

Grafikus matroidok összege

diplomamunka

Tassy Gergely

alkalmazott matematikus,
matematika tanárszakos hallgató

Témavezetők:

Dr. Recski András, egyetemi tanár
ELTE TTK Számítógéptudományi Tanszék

Dr. Vancsó Ödön, egyetemi adjunktus
ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ



Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar
Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Matroidok alaptulajdonságai	3
2.1. Bevezetés, a matroid fogalma	3
2.2. Példák matroidokra	5
2.3. Matroidműveletek	6
2.4. Matroidok összege	8
3. Matroidok önmagukkal vett összege	9
3.1. Összégként előálló bináris matroidok	10
3.2. Matroidok, amelyek k -szorosa bináris	11
3.3. Irreducibilis grafikus matroidok	13
4. Műszaki alkalmazások	15
4.1. Villamos hálózatok	15
4.2. Dualitás a hálózatokban	16
4.3. Vezérlés és visszacsatolás	17
4.4. Egy speciális eset	19
4.5. További speciális esetek	22

<i>TARTALOMJEGYZÉK</i>	II
5. Gráfelméleti dualitás a középiskolában	27
5.1. A diákcsoport bemutatása	28
5.2. A tervezett témakörök	29
5.3. A tervek gyakorlati megvalósítása	34
5.4. A diákok munkájának értékelése	39
Hivatkozások	41

1. Bevezetés

A matematika elméleti módszerei gyakran alkalmazhatók a műszaki tudományokban. Ilyen terület például a XX. században gyors fejlődésnek indult gráf- és matroidelmélet, amelynek eredményeit többek között a villamos alkatrészekből összeállított hálózatok analízisében használhatjuk fel. Kétpólusú alkatrészek esetében az egyes elemek áramait és feszültségeit a hálózat gráfjában Kirchhoff törvényeiből határozhatjuk meg. Amennyiben bonyolultabb alkatrészeket is megengedünk, a gráfelméleti modell már nem kielégítő, ekkor szükséges a matroidok használata. Ha például minél több alkatrész áramát szeretnénk egymástól függetlenül előírni, az ilyen tulajdonságú maximális halmazok meghatározása bizonyos matroidok összegének vizsgálatára vezethető vissza. Mivel a matroidelmélet többek között a gráfok (és a gráfelméleti körök) absztrakciójából született, így lényeges kérdés, hogy egy adott matroid előállítható-e valamilyen gráfból – igenlő válasz esetén az adott matroidot grafikusnak nevezzük.

A diplomamunka elején, a 2. fejezetben összefoglaljuk a fontosabb matroidelméleti fogalmakat, valamint a későbbiekben szükséges állításokat. Ezt követően rátérünk a matroidok összegének vizsgálatára. Időrendi sorrendben haladva a 3. fejezetben először az előzményeket idézzük fel néhány, az 1970-es évekből származó eredmény alapján: szükséges és elégséges feltételeket adunk arra nézve, hogy egy matroid önmagával vett összege mikor reprezentálható a kételemű test felett.

A 4. fejezetben rátérünk a felállított modell konkrét műszaki alkalmazhatóságára. A villamos hálózatok kérdéskörének rövid felvázolása után a 4.4. részben megfogalmazzunk egy friss (2008-as) eredményt, amely áramvezérelt áramforrást tartalmazó hálózatokra vonatkozik. A tétel egy speciális esetben (amikor a vezérlést leíró matroidban csak két független elem található) szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy a vizsgált összegmatroid mikor grafikus. Ezt követően, a 4.5. részben saját eredményeket is megfogalmazzunk három független elem ese-

tére: két szükséges feltételt, valamint néhány ötletet, amely az elégségesség (ma is megoldatlan) kérdése felé vezethet. Ugyanakkor azt is jelezzük, hogy az általános esetben a keresett maximális halmazok meghatározására jelenleg nincsen ismert módszer.

Az 5. fejezetben a gráfelmélet egy némiképp matroidokhoz kapcsolható, középiskolában is feldolgozható témakörének, a síkbarajzolhatóság és a dualitás területének gimnáziumi tanítására mutatunk egy lehetséges vázlatot. A kidolgozott tervek után azok konkrét gyakorlati megvalósításáról, módszertani tapasztalatairól is beszámolunk.

Diplomamunkám megírásakor köszönettel tartozom elsősorban témavezetőmnek, Recski Andrásnak értékes problémafelvetéseiért, javaslataiért, precíz és gondos segítségéért. Köszönöm továbbá Vancsó Ödönnek a módszertani fejezetben nyújtott közreműködést, valamint a Veres Péter Gimnázium 10.a osztályának a fejezet gyakorlati megvalósításában való lelkes és aktív részvételt.

2. Matroidok alaptulajdonságai

2.1. Bevezetés, a matroid fogalma

A gráfelméletben és a lineáris algebrában számos olyan probléma merül fel, amelyet úgynevezett mohó algoritmus segítségével oldunk meg. Ilyen többek között egy élsúlyozott gráfban a maximális (vagy minimális) súlyú feszítőfa (illetve nem összefüggő gráfban feszítő erdő) megkeresése, de ilyen egy súlyozott vektorrendszer maximális (vagy minimális) súlyú lineárisan független részalmazának megkeresése is.

A fenti példák közös vonása, hogy a kívánt tulajdonságot (az erdő éleinél a körmentességet, a vektorrendszer elemeinél a lineáris függetlenséget) teljesítő részalmazok leszálló halmazrendszert alkotnak, azaz körmentes halmaz részalmazza is körmentes, független halmaz részalmazza is független. Továbbá a mohó algoritmus lényege nagy vonalakban azon alapul, hogy elég minden lépésben a lokálisan optimális elemet választanunk (például a legnagyobb súlyú olyan élt vagy vektort, amelyet a pillanatnyi rendszerhez véve továbbra is körmentes, illetve független rendszert kapunk), és ezen lokális műveletek eredményeképpen globális optimumot kapunk. Ezek a példák motiválják a matroid fogalmának bevezetését, amelyet H. Whitney alkotott meg 1935-ben, mintegy a lineáris függetlenség általánosításaként.

2.1 Definíció. Legyen S tetszőleges (véges) alaphalmaz, $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ pedig az S bizonyos részalmazzaiból álló halmazrendszer, amelyre teljesülnek a következők:

(F1) \mathcal{F} nemüres (ezzel ekvivalens, hogy $\emptyset \in \mathcal{F}$).

(F2) \mathcal{F} leszálló, azaz ha $X \subseteq Y$ és $Y \in \mathcal{F}$, akkor $X \in \mathcal{F}$.

(F3) Tetszőleges $X \subseteq S$ részalmazra az \mathcal{F} -nek X -be eső, tovább nem bővíthető tagjai azonos elemszámúak.

A fenti három, úgynevezett függetlenségi axiómát kielégítő $\mathcal{M}(S, \mathcal{F})$ párt **matroidnak**, \mathcal{F} elemeit **függetleneknek** nevezzük.

A matroid függetlenjei közül a maximálisokat (azaz a tovább nem bővíthetőket) a matroid **bázisainak** nevezzük. Egy $X \subseteq S$ halmaz által tartalmazott maximális független halmaz mérete az X halmaz **rangja**, amelyet $r(X)$ -szel jelölünk. A matroid rangja alatt az $r(S)$ mennyiséget értjük. Ha $X \subseteq S$, de $X \notin \mathcal{F}$, akkor X -et **összefüggőnek** nevezzük. A tartalmazásra nézve minimális összefüggő halmazok neve **kör**. Speciálisan az egyelemű kört **huroknak** mondjuk. Ha egy elem nincsen benne körben, akkor (a gráfelmélethez hasonlóan) **elvágó elemnek** nevezzük.

2.2 Definíció. Az $\mathcal{M}_1(S_1, \mathcal{F}_1)$ és $\mathcal{M}_2(S_2, \mathcal{F}_2)$ matroidokat **izomorfoknak** nevezzük, ha megadható olyan bijekció S_1 és S_2 között, amely független halmazt független halmazba visz. Az izomorfia jele: $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$.

A matroidokat más, ekvivalens definícióval is megadhatjuk:

2.3 Állítás. Az (F3) függetlenségi axióma ekvivalens a következővel:

(F3') Tetszőleges $X, Y \in \mathcal{F}$ és $|X| < |Y|$ esetén van olyan $y \in Y - X$, amelyre $X + y \in \mathcal{F}$.

A továbbiakban legyen adott egy $c : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemnegatív súlyfüggvény. Keresünk azt az $X \in \mathcal{F}$ elemet, amelyre $c(X) := \sum_{e \in X} c(e)$ maximális. Ehhez formálisan definiáljuk a mohó algoritmus fogalmát.

2.4 Definíció. (mohó algoritmus) Legyen kezdetben $X' := \emptyset \in \mathcal{F}$. Ezt követően, ha a pillanatnyi megoldás X' , és létezik olyan $x \in S - X'$ elem, amelyet X' -hez véve az új halmaz is \mathcal{F} -beli, akkor legyen x' az ilyen hozzávehető elemek közül egy olyan, amelyre $c(x')$ maximális, majd legyen $X' := X' \cup \{x'\}$. Ha nincs ilyen x' elem, akkor az algoritmus véget ér, X' az output.

2.5 Állítás. Az (S, \mathcal{F}) pár pontosan akkor matroid, ha a mohó algoritmus tetszőleges nemnegatív súlyfüggvényre optimális megoldást ad.

2.6 Példa. Ilyen mohó algoritmus például Kruskal eljárása minimális súlyú feszítőfa keresésére, ahol S a vizsgált gráf éleinek halmaza, \mathcal{F} pedig a körmentes részgráfok halmazrendszere. (A fentiekben maximális súlyú megoldást kerestünk, ugyanez az algoritmus egyszerű módosítással minimális súlyú megoldást szolgáltat, ha c helyett $(-c)$ -re alkalmazzuk.)

2.2. Példák matroidokra

2.7 Definíció. Legyen G egyszerű, irányítatlan gráf. Ekkor G éleinek körmentes részalmazai matroidot indukálnak, amelynek függetlenjei a G -beli erdők, bázisai a G -beli feszítő erdők lesznek. Ezen struktúrát **grafikus matroidnak**, másnéven G **körmatroidjának** nevezzük, és $\mathcal{M}(G)$ -vel jelöljük.

2.8 Megjegyzés. A G_1 és G_2 gráfok körmatroidjai pontosan akkor izomorfak, ha a két gráf gyengén izomorf (azaz egymásba vihetők a Whitney által megengedett három elemi lépés segítségével - lásd: [3]).

2.9 Definíció. Legyen S egy tetszőleges vektortér elemeinek véges halmaza, \mathcal{F} pedig álljon S lineárisan független részalmazából. Ezt az (S, \mathcal{F}) struktúrát **lineáris matroidnak** nevezzük, amelynek bázisai megegyeznek a lineáris algebraiban használt bázisfogalommal.

Amennyiben egy matroid lineáris, akkor előállítható (reprezentálható) mint egy alkalmas test feletti mátrix oszlopvektorainak matroidja. Fontos vizsgálati szempont, hogy milyen test felett értelmezzük a vektorteret. Amennyiben a matroid például a kételemű test felett reprezentálható, akkor **bináris matroidnak** nevezzük. Ha tetszőleges test felett reprezentálható, akkor **reguláris matroidnak** hívjuk. Belátható, hogy minden grafikus matroid reguláris.

2.10 Definíció. Legyen S tetszőleges n elemű halmaz, \mathcal{F} pedig álljon S összes legfeljebb k elemű részhalmazából ($0 \leq k \leq n$). A kapott struktúra teljesíti a függetlenségi axiómákat, az így kapott matroidot **uniform matroidnak** nevezzük, és $U_{n,k}$ -val jelöljük. Az uniform matroidok két speciális esete $U_{n,n}$, amelyben S minden részhalmaza független (ennek neve **teljes** vagy **szabad matroid**), valamint $U_{n,0}$, amelyben csak az üres halmaz független (ennek neve **triviális matroid**).

2.11 Állítás. Belátható, hogy az $U_{4,2}$ uniform matroid lineáris, de nem bináris. Ez egyben azt is igazolja, hogy van olyan lineáris matroid, amely nem grafikus.

2.3. Matroidműveletek

A következőkben olyan műveleteket tekintünk át, amelyek segítségével meglévő matroidokból új matroidokat állíthatunk elő.

2.12 Definíció. Legyen $\mathcal{M}(S, \mathcal{F})$ a kiindulási matroid. Tekintsük azt az \mathcal{M}^* struktúrát, amelynek alaphalmaza szintén S , továbbá egy tetszőleges $X \subseteq S$ halmaz pontosan akkor legyen független \mathcal{M}^* -ban, ha $S - X$ tartalmaz \mathcal{M} -beli bázist. (Azaz az új bázisok éppen az eredeti bázisok komplementerei.) Az így definiált $\mathcal{M}^*(S, \mathcal{F}^*)$ struktúra szintén matroid, amelyet \mathcal{M} **duálisának** nevezünk.

2.13 Állítás. Ha az \mathcal{M} matroid rangfüggvénye r , akkor az \mathcal{M}^* duális matroid r^* rangfüggvénye $r^*(X) = |X| - r(S) + r(S - X)$.

A most definiált dualitásfogalom összhangban van a síkgráfok dualitásáról tanultakkal, továbbá a körök és vágások közötti kapcsolattal:

2.14 Tétel. Ha G síkbarajzolható gráf, akkor $[\mathcal{M}(G)]^* \equiv \mathcal{M}(G^*)$, azaz a síkgráf körmatroidjának duálisa izomorf a duális gráf körmatroidjával.

2.15 Definíció. Az $\mathcal{M}(S, \mathcal{F})$ matroidban egy $X \subseteq S$ halmaz **vágás**, ha X kör \mathcal{M}^* -ban. Egy $x \in S$ elem **híd**, ha egyelemű vágás (vagyis a korábbi definíció szerint elvágó elem) \mathcal{M} -ben, azaz hurok \mathcal{M}^* -ban.

A következő műveletek egy gráf éleinek törlését, illetve összehúzását, továbbá két gráf diszjunkt egyesítését terjesztik ki a matroidokra.

2.16 Definíció. Legyen $X \subseteq S$ rögzített halmaz. Szorítsuk meg \mathcal{F} -et az $S - X$ alaphalmazra, vagyis egy részhalmaz pontosan akkor legyen független, ha \mathcal{F} -beli, és része $S - X$ -nek. Az így kapott $\mathcal{M} \setminus X = (S - X, \mathcal{F}')$ struktúra matroid, a művelet neve az X halmaz **törlése** vagy **elhagyása**.

2.17 Definíció. Legyen \mathcal{M} matroid az S alaphalmazon az r rangfüggvénnyel, és $X \subseteq S$ egy rögzített halmaz. Definiáljuk az $S - X$ alaphalmazon a következő rangfüggvényt: $R(Y) := r(X \cup Y) - r(X)$. Így az \mathcal{M}/X matroidot kapjuk, a művelet neve az X halmaz **összehúzása**.

2.18 Definíció. Az \mathcal{M} matroidból törlések és összehúzások tetszőleges sorozatával előálló matroidot az \mathcal{M} **minorjának** nevezzük.

2.19 Definíció. Legyen $\mathcal{M}_1(S_1, \mathcal{F}_1)$ és $\mathcal{M}_2(S_2, \mathcal{F}_2)$ két matroid, ahol az S_1 és S_2 alaphalmazok diszjunktak. Tekintsük azt az $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ struktúrát, amelynek alaphalmaza $S_1 \cup S_2$, továbbá egy $X \subseteq S_1 \cup S_2$ halmaz pontosan akkor független benne, ha $X \cap S_1$ független \mathcal{M}_1 -ben, $X \cap S_2$ pedig független \mathcal{M}_2 -ben. Az így definiált struktúra matroid lesz, amelyet \mathcal{M}_1 és \mathcal{M}_2 **direkt összegének** nevezzük.

Ha például \mathcal{M} egy olyan összefüggő G gráf körmatroidja, amely nem kétszeresen (pont)összefüggő, és v_0 egy elvágó pontja, akkor \mathcal{M} előáll azon körmatroidok direkt összegeként, amelyek a $G - v_0$ komponenseiből keletkeznek v_0 és a megfelelő élek hozzávételével. Amennyiben G kétszeresen összefüggő, úgy viszont $\mathcal{M}(G)$ nem állítható elő direkt összegeként.

2.20 Definíció. Egy matroidot **összefüggőnek** nevezzük, ha nem áll elő matroidok direkt összegeként.

2.21 Állítás. Az \mathcal{M} matroid pontosan akkor összefüggő, ha bármely $X \subset S$ nemüres, valódi részhalmazra $r(X) + r(S - X) > r(S)$ teljesül. Speciálisan $\mathcal{M}(G)$ pontosan akkor összefüggő, ha G kétszeresen pontösszefüggő.

2.4. Matroidok összege

A következőkben néhány, ugyanazon alaphalmazon definiált matroidból kiindulva egy új matroidot, az összegüket értelmezzük. Számos gráfelméleti probléma (például egy adott gráf éleinek lefedése k darab erdővel, illetve k éldiszjunkt feszítőfa keresése egy gráfban) visszavezethető matroidok összegének vizsgálatára. Nash-Williams és Edmonds tétele garantálja, hogy az összegként definiált struktúra valóban matroidot alkot:

2.22 Definíció. Legyenek $\mathcal{M}_1(S, \mathcal{F}_1)$, $\mathcal{M}_2(S, \mathcal{F}_2)$, \dots , $\mathcal{M}_k(S, \mathcal{F}_k)$ matroidok a közös S alaphalmazon. E matroidok **összege** az S alaphalmazú $\mathcal{M} = \bigvee_{i=1}^k \mathcal{M}_i$ rendszer, amelyben egy halmaz pontosan akkor független, ha előáll különböző \mathcal{M}_i -kben lévő független halmazok (diszjunkt) uniójaként.

2.23 Tétel. Legyen \mathcal{M} a fenti módon definiált összegmatroid, továbbá az \mathcal{M}_i matroid rangfüggvénye r_i ($i = 1, \dots, k$). Ekkor az összegmatroid r rangfüggvényére $r(X) = \min\{\sum_{i=1}^k r_i(Y) + |X - Y| : Y \subseteq X\}$ teljesül.

Fontos kérdés az úgynevezett **matroidpartíciós probléma**: ha adottak az \mathcal{M}_i matroidok és egy $X \subseteq S$ részhalmaz, hogyan dönthető el, hogy X független-e az összegben. Ehhez X -et partícionálnunk kell a diszjunkt X_1, \dots, X_k részhalmazokra úgy, hogy X_i független legyen \mathcal{M}_i -ben. A matroidpartíciós probléma minden k -ra $|S|$ -ben polinomiális időben megoldható (feltéve, hogy egy tetszőleges részhalmaz függetlensége polinomidőben eldönthető), például Edmonds algoritmusával (az algoritmus leírását lásd: [2] 249. o.).

3. Matroidok önmagukkal vett összege

A következőkben matroidok összegének azt a speciális esetét tekintjük, amikor ugyanazt a matroidot adjuk össze k -szor saját magával. Lovász és Recski [8] cikke alapján megvizsgáljuk, mikor áll elő egy bináris matroid ilyen formában, illetve megfordítva, mikor lesz egy ilyen típusú összegmatroid bináris.

3.1 Definíció. Legyen \mathcal{M} rögzített matroid és $k \in \mathbb{Z}^+$. Az \mathcal{M} matroid \mathcal{M}^k -val jelölt k -szorosát az $\mathcal{M}^1 := \mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{k+1} := \mathcal{M}^k \vee \mathcal{M}$ rekurzióval értelmezzük.

A matroid köreinek vizsgálatakor fontos szempont lesz, hogy vannak-e egymást metsző körök, vagy minden kör diszjunkt. (Elemi matroidelméletből ismert, hogy ha C_1 és C_2 két metsző kör, valamint $e \in C_1 \cap C_2$, akkor létezik olyan C kör is, amely $C_1 \cup C_2 - e$ -ben halad.) Az egymást metsző körök egy speciális esete motiválja a következő fogalom bevezetését:

3.2 Definíció. Az \mathcal{M} matroid *fészek*, ha alaphalmaza $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$ módon partícionálható ($3 \leq r$), ahol a matroid körei az $S - S_i$ halmazok.

A legegyszerűbb (grafikus) példa fészerekre egy gráf három párhuzamos éle (vagy két pont között vezető három belsőleg pontdiszjunkt út) által indukált körmatroid. Mindkét példában $r = 3$, és a grafikus matroidok körében r nem is lehet nagyobb. Az alábbi tétel segítségével ugyanis a bináris matroidok karakterizációját kapjuk:

3.3 Tétel. (Tutte) Egy matroid akkor és csak akkor bináris, ha benne minden fészek pontosan három körből áll.

Először megvizsgáljuk, mely bináris matroidok állnak elő \mathcal{M}^k formában. Be fogjuk látni, hogy az ilyen alakú matroidok csak diszjunkt körökből és elvágó elemekből állhatnak. Azt fogjuk igazolni, hogy a bonyolultabb struktúrájú matroidok csak k -nál nagyobb elemszámú testek felett reprezentálhatók. Végül megvizsgáljuk, hogy \mathcal{M}^k milyen \mathcal{M} -ekre és k értékekre lehet bináris.

3.1. Összegként előálló bináris matroidok

3.4 Lemma. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \vee \dots \vee \mathcal{M}_k$, és \mathcal{M} nem tartalmaz elvágó elemet. Ekkor $r(S) = \sum_{i=1}^k r_i(S)$.*

BIZONYÍTÁS. Az összegmatroid rangfüggvényének definíciója alapján $r(S) = \sum_{i=1}^k r_i(X) + |S - X|$ valamely $X \subseteq S$ részalmazra. Megmutatjuk, hogy $X = S$.

Ellenkező esetben lenne egy $x \in S - X$ elem, amelyre $r(S - \{x\}) = \sum_{i=1}^k r_i(X) + |S - X - \{x\}| = r(S) - 1$ teljesülne. Így x elvágó elem lenne (hiszen minden bázisban benne lenne, azaz nem mehetne át rajta kör), ami ellentmondás. ■

Az előző lemmából, illetve a rangfüggvény szubmodularitásából elemi számolásokkal adódnak a következő összefüggések:

3.5 Lemma. *Legyen \mathcal{M} egy fészek az $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$ alaphalmazon, és tegyük fel, hogy \mathcal{M} előáll $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \vee \dots \vee \mathcal{M}_k$ összeg alakban, ahol \mathcal{M}_i rangfüggvénye r_i . Ekkor teljesülnek a következők:*

$$\sum_{i=1}^k r_i(S) = |S| - 2$$

$$\sum_{i=1}^k r_i(S - S_u) = |S - S_u| - 1$$

$$\sum_{i=1}^k r_i(S - S_u - S_v) = |S - S_u - S_v|$$

3.6 Állítás. *Az \mathcal{M}^k összegmatroid minden fészke legalább $k + 2$ körből áll.*

BIZONYÍTÁS. Feltehető, hogy \mathcal{M}^k maga is egy fészek az S alaphalmazon. Mivel most $r_i(X) = r(X)$ minden $1 \leq i \leq k$ -ra, így az előző lemmából következően $|S| \equiv 2 \pmod{k}$, továbbá $|S - S_u| \equiv 1 \pmod{k}$. Ekkor $|S_u| \equiv 1 \pmod{k}$ és $|S| = \sum_{u=1}^r |S_u| \equiv r \pmod{k}$. Vagyis $k \mid r - 2$, így $k + 2 \leq r$. ■

3.7 Következmény. *Az \mathcal{M}^k összegmatroid körei vagy diszjunktak, vagy \mathcal{M}^k csak k -nál nagyobb elemszámú testek felett reprezentálható.*

BIZONYÍTÁS. Ha \mathcal{M}^k -nak vannak metsző körei, akkor a matroid Tutte egyik tétele alapján tartalmaz fészket, amelynek legalább $k + 2 \leq r$ köre van. A megfelelő S_j részhalmazokat összehúzza $U_{r,2}$ duálisát kapjuk minorként, ez utóbbról pedig belátható, hogy csak legalább $r - 1 \geq k + 1$ elemű testek felett reprezentálható. ■

3.8 Állítás. *Az \mathcal{M}^k összegmatroid minden köre $\equiv 1 \pmod{k}$ elemű.*

BIZONYÍTÁS. Feltehető, hogy \mathcal{M}^k egyetlen körből áll az S alaphalmazon. Ekkor a 3.4 Lemma alapján $|S| - 1 = k \cdot r(S)$. ■

3.9 Tétel. *Az S alaphalmazon értelmezett \mathcal{N} bináris matroid akkor és csak akkor áll elő \mathcal{M}^k alakban ($2 \leq k$), ha \mathcal{N} egy fa és néhány $\equiv 1 \pmod{k}$ hosszú kör direkt összege.*

BIZONYÍTÁS. A szükségesség az előző két lemmából adódik. Az elégségesség bizonyításához tegyük fel, hogy \mathcal{N} a C_1, \dots, C_s körök és a T fa direkt összege, ahol a megfelelő alaphalmazok S_1, \dots, S_s és S_0 , továbbá S_i elemszáma $a_i \cdot k + 1$ ($1 \leq i \leq s$). Legyen \mathcal{M}_i az az uniform matroid, amelynek alaphalmaza S_i , és benne minden legfeljebb a_i elemű részhalmaz független. (Így \mathcal{M}_i^k éppen a C_i kör lesz.) Mivel a T fa S_0 alaphalmaza körmentes, így T és T^k egyaránt a szabad matroid. Ekkor az $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_s \oplus T$ jelöléssel $\mathcal{N} = \mathcal{M}^k$. ■

3.2. Matroidok, amelyek k -szorosa bináris

A továbbiakban a fordított irányt vizsgáljuk, vagyis keressük mindazokat az \mathcal{M} matroidokat, amelyekre \mathcal{M}^k bináris valamely $2 \leq k$ -ra. Ehhez szükségünk lesz a következő definícióra:

3.10 Definíció. Legyen $2 \leq k$ egész. Az S alaphalmazon értelmezett \mathcal{M} matroidot **k -körnek** hívjuk, ha $|S| = k \cdot r(S) + 1$, valamint $|T| \leq k \cdot r(T)$ minden $T \subset S$ részhalmazra.

A grafikus matroidok között k -kört alkot például az a matroid, amelyet egy fa éleinek k -szorozásából kapunk, további egy tetszőleges (a fa éleitől különböző) élt hozzávéve. (Hiszen e gráf feszítőfájának elemszáma éppen a fa élszáma, továbbá az élek bármely részhalmazának rangja pontosan annyi, ahány különböző faélt tartalmaznak.)

3.11 Állítás. Legyen G egyszerű, összefüggő n pontú gráf. Ekkor ahhoz, hogy G körmatroidja egy k -kör legyen, szükséges és elégséges feltétel, hogy az élek száma $k \cdot (n - 1) + 1$ legyen, továbbá a csúcsok bármely V_0 részhalmaza legfeljebb $k \cdot (|V_0| - 1)$ élt feszítsen.

BIZONYÍTÁS. A feltétel szükségessége a k -kör definíciójából rögtön adódik. Az elégségességhez elég annyit megmondolnunk, hogy ha lenne a $|T| \leq k \cdot r(T)$ feltételt megsértő élhalmaz, akkor ennek valamely összefüggő komponense is megsértené a feltételt, így a komponens éleinek V_0 végpontjai $k \cdot (|V_0| - 1)$ -nél több élt feszítenének. ■

Nem grafikus esetekben a k -körök fogalma kevésbé szemléletes, viszont segítségükkel pontosan jellemezhető, mikor lesz \mathcal{M}^k bináris:

3.12 Tétel. Adott \mathcal{M} matroid és $2 \leq k$ egész esetén \mathcal{M}^k pontosan akkor bináris, ha \mathcal{M} -ben bármely két k -kör diszjunkt.

BIZONYÍTÁS. A 3.4 Lemma alapján megfigyelhető, hogy az \mathcal{M}^k matroid körei kölcsönösen egyértelműen megfelelnek az \mathcal{M} matroid k -köreinek. Így a 3.9 Tétel bizonyítja a tétel állítását. ■

3.13 Megjegyzés. Minden olyan esetben, amikor \mathcal{M}^k bináris, az összegmatroid egyben grafikus is. (Hiszen a 3.9 Tétel alapján megkonstruálható a megfelelő, egy fából és néhány diszjunkt körből álló gráf.)

3.3. Irreducibilis grafikus matroidok

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy grafikus matroidok mikor állhatnak elő két matroid összegeként. Ehhez bevezetjük a következő definíciót:

3.14 Definíció. Az \mathcal{M} (grafikus) matroidot *irreducibilisnek* nevezzük, ha nem áll elő két matroid összegeként, azaz $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ esetén \mathcal{M}_1 vagy \mathcal{M}_2 szükségképpen a triviális (üres) matroid.

3.15 Tétel. A G gráf körmatroidja akkor és csak akkor irreducibilis, ha a gráf bármelyik élét törölve a fennmaradó gráf kétszeresen (pont)összefüggő marad.

BIZONYÍTÁS. A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy valamely e él törölve $G - e$ nem kétszeresen összefüggő. (Ha már G sem kétszeresen összefüggő, akkor a korábban látott módon $\mathcal{M}(G)$ előáll direkt összegként.) Tegyük fel, hogy $G - e$ az összefüggő G_1 és G_2 gráfok uniója, amelyek egyetlen közös csúcsa x . Haladjon az e él a G_1 -beli u és a G_2 -beli v pontok között. Definiáljuk az $E(G)$ élhalmazon az $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}(G_1 + (x, u))$ matroidot a következőképpen: vegyük G_1 körmatroidját, feleltessük meg az (x, u) elemnek az e élt, a G_2 -beli élek megfelelői pedig legyenek hurkok. Hasonló módon kaphatjuk az $\mathcal{M}_2 := \mathcal{M}(G_2 + (x, v))$ matroidot. Ekkor $\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$, hiszen minden G -beli körnek megfelel egy $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ -beli kör és viszont. Tehát $\mathcal{M}(G)$ nem irreducibilis, ezzel ellentmondásra jutottunk.

Az elégségesség bizonyításához legyen e a gráf egy éle, és tegyük fel, hogy $\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ alakú. Mivel $G - e$ kétszeresen összefüggő, ezért e két végpontja között $G - e$ -ben halad két pontdiszjunkt út, P_1 és P_2 . Ekkor $P_1 \cup P_2 \cup \{e\}$ egy fészek, így a 3.5 Lemma utolsó állítása alapján $r_1(\{e\}) + r_2(\{e\}) = 1$, vagyis e elvágó él \mathcal{M}_1 és \mathcal{M}_2 valamelyikében. Mivel ez minden élre igaz, így a gráf élhalmaza felírható $E(G) = S_1 \cup S_2$ alakban, ahol S_i élei elvágó élek \mathcal{M}_{3-i} -ben ($i = 1, 2$). Ekkor $\mathcal{M}(G) = \mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 = (\mathcal{M}_1 \vee S_1) \oplus (\mathcal{M}_2 \vee S_2)$, tehát $\mathcal{M}(G)$ nem összefüggő, ami ellentmond annak, hogy G kétszeresen összefüggő volt. ■

3.16 Megjegyzés. *A bizonyításból az is következik, hogy ha egy gráf körmatroidja előáll két matroid összegeként, akkor két grafikus matroid összegeként is előáll.*

E fejezet elején matroidok összegének azon speciális esetét vizsgáltuk, amikor minden összeadandó ugyanazon matroid volt. Az általános eset vizsgálata jóval nehezebb. Ezzel kapcsolatos részeredmény Tutte algoritmus ([9]) annak eldöntésére, hogy egy bináris matroid grafikus-e. Továbbá közös élhalmazon értelmezett grafikus matroidok esetében is létezik algoritmus ([10]), amely eldönti, hogy az összeg grafikus-e.

4. Műszaki alkalmazások

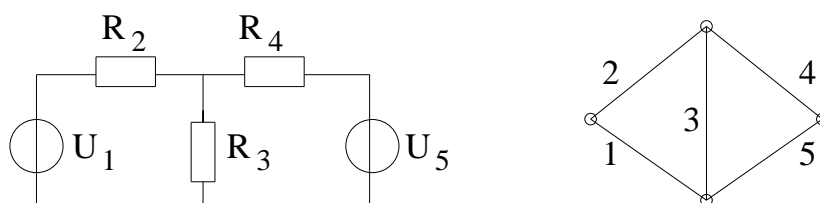
4.1. Villamos hálózatok

A gráfelmélet első műszaki alkalmazása Kirchhoff nevéhez fűződik, aki 1847-ben a villamos hálózatok analíziséhez használt csomóponti és hurokegyenletek megfogalmazásában, illetve a megoldhatóság bizonyításában gráfelméleti modelleket használt (lásd: [4]).

A továbbiakban a feszültséget u -val, az áramerősséget i -vel, az ellenállást R -rel jelöljük. A 4.1. és a 4.2. szakaszokban feltételezzük, hogy egy villamos hálózat kizárólag a következő három típusú alkatrészt tartalmazza:

- ellenállásokat, amelyeket $u = Ri$ típusú egyenletek írják le;
- idealizált feszültségforrásokat, amelyeket $\{u \text{ adott}, i \text{ tetszőleges}\}$ típusú egyenletek írják le;
- idealizált áramforrásokat, amelyeket $\{i \text{ adott}, u \text{ tetszőleges}\}$ típusú egyenletek írják le.

Tegyük fel, hogy a hálózat elemeinek kapcsolódását egy olyan gráffal szemléltetjük, amelynek élei az egyes (kétpólusú) alkatrészeknek felelnek meg, csúcsaiban pedig a szomszédos alkatrészeknek megfelelő élek találkoznak. Például az 1. ábrán az U_1 és U_5 feszültségforrások, valamint az R_2 , R_3 és R_4 ellenállások villamos hálózatát és a hozzá tartozó gráfot láthatjuk:



1. ábra

Általában feltesszük, hogy ismerjük az ellenállások nagyságát, a feszültségforrások feszültségét és az áramforrások áramát. Ezekből szeretnénk meghatározni a hiányzó mennyiségeket, vagyis az ellenállásokon és a feszültségforrásokon átfolyó áramok nagyságát, valamint az ellenállások és az áramforrások feszültségét. Ezt nevezzük a **hálózatanalízis alapfeladatának**.

A feladat megoldásában felhasználjuk Ohm törvényét az ellenállások feszültsége és árama közötti kapcsolatról ($u = Ri$), valamint Kirchhoff huroktörvényét (a hálózat gráfjának bármely köre mentén a feszültségek előjeles összege nulla), illetve csomóponti törvényét (a hálózat gráfjának bármely vágása mentén az áramok előjeles összege nulla). Az előjelek meghatározásakor feltételezzük, hogy minden alkatrészhez adott egy kitüntetett mérőirány, továbbá a körnek, illetve a vágásnak is tekintjük egy adott irányítását. Ha egy élen a két irányítás megegyezik, akkor pozitív, ellenkező esetben negatív előjellel vesszük figyelembe az alkatrészt.

4.1 Állítás. *Egy feszültségforrásokat, áramforrásokat és pozitív ellenállásokat tartalmazó hálózat akkor és csak akkor oldható meg egyértelműen, ha a hálózat gráfjában a feszültségforrások élhalmaza körmentes, valamint az áramforrások élhalmaza vágásmentes részgráfot alkot.*

4.2 Megjegyzés. *Amennyiben további kétpólusú alkatrészeket (tekercseket, kondenzátorokat) is megengedünk, úgy a hálózat leírásában az eddigi lineáris egyenletek mellett differenciálegyenletek is megjelennek. Ha a hálózatban többpólusú alkatrészek (például transzformátorok) is szerepelnek, akkor a gráfelméleti modell már nem alkalmazható, ilyenkor lehet szükség a matroidok felhasználására.*

4.2. Dualitás a hálózatokban

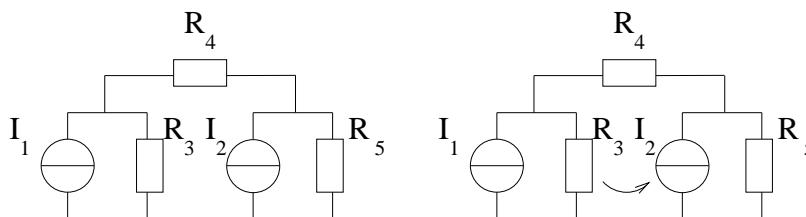
Amennyiben egy villamos hálózat csak kétpólusú alkatrészekből áll, és az összekapcsolást leíró gráf síkbarajzolható, akkor a Kirchhoff-féle egyenletek a duális

gráfra is megfogalmazhatók. Ismeretes, hogy egy gráf körei megfelelnek a duális gráf vágásainak (és fordítva), így ha a duális gráf által meghatározott hálózatban felcseréljük a feszültség és az áram jelölését, az eredetiekkel ekvivalens egyenleteket kapunk. Hasonlóképpen egy feszültségforrásnak a duális gráf hálózatában egy áramforrás felel meg és viszont. Egy $u = Ri$ formában megadott ellenállásnak pedig a duális párja is ellenállás lesz, amely $u = \frac{1}{R}i$ alakban írható. Általában is igaz a következő:

4.3 Tétel. *Legyen H egy csupa kétpólusú alkatrészből álló hálózat, amelyet a G síkgráf ír le. Tekintsük a G^* duális gráfot, valamint helyettesítsük az eredeti hálózat minden alkatrészét a megfelelő duális párjával. Az így kapott H^* hálózatot leíró egyenletrendszer formailag megegyezik a H -t leíró egyenletekkel, csupán a feszültségeket és az áramokat jelölő u és i betűket kell megcserélni.*

4.3. Vezérlés és visszacsatolás

Ha a hálózatban vezérelt forrásokat is megengedünk, a gráfmodell már nem alkalmazható, ehelyett matroidok segítségével tudjuk leírni az alkatrészek tulajdonságait, viszont az így keletkező matroidok nem mindig grafikusak. Tekintsük például a 2. ábra alábbi két hálózatát:

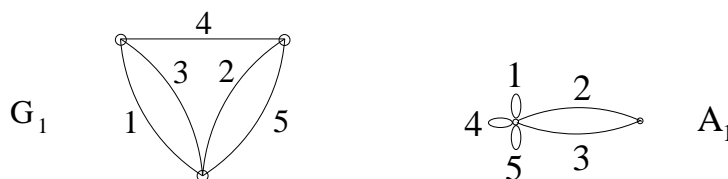


2. ábra

Az első hálózatban I_2 hagyományos feszültségforrás, amelyet az $\{i_2 \text{ adott, } u_2 \text{ tetszőleges}\}$ egyenletek írják le. Viszont a második hálózatban I_2 -t az R_3 ellenállás árama vezérli, így a leíró egyenletek $\{i_2 = ki_3, u_2 \text{ tetszőleges}\}$ alakúak. Ilyen esetben az $\{R_3, I_2\}$ pár neve áramvezérelt áramforrás.

Az első hálózatban (és minden vezérlésmentes hálózatban) alkatrészek egy halmazának áramai pontosan akkor írhatók elő egymástól függetlenül – mint azt az előzőekben láttuk –, ha a megfelelő élek halmaza nem tartalmaz vágást (azaz a komplementer élhalmaz összefüggő). Általában pedig a maximális olyan élhalmazok, amelyekben az alkatrészek áramai függetlenül előírhatók, éppen a gráf feszítőfáinak komplementerei – vagyis a gráf körmatroidjának duálisában ezek alkotják a bázisokat. Ha a fenti első példában az R_4 ellenállást lecseréljük egy I_4 feszültségforrásra, akkor például az $\{1, 2, 4\}$ alkatrészek maximális vágásmentes élhalmazt alkotnak, így e három áramerősség egymástól függetlenül előírható.

Ha viszont vezérelt forrást is megengedünk, úgy a függetlenül előírható áramok maximális élhalmazának mérete csökkenhet. A fenti második hálózatban legfeljebb két áramerősség adható meg függetlenül, például i_1 és i_2 , illetve bármely pár, kivéve i_2 és i_3 . A maximális független halmazok továbbra is egy matroid duálisának bázisait alkotják, viszont a vizsgált matroid most nem a hálózat gráfjának körmatroidja lesz.



3. ábra

Jelölje $\mathcal{M}(G_1)$ a vizsgált hálózat 3. ábrán látható G_1 gráfjának körmatroidját, és legyen \mathcal{A}_1 ugyanezen az 5 elemű alaphalmazon az a matroid, amelyben csak a $\{2\}$ és a $\{3\}$ egyelemű halmazok (és az üres halmaz) függetlenek (\mathcal{A}_1 grafikus, mégpedig a 3. ábra jobboldali gráfjának körmatroidja). Ekkor azon maximális élhalmazok, amelyeknek megfelelő alkatrészek áramai egymástól függetlenül előírhatók, az $\mathcal{M}(G_1) \vee \mathcal{A}_1$ matroid duálisának bázisait alkotják.

4.4 Állítás. *Az így megadott $\mathcal{M} := \mathcal{M}(G_1) \vee \mathcal{A}_1$ összegmatroid nem grafikus.*

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy \mathcal{M} tartalmazza minorként $U_{4,2}$ -t. Az \mathcal{M} matroid rangja 3, maximális függetlenjei az összes háromelemű részhalmaz, kivéve az $\{1, 4, 5\}$ halmazt. (Minden más háromelemű független – az összegmatroid definíciója alapján – előáll úgy, hogy egy G_1 -beli körmentes részgráfhoz hozzávesszük a 2-es, illetve a 3-as élek közül pontosan az egyiket.) Így speciálisan az $\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 3\}, \{1, 5, 3\}, \{2, 4, 3\}, \{2, 5, 3\}, \{4, 5, 3\}$ halmazok is függetlenek. Vegyük észre, hogy a 3-as él összehúzásával ezek éppen az $\{1, 2, 4, 5\}$ halmaz kételemű részhalmazait adják, vagyis $\mathcal{M}/\{3\}$ tartalmazza $U_{4,2}$ -t, amely valóban nem grafikus. ■

4.4. Egy speciális eset

Mint azt az előző fejezetben is láttuk, általában túl nehéz probléma eldönteni, hogy két grafikus matroid összege grafikus-e. A továbbiakban fontos kérdés lesz annak vizsgálata, hogy ha az egyik matroid a fenti \mathcal{A}_1 -hez hasonlóan viszonylag egyszerű, speciális szerkezetű, mit mondhatunk ilyenkor tetszőleges G gráf esetén az $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_1$ összegmatroid grafikus voltáról. Először belátjuk a következő, „Kuratowski-típusú” tételt ([11]), amely a fenti konkrét \mathcal{A}_1 esetében szükséges és elégséges feltételt ad G -re:

4.5 Tétel. *Legyen \mathcal{A}_1 az előző példában szereplő vezérlést leíró matroid, vagyis azon gráf körmatroidja, amelyben e_2 és e_3 párhuzamos élek, minden további e_1, e_4, e_5, \dots él pedig hurok. Ekkor bármely G gráfot véve az $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_1$ összegmatroid akkor és csak akkor grafikus, ha a gráf nem tartalmazza részgráfként a fentebb említett G_1 gráfot vagy annak soros bővítését (ahol \mathcal{A}_1 két nem-hurok eleme a 3. ábra szerinti 2 és 3 élnek felel meg).*

BIZONYÍTÁS. Amennyiben G tartalmazza részgráfként G_1 -et, akkor az előző állítás alapján $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_1$ tartalmazza minorként az $U_{4,2}$ matroidot, így nem lehet

grafikus. (Ha G_1 soros bővítését tartalmazza a gráf, akkor a megfelelő élek összehúzásával – amelyek \mathcal{A}_1 -ben hurok elemek – kaphatjuk meg G_1 -et.)

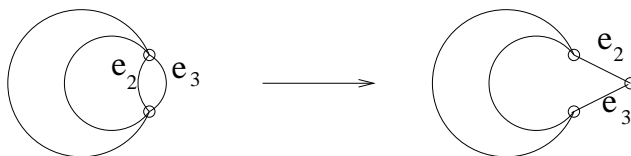
A megfordításhoz tegyük fel, hogy $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_1$ nem grafikus valamely adott G gráf esetén, amelyben az e_2 -vel és e_3 -mal jelölt élek felelnek meg \mathcal{A}_1 nem-hurok elemeinek. Célunk megmutatni, hogy G tartalmazza a G_1 részgráfot vagy annak soros bővítését.

Feltehetjük, hogy e_2 és e_3 a G ugyanazon összefüggőségi komponensében vannak, hiszen ellenkező esetben a 4. ábrán látható módon $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_1$ előállna a jobb oldali gráf körmatroidjaként. (Ugyanis a két komponens egy-egy körmentes részgráfjához az e_2 és e_3 élek legfeljebb egyikét hozzávéve a jobb oldali gráfban is körmentes élhalmazt kapunk.)



4. ábra

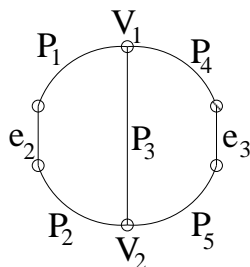
Hasonlóan meggondolható, hogy e_2 és e_3 nem lehetnek párhuzamos élek. Ugyanis a párhuzamos éleket egy 2 hosszú úttal helyettesítve (lásd az 5. ábrát) ismét olyan gráfot kapnánk, amelynek körmatroidja $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_1$ lenne. Hasonlóan kapjuk, hogy e_2 és e_3 hurokélek sem lehetnek. Hiszen ha például e_2 hurokél lenne, akkor helyettesíthetnénk e_3 párhuzamos megduplázásával (és viszont), ha pedig mindkét él hurokél lenne, helyettesíthetnénk őket egy különálló párhuzamos éllel.



5. ábra

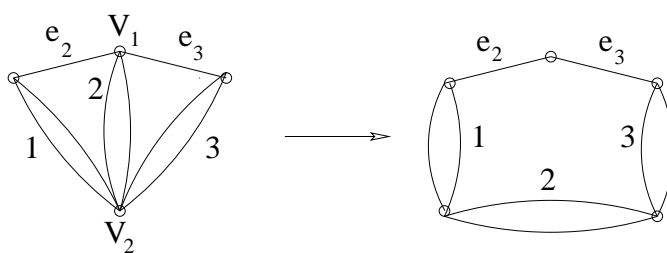
Ha e_2 és e_3 kételemű vágást alkotnának, akkor az összeg ismét előállna körmatroidként abból a gráfból, amelyet $G \setminus \{e_2, e_3\}$ -ből kapunk, e két élt hidakként hozzávéve.

Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy G -ben kell lennie olyan körnek, amely tartalmazza e_2 -t és e_3 -at, valamint olyan köröknek is, amelyek e két él közül pontosan az egyiket tartalmazzák. Így a gráf tartalmazza részgráfként a 6. ábrán látható gráfot. (V_1 és V_2 két különböző csúcs, amelyet a P_3 út köt össze. A P_1, P_2, P_4 és P_5 utak között 0 hosszúságúak is szerepelhetnek)



6. ábra

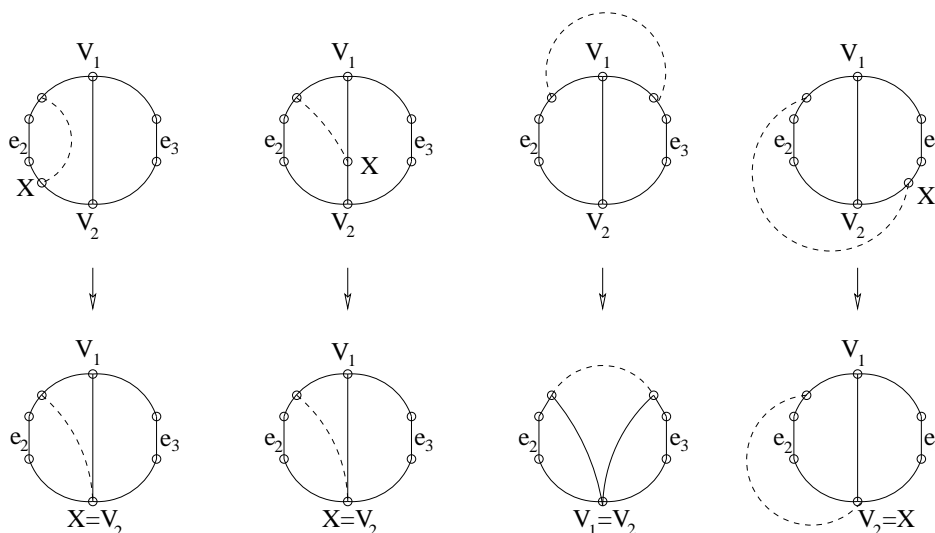
Tekintsünk most olyan pontpárokat, amelyek P_1, \dots, P_5 közül két diszjunkt úton, belső pontként helyezkednek el. Vegyük most az ezeket a pontpárokat összekötő utakat. Ha a V_1 -gyel és V_2 -vel jelölt pontok az összes ilyen utat lefoglalják, akkor a gráf (gyengén) izomorf a 7. ábra bal oldali gráfjával, és így az összegmatroid a jobb oldali átalakítás alapján grafikus:



7. ábra

Ha pedig van olyan út, például P_1 valamely belső pontját egy másik P_i valamely belső pontjával összekötő út, amely nem megy át sem V_1 -en, sem V_2 -n, akkor a

keresett G_1 részgráfot a 8. ábra átalakításaival találhatjuk meg (a négy oszlop az $i = 2, 3, 4, 5$ eseteket mutatja).



8. ábra

Ezzel megmutattuk, hogy minden olyan esetben, amikor az $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_1$ összeg nem grafikus, a gráf tartalmazza részgráfként a „tiltott” G_1 gráfot, vagy annak soros bővítését. ■

4.5. További speciális esetek

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy amennyiben a vezérlést leíró matroid az előző \mathcal{A}_1 -nél valamivel bonyolultabb, mit mondhatunk az összegmatroid grafikus voltáról. \mathcal{A}_1 -nek két nem-hurok eleme volt, amelyek együttesen egy 2 élű kört alkottak. Először megemlítjük azt a két triviális esetet, amikor a vezérlést leíró \mathcal{A} matroid csupán egy független élt tartalmaz, vagy két olyan független élt, amelyek együttesen is függetlenek. Ezekben az esetekben az $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}$ összegmatroid mindig grafikus, a reprezentáló gráfot úgy kaphatjuk meg a legegyszerűbben, ha G -ből elvesszük az \mathcal{A} -beli független(ek)nek megfelelő él(eke)t, majd ezt az 1,

illetve 2 élt a gráf egy új komponensében, a többi éltől izoláltan felvesszük. A kapott gráf körmatroidjának maximális függetlenjei éppen az eredeti gráf függetlenjei lesznek, a kitüntetett egy vagy két éllel kiegészítve.

Az előbbi két triviális eset gondolatmenetéből rögtön következik az alábbi, általánosabb állítás is. Legyen az \mathcal{A} matroid élhalmaza $E_1 \cup E_2$, ahol az E_1 -beli élek szabad matroidot alkotnak (vagyis az összes 2^{E_1} részhalmaz független), E_2 pedig csak hurok elemeket tartalmaz (vagyis csak \emptyset független). (Az előző példákban E_1 egy, illetve két független élből állt.) Ekkor az összegmatroidról a következőt mondhatjuk:

4.6 Állítás. *Ha $\mathcal{A} = (E_1, 2^{E_1}) \oplus (E_2, \{\emptyset\})$ alakú, akkor tetszőleges G gráf esetén az összegmatroid $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A} = (E_1, 2^{E_1}) \oplus (E_2, \mathcal{M}(G) \setminus E_1)$ alakú.*

A következő továbblépési lehetőség, ha a vezérlést leíró matroidban három nem-hurok elem szerepel. Nyilván most is feltehető, hogy e három elem együttesen nem független (ekkor az előző állítás egy újabb triviális esetét kapnánk), így lényegileg két esetet kell megkülönböztetnünk.

Az első esetben a három kitüntetett elem közül bármely kettő független, vagyis gráffal reprezentálva egy 3 hosszú kört alkotnak. Legyen \mathcal{A}_2 egy 6 elemű alaphalmazon értelmezett matroid, amelyben a 2, 4, 6 sorszámú élek a kitüntetettek, azaz a maximális függetlenek a $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$ kételemű halmazok (a másik három él egy-egy hurkot alkot). Az előző fejezet mintájára most is először olyan G gráfot keresünk, amelyre az $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_2$ összegmatroid nem lesz grafikus. A 9. ábrán látható G_2 gráf például ilyen:

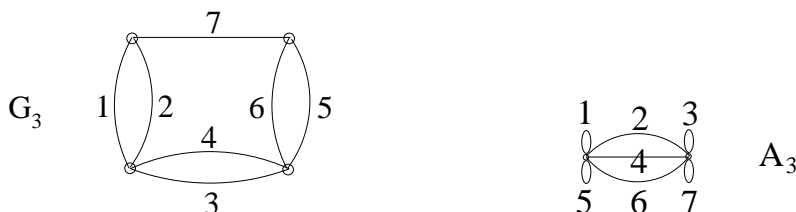


9. ábra

4.7 Állítás. Az $\mathcal{M} := \mathcal{M}(G_2) \vee \mathcal{A}_2$ összegmatroid nem grafikus.

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy \mathcal{M} tartalmazza minorként $U_{4,2}$ -t. \mathcal{M} rangja 4, és \mathcal{M} -ben maximális független minden olyan négyelemű halmaz, amely előáll egy G_2 -beli körmentes részgráfból, hozzávéve a 2, 4, 6 sorszámú élek közül (legfeljebb) kettőt. Így az $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$ és $\{1, 3, 5, 6\}$ kivételével minden négyelemű halmaz független lesz. Speciálisan független minden olyan négyelemű halmaz, amely tartalmazza a 2-t és a 4-et, így $\mathcal{M}/\{2, 4\}$ -ben a maradék 4 elem tetszőleges kételemű részhalmaza független lesz, azaz tartalmazza $U_{4,2}$ -t. Tehát \mathcal{M} valóban nem grafikus. ■

A másik esetben a három kitüntetett elem közül bármely kettő összefüggő, vagyis gráffal reprezentálva 3 párhuzamos élt alkotnak. Legyen \mathcal{A}_3 egy 7 elemű alaphalmazon értelmezett matroid, amelyben ismét a 2, 4, 6 sorszámú élek a kitüntetettek, azaz a maximális függetlenek a $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$ egyelemű halmazok, minden más elem hurkot alkot. Ekkor a 10. ábrán látható G_3 gráf esetében például az $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_3$ összegmatroid nem lesz grafikus:



10. ábra

4.8 Állítás. Az $\mathcal{M} := \mathcal{M}(G_3) \vee \mathcal{A}_3$ összegmatroid nem grafikus.

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy \mathcal{M} tartalmazza minorként $U_{4,2}$ -t. \mathcal{M} rangja 4, és az \mathcal{M} -beli maximális független halmazok előállnak egy G_3 -beli körmentes részgráfból, hozzávéve a 2, 4, 6 sorszámú élek közül (legfeljebb) egyet. Így az $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$ és $\{1, 3, 5, 7\}$ kivételével minden négyelemű halmaz független lesz. Speciálisan független minden olyan négyelemű halmaz,

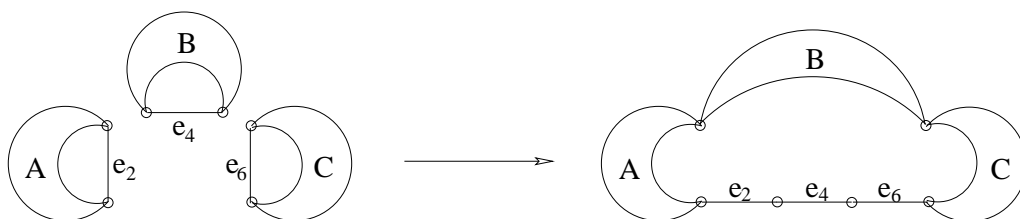
amely tartalmazza a 2-t és a 7-et, így $\mathcal{M}/\{2, 7\}$ -ben a maradék 5 elem tetszőleges kételemű részhalmaza független lesz, azaz tartalmazza $U_{5,2}$ -t. Mivel pedig $U_{5,2}$ tartalmazza minorként $U_{4,2}$ -t, így \mathcal{M} valóban nem grafikus. ■

Az előző két állítás szükséges feltételt adott arra, hogy ha a vezérlést az \mathcal{A}_2 , illetve \mathcal{A}_3 matroid írja le, milyen G gráf esetén lehet grafikus az $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_2$, illetve $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_3$ összegmatroid. A G gráf nyilván nem tartalmazhatja a G_2 , illetve G_3 részgráfokat (és ezek soros bővítését). Nyitott kérdés, hogy vajon ez a feltétel önmagában elégséges-e.

A fordított irány vizsgálatánál (a 4.5 Tétel gondolatmenetét követve) egy rész-eredményt említünk meg:

4.9 Állítás. *Ha $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_2$ nem grafikus, akkor az \mathcal{A}_2 -beli három nem-hurok elemnek megfelelő élek nem lehetnek G három különböző összefüggőségi komponensében.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel indirekten, hogy a három vizsgált él (e_2 , e_4 és e_6) különböző komponensekben vannak. Ekkor a 4. ábra átalakítási módszerét követve $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_2$ előállna a 11. ábra jobboldali gráfjának körmatroidjaként, ami ellentmond a kiindulási feltételnek. ■



11. ábra

A további felmerülő kérdések (például lehet-e a három él két komponensben, illetve egy komponensben belül hogyan helyezkedhetnek el ezek az élek), valamint

ugyanezen gondolatmenet $\mathcal{M}(G) \vee \mathcal{A}_3$ -ra történő kiterjesztése még nyitott probléma.

Hasonlóan megoldatlan (és valószínűleg jóval nehezebb) kérdés, hogy amennyiben a vezérlést leíró \mathcal{A} matroid az itt vizsgáltaknál bonyolultabb szerkezetű, mit mondhatunk az összegmatroid grafikus voltáról, egyáltalán adható-e szükséges és elégséges feltétel, azaz létezik-e (egy vagy több) tiltott részgráf. E nyitott kérdések további vizsgálata egy esetleges későbbi kutatás alapját is képezheti.

5. Gráfelméleti dualitás a középiskolában

Integrált tanári szakdolgozatomban egy az eddigiekhez kapcsolódó, középiskolai matematikaórán is tanítható témakört dolgoztam fel. Mivel a matroid fogalma értelemszerűen túl absztrakt egy gimnazistának (bár a mohó algoritmus gondolata például egy programozási szakkör keretében feldolgozható lenne), így a matroidelmélettel rokon gráfelmélet egy területét, a síkbarajzolhatóság és a dualitás témáját választottam. (A korábbi fejezetekben már érintettük a matroidok esetében a dualitás szerepét.)

A gráfelmélet azért is kiváló terület tehetséges középiskolásoknak, mert a felmerülő problémák általában egyszerűen megfogalmazhatók (a gráf fogalma is elég szemléletes ehhez), ugyanakkor gyorsan el lehet jutni híres eredményekhez (mint például a négyszíntétel), vagy éppen megoldatlan kérdésekhez (NP-teljes problémák, mint például Hamilton-kör keresése vagy pontszínezés), amelyek motiválják az érdeklődő diákokat.

A dualitás témakörének középiskolai feldolgozásában fő célom az volt, hogy a diákok elsajátítsanak néhány szemléletmódot, gondolkodási módszert a gráfelméletben (síkgráf, duális gráf fogalma), megismerjenek pár alapvető eredményt a témában (Kuratowski-tétel, Euler-formula), és lássák ezek alkalmazhatóságát a matematikán belül (szabályos testek) és kívül (pl. villamos hálózatok) is. Az új fogalmak felépítésekor a túlzott (esetleg a megértés rovására menő) precizitás helyett inkább a szemléletességre, a rajzos megjelenítésre törekedtem. Módszeremben igyekeztem követni a Pósa Lajos táboraiban megismert – és tehetséggondozó programokon általam is sokszor alkalmazott – úgynevezett *felfedezettő matematikaoktatás* elveit, amelynek egyik alapvető célja, hogy minél több eredményre (beleértve a létező tételeket is) a diákok önállóan, esetleg némi segítséggel jöjjenek rá. Felismeréseik, kis kutatásaik eredményei ilyen módon sokkal jobban rögzülnek bennük, mintha mindent készen kapnának a tanártól.

5.1. A diákcsoport bemutatása

Terveim megvalósítására egy budapesti nyolcosztályos gimnázium 10. évfolyamán volt lehetőség. Az osztály heti 3 órában, bontott csoportban tanulja a matematikát, a 14 fős jobbik csoportot a tanév eleje óta tanítom. A csoport homogén olyan szempontból, hogy mindenki szereti és szorgalommal műveli a tantárgyat, az év végi jeles osztályzat senkinél nem kérdéses. Ezen belül azért elkülönülnek a jók és a még jobbak: 5 diák csupán az órákon szereti a haladó tempót, 9-en pedig rendszeres versenyzők (a többségük visszatérő résztvevője az országos döntőknek is, szép eredményekkel). Összességében tehát kiemelkedő képességű tanulókról van szó, öröm velük a munka a hagyományos tananyagban is, de ideális csoport egy-egy kiegészítő témakör (mint például a gráfelmélet) kipróbálására is. Az osztályból 5-en rendszeresen járnak matematika szakkörre is, amelyet idén negyedik éve tartok nekik.

Az elmúlt tanévben egy hétig tanítottam már ezt a csoportot, ekkor bevezető gráfelmélettel foglalkoztunk, így az alapfogalmak, illetve alapvető összefüggések (például fokszámösszeg és élszám kapcsolata, fák tulajdonságai) már ismerősek voltak, idén csak fel kellett eleveníteni ezeket. A gráfok bevezetésekor összegyűjtöttük azokat a mindennapi helyzeteket is, ahol ez a fogalom megjelenik (például ismeretségek, térképek, számítógépes hálózatok, munka részfeladatainak ütemezése), ezekre idén csak röviden utaltunk vissza. Szintén a tavalyi órák során előkerült még néhány olyan gráfelméleti érdekesség (például Euler-körök), amelyet most nem folytattunk, talán majd a következő tanévben.

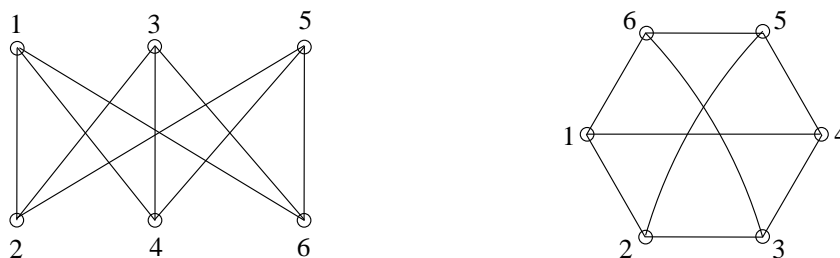
A síkbarajzolhatóság és a dualitás témakörére 3 délelőtti tanítási óra és egy délutáni szakköri foglalkozás állt rendelkezésemre, ennyi időre tervezhettem a következőkben felsoroltakat. Az anyag összeállításakor előzetesen úgy éreztem, hogy valószínűleg nem fog minden beleférni az időkeretbe, de végül meglepően jó tempóban haladtunk. Igaz, némi kompromisszumot kellett kötni a felfedeztetés elve és a 45 perces tanítási óra között, és így bizonyos helyzetekben az időre való

tekintettel akkor is megbeszéltünk egy megoldást, ha az még csak kevés embernek jött ki. Ideális helyzetben (például tábori keretek között) azt tartom jónak, ha a diákok kisebb (2-4 fős) csoportokban, egymástól elkülönülve dolgozhatnak (akár külön helyszínen is), mindenki a saját tempójában.

5.2. A tervezett témakörök

1. Gráfelméleti alapfogalmak ismételése

A tavaly megismert legfontosabb fogalmak (egyszerű gráf, fa, kör, izomorfia) felelevenítése. (A továbbiakban csak egyszerű gráfokat vizsgálunk.) Az izomorfia (természetesen csak szemléletesen, azaz a két gráf pontjainak megfelelő beszámolásával) az alábbi példán terveztem, ugyanis a $K_{3,3}$ -ra nemsokára még szükségünk lesz:



12. ábra

Szintén szükségünk lesz (az Euler-tétel bizonyításakor) arra a tételre, hogy egy n pontú fának $n - 1$ éle van. Ennek rövid bizonyítását is megnézzük, de nem a „szokásos” indukciósat, hanem a [18]-belit. Az alapgondolat, hogy feleltessünk meg a gráf pontjainak városokat, éleinek utakat, és legyen egy kijelölt főváros. Az összes többi városba helyezzünk egy-egy embert, aki egy meghatározott időpontban elindul a főváros felé. Ekkor belátható, hogy közvetlenül az indulás pillanata után minden ember különböző útszakaszon fog tartózkodni, és minden úton lesz ember. Így az $n - 1$ ember éppen $n - 1$ élt határoz meg.

2. A síkbarajzolhatóság fogalma

Miután tisztáztuk, hogy egy gráfnak sokféle (izomorf) lerajzolása lehet, felmerülhet az igény, hogy minél „egyszerűbben”, áttekinthetőbben ábrázoljuk a gráfot. Ez motiválja azt a célt, hogy amennyiben lehetséges, az élek csak csúcsokban találkozzanak. Néhány kisméretű példa (például egy négy pontú teljes gráf) vizsgálata után tegyük fel a kérdést: van-e olyan gráf, amit nem lehet így lerajzolni? Ha igen, keressünk minél kisebb példákat.

Ha megtaláltuk a K_5 -öt és a $K_{3,3}$ -at, érdekességként (és természetesen bizonyítás nélkül) megemlíjtük Kuratowski tételét: egy gráf akkor és csak akkor nem síkbarajzolható, ha tartalmazza K_5 -öt, $K_{3,3}$ -at, vagy ezek „felosztott” változatát (egy él pontokkal történő felosztását egy ábrán szemléltetjük). A bizonyítás nehéz, viszont egy részét közösen belátjuk: megmutatjuk, hogy a „három ház - három kút” gráfja nem síkbarajzolható. Ehhez azt kell csak meggondolnunk, hogy amennyiben létezne a kívánt lerajzolás, úgy két ház és két kút egy olyan zárt görbét határozna meg, hogy a harmadik ház és a harmadik kút egyikét e görbe belsejébe, másikat külsejébe helyezhetnénk csak el, így ezeket nem tudnánk összekötni. (Érdekességként megemlíthető, hogy azon „nyilvánvaló” állítás bizonyítása, miszerint egy zárt görbe belsejében és külsejében lévő egy-egy pont csak úgy köthető össze, hogy a két görbe metszi egymást, mély matematikai ismereteket igényel.) Végül azt is jelezzük, hogy K_5 -ről később derül majd ki, miért nem tudjuk lerajzolni.

3. Az Euler-tétel és egy alkalmazása

Az előzőekben sok síkgráfot rajzoltunk. Ezeknél a csúcsok és az élek száma mellett értelmes kérdés a keletkező síkrészek (tartományok, lapok) számának vizsgálata is. Számoljuk meg minden ábrán e három mennyiséget, majd keressünk közöttük összefüggést! (Egyelőre megállapodunk abban, hogy a külső tartomány is számít, ennek jelentősége később fog kiderülni.) Esetleg rávezetésként: rajzoljunk megadott csúcs- és élszám mellett síkgráfot, és figyeljük meg, kinek hány

tartomány keletkezett az ábráján.

A példák során megsejthető az Euler-tétel állítása, amelyet $c - é + l = 2$ formában mondunk ki (ahol c a csúcsok, $é$ az élek, l a lapok számát jelöli), hiszen így a $cél$ szóról könnyen megjegyezhető a sorrend, illetve a középben szereplő negatív előjel. A tételt be is bizonyítjuk, az egyik közismert úton: a gráf tartományai jelöljék egy sziget országait, amelyeket gátak választanak el egymástól. Szárazság lévén a külső tartományból be szeretnénk engedni a vizet, ehhez minél kevesebb gátat elbontunk úgy, hogy végül minden tartomány víz alá kerüljön. Mivel minden egyes gát megnyitásakor egy új tartományt önt el a víz, így összesen $l - 1$ gátat kell megszüntetnünk. Végül a megmaradó gátak fát alkotnak (hiszen kör esetén lenne még száraz tartomány, a nem összefüggőség pedig a megnyitott gátak minimalitásának mondana ellent), így további $c - 1$ élünk van. Ez összesen $é = (l - 1) + (c - 1)$ él, amely összefüggés bizonyítja a tételt.

Síkbarajzolható gráfok konstrukciója közben jogos érzés, hogy minél több éle van egy adott csúcsszámú gráfnak, annál „nehezebb” azokat lerajzolni metszés nélkül. Ez motiválja azt az igényt, hogy felső korlátot adjunk egy síkgráf élszámára. Az Euler-tételből megkaphatjuk ezt a becslést. Ehhez először figyeljük meg, hogy ha egy síkgráf minden tartományába beírjuk azt a számot, ahány él az adott lapot határolja, majd e számokat összeadjuk, éppen az élszám kétszeresét kapjuk. Mivel minden lapot legalább 3 él határol, így ebből a $2é \geq 3l$ becsléshez jutunk, amelyet az Euler-tételbe helyettesítve átrendezéssel megkapjuk az élek számára vonatkozó $é \leq 3c - 6$ becslést. Most már könnyen igazolhatjuk, hogy K_5 nem síkgráf, hiszen $c = 5$ csúcsa és $é = 10$ éle van. Ugyanakkor azt is megfigyelhetjük, hogy a feltétel csak szükséges, de nem elégséges, ugyanis a szintén nem síkbarajzolható $K_{3,3}$ esetében $c = 6$ és $é = 9$.

4. Síkgráfok duálisa

Motivációként képzeljük el, hogy adott néhány ország, és a szomszédos országok fővárosait vasútvonallal kötjük össze. Gráffal ábrázolva ez azt jelenti, hogy

egy síkgráf tartományainak pontokat feleltetünk meg, majd az élszomszédos tartományoknak megfelelő pontokat éllel kötjük össze. Ilyen módon egy új gráfot kapunk, amelyet az eredeti gráf duálisának nevezünk. Néhány konkrét példa (a K_4 , illetve a kocka élhálózata) duálisát megrajzoljuk, majd megfigyeljük, hogy az Euler-tétel a duálisra is igaz, hiszen a lapok és a csúcsok cserélődtek fel, az élek száma nem változott. Végül azt is észrevehetjük, hogy ha a duális duálisát rajzolnánk meg, visszakapnánk az eredeti gráfot. (Érdekességként megemlítjük, hogy bizonyos speciális esetekben ez nem így van.)

5. Szabályos testek

Egy látszólag nem ide tartozó téma: gyűjtsük össze, hány szabályos testet ismerünk. Ha megtaláltuk az 5 testet, gyűjtsük össze, melyiknek hány csúcsa, éle, lapja van. Megfigyelhetjük, hogy ezekre is működik az Euler-tétel, tehát kézenfekvő lenne valamilyen gráfot megfeleltetni a testeknek. Az élháló alkalmas lenne erre (a csúcs, él, lap fogalmak megfelelnek a gráfelméleti megfelelőjüknek), de ehhez síkba kéne teríteni a hálót. Tetraédernél és kockánál már láttuk, hogy ez megvalósítható, de vajon mi a helyzet általában egy (konvex) test esetében? A síkbarajzolás mindig működik, ez precízen is bebizonyítható (röviden utalunk a sztereografikus projekcióra, amely a gömböt – egy pont kivételével – a síkra vetíti), mi most szemléletesen ([15] szerint) gondoljuk meg: fúrjunk a test egyik lapjára egy kis lyukat, majd ezen keresztül „fújjuk fel” gömbbé. Ezt követően, mint ahogyan egy csokigolyó csomagolását kibontja az ember, a gömb felületét a pontnál „szétválasztva” a síkba teríthetjük. Így tehát síkgráfot kapunk, amelynek külső tartománya a test azon lapja, ahol a felfújást elkezdtük (ezért fontos tehát, hogy ezt a tartományt is figyelembe vegyük).

Az eddigi témák összekapcsolásaként rajzoljuk meg a szabályos testek élhálóját, majd készítsük el az így kapott gráfok duálisát. Megfigyelhetjük, hogy a tetraéder duálisa önmaga, míg a kocka és az oktaéder, illetve a dodekaéder és az ikozaéder egymás duálisai.

6. További érdekességek, szakköri témák

A síkbarajzolhatóság kapcsán megemlíthetjük még a négyszíntételt: tetszőleges síkgráf tartományai – vagyis a duális síkgráf pontjai – 4 színnel kiszínezhetők úgy, hogy élszomszédos tartományok ne legyenek azonos színűek. Érdeemes hangsúlyozni, hogy ez egy viszonylag új eredmény (1976-ból), így a régebbi könyvekben még csak „négyszínsejtésként” szerepel (sőt, [14] arra is utal, hogy egyesek kétségbe vonták a sejtés igaz voltát). Érdekes a tétel bizonyításának sajátos formája: a 800 oldalas leírás mellett 1200 óra számítógépes programidőt is igényelt a számos eset vizsgálata.

Szakkörön megvizsgálhatjuk, hogy miért nem létezik több szabályos test. Ezt a [16]-beli bizonyítással láthatjuk be a legkönnyebben: ha egy szabályos test minden lapja n -szög, és minden csúcsában m él található, akkor érvényesek a $2é = n \cdot l = m \cdot c$ összefüggések, ebből az Euler-formulába helyettesítve az $é = \frac{m \cdot c}{2}$ és $l = \frac{m \cdot c}{n}$ alakot, a $c(2n - mn + 2m) = 4n$ összefüggést kapjuk, ahol a zárójelben álló kifejezés pozitív, így szorzattá alakítva $(m - 2)(n - 2) < 4$ -nek is teljesülnie kell. E diofantikus egyenlőtlenségből esetszétválasztással megkapjuk az 5 ismert test adatait (a további megoldások nem adnak testet, hiszen $3 \leq n$ -nek teljesülnie kell).

Szintén szakkörre alkalmas a síkbarajzolhatóság kiterjesztése más felületekre, például Möbius-szalagra vagy tóruszra (lásd: [17]). Továbbá arra is lehet példát mutatni, hogy két izomorf síkgráf duálisa mikor nem lesz izomorf. A síkbarajzolhatóság iránt érdeklődőknek otthonra javasolhatunk még egy internetes játékot a <http://nonoba.com/chris/untangle> címen, amelyben „összebogarazott” gráfokat kell a pontok mozgásával síkgráffá alakítani.

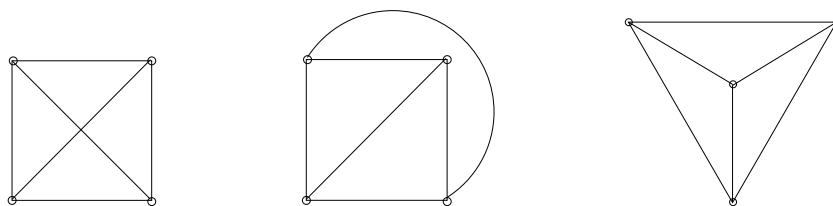
Idősebb (11-12. osztályos) diákok körében a matematikai dualitásfogalom további alkalmazásaként említhetjük a koordináta-geometriában az irány- és a normálvektorok kapcsolatát, illetve a logikában az *és*-vagy műveletek kapcsolatát (lásd: [13]).

5.3. A tervek gyakorlati megvalósítása

Előzetes várakozásaimhoz képest meglepően gyors tempóban sikerült haladnunk az órákon. A diákok nyitottak és együttműködők voltak, szemlátomást élveztek az új témákat. A nem versenyzők közül is többeknek felcsillant a szeme egy-egy gondolatnál, és számos jó ötletet, választ kaptam tőlük, amelyek előrevitették az óra menetét.

Első óra. Előzetes kérésem volt, hogy a tavalyi gráfos emlékeket frissítsék fel. Ennek köszönhetően néhány perc alatt sikerült minden szükséges fogalmat felidézniük. Az izomorfianál előkerülő $K_{3,3}$ ábrájáról valakinek rögtön eszébe jutott a mese a három házról és a három kútról. A fák élszámára vonatkozó tétel frappáns bizonyításakor az egyik fiú hangosan megjegyezte, milyen érdekes, hogy ezt ilyen egyszerűen be tudjuk látni.

A síkbarajzolhatóság bevezetése után többen rögtön rájöttek, hogy a táblán lévő $K_{3,3}$ nem rajzolható le ilyen módon (ezt be is láttuk), és gyorsan megtalálták a K_5 -öt is. Ezt követően, mivel senki nem talált ezektől lényegileg különböző példát, megbeszéltük, hogy nincs is más. Érdekességként megemlítettem még Fáry és Wagner tételét, miszerint ha egy gráf síkbarajzolható, akkor csupa egyenes szakasszal is lerajzolható. Ennek kapcsán megbeszéltük, hogy a 4 pontú teljes gráfot hogy lehet ügyesen, egyenes szakaszokkal ábrázolni. (Az alábbi, 13. ábrán a K_4 látható először élkeresztezéssel, majd keresztezés nélküli vonalakkal, végül egyenes szakaszokkal lerajzolva.)



13. ábra

Végezetül néhány korábbi rajzon megszámloltuk a csúcsok, élek, lapok számát (ekkor az utóbbit még tartománynak neveztük). Házi feladatnak feladtam, hogy rajzoljanak olyan síkgráfot, amelynek 6 csúcsa, 8 éle és 4 tartománya, illetve 7 csúcsa, 8 éle és 5 tartománya van. Valószínűleg ismernek már a diákjaim, ugyanis az egyikük rögtön megkérdezte: „Ugye nincs közöttük olyan, amit nem lehet megrajzolni?” Abban maradtunk, hogy ezt majd másnap meglátjuk...

Második óra. Először felrajzoltuk az első házi feladat megoldását, és megbeszéltük, hogy a második nem lehetséges (ehhez még nem volt szükség az Euler-tételre, elemi úton is kijön). Utána feladtam, hogy mindenki rajzoljon 8 csúcsú, 14 élű síkgráfot, és számolja meg, hány tartomány keletkezik. Mivel mindenki 8-at kapott eredményül, megsejtettük, hogy ez bizonyára nem véletlen. Ezt követően többen egyből jól kimondták az Euler-tételt.

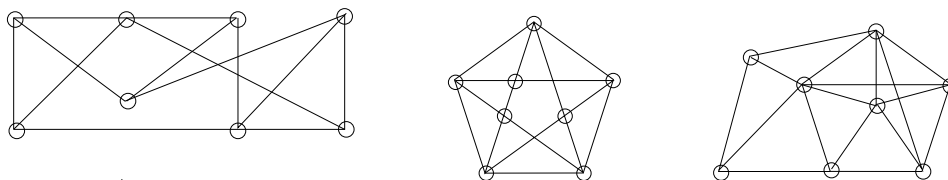
A tétel bizonyításához készülődve felrajzoltam egy konkrét gráfot, amelyen a „gátas” folyamatot szemléltetni tudjuk. Meglepetésemre ekkor az egyik fiú jelentkezett, hogy megvan a bizonyítás. Lényegében jó is volt a megoldása, a tervezett módszerhez képest fordítva haladt (először fává kötötte össze a csúcsokat, majd a további élek behúzásakor mindig egy-egy új tartomány keletkezett). Ezt követően még röviden szemléltettem a gátas indoklást is.

Ezután beláttuk a síkgráfok élszámára vonatkozó $e \leq 3c - 6$ becslést (amelyből kijött, hogy K_5 sem síkbarajzolható), és röviden utaltam rá, hogy a $K_{3,3}$ esetében (amelynek minden lapját legalább 4 él határolja) ez még élesíthető. Az egyik lány megkérdezte, hogy mindig elérhető-e ténylegesen az $e = 3c - 6$ érték, a bizonyítás végiggondolásával megbeszéltük, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha minden lap háromszög. Azt is meggondoltuk, hogy tetszőleges c -re van ilyen gráf (ha kiindulunk egy háromszögből, minden lépésben hozzávehetünk egy új csúcsot valamelyik háromszöglap közepén, amely kettővel növeli a háromszöglapok számát).

Végül egy konkrét 8 pontú gráf duálisát készítettük el, amelyről gyorsan észre-

vették, hogy a csúcsok és a lapok szerepe felcserélődik. Amikor javasoltam, hogy az új gráf duálisát is rajzolják be az ábrára, többen megijedtek, hogy kissé átláthatatlan lesz a rajz, de aztán közösen rájöttünk, hogy ez ismét az eredeti gráf lesz. Megrajzoltuk még a tetraéder és a kocka élhálójának duálisát (de külön nem említettem, hogy ezen testek élhálójáról van szó, hátha a következő alkalommal enélkül is felismeri valaki).

Házi feladatként, a síkbarajzolhatóság gyakorlásaként a következő három gráfról kellett eldönteni (lehetőleg indoklással), hogy síkgráfok-e:



14. ábra

Harmadik óra. A házi feladatok megoldását csak röviden vázoltuk: a második gráf síkbarajzolható (a három belső pont közül a jobb szélsőt kell vízszintesen jobbra húzni, amíg kívülre nem kerül), az első és a harmadik viszont nem (ennek indoklását mellőztük, a szakkörön tértünk rá vissza). Utána egy meglepő kérésem volt: felidéztek az Euler-tételt, majd – különösebb magyarázat nélkül – olyan síkgráfot kértem, amelynek 6 csúcsa, 6 éle és 3 lapja van. Többen csodálkoztak, de végül néhányan rájöttek, hogy van ilyen gráf (például két éldiszjunkt háromszög). Ezt követően rögzítettük, hogy az Euler-tétel ($a c - é + l = 2$ formában) csak összefüggő gráfokra igaz. (Megemlítettem, hogy nem összefüggő gráfokra is kimondható egy újabb paraméter bevezetésével, de erre nem lesz szükségünk.)

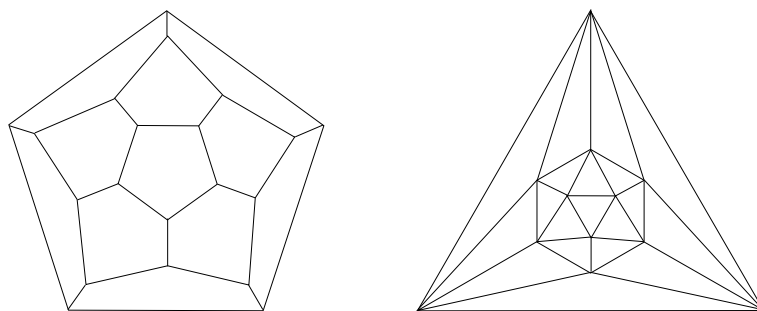
Ezután megbeszéltük, hogy a síkban tetszőleges n -re tudunk szabályos n -szöget rajzolni, de a térben ez nem ilyen egyszerű. Megállapodtunk, hogy egy testet akkor nevezünk szabályosnak, ha egybevágó szabályos sokszöglapok határolják, és minden csúcsban ugyanannyi lap (ekvivalens formában: ugyanannyi él) talál-

kozik, majd összeszedtük az ismert testek paramétereit – részben emlékezetből, részben kitalálva:

test	lapjai	c	$é$	l
tetraéder	háromszögek	4	6	4
hexaéder (kocka)	négyszögek	8	12	6
oktaéder	háromszögek	6	12	8
dodekaéder	ötszögek	20	30	12
ikozaéder	háromszögek	12	30	20

Megbeszéltük, hogy a bonyolultabb testeknél (dodekaéder, ikozaéder) elég a lapok számát (és a határoló sokszög oldalszámát) tudnunk, ebből megkapható az élszám. A csúcsok számát pedig onnan találhatjuk ki, ha észrevevessük, hogy az Euler-tétel itt is igaz. A testek gömbbé felfújását, majd síkba kiterítését szemlátomást többen élvezték. (Alternatív bizonyításként azt is megemlítettük, hogy a test egyik lapját kinagyíthatjuk, majd a többi élt levetíthetjük a lap síkjába, így kapjuk például a kocka már ismert testhálóját.) Következésként megbeszéltük, hogy pontosan akkor rajzolható egy gráf élkeresztesítés nélkül a gömbre, amikor a síkba.

Folytatásként megpróbáltuk megrajzolni a szabályos testek élhálóját síkgráfként. Észrevettük, hogy tetraédert és kockát már rajzoltunk előző nap, majd az oktaéderrel próbálkoztunk. A kocka élhálójának duálisáról páran megkérdezték, hogy ez miért oktaéder, megpróbáltuk elképzelni, majd szemléletesen is megbeszéltük a dualitás jelentését (a kocka minden lapközepének megfeleltetünk egy pontot, így egy oktaédert tudunk a kockába írni). Végül a dodekaéder és az ikozaéder testhálóját (lásd: 15. ábra) lapon kiosztottam (az előbbi többeknek sikerült önállóan is megrajzolniuk).

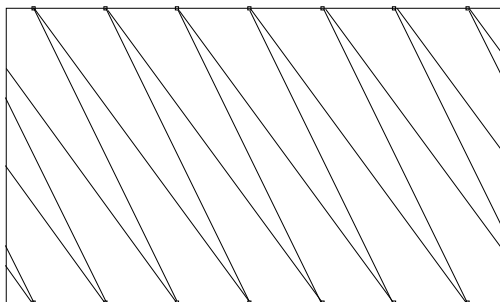


15. ábra

Befejezésül röviden utaltam rá, hogy a dualitás a villamos hálózatokban is megjelenik (fizikából már tanulták a soros és a párhuzamos kapcsolást, megbeszéltük, hogy itt a feszültség és az áramerősség a duális fogalmak, illetve felrajzoltam egy kört és duálisaként egy vágást). Történeti érdekességként említettem, hogy Püthagorasz még csak három szabályos testet ismert (tetraéder, kocka, dodekaéder), Platón viszont már mind az ötöt. Kérdésemre volt, aki kitalálta, hogy a középkorban a szabályos testek egyik felhasználása a szerencsejáték volt (a dobókockán kívül ma is használnak például dobóikozaédert). Végül meséltem a négyszíntételről. Érdekes, hogy amikor meg kellett tippelniük, hány szín elég egy síkgráf tartományainak színezéséhez, többen 10 körülre tippeltek. (Valószínűleg azért, mert a példaként felhozott földrajzi atlasz tényleg közel ennyi színt használ, de csak a jobb áttekinthetőség érdekében.)

Szakkör. A csoportból 4-en jöttek el a másnapi szakkörre. Itt először beláttuk, hogy csak ez az 5 szabályos test létezik, majd a síkbarajzolhatóság más felületeken való viselkedését vizsgáltuk. Megbeszéltük, hogy a síkbarajzolhatóság és a négyszíntétel között egyirányú kapcsolat van: ha egy n pontú teljes gráf (pl. K_4) lerajzolható a síkba, akkor legalább n szín kell a sík tartományainak színezéséhez, viszont K_5 síkba nem rajzolhatóságából még nem következik feltétlenül, hogy nincs olyan ábra, amelyhez 5 színre is szükség lenne. Ezt követően Möbiusszalagot készítettünk, majd tóruszt (ezt egy téglalappal szemléltettük, a szemközti éleket egymásnak megfeleltetve). Rájöttünk, hogy a tóruszra a K_5 lerajzolható

élkeresztezés nélkül, sőt, még a K_6 és a K_7 is – ez utóbbi egy kicsit nehéznek bizonyult, annyit segítettem, hogy érdemes a pontokat a téglalap szélén felvenni (így minden pont két példányban szerepel), ekkor a kívánt összekötés a következő módon érhető el:



16. ábra

Végezetül elmondtam, hogy a tóruszon a K_7 a legnagyobb lerajzolható teljes gráf, és 7 szín valóban elegendő is tetszőleges tóruszra rajzolt térkép kiszínezéséhez, valamint Möbius-szalagon ugyanez az érték 7 helyett 6. Érdekességként kipróbáltuk még, hogy mit kapunk, ha egy Möbius-szalagot (majd egy kétszeresen megcsavart szalagot) középen kettévágunk. Befejezésül a 2. óra házi feladatának nem síkbarajzolható ábráin megkerestük a felosztott $K_{3,3}$ -at, illetve K_5 -öt.

5.4. A diákok munkájának értékelése

Összességében a diákok várakozásomon felül teljesítettek, mind sebességben, mind hozzáállásban. A korábbi évek során tapasztaltam már, hogy egy átlagos csoporthoz képest messze szárnyalnak, de nem gondoltam volna, hogy ez a számukra viszonylag idegen gráfelmélet területén is így fog történni. Több diákkal beszélgettem óra után, illetve szünetekben, mindannyian azt mondták, hogy érthető volt a téma, és tetszett nekik. Örülök, hogy sikerült végigérni a tervezett témákon, és bízom benne, hogy hasznos volt számukra ez az egy hét. Noha

közvetlenül gráfokkal a középiskolában viszonylag ritkán találkoznak, az itt elsajátított szemlélet és ötletek több élethelyzetben, illetve versenyfeladatoknál is segítségükre lehetnek. Amennyiben időnk engedi, az előírt tananyag mellett a jövő évben is foglalkozunk gráfokkal, a pont- és élszínezési alapötleteket tervezem folytatásként.

Hivatkozások

- [1] D. J. A. Welsh, *Matroid theory*, Academic Press, London, 1976.
- [2] Recski A., *Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and in Statics*, Springer, Berlin és Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.
- [3] H. Whitney, 2-isomorphic graphs, *Americal Journal of Mathematics*, 55 (1933), 245-254.
- [4] G. Kirchhoff, Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchungen der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird, *Poggendorff Annalen der Physik und Chemie* LXXII. No. 12, Leipzig, 1847, 497-508.
- [5] J. C. Maxwell, *Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1892.
- [6] Jordán T., Recski A., Szeszlér D., *Rendszeroptimalizálás*, Typotex, Budapest, 2004.
- [7] Katona Gy., Recski A., Szeszlér D., *A számítástudomány alapjai*, Typotex, Budapest, 2001.
- [8] Lovász L., Recski A., On the sum of matroids, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 24 (1973), 329-333.
- [9] W. T. Tutte, An algorithm for determining whether a given binary matroid is graphic, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 11 (1960), 905-917.
- [10] Recski A., An algorithm to determine whether the sum of some graphic matroids is graphic, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 25 (1981), 647-656.

- [11] Recski A., Matroids – the engineers’ revenge, in: *Research Trends in Combinatorial Optimization, Bonn 2008*, Springer, Berlin, 2009, 387-398.
- [12] Lovász L., A matroidelmélet rövid áttekintése, *Matematikai Lapok*, 22 (1971), 249-267.
- [13] Recski A., Dualitás a matematikában és sok más helyen, in: *Hraskó A. (szerk.): Új matematikai mozaik*, Typotex, Budapest, 2002, 413-436.
- [14] Kónig D., *Mathematikai mulatságok*, Typotex, Budapest, 1992.
- [15] Lovász L., Pelikán J., Vesztergombi K., *Kombinatorika az általános és a középiskolai matematika szakkörök számára*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
- [16] O. Ore, *A gráfok és alkalmazásai*, Gondolat, Budapest, 1972.
- [17] Gallai T., A Königsbergi hidak, a kilenc ösvény és más gráfelméleti problémák, in: *Hódi E. (szerk.): Matematikai mozaik*, Typotex, Budapest, 1999, 100-118.
- [18] Andrásfai B., Hány szín kell a térkép színezéséhez, in: *Hódi E. (szerk.): Matematikai mozaik*, Typotex, Budapest, 1999, 173-192.