{-4}$ esetén $\tilde{\varphi}_3(\hat{t})\leq 0$.

A nevezőkkel beszorozva és kis átrendezéssel kapjuk, hogy
 $\tilde{\varphi}_3(\hat{t})\leq 0 \Leftrightarrow (30c_2^2b_1 - c_1c_3V)\cdot(c_1\hat{t} + e^{-c_1\hat{t}} - 1) + c_1^2\cdot(e^{-c_1\hat{t}} - 1) + c_1^3c_4 \leq 0$.

Figyelembe véve, hogy $30c_2^2b_1 - c_1c_3V < 0$,

$$(30c_2^2b_1 - c_1c_3V)\cdot(c_1\hat{t} + e^{-c_1\hat{t}} - 1) + c_1^2\cdot(e^{-c_1\hat{t}} - 1) + c_4c_1^3 < (30c_2^2b_{1\max} - c_1c_3V_{\min})\cdot(c_1\hat{t} - 1) + c_4c_1^3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow c_4c_1^3 \leq (c_1c_3V_{\min} - 30c_2^2b_{1\max})\cdot(c_1\hat{t} - 1).$$

Ez pedig teljesül, mert $c_4c_1^3 = 6.76^3 \cdot 5 \cdot 10^{33} = 1544.58 \cdot 10^{33}$, a jobboldalon álló kifejezés pedig $(6.76 \cdot 9.16 \cdot 7.38 \cdot 10^{22} - 30 \cdot 4.58^2 \cdot 10^{15})(6.76 \cdot 5 \cdot 10^{10} - 1) \approx 1544.60 \cdot 10^{33}$.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk. \square

3.1.6. KÖVETKEZMÉNY:

A $\varphi_3(t)=0$ egyenletnek van megoldása a $[0, 5 \cdot 10^{-4}]$ intervallumon minden $b_1 \in [0, 10]$, $V \in [7.38 \cdot 10^{-7}, 0.11]$ paraméter párra.

Bizonyítás. $\varphi_3(t) < \tilde{\varphi}_3(t)$. \square

3.2. Megengedett megoldások kizárása

3.2.1. ÁLLÍTÁS:

Bármely $b_1 \in [0, 10]$, $V \in [7.38 \cdot 10^{-7}, 0.11]$ paraméter pár esetén az ion 0.5 ms-on belül átjut a csatornán.

Bizonyítás. A fejezet elején leírt módszert fogjuk alkalmazni. Azaz tekintjük a

$$\tilde{\varphi}_2(t) = \frac{3c_2b_1}{c_1} \cdot \left(t + \frac{1}{c_1} \cdot e^{-c_1t} - \frac{1}{c_1} \right) \text{ és a}$$

$$\tilde{\varphi}_3(t) = \frac{30c_2^2b_1 - c_1c_3V}{c_1^2} \cdot t + \frac{c_1^2 + 30c_2^2b_1 - c_1c_3V}{c_1^3} \cdot (e^{-c_1t} - 1) + c_4 \text{ függvényeket,}$$

és megmutatjuk, hogy az általuk meghatározott rendszerben igaz az állítás, ami azt jelenti, hogy az eredeti rendszerre is teljesül.

Az egyszerűség kedvéért legyen $1.55 \cdot 10^{-10} - r = 1.55 \cdot 10^{-10} - 9.5 \cdot 10^{-11} = 6 \cdot 10^{-11} = \alpha$.

I. eset. Azokra a b_1 értékekre, amelyekre $\tilde{\varphi}_2(t) = \alpha$ nem megoldható, azonnal készen vagyunk, hiszen ekkor az ion sosem éri el a csatorna falát, viszont bármely megengedett V feszültségi állapot esetén legfeljebb 0.5 ms alatt eljut az aljáig. Kérdés, hogy van-e ilyen érték, és mi az.

Ha $b_1 = 0$, akkor $\tilde{\varphi}_2(t) \equiv 0$, tehát ezzel az esettel kész vagyunk.

Ha $b_1 \neq 0$, akkor $\tilde{\varphi}_2(t) = \alpha \Leftrightarrow e^{-c_1t} = -c_1t + \frac{\alpha c_1^2}{3c_2b_1} + 1$.

Vezessük be a $c_1t := x$ jelölést, és legyen $a = \frac{\alpha c_1^2}{3c_2b_1} + 1$. Itt $a > 1$, tehát az $e^{-x} = -x + a$

egyenletnek, és így $\tilde{\varphi}_2(t) = \alpha$ -nak $\exists!$ nemnegatív megoldása $\forall b_1 \in (0, 10]$ paraméterre.

II. eset. $\forall b_1 \in (0, 10]$ és $V \in [7.38 \cdot 10^{-7}, 0.11]$ esetén, azt szeretnénk látni, hogy ha $t_1, t_2 \geq 0$ a $\tilde{\varphi}_3(t_1) = 0$ és $\tilde{\varphi}_2(t_2) = \alpha$ egyenletek egyértelmű megoldásai (már láttuk, hogy $\tilde{\varphi}_3(t) = 0$ -nak is egyetlen nemnegatív megoldása van), akkor $t_1 < t_2$.
A bizonyításhoz használni fogjuk az alábbi egyszerű észrevételt:

LEMMA: $\tilde{\varphi}_2(t)$ szigorúan monoton nő, és $\tilde{\varphi}_3(t)$ szigorúan monoton csökken, minden megengedett b_1, V párra.

Bizonyítás. A lemma $\tilde{\varphi}_3(t)$ -re vonatkozó részét már beláttuk a 3.1.5. állítás bizonyításában.

Ha $t > 0$, akkor $\dot{\tilde{\varphi}}_2(t) = \frac{3c_2 b_1}{c_1} \cdot (1 - e^{-c_1 t}) > \frac{3c_2 b_1}{c_1} \cdot (1 - 1) = 0$, tehát $\tilde{\varphi}_2(t)$ valóban szigorúan monoton nő. \square

1.) Ha $b_1 = \frac{c_1 c_3 V - c_1^2}{30 c_2^2}$, azaz $c_1^2 + 30 c_2^2 b_1 - c_1 c_3 V = 0$, akkor $\tilde{\varphi}_3(t) = \frac{-c_1^2}{c_1^2} \cdot t + c_4 = 0 \Leftrightarrow t = c_4$.

Mivel $\tilde{\varphi}_2(t)$ szigorúan monoton nő, ezért elég azt belátni, hogy $\tilde{\varphi}_2(c_4) < \alpha, \forall b_1$.
Ez pedig teljesül, hiszen $\alpha = 6 \cdot 10^{-11}$, és

$$\tilde{\varphi}_2(c_4) = \frac{3c_2 b_1}{c_1} \cdot \left(c_4 + \frac{1}{c_1} \cdot e^{-c_1 c_4} - \frac{1}{c_1} \right) \leq \frac{30 c_2}{c_1} \cdot \left(c_4 + \frac{1}{c_1} \cdot e^{-c_1 c_4} - \frac{1}{c_1} \right) < \frac{30 c_2}{c_1} \cdot c_4 = \frac{3 \cdot 4.58 \cdot 5}{6.76} \cdot 10^{-15}.$$

2.) Tegyük fel, hogy $b_1 \neq \frac{c_1 c_3 V - c_1^2}{30 c_2^2}$.

Figyelembe véve a monotonitási tulajdonságokat és a kezdőértékeket: $\tilde{\varphi}_3(0) = c_4 > 0$, $\tilde{\varphi}_2(0) - \alpha = -\alpha < 0$, a $t_1 < t_2$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha a $\tilde{\varphi}_3(t) = \tilde{\varphi}_2(t) - \alpha$ egyenlet \hat{t} megoldását a függvényekbe visszahelyettesítve $\tilde{\varphi}_3(\hat{t}) = \tilde{\varphi}_2(\hat{t}) - \alpha < 0$ minden lehetséges paraméter pár mellett.

Az alábbiakban kiszámítjuk \hat{t} értékét, illetve felső becslést adunk rá, amikor a pontos értékét nem tudjuk megadni. Ezután a $\tilde{\varphi}_2(t) - \alpha$ kifejezésbe fogunk visszahelyettesíteni, ugyanis ekkor $\tilde{\varphi}_2(t) - \alpha$ monoton növekvő volta miatt, $\hat{t} \leq \bar{t}$ esetén $\tilde{\varphi}_2(\bar{t}) - \alpha < 0 \Rightarrow \tilde{\varphi}_2(\hat{t}) - \alpha < 0$.

$$\tilde{\varphi}_3(t) = \tilde{\varphi}_2(t) - \alpha \Leftrightarrow \frac{30 c_2^2 b_1 - c_1 c_3 V}{c_1^2} \cdot t + \frac{c_1^2 + 30 c_2^2 b_1 - c_1 c_3 V}{c_1^3} \cdot (e^{-c_1 t} - 1) + c_4 = \frac{3c_2 b_1}{c_1} \cdot \left(t + \frac{1}{c_1} \cdot e^{-c_1 t} - \frac{1}{c_1} \right) - \alpha \Leftrightarrow$$

$$(30 c_2^2 b_1 - 3c_1 c_2 b_1 - c_1 c_3 V) \cdot c_1 t + (c_1^2 + (30 c_2^2 b_1 - 3c_1 c_2 b_1 - c_1 c_3 V)) \cdot e^{-c_1 t} + c_1^2 (c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1) - (30 c_2^2 b_1 - 3c_1 c_2 b_1 - c_1 c_3 V) = 0.$$

Legyen $c_1 t = x$, és $30 c_2^2 b_1 - 3c_1 c_2 b_1 - c_1 c_3 V = 3c_2 b_1 (10 c_2 - c_1) - c_1 c_3 V := p$.

Ezzel az egyenlet $p \cdot x + (c_1^2 + p) \cdot e^{-x} - p + c_1^2 (c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1) = 0$ alakra írható.

Ha most az egyenlet bal oldalán álló kifejezést $f(x)$ jelöli, akkor $f'(x) = p - (c_1^2 + p) \cdot e^{-x}$, ahol $c_1 > 10 c_2 \Rightarrow p < 0$, és könnyen ellenőrizhető, hogy $c_1^2 + p$ előjele bármilyen lehet.

Ha $c_1^2 + p \geq 0$, akkor $f'(x) < 0$, ha pedig $c_1^2 + p < 0$, akkor $f'(x) < p - (c_1^2 + p) = -c_1^2 < 0$. Ezek szerint egy szigorúan monoton csökkenő függvény \hat{x} zérushelyét keressük.

2/a.) Ha $p = -c_1^2$, akkor $f(x) = -c_1^2 x + c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha) = 0 \Leftrightarrow x = c_1(c_4 + \alpha)$.

Tehát $\hat{x} = c_1(c_4 + \alpha)$, azaz $\hat{t} = c_4 + \alpha$ megoldása a $\tilde{\varphi}_3(t) = \tilde{\varphi}_2(t) - \alpha$ egyenletnek.

Visszahelyettesítve a $\tilde{\varphi}_2(t) - \alpha$ kifejezésbe:

$$\tilde{\varphi}_2(\hat{t}) - \alpha = \frac{3c_2 b_1}{c_1} \left(c_4 + \alpha + \frac{1}{c_1} e^{-c_1(c_4 + \alpha)} - \frac{1}{c_1} \right) - \alpha < 0 \Leftrightarrow 3c_2 b_1 (c_1(c_4 + \alpha) + e^{-c_1(c_4 + \alpha)} - 1) - c_1^2 \alpha < 0$$

Itt a baloldal kisebb, mint $30c_2 c_1(c_4 + \alpha) - c_1^2 \alpha =$

$30 \cdot 4.58 \cdot 6.76 \cdot 10^{21} (5 \cdot 10^{-9} + 6 \cdot 10^{-11}) - 6.76^2 \cdot 6 \cdot 10^{17} \approx 7 \cdot 10^{14} - 274 \cdot 10^{17} < 0$, így ezzel az esettel készen vagyunk.

A többi esetben az $f(x) = 0$ egyenlet algebrailag nem megoldható, ezért az \hat{x} zérushelyre felső becslést fogunk adni, ezzel a \hat{t} értékére is felső becslést kapunk.

2/b.) Ha $p > -c_1^2$, akkor $f(x) < p \cdot x + (c_1^2 + p) \cdot \frac{1}{x+1} - p + c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1) := g(x)$.

Mivel $x \geq 0$, $g(x)$ folytonos, szigorúan monoton csökkenő és $g(0) > 0$, ezért pontosan egy pozitív zérushelye van.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow p \cdot x^2 + c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1) \cdot x + c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha) = 0.$$

Legyen $a = c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1)$, $b = c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha)$. Ezzel a jelöléssel a $g(x) = 0$ egyenlet pozitív megoldása: $\bar{x} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4pb}}{-2p}$.

Erre $\hat{x} < \bar{x}$, hiszen $f(\bar{x}) < g(\bar{x}) = 0$, $f(\hat{x}) = 0$, és f szigorúan monoton csökkenő.

Itt \bar{x} nem hozható szép alakra, ezért még neki is egy \tilde{x} felső becslését vesszük, felhasználva, hogy $-p < c_1^2 \Rightarrow a^2 - 4pb < a^2 + 4c_1^2 b$.

A jobb oldalba a -t és b -t visszahelyettesítve kapjuk, hogy $a^2 + 4c_1^2 b = c_1^4(c_1 c_4 + c_1 \alpha + 1)^2$.

$$\text{Tehát } \tilde{x} := \frac{a + c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha + 1)}{-2p} = \frac{c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1) + c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha + 1)}{-2p} = \frac{c_1^3(c_4 + \alpha)}{-p}, \quad \tilde{t} = \tilde{x}/c_1.$$

Most azt szeretnénk, hogy $\tilde{\varphi}_2(\tilde{t}) - \alpha = \frac{3c_2 b_1}{c_1} \left(\tilde{t} + \frac{1}{c_1} e^{-c_1 \tilde{t}} - \frac{1}{c_1} \right) - \alpha < 0$ legyen minden megengedett paraméterre.

A nevezőkkel beszorozva kapjuk, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha $3c_2 b_1 (c_1 \tilde{t} + e^{-c_1 \tilde{t}} - 1) - c_1^2 \alpha < 0$, ahol $3c_2 b_1 (\tilde{x} + e^{-\tilde{x}} - 1) - c_1^2 \alpha < 3c_2 b_1 \left(\tilde{x} + \frac{1}{\tilde{x} + 1} - 1 \right) - c_1^2 \alpha$.

A $3c_2 b_1 \left(\tilde{x} + \frac{1}{\tilde{x} + 1} - 1 \right) - c_1^2 \alpha \leq 0$ egyenlőtlenséget fogjuk ellenőrizni.

Megint szorozva a nevezővel a $3c_2 b_1 \tilde{x}^2 - (\tilde{x} + 1)c_1^2 \alpha \leq 0$ egyenlőtlenséghez jutunk, ahol

$$3c_2 b_1 \tilde{x}^2 - (\tilde{x} + 1)c_1^2 \alpha = 3c_2 b_1 \left(\frac{c_1^3(c_4 + \alpha)}{-p} \right)^2 - \left(\frac{c_1^3(c_4 + \alpha)}{-p} + 1 \right) c_1^2 \alpha \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$3c_2 b_1 c_1^4 (c_4 + \alpha)^2 + c_1^3 \alpha (c_4 + \alpha) p - \alpha p^2 \leq 0.$$

Végül a $p = 3c_2 b_1(10c_2 - c_1) - c_1 c_3 V$ kifejezést visszahelyettesítve a

$$3c_2 b_1 c_1^4 (c_4 + \alpha)^2 + c_1^3 \alpha (c_4 + \alpha) (3c_2 b_1(10c_2 - c_1) - c_1 c_3 V) - \alpha (3c_2 b_1(10c_2 - c_1) - c_1 c_3 V)^2 \leq 0$$

ekvivalens feltételt kapjuk.

Tekintsük a baloldali kifejezést, mint b_1 másodfokú polinomját: $a \cdot b_1^2 + b \cdot b_1 + c$, ahol:

$$a = -9\alpha c_2^2(10c_2 - c_1)^2 < 0, \quad c = -c_1^2 c_3 V \alpha (c_1^2(c_4 + \alpha) + c_3 V) < 0, \quad \text{és}$$

$$b = 3c_1 c_2 [c_1^2(c_4 + \alpha)(c_1 c_4 + 10c_2 \alpha) + 2(10c_2 - c_1)c_3 V \alpha] > 0, \quad \text{hiszen ez pontosan akkor igaz,}$$

$$\text{ha } V < \frac{c_1^2(c_4 + \alpha)(c_1 c_4 + 10c_2 \alpha)}{2(c_1 - 10c_2)c_3 \alpha} = \frac{6.76^2 \cdot 10^{19}(5 + 0.06)(6.76 \cdot 5 \cdot 10^5 + 4.58 \cdot 6 \cdot 10^{-3})}{2(6.76 \cdot 10^6 - 4.58)9.16 \cdot 6 \cdot 10^{12}} \approx 10518105.$$

Így a polinomnak vagy nincs valós gyöke, vagy ha van, akkor az negatív, ami azt jelenti, hogy az $a \cdot b_1^2 + b \cdot b_1 + c \leq 0$ egyenlőtlenség teljesül $\forall b_1 \in [0, 10]$ esetén.

2/c.) Ha $p < -c_1^2$, akkor $f(x) < p \cdot x - p + c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1) := g(x)$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1)}{p}.$$

Tehát $\bar{x} := 1 - \frac{c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1)}{p}$, ekkor $\bar{t} = \bar{x}/c_1 > \hat{t}$.

Mint az előző pontban láttuk, ahhoz hogy minden paraméter esetén $\tilde{\varphi}_2(\bar{t}) - \alpha < 0$ legyen, elegendő, ha $3c_2 b_1 \bar{x}^2 - (\bar{x} + 1)c_1^2 \alpha \leq 0$. Most \bar{x} behelyettesítésével:

$$3c_2 b_1 \left(1 - \frac{c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1)}{p}\right)^2 - \left(2 - \frac{c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1)}{p}\right) c_1^2 \alpha \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$3c_2 b_1 (p - c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1))^2 - (2p - c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1)) p c_1^2 \alpha \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(3c_2 b_1 - 2c_1^2 \alpha) p^2 + c_1^2(c_1^2 \alpha - 6c_2 b_1)(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1) p + 3c_1^4 c_2 b_1 (c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1)^2 \leq 0.$$

Tekintsük a baloldali kifejezést, mint p másodfokú polinomját: $a \cdot p^2 + b \cdot p + c$.

Könnyen látható, hogy itt $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, azaz a polinomnak egy negatív és egy pozitív gyöke van.

Mint hogy $p < 0$, az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha p legfeljebb akkora, mint a negatív gyök:

$$p \leq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6c_2 b_1 - c_1^2 \alpha + c_1 \sqrt{c_1^2 \alpha^2 + 12\alpha c_2 b_1}}{2(3c_2 b_1 - 2c_1^2 \alpha)} \cdot c_1^2(c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1) := K.$$

Vegyük észre, hogy b_1 -ben a p és az K kifejezés is szigorúan monoton csökken, hiszen

$$p = 3c_2(10c_2 - c_1)b_1 - c_1 c_3 V, \quad \text{ahol } 3c_2(10c_2 - c_1) < 0, \quad \text{másképpen}$$

$$\frac{dK}{db_1} = - \left(c_1 + \frac{6c_2 b_1 + 5c_1^2 \alpha}{\sqrt{c_1^2 \alpha^2 + 12\alpha c_2 b_1}} \right) \cdot \frac{3c_2 c_1^3 \alpha (c_1 c_4 + c_1 \alpha - 1)}{2(3c_2 b_1 - 2c_1^2 \alpha)^2} < 0.$$

Azt látjuk be, hogy $p(b_1) \leq K(b_1) \quad \forall b_1 \in [0, 10]$.

A 3.1.2 lemma alapján ehhez elegendő, ha $p(0) \leq K(0)$ és $\frac{dp}{db_1} \leq \frac{dK}{db_1}$.

A $p(0) = -c_1 c_3 V < 0 = K(0)$ egyenlőtlenség azonnal látszik.

Mint hogy $\frac{dp}{db_1} = 3c_2(10c_2 - c_1)$ konstans, a $\frac{dp}{db_1} \leq \frac{dK}{db_1}$ egyenlőtlenség igazolásához azt

mutatjuk meg, hogy $\frac{dK}{db_1}$ monoton növekvő és $3c_2(10c_2 - c_1) \leq \frac{dK}{db_1}(0)$.

$$\frac{dK}{d^2b_1} = \frac{9c_2^2c_1^3\alpha(c_1c_4+c_1\alpha-1)[c_1(c_1^2\alpha^2+12\alpha c_2b_1)^{\frac{3}{2}}+54\alpha c_2^2b_1^2+3c_1^2\alpha^2(30c_2b_1-c_1^2\alpha)]}{(c_1^2\alpha^2+12\alpha c_2b_1)(3c_2b_1-2c_1^2\alpha)^3\sqrt{c_1^2\alpha^2+12\alpha c_2b_1}}$$

Mivel a nevezőben $(3c_2b_1-2c_1^2\alpha) < 0$, ezért

$$\frac{dK}{d^2b_1} > 0 \Leftrightarrow c_1(c_1^2\alpha^2+12\alpha c_2b_1)^{\frac{3}{2}}+54\alpha c_2^2b_1^2+3c_1^2\alpha^2(30c_2b_1-c_1^2\alpha) < 0.$$

Ez pedig teljesül, hiszen a kifejezés $b_1=10$ esetén maximális, és ekkor értéke:

$$6.76 \cdot 10^{14} (6.76^2 \cdot 36 \cdot 10^6 + 12 \cdot 6 \cdot 4.58 \cdot 10^{-3})^{\frac{3}{2}} + 54 \cdot 6 \cdot 4.58^2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 6.76^2 \cdot 36 \cdot 10^{15} (3 \cdot 4.58 - 6.76^2 \cdot 6 \cdot 10^8) \approx -9.02 \cdot 10^{28}.$$

Tehát $\frac{dK}{db_1}$ valóban monoton növekvő.

$$\text{Végül } \frac{dp}{db_1} = 3c_2(10c_2 - c_1) = 3 \cdot 4.58 \cdot 10^7 (4.58 \cdot 10^8 - 6.76 \cdot 10^{14}) \approx -9.29 \cdot 10^{22},$$

$$\frac{dK}{db_1}(0) = \frac{-9c_2(c_1c_4+c_1\alpha-1)}{4} = \frac{-9 \cdot 4.58 \cdot 10^7 (6.76 \cdot 5.06 \cdot 10^5 - 1)}{4} \approx -3.53 \cdot 10^{14},$$

és ezzel az állítást beláttuk. \square

3.3. Eredmények

Az előző pontban azt kaptuk, hogy egy legfeljebb 10 T indukciójú mágneses tér nem elegendő ahhoz, hogy az ionok csatornán való átjutását általa megakadályozhassuk. Két kérdés marad, amivel még érdemes foglalkozni.

Az egyik, hogy vajon a mágneses tér jelenléte nem lassítja-e le nagymértékben az ionok mozgását? Azt ugyan láttuk, hogy az átjutás ideje nem nyúlik fél ms-nál hosszabbra, mégis elképzelhető, hogy ha például már az AP-folyamat elején lelassul a részecskék mozgása, akkor az maga után vonja az egész folyamat lelassulását, így végül a rendszert befolyásoló további tényezők miatt (pl.: nátrium-csatornák bezáródása, kálium-kiáramlás) nem jön létre az akciós potenciál.

Hogy a kérdésre választ kapjunk, számítógép segítségével kiszámítottuk a $\varphi_3(t)=0$ egyenlet megoldását 0, 1, 5 illetve 10 T értékű mágneses tér jelenlétében, míg a V paraméter értékét a lehető legnagyobbra állítottuk, hiszen a Lorentz-erő ebben az esetben a legnagyobb, amikor az ion sebessége maximális.

A vizsgálat azt mutatta ki, hogy a mágneses tér nem befolyásolja az átjutás idejét, ugyanis ez az idő mindhárom esetben $3.35 \cdot 10^{-9}$ s-nak adódott.

Kézenfekvő a másik kérdés, hogy vajon lehetséges-e az átjutást megakadályozni, ha feltesszük, hogy tetszőlegesen nagy mágneses tér előállítható?

Erre a következő fejezetben a kontrollélmélet módszereivel próbálunk közelítő választ adni.

4. Elegendő mágneses indukció keresése

Az alábbiakban eltekintünk attól, hogy a mágneses tér nagyságára vonatkozóan a realitásnak megfelelő felső korlátot adjunk, sőt azt is megengedjük, hogy a feszültség-paraméter tetszőlegesen kicsi legyen. A bemutatott tételeket arra szeretnénk majd felhasználni, hogy olyan paraméter értékeket mutassunk, amelyek mellett az ion 0.5 ms-on belül a csatorna falának ütközik.

4.1. Kontrollelméleti alapfogalmak [6]

Nevezzük *rendszernek* a való világ egy elkülöníthető részét, illetve annak matematikai modelljét, *környezetnek* az adott rendszeren kívüli dolgok összességét, *inputnak* a környezet rendszerre gyakorolt hatását és *outputnak* a rendszer környezetre gyakorolt hatását. A továbbiakban folytonos idejű rendszerekkel foglalkozunk.

Definíciók:

Legyen $I=(\underline{t}, \bar{t})$ nyílt időintervallum, $t < \bar{t}$.

Tegyük fel, hogy minden $t \in I$ időpillanatban az $x_1(t), \dots, x_n(t)$ paraméterek leírják az objektum viselkedését, $u_1(t), \dots, u_m(t)$ a környezet hatását, $y_1(t), \dots, y_p(t)$ pedig az objektum környezetre gyakorolt hatását.

Ekkor: $x(t)=(x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ az objektum *állapotvektora*,

az állapotvektorok lehetséges értékeinek halmaza: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *állapotter*.

$u(t)=(u_1(t), \dots, u_m(t))^T$ *inputvektor*, lehetséges értékeinek halmaza: $U \subseteq \mathbb{R}^m$,

$y(t)=(y_1(t), \dots, y_p(t))^T \in \mathbb{R}^p$ *outputvektor*.

Feltesszük, hogy a folytonos idejű rendszerünk dinamikája megadható az

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t)), \quad t \in I \quad (4.1)$$

közönséges differenciálegyenlettel, ahol $f: I \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, illetve hogy az *output* leírható az $y(t)=h(t, x(t), u(t))$ függvényvel, ahol $h: I \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Megengedett irányítások:

Valódi objektumok esetén természetesen vannak a vezérlés lehetőségeit korlátozó tényezők is. Mint már említettük, meg kell adnunk azt az U halmazt, amely az inputvektor lehetséges értékeit tartalmazza, hiszen ez általában nem lehet akármilyen. Másrészt a gyakorlatban nincs módunk rá, hogy a vezérlést az időben tetszőlegesen változtassuk. Így azt is meg kell mondani, hogy az $u(\cdot)$ *irányítási függvény* milyen függvényosztályba tartozik (például szakaszonként konstans vagy szakaszonként folytonos, mérhető, folytonos, stb.).

A továbbiakban a $[\underline{t}, \bar{t}]$ intervallumon értelmezett *megengedett vezérlések* osztályát $\Delta(\underline{t}, \bar{t})$ -vel fogjuk jelölni.

A vezérlés megadásának két típusa:

(a) Program szerinti, vagy *nyílt hurokkal történő* vezérlés.

Ilyenkor u -t előzetes számítások alapján adjuk meg: $u: t \rightarrow u(t)$ alakban.

(b) Visszacsatolásos, vagy *zárt hurokkal történő* vezérlés.

Ilyenkor a rendszer állapotának és az időnek a függvényében adjuk meg u -t egy ϕ függvény segítségével:

$$\phi: (t, x) \in I \times X \rightarrow \phi(t, x) \in U, \quad u(t) = \phi(t, x(t)).$$

Az irányítási feladat célja:

Tegyük fel, hogy adott egy t_0 kezdeti időpont, illetve $\mu_0, \mu_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, ahol μ_0 a rendszer megengedett kezdőállapotainak, μ_1 a megengedett végállapotoknak egy halmaza.

Célunk: úgy irányítani a rendszert, hogy az valamely t_1 időpontban eljusson μ_1 -be.

Azaz: szeretnénk olyan megengedett $u(\cdot) \in \Delta(t_0, t_1)$ vezérlést találni, amelyre a (4.1) egyenlet hozzá tartozó $x(\cdot)$ megoldására: $x(t_0) \in \mu_0, \quad x(t_1) \in \mu_1$.

4.2. Lineáris rendszerek irányíthatósága [6]

A kontrollelméletben folytonos lineáris rendszerről beszélünk, ha az f és h függvények x -ben és u -ban lineárisak, azaz a rendszer az alábbi alakra írható:

$$\dot{x}(t) = P(t)x(t) + Q(t)u(t) \quad (4.2)$$

$$\text{és } y(t) = R(t)x(t) + S(t)u(t).$$

Feltesszük még, hogy a mátrixfüggvények folytonosak, és hogy A és B elemei az értelmezési tartományuk bármely véges részintervallumán integrálhatóak.

4.2.1. TÉTEL: Rögzített $u \in \Delta(t_1, t_2)$, $t_0 \in (t_1, t_2)$, $x(t_0) = x_0$ mellett (4.2)-nek $\exists!$

$$\text{megoldása } (t_1, t_2)\text{-n: } x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)Q(\tau)u(\tau) d\tau,$$

ahol $\phi(\cdot, \cdot): I \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ a homogén egyenlet alapmátrixa.

4.2.2. DEFINÍCIÓ:

(4.2) *teljesen irányítható* a $[t_0, t_1]$ intervallumon, ha tetszőleges $x_0 \in \mu_0, \quad x_1 \in \mu_1$ párhoz \exists olyan megengedett $u \in \Delta(t_0, t_1)$, hogy ezzel az irányítással (4.2) $x(t_0) = x_0$ melletti megoldására: $x(t_1) = x_1$.

4.2.3. TÉTEL: (4.2) pontosan akkor teljesen irányítható a $[t_0, t_1]$ -en, ha a

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)Q(s)Q(s)^T \Phi(t_1, s)^T ds \quad (4.3)$$

mátrix pozitív definit.

4.2.4. KÖVETKEZMÉNY:

Tegyük fel, hogy (4.2) teljesen irányítható a $[t_0, t_1]$ -en, és legyen $x_0 \in \mu_0$, $x_1 \in \mu_1$ rögzített. Ekkor a (4.2) rendszer

$$\hat{u}(t) := -Q(t)^T \Phi(t_1, t)^T W(t_0, t_1)^{-1} (\Phi(t_1, t_0) x_0 - x_1) \quad (4.4)$$

vezérlés melletti megoldására: és $x(t_0) = x_0$ és $x(t_1) = x_1$.

4.3. A modell irányíthatósága

A fent bevezetett jelöléseknek megfelelően: $x = (\varphi_2, \varphi_3, v_2, v_3)^T$, $u = (b_1, V)^T$,

$$\dot{x} = f(x, u) = (v_2, v_3, -c_1 v_2 + c_2 b_1 v_3, -c_2 b_1 v_2 - c_1 v_3 - c_3 V)^T, \quad x(0) = (0, c_4, 0, -1)^T.$$

Első megközelítésben u -ról nem tesszük fel hogy konstans, értelmezési intervalluma a $[0, \infty)$, továbbá $b_1 \in (0, \infty)$, $V \in [0, 0.11]$.

Keressük azon $T \in [0, 5 \cdot 10^{-4}]$ értékeket, amelyekre a rendszer a $[0, T]$ intervallumon teljesen irányítható, majd azokat az u megengedett irányításokat, amelyek a pályát T idő alatt az $x_0 = (0, c_4, 0, -1)$ pontból az $x_1 = (\alpha, q \cdot c_4, \cdot, \cdot)$ illetve az $x_2 = (-\alpha, q \cdot c_4, \cdot, \cdot)$ pontok egyikébe viszik, ahol $\alpha = 6 \cdot 10^{-11}$, $q \in [0, 1]$. Ez azt jelenti, hogy olyan irányítást keresünk, ami mellett az ion a csatorna falának ütközik, mindegy hogy milyen meredekséggel. Valójában bennünket csak a konstans vezérlések érdekelnek.

Ez a rendszer nem lineáris, ezért a fenti tételt csak úgy alkalmazhatjuk, ha előbb linearizálunk.

Linearizáció Taylor-polinommal:

Tekintsük az $\hat{u} \equiv (0, 0)$ inputfüggvény melletti $x(0)$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást.

A már korábban kiszámított általános megoldás alapján ennek koordinátafüggvényei:

$$\hat{x}(t) = (\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_3, \hat{v}_2, \hat{v}_3)^T = \left(0, \frac{e^{-c_1 t} - 1}{c_1} + c_4, 0, -e^{-c_1 t} \right)^T.$$

Ha $f(x, u)$ -t ezen megoldása körüli elsőfokú Taylor polinomjával becsüljük, akkor az alábbi lineáris rendszerhez jutunk:

$\dot{x}(t) = P \cdot x(t) + Q(t) \cdot u(t)$, ahol:

$$\frac{df}{dx}(t, \hat{x}, \hat{u}) = P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_1 \end{pmatrix}, \quad \frac{df}{du}(t, \hat{x}, \hat{u}) = Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -c_2 \cdot e^{-c_1 t} & 0 \\ 0 & -c_3 \end{pmatrix}.$$

Az irányíthatóság vizsgálata:

4.3.1. ÁLLÍTÁS:

A fent definiált linearizált rendszer teljesen irányítható a $[0, T]$ intervallumon, amennyiben $T > 2/c_1$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4.2.3. tételt. A homogén rendszer alapmátrixa:

$$e^{Pt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (1-e^{-c_1 t})/c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (1-e^{-c_1 t})/c_1 \\ 0 & 0 & e^{-c_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-c_1 t} \end{pmatrix}.$$

Ebből szorzások és integrálás után kapjuk a tételben szereplő $W(0, T)$ mátrix koordinátáit:

$$W(0, T) = \begin{pmatrix} W_{11} & 0 & W_{13} & 0 \\ 0 & W_{22} & 0 & W_{24} \\ W_{13} & 0 & W_{33} & 0 \\ 0 & W_{24} & 0 & W_{44} \end{pmatrix}, \text{ ahol:}$$

$$W_{11} = \frac{c_2^2}{2c_1^3} ((2c_1 T + 3)e^{-2c_1 T} - 4e^{-c_1 T} + 1), \quad W_{22} = \frac{c_3^2}{2c_1^3} (2c_1 T - 3 + 4e^{-c_1 T} - e^{-2c_1 T}),$$
$$W_{13} = \frac{-c_2^2}{c_1^2} ((1+c_1 T)e^{-2c_1 T} - e^{-c_1 T}), \quad W_{24} = \frac{c_3^2}{2c_1^2} (1 - e^{-c_1 T})^2, \quad W_{33} = c_2^2 T e^{-2c_1 T},$$
$$W_{44} = \frac{c_3^2}{2c_1} (1 - e^{-2c_1 T}).$$

Most megmutatjuk, hogy a W mátrix $\forall T > 2/c_1$ esetén pozitív definit.

Az alábbi ismert tételt fogjuk alkalmazni:

TÉTEL: Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor pozitív definit, ha minden főminorjának determinánsa pozitív. \square

Jelölje a W k -adik főminorjának determinánsát D_k .

A számítások során kihasználjuk, hogy $c_1 T > 0$.

$$D_1 = W_{11} = \frac{c_2^2}{2c_1^3} ((2c_1 T + 3)e^{-2c_1 T} - 4e^{-c_1 T} + 1) > 0 \Leftrightarrow (2c_1 T - 1)e^{-2c_1 T} + (2e^{-c_1 T} - 1)^2 > 0, \text{ ez pedig}$$

teljesül, ha $T > 1/2c_1$.

$$D_2 = W_{11} \cdot W_{22} > 0, \text{ ha } T > 1/2c_1 \text{ és } W_{22} = \frac{c_3^2}{2c_1^3} (2c_1 T + 1 - (e^{-c_1 T} - 2)^2) > 0.$$

Mivel $(e^{-c_1 T} - 2)^2 < 4$, az utóbbi feltétel is teljesül, ha $2c_1 T + 1 \geq 4$, és így $T \geq 3/2c_1$ esetén $D_2 > 0$.

$D_3 = W_{11} \cdot W_{22} \cdot W_{33} - W_{22} \cdot W_{13}^2 = W_{22} \cdot (W_{11} \cdot W_{33} - W_{13}^2) > 0$, ha $T \geq 3/2c_1$ és $W_{11} \cdot W_{33} - W_{13}^2 > 0$.

Itt $W_{11} \cdot W_{33} - W_{13}^2 = \frac{c_2^4}{2c_1^3} ((2c_1 T + 3)e^{-2c_1 T} - 4e^{-c_1 T} + 1) T e^{-2c_1 T} - \frac{c_2^4}{c_1} ((1 + c_1 T)e^{-2c_1 T} - e^{-c_1 T})^2 > 0 \Leftrightarrow$
 $-(c_1 T + 2)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T} - 2 + c_1 T > 0$. Ha most $c_1 T \geq 2$, akkor
 $-(c_1 T + 2)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T} - 2 + c_1 T \geq -(c_1 T + 2)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T} > 0 \Leftrightarrow e^{c_1 T} > (c_1 T + 2)/4$, ehhez
pedig a $c_1 T \geq 2$ feltétel elegendő.
Tehát $D_3 > 0$, ha $T \geq 2/c_1$.

$D_4 = W_{44} \cdot D_3 + W_{24} \cdot (W_{13}^2 \cdot W_{24} - W_{11} \cdot W_{33} \cdot W_{24}) = W_{44} \cdot W_{22} \cdot (W_{11} \cdot W_{33} - W_{13}^2) - W_{24}^2 \cdot (W_{11} \cdot W_{33} - W_{13}^2)$
 $= (W_{44} \cdot W_{22} - W_{24}^2) \cdot (W_{11} \cdot W_{33} - W_{13}^2) > 0$, ha $T \geq 2/c_1$ és $W_{44} \cdot W_{22} - W_{24}^2 > 0$.

Itt $W_{44} \cdot W_{22} - W_{24}^2 = \frac{c_3^4}{4c_1^4} (1 - e^{-2c_1 T})(2c_1 T - 3 + 4e^{-c_1 T} - e^{-2c_1 T}) - \frac{c_3^4}{4c_1^4} (1 - e^{-c_1 T})^4 > 0 \Leftrightarrow$
 $(1 - e^{-c_1 T})(1 + e^{-c_1 T})(2c_1 T - 3 + 4e^{-c_1 T} - e^{-2c_1 T}) - (1 - e^{-c_1 T})^4 > 0 \Leftrightarrow$
 $(1 + e^{-c_1 T})(2c_1 T - 3 + 4e^{-c_1 T} - e^{-2c_1 T}) - (1 - e^{-c_1 T})^3 > 0$. Egyszerűsítések után az
 $e^{-c_1 T} > (c_1 T - 2)/(2 + c_1 T)$ ekvivalens feltételt kapjuk, amely szintén teljesül, ha
 $T > 2/c_1$.
Tehát $D_4 > 0$, ha $T > 2/c_1$.

Összevetve az egyes aldeterminánsokra adódott feltételeket, azt kaptuk, hogy mindegyik pozitív, ha $T > 2/c_1$, vagyis az állítást beláttuk. \square

Megengedett vezérlések keresése:

4.3.2. ÁLLÍTÁS:

Legyenek $T > 2/c_1$, $q \in [0, 1]$ rögzítettek és $\alpha = 6 \cdot 10^{-11}$.

Ekkor a $b_1 = \frac{c_1^2 (e^{c_1 T} - 1) ((c_1 T + 2)e^{-c_1 T} - 2 + c_1 T)}{c_2 (c_1 T - 2 - (2 + c_1 T)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T}) (1 + c_1 T - e^{c_1 T})} \cdot (\pm \alpha)$ és

$$V = c_1 \frac{(1 + e^{-c_1 T})(2c_1 T - 1 - (1 - e^{-c_1 T})^2) - 2(1 - e^{-c_1 T})^2}{c_3 ((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T})(2c_1 T - 1 - (1 - e^{-c_1 T})^2)} (e^{-c_1 T} - 1 + c_1 c_4 - c_1 c_4 q)$$

konstans vezérlések mellett a pálya a T időpillanatban a csatorna falának ütközik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $T > 2/c_1$, és legyen $x_0 = (0, c_4, 0, -1)$, $x_1 = (\alpha, q \cdot c_4, \cdot, \cdot)$, $x_2 = (-\alpha, q \cdot c_4, \cdot, \cdot)$. A 4.2.4. következmény szerint amennyiben az $u(t) := -Q(t)^T \Phi(T, t)^T W(0, T)^{-1} (\Phi(T, 0)x_0 - x_i)$ vezérlést választjuk ($i=1, 2$), akkor a rendszer T idő alatt az x_0 pontból az x_i pontba jut. $(\Phi(T, t) = e^{P(T-t)})$.

Legyen $-Q(t)^T \Phi(T, t)^T W(0, T)^{-1} := M$.

A mátrixszorzásokat elvégezve kapjuk, hogy $M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & m_{24} \end{pmatrix}$, ahol:

$$m_{11} = 2c_1^2 (c_1 T e^{-c_1 T} + e^{-c_1 T} - 1) / c_2 ((-2 - c_1 T)e^{-2c_1 T} + c_1 T + 4e^{-c_1 T} - 2),$$

$$m_{13} = c_1 (2e^{-c_1 T} ((1 + c_1 T)e^{-c_1 T} - 1) + (1 - e^{-c_1 T})^2) / c_2 e^{-c_1 T} ((-2 - c_1 T)e^{-2c_1 T} + c_1 T + 4e^{-c_1 T} - 2),$$

$$m_{22} = c_1^2(1 + e^{-c_1 T} - 2e^{-c_1(T-t)})/c_3((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T}),$$

$$m_{24} = c_1(e^{-c_1(T-t)}(2c_1 T - 1 - (1 - e^{-c_1 T})^2) - (1 - e^{-c_1 T})^2)/c_3(1 - e^{-c_1 T})((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T}).$$

$$\Phi(T, 0)x_0 - x_i = (0, (e^{-c_1 T} - 1)/c_1 + c_4, 0, -e^{-c_1 T})^T - x_i^T =$$

$$(-x_{i1}, (e^{-c_1 T} - 1)/c_1 + c_4 - x_{i2}, -x_{i3}, -e^{-c_1 T} - x_{i4})^T.$$

Végül:

$$u(t) = M \cdot (\Phi(T, 0)x_0 - x_i) =$$

$$(-m_{11}x_{i1} - m_{13}x_{i3}, m_{22}((e^{-c_1 T} - 1)/c_1 + c_4 - x_{i2}) + m_{24}(-e^{-c_1 T} - x_{i4})) = (b_1(t), V(t)).$$

Mivel x_i -nek csak az első két koordinátájára van feltételünk, ezért tetszőlegesen rögzíthetjük a második kettőt. (Ezzel azt mondjuk meg, hogy a részecske milyen szögben ütközik a falnak.)

Miután bennünket csak a konstans vezérlések érdekelnek, ezért a hiányzó koordinátákat úgy lenne jó beállítani, hogy t -t kiejtsük. Megmutatjuk, hogy ez lehetséges.

$$\text{a) } b_1(t) = -m_{11}x_{i1} - m_{13}x_{i3} =$$

$$\frac{-2c_1^2(c_1 T e^{-c_1 t} + e^{-c_1 T} - 1)e^{-c_1 T} x_{i1} - c_1(2e^{-c_1 t}((1 + c_1 T)e^{-c_1 T} - 1) + (1 - e^{-c_1 T})^2)x_{i3}}{c_2 e^{-c_1 T}(c_1 T - 2 - (2 + c_1 T)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T})} =$$

$$\frac{-2c_1^2 T e^{-c_1 T} e^{-c_1 t} x_{i1} - 2c_1 e^{-c_1 T}(e^{-c_1 T} - 1)x_{i1} - 2e^{-c_1 t}((1 + c_1 T)e^{-c_1 T} - 1)x_{i3} - (1 - e^{-c_1 T})^2 x_{i3}}{c_1 e^{-c_1 T}(c_1 T - 2 - (2 + c_1 T)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T})} =$$

$$\frac{(1 - e^{-c_1 T})(2c_1 e^{-c_1 T} x_{i1} - (1 - e^{-c_1 T})x_{i3}) - 2e^{-c_1 t}(c_1^2 T e^{-c_1 T} x_{i1} + ((1 + c_1 T)e^{-c_1 T} - 1)x_{i3})}{c_1 e^{-c_1 T}(c_1 T - 2 - (2 + c_1 T)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T})}.$$

Ahhoz, hogy itt t -től független kifejezést kapjunk, a

$$c_1^2 T e^{-c_1 T} x_{i1} + ((1 + c_1 T)e^{-c_1 T} - 1)x_{i3} = 0 \text{ egyenletnek kell teljesülnie.}$$

$$c_1^2 T e^{-c_1 T} x_{i1} + ((1 + c_1 T)e^{-c_1 T} - 1)x_{i3} = 0 \Leftrightarrow c_1^2 T x_{i1} = -((1 + c_1 T) - e^{c_1 T})x_{i3}.$$

Mint hogy $c_1 T > 2 \Rightarrow 1 + c_1 T - e^{c_1 T} \neq 0$, ezért $x_{i3} := -c_1^2 T x_{i1} / (1 + c_1 T - e^{c_1 T})$.

Ezt visszahelyettesítve $b_1(t)$ képletébe:

$$b_1 = \frac{(1 - e^{-c_1 T})(2c_1 e^{-c_1 T} x_{i1} - (1 - e^{-c_1 T})x_{i3})}{c_1 e^{-c_1 T}(c_1 T - 2 - (2 + c_1 T)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T})} = \frac{(1 - e^{-c_1 T}) \left(2c_1 e^{-c_1 T} x_{i1} + \frac{(1 - e^{-c_1 T})c_1^2 T x_{i1}}{1 + c_1 T - e^{c_1 T}} \right)}{c_1 e^{-c_1 T}(c_1 T - 2 - (2 + c_1 T)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T})} =$$

$$\frac{c_1(1 - e^{-c_1 T})(2c_1 e^{-c_1 T}(1 + c_1 T - e^{c_1 T}) + (1 - e^{-c_1 T})c_1^2 T)}{c_2 e^{-c_1 T}(c_1 T - 2 - (2 + c_1 T)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T})(1 + c_1 T - e^{c_1 T})} \cdot x_{i1} =$$

$$\frac{c_1^2(e^{c_1 T} - 1)((c_1 T + 2)e^{-c_1 T} - 2 + c_1 T)}{c_2(c_1 T - 2 - (2 + c_1 T)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T})(1 + c_1 T - e^{c_1 T})} \cdot x_{i1}.$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } V(t) &= (m_{22}((e^{-c_1 T} - 1)/c_1 + c_4 - x_{i2}) + m_{24}(-e^{-c_1 T} - x_{i4})) = \\
&= \frac{c_1^2(1 + e^{-c_1 T} - 2e^{-c_1(T-t)})(1 - e^{-c_1 T}) \cdot ((e^{-c_1 T} - 1)/c_1 + c_4 - x_{i2})}{c_3(1 - e^{-c_1 T})((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T})} - \\
&= \frac{c_1(e^{-c_1(T-t)}(2c_1 T - 1 - (1 - e^{-c_1 T})^2) - (1 - e^{-c_1 T})^2)(e^{-c_1 T} + x_{i4})}{c_3(1 - e^{-c_1 T})((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T})} = \\
&= \frac{c_1(1 + e^{-c_1 T})(1 - e^{-c_1 T})((e^{-c_1 T} - 1) + c_1 c_4 - c_1 x_{i2})}{c_3(1 - e^{-c_1 T})((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T})} - \frac{2c_1 e^{-c_1 T} e^{c_1 t} (1 - e^{-c_1 T})((e^{-c_1 T} - 1) + c_1 c_4 - c_1 x_{i2})}{c_3(1 - e^{-c_1 T})((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T})} \\
&= \frac{c_1 e^{-c_1 T} e^{c_1 t} (2c_1 T - 1 - (1 - e^{-c_1 T})^2)(e^{-c_1 T} + x_{i4})}{c_3(1 - e^{-c_1 T})((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T})} + \frac{c_1(1 - e^{-c_1 T})^2(e^{-c_1 T} + x_{i4})}{c_3(1 - e^{-c_1 T})((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T})} = \\
&= \frac{c_1(1 + e^{-c_1 T})((e^{-c_1 T} - 1) + c_1 c_4 - c_1 x_{i2}) + c_1(1 - e^{-c_1 T})(e^{-c_1 T} + x_{i4})}{c_3((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T})} - \\
&= c_1 e^{-c_1 T} e^{c_1 t} \frac{2(1 - e^{-c_1 T})((e^{-c_1 T} - 1) + c_1 c_4 - c_1 x_{i2}) + (2c_1 T - 1 - (1 - e^{-c_1 T})^2)(e^{-c_1 T} + x_{i4})}{c_3(1 - e^{-c_1 T})((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T})}.
\end{aligned}$$

A t -től való függetlenséghez a

$$2(1 - e^{-c_1 T})(e^{-c_1 T} - 1 + c_1 c_4 - c_1 x_{i2}) + (e^{-c_1 T} + x_{i4})(2c_1 T - 1 - (1 - e^{-c_1 T})^2) = 0$$

egyenlőségnek kell teljesülnie.

Felhasználva, hogy $2c_1 T - 1 - (1 - e^{-c_1 T})^2 > 2c_1 T - 1 - 1 > 4 - 2$,

$$x_{i4} := \frac{-2(1 - e^{-c_1 T})(e^{-c_1 T} - 1 + c_1 c_4 - c_1 x_{i2})}{2c_1 T - 1 - (1 - e^{-c_1 T})^2} - e^{-c_1 T}.$$

Visszahelyettesítve $V(t)$ képletébe:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{c_1(1 + e^{-c_1 T})((e^{-c_1 T} - 1) + c_1 c_4 - c_1 x_{i2}) + c_1(1 - e^{-c_1 T})(e^{-c_1 T} + x_{i4})}{c_3((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T})} = \\
&= \frac{c_1(1 + e^{-c_1 T})((e^{-c_1 T} - 1) + c_1 c_4 - c_1 x_{i2}) - c_1(1 - e^{-c_1 T})\left(\frac{2(1 - e^{-c_1 T})(e^{-c_1 T} - 1 + c_1 c_4 - c_1 x_{i2})}{2c_1 T - 1 - (1 - e^{-c_1 T})^2}\right)}{c_3((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T})} = \\
&= c_1 \frac{(1 + e^{-c_1 T})(2c_1 T - 1 - (1 - e^{-c_1 T})^2) - 2(1 - e^{-c_1 T})^2}{c_3((c_1 T - 2) + (c_1 T + 2)e^{-c_1 T})} (e^{-c_1 T} - 1 + c_1 c_4 - c_1 x_{i2}). \quad \square
\end{aligned}$$

4.4. Eredmények

Az előző részben az eredeti feladatot a paramétereiben is linearizáltuk, és ezzel a linearizált rendszerrel kapcsolatban a következő eredményekre jutottunk:

Tetszőlegesen rögzítve egy időpontot, amely nagyobb mint $2/c_1 \approx 3 \cdot 10^{-15}$ s, illetve a csatorna falának egy pontját, létezik olyan feszültségi állapot és hozzá egy mágneses tér, amelyek mellett az ion az adott időpontban a csatorna falának ütközik. Ezzel kontinuum sok potenciálisan jó (b_1, V) párt határoztunk meg.

Most azt fogjuk megmutatni, hogy ezek mindegyikénél a mágneses indukciónak megfelelő b_1 paraméter értéke mindösze két nagyságrenddel kisebb, mint a legnagyobb elméletileg lehetséges mágneses tér (ld.: 1.3. pontban).

4.4. ÁLLÍTÁS:

Legyen $T > 2/c_1$ rögzített és $\alpha = 6 \cdot 10^{-11}$.

Ekkor a $b_1 = \frac{c_1^2(e^{c_1 T} - 1)((c_1 T + 2)e^{-c_1 T} - 2 + c_1 T)}{c_2(c_1 T - 2 - (2 + c_1 T)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T})(1 + c_1 T - e^{c_1 T})} \cdot (\pm \alpha)$ vezérlési paraméter legalább 10^{11} nagyságrendű.

Bizonyítás. Jelölje a b_1 képletében szereplő törtet: R .

A tényezőiről a következő egyszerűen ellenőrizhető becslések mondhatók:

$a := (e^{c_1 T} - 1) > e^2 - 1 > 0$, $b := ((c_1 T + 2)e^{-c_1 T} - 2 + c_1 T)$ T -ben szintén szigorúan monoton nő, így $b > 4e^{-2} > 0$,

$$c := (c_1 T - 2 - (2 + c_1 T)e^{-2c_1 T} + 4e^{-c_1 T}) = \frac{1}{c_1 T + 2} (c_1^2 T^2 - (2 - (2 + c_1 T)e^{-c_1 T})^2) \Rightarrow$$

$$c > \frac{1}{c_1 T + 2} (c_1^2 T^2 - 2^2) = c_1 T - 2 > 0, \quad d := (1 + c_1 T - e^{c_1 T}) < 3 - e^2 < 0.$$

Tehát $R = \frac{c_1^2}{c_2} \cdot \frac{a \cdot b}{c \cdot d} < 0$, és így $R \cdot \alpha < 0$. Ezután elég azt belátni, hogy

$$R \cdot (-\alpha) \geq 10^{11} \quad \forall T > 2/c_1.$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $c_1 T = x$.

$$\begin{aligned} -R \cdot \alpha &= \frac{c_1^2}{c_2} \cdot \frac{a \cdot b}{c \cdot (-d)} \cdot \alpha = \frac{c_1^2(e^x - 1)((x + 2)e^{-x} - 2 + x)}{c_2(x - 2 - (2 + x)e^{-2x} + 4e^{-x})(-1 - x + e^x)} \cdot \alpha = \\ &= \frac{c_1^2 \alpha}{c_2} \cdot \frac{(x - 2)(e^x - 1) + (x + 2)(1 - e^{-x})}{(x - 2)(e^x - 1) - x^2 + 2x + (3x + x^2 + 2)e^{-2x} - (5x + 6)e^{-x} + 4} > \\ &= \frac{c_1^2 \alpha}{c_2} \cdot \frac{(x - 2)(e^x - 1) + (x + 2)(1 - e^{-x})}{(x - 2)(e^x - 1) - x^2 + 2x + (3x + x^2 + 2)\frac{1}{x^2} + 4} > \frac{c_1^2 \alpha}{c_2} \cdot \frac{(x - 2)(e^x - 1) + 4(1 - e^{-2})}{(x - 2)(e^x - 1) + 7}, \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél figyelembe vettük, hogy a $-x^2 + 2x + (3x + x^2 + 2)\frac{1}{x^2} + 4$

kifejezés monoton csökken, $(x + 2)(1 - e^{-x})$ monoton nő, és $x = c_1 T > 2$.

$$\text{Végül } \frac{c_1^2 \alpha}{c_2} \cdot \frac{(x - 2)(e^x - 1) + 4(1 - e^{-2})}{(x - 2)(e^x - 1) + 7} = \frac{c_1^2 \alpha}{c_2} \cdot \left(1 - \frac{7 - 4(1 - e^{-2})}{(x - 2)(e^x - 1) + 7} \right) > \frac{c_1^2 \alpha}{c_2} \cdot \left(1 - \frac{7 - 4(1 - e^{-2})}{7} \right) >$$

$$\frac{c_1^2 \alpha}{c_2} \cdot 0.49 = \frac{6.76^2 \cdot 6 \cdot 10^{10}}{4.58} \cdot 0.49 \approx 2.93 \cdot 10^{11}. \quad \square$$

4.5. A paramétereiben linearizált rendszer megoldásának vizsgálata

Az előző részben megmutattuk, hogy az eddig kapott elvileg jó paraméter párok nem felelnek meg valós elvárásainknak, hiszen 10^{11} nagyságrendű mágneses indukció előállítására reményünk sem lehet. Azonban egyidejűleg nem is zártuk ki, hogy létezhet ennél jobb megoldás.

Minthogy a linearizáció által egy jóval egyszerűbb rendszerhez jutottunk, ezért érdemes lehet ennek a megoldását kiszámítani és megvizsgálni.

A paraméterekben is linearizált rendszer mátrixos alakja:

$$x = (\varphi_2, \varphi_3, v_2, v_3), \quad x(0) = (0, c_4, 0, -1), \quad \dot{x} = \tilde{A} \cdot x + \tilde{d}(t), \quad \text{ahol:}$$

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{d}(t) = (0, 0, -c_2 \cdot e^{-c_1 t} b_1, -c_3 V)^T.$$

A differenciálegyenlet megoldása:

$$x(t) = e^{\tilde{A} \cdot t} \cdot x(0) + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-s)} \cdot d(s) ds =$$

$$\left(\frac{c_2}{c_1} b_1 ((1 + c_1 t) e^{-c_1 t} - 1), \frac{1}{c_1} ((c_1 - c_3 V)(e^{-c_1 t} - 1) - c_1 c_3 V t) + c_4, -c_2 b_1 t e^{-c_1 t}, \left(\frac{c_3}{c_1} V - 1 \right) e^{-c_1 t} - \frac{c_3}{c_1} V \right).$$

Most összevetve ezt az eredeti rendszer megoldásával a következőket figyelhetjük meg. Egyrészt, ha a mágneses teret nem kapcsoljuk be, azaz ha $b_1 = 0$, akkor ugyanazt a pályát kapjuk vissza, mint az eredeti rendszernél.

Másrészt láthatjuk, hogy most a $\varphi_3(t) = \frac{1}{c_1} ((c_1 - c_3 V)(e^{-c_1 t} - 1) - c_1 c_3 V t) + c_4$ kifejezés

nem függ b_1 értékétől, azaz a részecske függőleges irányú mozgását a mágneses tér segítségével nem tudjuk befolyásolni, így a 2.1.3. állítás alapján biztosak lehetünk benne, hogy a részecske eszerint a leírás szerint is tetszőleges megengedett V feszültség érték mellett 0.5 ms-on belül leér a csatorna alját jelentő y-tengelyig.

Már csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy létezik-e olyan 10^{11} T-nál kisebb indukciójú mágneses tér, melynek hatására az ion a csatorna falának ütközik, mielőtt az y-tengelyt elérné.

Tehát, keressük azokat a b_1, V értékeket, amelyek mellett:

$$\text{ha } \varphi_3(t) = 0, \quad t \in [0, 5 \cdot 10^{-4}], \quad \text{akkor } |\varphi_2(t)| > 6 \cdot 10^{-11}.$$

A megoldás menete a következő lehetne:

Először megoldjuk a V -vel paraméterezett $\varphi_3(t) = 0$ egyenletet, aminek eredményeképpen kapunk egy f függvényt, amelyre: $t = f(V)$ esetén $\varphi_3(t) = 0$.

Ezután azt szeretnénk, hogy az ilyen alakú t -kre $|\varphi_2(t)| > 6 \cdot 10^{-11}$ legyen, azaz hogy

$|\varphi_2(f(V))| > 6 \cdot 10^{-11}$ legyen. Ez az egyenlőtlenség már csak a b_1, V paramétereket tartalmazza, t -t nem, így b_1 kifejezésével, a végül kapott $b_1 \geq g(V)$ egyenlőtlenség tetszőleges megengedett V feszültségi állapothoz megad egy korlátot, amely feletti b_1 erősségű mágneses teret véve az ion elkerüli a csatorna végét jelentő szakaszt.

Persze már a $\varphi_3(t)=0$ egyenlet megoldása is nehézségekbe ütközik, viszont meg tudjuk vizsgálni, hogy egyáltalán volna-e remény a korábbiaknál jobb eredményre. Speciálisan, hogy a b_1 paraméterre adódó alsó korlát lehet-e kellően kicsi? Ehhez a $|\varphi_2(t)| > 6 \cdot 10^{-11}$ egyenlőtlenséget kell szemügyre vennünk.

A $t=0$ esettől eltekintve (és figyelembe véve, hogy $c_i > 0$, $i=1,2$) kapjuk, hogy:

$$|\varphi_2(t)| = \left| \frac{c_2}{c_1^2} b_1 ((1+c_1 t) e^{-c_1 t} - 1) \right| = \frac{c_2}{c_1^2} b_1 (1 - (1+c_1 t) e^{-c_1 t}) > 6 \cdot 10^{-11} \Leftrightarrow$$

$$b_1 > \frac{c_1^2 \cdot 6 \cdot 10^{-10}}{c_2 (1 - (1+c_1 t) e^{-c_1 t})}.$$

Azonban itt $\frac{c_1^2 \cdot 6 \cdot 10^{-11}}{c_2 (1 - (1+c_1 t) e^{-c_1 t})} > \frac{c_1^2 \cdot 6 \cdot 10^{-11}}{c_2} = \frac{6.76^2 \cdot 6}{4.58} \cdot 10^{10} \approx 5.99 \cdot 10^{11}$.

A fenti eredményeket az alábbi állítás foglalja össze:

4.5. ÁLLÍTÁS:

A 4.3. pontban bevezetett lineáris rendszerben az ion tetszőleges pozitív feszültségi állapot mellett eléri a csatorna aljának síkját, és csak egy legalább 10^{11} nagyságrendű mágneses tér volna elegendő ahhoz, hogy az ion a csatorna alját elkerülje. \square

5. Egy módosított modell: nyugalomból induló ion

Ebben a részben a modellben annyi változtatással élünk, hogy az ionnak nem adjuk meg az 1 m/s-os kezdősebességet, hanem azt nullára állítjuk. Továbbra is a két dimenziós rendszert tekintjük:

A nátriumion pályája: $\varphi: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$: $\varphi(t) = (\varphi_2(t), \varphi_3(t))$, $\varphi(0) = (0, c_4)$,
és sebessége: $\dot{\varphi}(t) = v(t) = (v_2(t), v_3(t))$, $v(0) = (0, 0)$.

A differenciálegyenlet koordinátánkénti alakja:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_2(t) &= -c_1 \cdot \dot{\varphi}_2(t) + c_2 b_1 \cdot \dot{\varphi}_3(t), \\ \ddot{\varphi}_3(t) &= -c_2 b_1 \cdot \dot{\varphi}_2(t) - c_1 \cdot \dot{\varphi}_3(t) - c_3 V.\end{aligned}$$

Most a korábbi modellre a 3. fejezetben leírt becsléses módszert rekonstruáljuk a megváltozott kezdeti feltétel mellett.

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk e módszer lényegét, majd közöljük a 3. fejezetben kimondott állítások analogonjait. A koordinátafüggvények becsléseinél a bizonyítások menete teljesen megegyezik a korábban leírttal, ezért ezek kifejtését mellőzzük.

5.1. A becsléses vizsgálat lépései

Arra törekszünk, hogy minél több megengedett V feszültségi állapotról belássuk, nincs hozzá megfelelő megengedett mágneses tér, amellyel az iont a csatorna falának ütköztethetnénk.

Pontosabban azt szeretnénk belátni, hogy amennyiben a paraméterek olyanok, hogy az ion 0.5 ms alatt eléri a csatorna aljának síkját, akkor a részecske függőleges irányú mozgása minden esetben annyival gyorsabb az oldalirányúnál, hogy mire vízszintesen elérné a csatorna falát jelentő egyenest, addigra már mindig leér az aljáig.

A megoldás menete:

Tegyük fel, hogy a $\varphi_3(t) = 0$ egyenletnek van megoldása a $[0, 5 \cdot 10^{-4}]$ intervallumon.

Előállítjuk a $\varphi_2(t)$ és $\varphi_3(t)$ függvényeknek egy-egy $\tilde{\varphi}_2(t)$ és $\tilde{\varphi}_3(t)$ becslését úgy, hogy ezekre kezdetben ugyanaz teljesüljön, mint az eredeti koordinátákra, azaz: $\tilde{\varphi}_2(0) = 0$, $\tilde{\varphi}_3(0) = c_4$, $\dot{\tilde{\varphi}}_2(0) = 0$, $\dot{\tilde{\varphi}}_3(0) = 0$.

Ezenkívül $|\varphi_2(t)| < \tilde{\varphi}_2(t)$, $\varphi_3(t) < \tilde{\varphi}_3(t)$ és a $\tilde{\varphi}_3(t) = 0$ egyenletnek is van megoldása a $[0, 5 \cdot 10^{-4}]$ intervallumon.

Ez azt jelentené, hogy a becslésekből kapott rendszerben a részecske a vízszintes irányban előrébb, a függőleges irányban hátrébb jár, mint az eredetiben, azaz ha a fenti tulajdonság a becsült rendszerben teljesül, akkor biztosan teljesül az eredetiben is.

Ezután a következőt próbáljuk megmutatni:

Ha adott paraméterértékek mellett az ion eléri a csatorna falának síkját, azaz a $\tilde{\varphi}_2(t) = 1.55 \cdot 10^{-10} - r$ egyenletnek van nemnegatív megoldása, akkor ha t_1 és t_2 a legkorábbi időpontok, amikor $\tilde{\varphi}_3(t_1) = 0$ és $\tilde{\varphi}_2(t_2) = 1.55 \cdot 10^{-10} - r$, akkor $t_1 < t_2$.

(Ha $\nexists t \geq 0$: $\tilde{\varphi}_2(t) = 1.55 \cdot 10^{-10} - r$, akkor rögtön készen vagyunk.)

5.2. A koordinátafüggvények becslései

5.2.1. ÁLLÍTÁS:

Legyen $\tilde{\varphi}_2(t) = \frac{3c_2 b_1}{c_1} \left(t + \frac{1}{c_1} \cdot e^{-c_1 t} - \frac{1}{c_1} \right)$. Ekkor $|\varphi_2(t)| \leq \tilde{\varphi}_2(t)$ és $\tilde{\varphi}_2(0) = \varphi_2(0) = 0$,
 $\dot{\tilde{\varphi}}_2(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$.

5.2.2. ÁLLÍTÁS:

Legyen $\tilde{\varphi}_3(t) = \frac{30c_2^2 b_1 - c_1 c_3 V}{c_1^2} \left(t + \frac{1}{c_1} \cdot e^{-c_1 t} - \frac{1}{c_1} \right) + c_4$. Ekkor $\varphi_3(t) < \tilde{\varphi}_3(t)$,

$\tilde{\varphi}_3(0) = \varphi_3(0) = c_4$, $\dot{\tilde{\varphi}}_3(0) = \dot{\varphi}_3(0) = 0$.

Továbbá a $\tilde{\varphi}_3(t) = 0$ egyenletnek van megoldása a $[0, 5 \cdot 10^{-4}]$ intervallumon minden $b_1 \in [0, 10]$, $V \in [7.38 \cdot 10^{-7}, 0.11]$ paraméter párra.

5.2.3. KÖVETKEZMÉNY:

A $\varphi_3(t) = 0$ egyenletnek van megoldása a $[0, 5 \cdot 10^{-4}]$ intervallumon minden $b_1 \in [0, 10]$, $V \in [7.38 \cdot 10^{-7}, 0.11]$ paraméter párra.

5.3. Megengedett megoldások kizárása

5.3. ÁLLÍTÁS:

Bármely $b_1 \in [0, 10]$, $V \in [1.25 \cdot 10^{-5}, 0.11]$ paraméter-pár esetén az ion 0.5 ms-on belül átjut a csatornán.

Bizonyítás. A fent leírt módszer szerint azt mutatjuk meg, hogy a $\tilde{\varphi}_2(t)$ és $\tilde{\varphi}_3(t)$ függvények által meghatározott rendszerben igaz az állítás, ami azt jelenti, hogy az eredeti rendszerre is teljesül.

Az egyszerűség kedvéért legyen $1.55 \cdot 10^{-10} - r = 1.55 \cdot 10^{-10} - 9.5 \cdot 10^{-11} = 6 \cdot 10^{-11} = \alpha$.

1. eset. Azokra a b_1 értékekre, amelyekre $\tilde{\varphi}_2(t) = \alpha$ nem megoldható, azonnal készen vagyunk, hiszen ekkor az ion sosem éri el a csatorna falát, viszont bármely megengedett V feszültségi állapot esetén legfeljebb 0.5 ms alatt eljut az aljáig.

Itt 3.2.1. állítás bizonyításában leírt módon kapjuk, hogy a $\tilde{\varphi}_2(t) = \alpha$ egyenlet a $b_1 = 0$ esettől eltekintve mindig megoldható.

2. eset. $\forall b_1 \in (0, 10]$ és $V \in [6.18 \cdot 10^{-6}, 0.11]$ esetén, azt szeretnénk látni, hogy ha $t_1, t_2 \geq 0$ a $\tilde{\varphi}_3(t_1) = 0$ és $\tilde{\varphi}_2(t_2) = \alpha$ egyenletek egyértelmű megoldásai, akkor $t_1 < t_2$.

A bizonyításhoz használni fogjuk az alábbi egyszerűen ellenőrizhető észrevételt:

LEMMA: $\tilde{\varphi}_2(t)$ szigorúan monoton nő, és $\tilde{\varphi}_3(t)$ szigorúan monoton csökken, minden megengedett b_1, V párra.

Figyelembe véve a monotonitási tulajdonságokat és a kezdőértékeket: $\tilde{\varphi}_3(0)=c_4>0$, $\tilde{\varphi}_2(0)-\alpha=-\alpha<0$, a $t_1<t_2$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha a $\tilde{\varphi}_3(t)=\tilde{\varphi}_2(t)-\alpha$ egyenlet \hat{t} megoldását a függvényekbe visszahelyettesítve $\tilde{\varphi}_3(\hat{t})=\tilde{\varphi}_2(\hat{t})-\alpha<0$ minden lehetséges paraméter pár mellett.

Az alábbiakban \hat{t} -nak egy \bar{t} felső becslését számítjuk ki, és ezt helyettesítjük vissza a $\tilde{\varphi}_2(t)-\alpha$ kifejezésbe. Hiszen $\tilde{\varphi}_2(t)-\alpha$ monoton növekvő volta miatt $\hat{t}\leq\bar{t}$ esetén $\tilde{\varphi}_2(\bar{t})-\alpha<0\Rightarrow\tilde{\varphi}_2(\hat{t})-\alpha<0$.

$$\tilde{\varphi}_3(t)=\tilde{\varphi}_2(t)-\alpha\Leftrightarrow\frac{30c_2^2b_1-c_1c_3V}{c_1^2}\left(t+\frac{1}{c_1}\cdot e^{-c_1t}-\frac{1}{c_1}\right)+c_4=\frac{3c_2b_1}{c_1}\left(t+\frac{1}{c_1}\cdot e^{-c_1t}-\frac{1}{c_1}\right)-\alpha\Leftrightarrow$$

$$(30c_2^2b_1-c_1c_3V-3c_1c_2b_1)\cdot(c_1t+e^{-c_1t}-1)+c_1^3(c_4+\alpha)=0.$$

Legyen $c_1t=x$, $30c_2^2b_1-3c_1c_2b_1-c_1c_3V=3c_2b_1(10c_2-c_1)-c_1c_3V=p$, így az egyenlet $p\cdot(x+e^{-x}-1)+c_1^3(c_4+\alpha)=0$ alakra írható, és itt $c_1>10c_2\Rightarrow p<0$.

Jelölje az egyenlet bal oldalán álló kifejezést $f(x)$.

Ekkor $f'(x)=p\cdot(1-e^{-x})<0$, tehát egy szigorúan monoton csökkenő függvény \hat{x} zérushelyét, illetve annak egy \bar{x} felső becslését keressük.

Mint ahogy $p<0\Rightarrow f(x)<p\cdot(x-1)+c_1^3(c_4+\alpha)\quad\forall x\geq 0$.

Legyen $p\cdot(x-1)+c_1^3(c_4+\alpha)=g(x)$, és jelölje $g(x)$ zérushelyét \bar{x} .

Ekkor $f'(x)<0$, $f(x)<g(x)$ miatt $\hat{x}<\bar{x}$.

$$g(x)=0\Leftrightarrow x=1-\frac{c_1^3(c_4+\alpha)}{p},\text{ tehát } \bar{x}:=1-\frac{c_1^3(c_4+\alpha)}{p},\text{ ekkor } \bar{t}=\bar{x}/c_1>\hat{t}.$$

Most azt szeretnénk, hogy $\tilde{\varphi}_2(\bar{t})-\alpha=\frac{3c_2b_1}{c_1}\left(\bar{t}+\frac{1}{c_1}e^{-c_1\bar{t}}-\frac{1}{c_1}\right)-\alpha<0$ legyen $\forall b_1\in(0,10]$,

$V\in[1.25\cdot 10^{-5},0.11]$ paraméterre.

A nevezőkkel beszorozva kapjuk, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha $3c_2b_1(c_1\bar{t}+e^{-c_1\bar{t}}-1)-c_1^2\alpha<0$.

Itt a baloldal: $3c_2b_1(\bar{x}+e^{-\bar{x}}-1)-c_1^2\alpha<3c_2b_1\left(\bar{x}+\frac{1}{\bar{x}+1}-1\right)-c_1^2\alpha\leq 0\Leftrightarrow$

$$3c_2b_1\bar{x}^2-(\bar{x}+1)c_1^2\alpha=3c_2b_1\left(1-\frac{c_1^3(c_4+\alpha)}{p}\right)^2-\left(2-\frac{c_1^3(c_4+\alpha)}{p}\right)c_1^2\alpha\leq 0.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenséget fogjuk ellenőrizni.

A nevezőkkel beszorozva p -ben egy másodfokú egyenlőtlenséget kapunk:

$$(3c_2b_1-2c_1^2\alpha)p^2+(c_1^2\alpha-6c_2b_1)c_1^3(c_4+\alpha)p+3c_2b_1c_1^6(c_4+\alpha)^2\leq 0.$$

Itt $a:=(3c_2b_1-2c_1^2\alpha)<0$, $b:=(c_1^2\alpha-6c_2b_1)c_1^3(c_4+\alpha)>0$, $c:=3c_2b_1c_1^6(c_4+\alpha)^2>0$, amiből látható, hogy a polinomnak egy negatív és egy pozitív gyöke van.

Mint ahogy $p<0$, az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha p legfeljebb akkora,

mint a negatív gyök: $p\leq\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6c_2b_1-c_1^2\alpha+c_1\sqrt{c_1^2\alpha^2+12c_2b_1\alpha}}{2(3c_2b_1-2c_1^2\alpha)}\cdot c_1^3(c_4+\alpha):=K$.

Vegyük észre, hogy b_1 -ben a p és az K kifejezés is szigorúan monoton csökken, hiszen $p=3c_2(10c_2-c_1)b_1-c_1c_3V$, ahol $3c_2(10c_2-c_1)<0$, másrészt

$$\frac{dK}{db_1} = \left(-18c_2c_1^2\alpha + \frac{1-c_1^2\alpha-12c_2b_1}{\sqrt{c_1^2\alpha^2+12c_2b_1\alpha}} \right) \frac{3c_1c_2\alpha}{2(3c_2b_1-2c_1^2\alpha)^2} < 0, \text{ mert } 1-c_1^2\alpha-12c_2b_1 < 0.$$

Mint hogy $p(b_1)$ lineáris, az egyenlőtlenség igazolásához elegendő lenne még azt megmutatni, hogy $K(b_1)$ konkáv, és hogy $p(b_1) \leq K(b_1)$ a $[0, 10]$ intervallum végpontjaiban.

$$\frac{dK}{d^2b_1} = \frac{162c_1^3c_2^3\alpha^2}{(3c_2b_1-2c_1^2\alpha)^3} + \frac{9c_1c_2^2\alpha(1-\alpha)(c_1^2\alpha+12c_2b_1-1)}{(3c_2b_1-2c_1^2\alpha)^3\sqrt{c_1^2\alpha^2+12c_2b_1\alpha}}, \text{ ahol } 3c_2b_1-2c_1^2\alpha < 0, \text{ így } K(b_1) \text{ valóban konkáv.}$$

A $p(0)=-c_1c_3V < 0 = K(0)$ egyenlőtlenség azonnal látszik.

$$p(10) = 3 \cdot 4.58(10 \cdot 4.58 - 6.76 \cdot 10^7) \cdot 10^{15} - 6.76 \cdot 9.16 \cdot 10^{29} V, \text{ illetve}$$

$$K(10) = \frac{6 \cdot 4.58 - 6.76^2 \cdot 6 \cdot 10^9 + 6.76 \cdot 10^6 \sqrt{6.76^2 \cdot 36 \cdot 10^6 + 12 \cdot 4.58 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}}{2(3 \cdot 4.58 - 2 \cdot 6.76^2 \cdot 6 \cdot 10^9)} \cdot 6.76^3 \cdot 10^{33} (5 + 6 \cdot 10^{-2}) > -7.83 \cdot 10^{25}.$$

Ebből $p(10) \leq K(10) \Leftrightarrow 3 \cdot 4.58(10 \cdot 4.58 - 6.76 \cdot 10^7) \cdot 10^{15} - 6.76 \cdot 9.16 \cdot 10^{29} V \leq -7.83 \cdot 10^{25} \Leftrightarrow$

$$V \geq \frac{3 \cdot 4.58(10 \cdot 4.58 - 6.76 \cdot 10^7) + 7.83 \cdot 10^{10}}{6.76 \cdot 9.16 \cdot 10^{14}} \approx 1.249 \cdot 10^{-5}. \quad \square$$

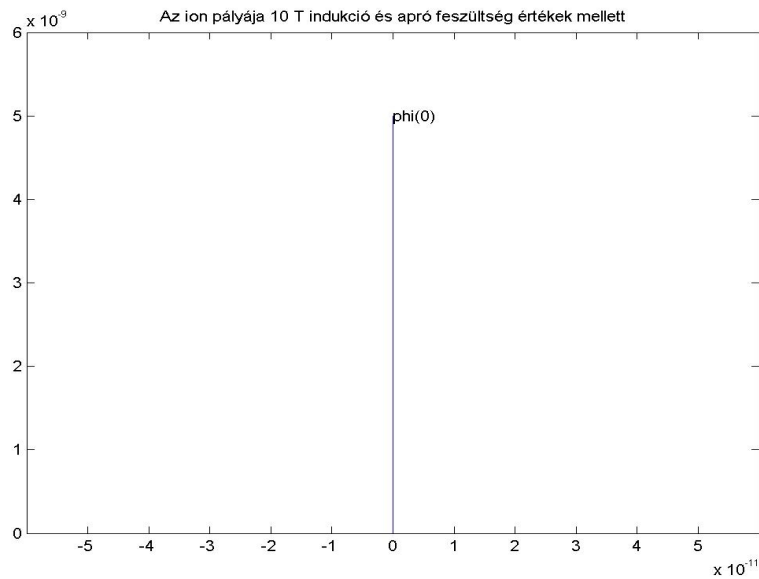
5.4. További megoldások vizsgálata

Az előző pontban azt kaptuk, hogy amennyiben $V \geq 1.25 \cdot 10^{-5} V$, akkor egy legfeljebb 10 T indukciójú mágneses tér nem elegendő ahhoz, hogy az ionok csatornán való átjutását általa megakadályozhassuk. Ha pedig V apró: $V \in [7.38 \cdot 10^{-7}, 1.25 \cdot 10^{-5}]$, akkor a becsléssel kapott új rendszerhez létezik olyan legfeljebb 10 T erősségű mágneses tér, amelynek jelenlétében az ion a csatorna falának ütközik, és ezáltal nem jut át rajta.

Vajon teljesül-e az apró feszültség értékekre kapott tulajdonság az eredeti rendszerben is? Hogy erre a kérdésre választ kapjunk, a Matlab segítségével kirajzoltuk a részecske pályáját a $t \in [0, 5 \cdot 10^{-4}]$ intervallumon néhány apró feszültségi állapot mellett úgy, hogy közben a mágneses tér indukcióját a maximális 10 T-ra állítottuk.

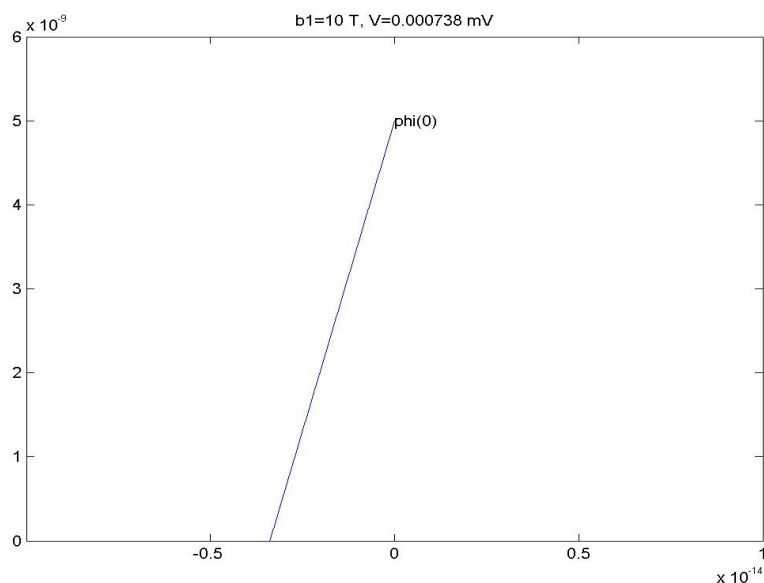
Az első ábrákat úgy készítettük el, hogy a vízszintes (y) tengelyből a $[-6 \cdot 10^{-11}, 6 \cdot 10^{-11}]$ intervallum legyen látható, míg a függőleges beosztás alsó határának a nullát, azaz a csatorna aljának egyenesét választottuk. Ez azt jelenti, hogy az ion a csatorna falának ütközik, ha azt látjuk, hogy a pálya „kimegy” a téglalap valamely függőleges oldalán.

A $V = 7.38 \cdot 10^{-7}, 10^{-6}, 5 \cdot 10^{-6}, 10^{-5}$ eseteket vizsgáltuk $b_1 = 10$ mellett és minden esetben az alábbi ábrát kaptuk:



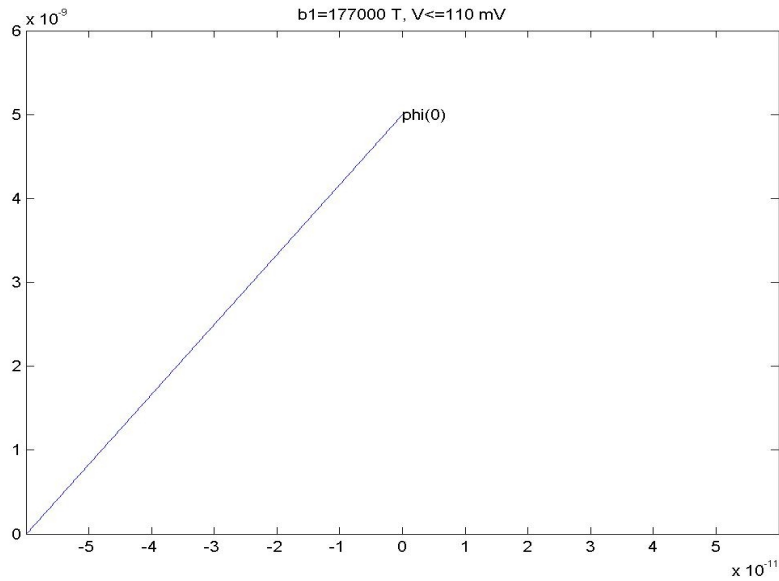
Ez azt jelenti, hogy egy legfeljebb 10 T indukciójú mágneses tér jelenléte még az apró feszültségi állapotok mellett sem akadályozhatja meg az ion csatornán való átjutását! Természetesen ez az ábra nagyon torz, szó sincs róla, hogy a mágneses térnek egyáltalán semmilyen hatása ne lenne.

A V paramétert a $[7.38 \cdot 10^{-7}, 0.11]$ intervallumból tetszőlegesen választva, és a vízszintes tengely beosztását három nagyságrenddel finomítva jól látható, hogy az \underline{e}_1 -gyel párhuzamos mágneses indukció — a várt módon — a $-\underline{e}_2$ irányba téríti ki a részecskét, ahol $\underline{e}_{1,2}$ a tér szokásos bázisvektorait jelöli. Tudjuk, hogy minél nagyobb a részecskét mozgató feszültség, annál nagyobb a mágnes eltérítő hatása, azonban a fenti intervallumon 10^{-12} m pontossággal különbség nem tapasztalható. Illusztrációként az alábbi ábrán a $V=7.38 \cdot 10^{-7}$, $b_1=10$ beállításnak megfelelő esetet közöljük.



Éppúgy mint a 3.3. pontban, megvizsgáltuk, hogy van-e eltérés egy maximális feszültség mellett induló ion átjutási idői között, ha a mágneses indukció 0, 1, 5, illetve 10 T. Ebben az esetben is azt kaptuk, hogy ez az idő az indukció nagyságától függetlenül: $3.35 \cdot 10^{-9}$ s. Tehát egy legfeljebb 10 T indukciójú mágneses tér jelenléte ennél a modellnél sem befolyásolja számottevően az ionok sebességét.

Végül teszteltük azt is, hogy mekkora mágneses indukció volna elegendő az ion falnak ütköztetéséhez, és az összes megengedett feszültségi állapotra azt kaptuk, hogy (ezres pontossággal) $1.77 \cdot 10^5$ T a minimális ilyen indukció. Ezt illusztrálja az alábbi ábra.



6. Eredmények, következtetések

Mind az eredeti, mind pedig a módosított modell vizsgálata során azt kaptuk, hogy egy legfeljebb 10 T indukciójú sztatikus mágneses tér:

- elhanyagolható mértékben befolyásolja az ionok mozgásának sebességét,
- tetszőleges $V \leq 110$ mV feszültség mellett 10^{-12} m pontossággal ugyanolyan mértékben téríti ki a részecskéket eredeti pályájukról,
- az AP-folyamat semelyik fázisában nem hiúsítja meg egy adott ion csatornán való átjutását.

Ennek alapján kizárhatjuk, hogy a kísérletekben használt, 10 T-nál nem nagyobb indukciójú sztatikus mágneses terek fájdalomcsillapító hatásának egyik oka, a Lorentz-erő által leírt, a membrán iontranszportjára kifejtett hatásuk volna.

Másrészt mindkét modellnél megkíséreltük megbecsülni, hogy mekkora indukció volna elegendő a kívánt hatás eléréséhez, az eredeti modellnél a mozgásegyenlet matematikai egyszerűsítésével, a módosított változatnál program-teszttel. A modell két változatánál a többi vonatkozásban nem tapasztaltunk különbséget. E tekintetben pedig azt kaptuk, hogy egy 10^5 T nagyságrendű indukció sem lassítja le az ion sebességét annyira, hogy az ne érne 0.5 ms-on belül a csatorna túlsó végéhez, és körülbelül $1.77 \cdot 10^5$ T az a minimális indukció, amelynek hatására a részecske a csatorna falához sodródhat, mielőtt végig érne azon.

Irodalomjegyzék

- [1] Fonyó Attila: Az orvosi élettan tankönyve, Medicina, 1997.
- [2] László János: Fájdalomcsillapítás mágneses térrel, Fizikai Szemle 2009/5.
- [3] Schmehl Ibolya: Modern elektrofiziológiai technikák, internetes jegyzet.
- [4] Steven Rose: A tudatos agy, Gondolat, 1983.
- [5] Baranyi-Erdélyi-Fehér-Nemcsók-Wollemann: Élettani folyamatok molekuláris alapjai, Jatepress, 1998.
- [6] Gyurkovics Éva: Irányításelmélet, Tankönyvkiadó, 1991.
- [7] Simon Péter: Közönséges differenciálegyenletek, internetes jegyzet.
- [8] Budó Ágoston: Kísérleti fizika I-II., Tankönyvkiadó, 1975.