

JÁTÉKELMÉLET A KÖZLEKEDÉSBEN

Diplomamunka

Írta: Nagy Balázs

Alkalmazott matematikus szak

Témavezetők:

Király Tamás, egyetemi adjunktus

Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Tasnádi Attila, egyetemi tanár

Matematika Tanszék

Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2012

Tartalomjegyzék

| | |
|---|-----------|
| 1. Bevezetés | 1 |
| 2. Az anarchia ára | 2 |
| 2.1. Alapvető játékelméleti ismeretek | 2 |
| 2.2. Az egyensúlyok hatékonyságának vizsgálata | 4 |
| 2.3. Példák | 5 |
| 2.3.1. A fogolydilemma | 6 |
| 2.3.2. A nemek harca | 7 |
| 2.3.3. A Braess paradoxon | 8 |
| 2.3.4. További példák gráfokon értelmezett játékokra | 9 |
| 3. Útvonalválasztási játékok | 13 |
| 3.1. Nematomos önző útvonalválasztás | 13 |
| 3.1.1. A modell | 14 |
| 3.1.2. Fontosabb eredmények | 17 |
| 3.2. Atomos önző útvonalválasztás | 20 |
| 3.2.1. A modell | 20 |
| 3.2.2. Fontosabb eredmények | 21 |
| 3.3. A Nash- és a Wardrop-egyensúly kapcsolata | 23 |
| 3.3.1. A Wardrop-egyensúly | 23 |
| 3.3.2. A Nash-egyensúly konvergenciája a Wardrop-egyensúlyhoz | 24 |
| 4. Közlekedési modellek | 27 |
| 4.1. Statikus útvonalválasztási probléma | 27 |
| 4.1.1. A Dafermos-Sparrow modell | 27 |
| 4.2. Dinamikus útvonalválasztási problémák | 29 |
| 4.2.1. A Merchant-Nemhauser modell | 29 |
| 4.2.2. A Carey modell | 33 |
| 4.3. A közlekedés optimalizálása a társadalmi optimum szerint | 36 |
| 4.3.1. A koncepció | 36 |

| | |
|---|-----------|
| TARTALOMJEGYZÉK | III |
| 4.3.2. Az igazságosság | 37 |
| 4.3.3. A korlátozott rendszer optimum | 37 |
| 5. Következtetések | 39 |
| Irodalomjegyzék | 41 |

Ábrák jegyzéke

| | |
|---|----|
| 2.1. A fogolydilemma | 6 |
| 2.2. A nemek harca | 7 |
| 2.3. A Braess paradoxon | 8 |
| 2.4. Egy egyszerű Shapley hálózat tervezési játék | 10 |
| 2.5. Egy összetettebb Shapley hálózat tervezési játék | 10 |
| 2.6. Az AAE példa | 11 |
| 3.1. A Pigou példa | 16 |
| 4.1. Egy példa 2 periódusú dinamikus útvonalválasztásra | 31 |

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Király Tamásnak, Tasnádi Attilának és mindazoknak, akik segítettek a diplomamunkám elkészítése során.

1. fejezet

Bevezetés

A nagyvárosi emberek életét az utakon gyakran tapasztalható forgalmi dugók nehezítik. Akik reggel autóval próbálnak eljutni a munkahelyükre és délután az otthonukba, ismerik a kocsisorokban való araszolás kellemetlenségeit.

Azt gondolhatnánk, hogy az ilyen problémák pusztán az operációkutatás eszközeivel modellezhetők. Azonban az emberek - jelenleg még ők vezetik az autókat - önállóan hoznak döntéseket, legtöbbször önző érdekeik figyelembevételével. Ezért segítségünkre lehet a játékelmélet, aminek jelentősége például megfigyelhető olyankor, amikor a normális forgalmi helyzetet valamilyen szokatlan jelenség megzavarja. Ilyen lehet például egy baleset, egy híd vagy út lezárása, egy útfelújítás, egy autó vagy egy közlekedési lámpa műszaki hibája. Ezekben a szituációkban a forgalomban résztvevő autósok - a játékosok - különböző módon viselkednek, különböző stratégiákat játszanak. Egy váratlan torlódásnál vannak olyanok, akik visszafordulnak és egy másik úton próbálnak szerencsét, és vannak olyanok, akik türelemmel várnak. Egy dolgot azonban feltételezhetünk: *mindenki a legrövidebb idő alatt szeretne eljutni az úti céljához.*

Diplomamunkám, a 2010-ben a Budapesti Corvinus Egyetemen írt *Útvonalválasztási játékok* című szakdolgozatom [21] kapcsán elkezdett kutatás folytatásának tekinthető. A mostani dolgozatom első részében bizonyos játékokban kialakuló egyensúlyoknak azt a tulajdonságát vizsgáljuk, hogy az egyéni és a társadalmi optimum milyen arányban áll egymással. Ezt követően két úthálózatokkal kapcsolatos modell és az ezek közti kapcsolat kerül bemutatásra. Továbbá megvizsgáljuk az első részben tárgyalt egyensúlyok hatékonyságával kapcsolatos eredményeket is. Ezután áttekintjük a közlekedéssel kapcsolatos klasszikus operációkutatási modelleket, melyek a társadalmi optimumok meghatározásában játszanak fontos szerepet. Végül röviden bemutatunk egy koncepciót és egy modellt, amely egy nagyon fontos gyakorlati alkalmazáshoz vezethet az előző fejezetekben tárgyalt eredmények következményeként.

2. fejezet

Az anarchia ára

A dolgozatban alapvetően gráfokon értelmezett játékokról lesz szó. Az ehhez szükséges gráfelméleti és operációkutatási fogalmak megtalálhatók Katona Gyula et al. *A Számítástudomány Alapjai* [15] című könyvének második fejezetében és Frank András *Operációkutatás* [10] című elektronikus jegyzetében.

2.1. Alapvető játékelméleti ismeretek

A következő néhány definíció a dolgozatban használt játékelméleti fogalmak magyarázatául szolgál. Ezek megtalálhatók Forgó Ferenc et al. *Játékelmélet* [9] című elektronikus jegyzetében, továbbá Kevin Leyton-Brown és Yoav Shoham *Essentials of Game Theory* [18] című könyvében.

2.1.1. Definíció. Egy n szereplős, nemkooperatív játékot általában a

$$G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$$

normál formában adunk meg, ahol S_1, \dots, S_n az egyes játékosok nem üres stratégiáinak halmazai, $f_i : S \rightarrow \mathbf{R}$, ($S = S_1 \times \dots \times S_n$) pedig az i játékos kifizetőfüggvénye.

2.1.2. Definíció. Jelöljük S_{-i} -vel azoknak a stratégiaprofiloknak a halmazát, amelyek nem tartalmazzák az i játékos stratégiáját, ezeket **csonka stratégiaprofilnak** nevezzük. Ha $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$, akkor annak az \mathbf{s} stratégiaprofilnak a jelölésére, amelyben az i játékos az s_i stratégiáját, míg a többiek \mathbf{s}_{-i} -t játsszák az

$$\mathbf{s} = (s_i, \mathbf{s}_{-i})$$

szimbólumot használjuk.

2.1.3. Definíció. A $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$ normál formában adott játékban legyen az $s_i, t_i \in S_i$ az i játékos két stratégiája. Azt mondjuk, hogy az s_i stratégia **gyengén dominálja** a t_i stratégiát, ha

$$f_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq f_i(t_i, \mathbf{s}_{-i})$$

minden $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ -re.

2.1.4. Definíció. A $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$ normál formában adott játékban legyen az $s_i, t_i \in S_i$ az i játékos két stratégiája. Azt mondjuk, hogy az s_i stratégia **szigorúan dominálja** a t_i stratégiát, ha

$$f_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) > f_i(t_i, \mathbf{s}_{-i})$$

minden $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ -re.

2.1.5. Definíció. Legyen $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$ egy n -személyes, nem kooperatív játék normál formában. Egy \mathbf{s}^* stratégiaprofil **Nash-egyensúlynak** nevezünk, ha a következő egyenlőtlenség fennáll:

$$f_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq f_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*),$$

minden $s_i \in S_i$ és minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

Nash-egyensúlyról akkor beszélünk, ha minden játékos olyan stratégiát választ, ami a lehető legjobb választás a többi játékos rögzített stratégiája esetén. Tehát minden játékosra igaz az, hogy ha a többi játékos nem tér el a stratégiájától, akkor az adott játékosnak sem éri meg eltérni a sajátjától. A Nash-egyensúly nem egyértelmű, egy játékban több Nash-egyensúly is lehet.

A Nash-egyensúlynak létezik egy általánosítása, amelyben a játékosok valószínűségeket rendelnek a stratégiáikhoz, és a várható hasznosságukat maximalizálják. Nézzük a precíz definíciókat Végh László jegyzete [33] alapján.

2.1.6. Definíció. Az i -edik játékos egy **kevert stratégiáján** egy valószínűségeloszlást értünk az S_i stratégiahalmazon. Ha S_i véges, akkor ez egy $\sigma : S_i \rightarrow \mathbf{R}^+$ vektor, amelyre

$$\sum_{\mathbf{s} \in S_i} \sigma(\mathbf{s}) = 1.$$

2.1.7. Definíció. Legyen $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$ a kevert stratégiaválasztások halmaza, ahol Δ_i az i -edik játékos kevert stratégiáinak halmaza. Ha a játékosok kevert stratégiái $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Delta$, akkor az $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in S$ **stratégiaválasztás valószínűsége**

$$p_\sigma(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(s_i).$$

2.1.8. Definíció. Az i -edik játékos *hasznossága*

$$u_i(\sigma) = \sum_{\mathbf{s} \in S_i} p_\sigma(\mathbf{s}) f_i(\mathbf{s}),$$

azaz a kifizetések a várható értéke.

2.1.9. Definíció. A $\sigma^* = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Delta$ *kevert stratégiaprofil* **kevert Nash-egyensúly**nak nevezünk, ha

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*),$$

minden $\sigma_i \in \Delta_i$ és minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

2.1.10. Megjegyzés. Ha a kevert Nash-egyensúlyban minden játékos a stratégiáját 1 valószínűséggel játssza, akkor (tiszt) Nash-egyensúlyról beszélhetünk.

Most következzen Nash híres 1951-es tétele, a kevert Nash-egyensúly létezéséről.

2.1.11. Tétel. Minden véges sok szereplős játékban, amelyben a játékosoknak véges sok stratégiájuk van, létezik kevert Nash-egyensúly.

2.2. Az egyensúlyok hatékonytalansága

Gyakran előforduló jelenség egy többszereplős szituációban, hogy együttműködéssel nagyobb hasznosságot érhetünk el a közösség szempontjából, mintha minden résztvevő a saját szempontjából vett legjobb eredményre törekedne. Egy egyensúly hatékonytalanságát ahhoz tudjuk viszonyítani, hogy a játékszabályok alapján mi a lehetséges legjobb kimenetele a játéknak. Egy hálózaton értelmezett játéknál például megvizsgálhatjuk, hogy mi a legkisebb költségű folyam, vagy az összes játékost tekintve mi az a legrövidebb összidő, hogy minden játékos eljusson a céljához. Az ilyen legjobb kimenetel megtalálása különböző optimalizálási eljárásokkal történhet, adott esetben az operációkutatás eszközeit felhasználva, a játékosok egyéni érdekeinek figyelembe vétele nélkül. Ezt elképzelhetjük úgy is, hogy az összes játékost egy összehangoltan cselekvő csoportnak, vagy egyszerűen egy játékosnak tekintjük.

Hasonló módon járunk el az operációkutatásban, amikor azt a feladatot vizsgáljuk, hogy n szereplő, n különböző csúcsból indul és m különböző csúcsba szeretne eljutni egy gráfban. Hozzáveszünk a gráfhoz két új csúcsot és az egyikből vezetünk n darab nulla költségű élt az n darab kezdőpontba, az m darab végpontot pedig összekötjük a másik új ponttal, szintén nulla élköltségekkel. Így az új gráfban a két új pont között már kereshetünk például optimális folyamot többtermékes esetre.

A közlekedési hálózatokra vonatkozó, néhány klasszikus operációkutatási modellt a dolgozat negyedik fejezetében tekintjük át.

2.2.1. Definíció. *A játékosok kifizetéseinek összegének maximumát **társadalmi optimumnak** nevezzük.*

2.2.2. Megjegyzés. *Speciálisan a társadalmi optimum a játékosok költségeinek összegének minimuma.*

2.2.3. Megjegyzés. *Ha a játékban csak egy játékos van, akkor a Nash-egyensúly megegyezik a társadalmi optimummal.*

A következő fogalom az egyik legismertebb és leginkább használt mérőszáma az egyensúlyok hatékonyságának. Az *anarchia ára* elnevezést Papadimitriou vezette be egy 2001-es cikkében [22]. Az alapgondolat, hogy egy egyensúly hatékonyságát ilyen módon számszerűsítsék, Koutsoupas és Papadimitriou 1999-es munkájában jelent meg [17], de ekkor még a *koordinálási hányados* nevet viselte.

A *legrosszabb Nash-egyensúlyban* a játékosok kifizetéseinek összege az összes Nash-egyensúly között a legkisebb, míg a *legjobb Nash-egyensúlyban* a legnagyobb.

2.2.4. Definíció. *A legrosszabb Nash-egyensúlynak a társadalmi optimumhoz viszonyított arányát az **anarchia árának** nevezzük.*

Különösen érdekesek azok a játékok, ahol az anarchia ára 1. Az ilyen játékokban a kifizetések összege minden egyensúlyi helyzetben megegyezik a társadalmi optimummal, mindenféle külső irányítás vagy kooperáció nélkül, azaz a játékszabályok olyanok, hogy a játékosok az egyéni érdekeiket követve a társadalmilag optimális eredményt érik el.

2.2.5. Definíció. *A legjobb Nash-egyensúlynak a társadalmi optimumhoz viszonyított arányát a **stabilitás árának** nevezzük.*

Ennek a fogalomnak a névadója Anshelevich et al. [1], igaz Schulz és Stier-Moses [31] már előttük vizsgálta ezt a hányadost. Elsősorban azért foglalkozunk ezzel a mérőszámmal, mert vannak olyan játékok, ahol nemtriviális becslést csak a stabilitás árára lehet találni.

Egy olyan játékban, ahol csak egy egyensúlyi pont van, az anarchia ára és a stabilitás ára megegyezik.

2.3. Példák

A következőkben olyan játékokra láthatunk példákat, ahol az előbb megismert, az egyensúly hatékonyságára vonatkozó mérőszámokat a gyakorlatban is bemutatjuk. Ezeknek a példáknak a többsége megtalálható Nisan et al. [28] egyensúlyok hatékonyságával foglalkozó fejezetében.

2.3.1. A fogolydilemma

A játékelmélet egyik legismertebb példája a fogolydilemma.

| | | B | |
|----------|----------|---------------|---------------|
| | | VALL | NEM VALL |
| A | VALL | -5;-5 | -1;-10 |
| | NEM VALL | -10;-1 | -2;-2 |

2.1. ábra. A fogolydilemma

2.3.1. Példa. *Két embert letartóztatnak, nevezzük őket A-nak és B-nek. A-t és B-t azzal gyanúsítják, hogy egy súlyos bűncselekményt követtek el. Elkülönített cellákba zárják őket, így nem tudnak egymással beszélni. Mivel nincs bizonyíték ellenük, csupán kisebb bűncselekmények miatt ítélik el őket. A kihallgatás során a következő ajánlatot tesz A-nak: ha A terhelő vallomást tesz B ellen, és B nem vall A ellen, akkor A egy évet kapna, míg B tíz évet. Ha B is vall A ellen, mindketten öt-öt évet kapnak, míg ha sem A, sem B nem vall a másik ellen, mindketten két-két évet kapnak. A B játékos is ugyanazt az ajánlatot kapja.*

Fontos, hogy mindkettőjük számára világos, hogy a másik is ugyanazt az ajánlatot kapta. Feltehetjük, hogy sem A, sem B nem szeret börtönben ülni, így arra törekednek, hogy minél előbb kijussanak a fogságból. Ha az egyéni szempontjaikat veszik csak figyelembe, az tűnik logikusnak, hogy mindketten vallanak a másik ellen, hiszen semmi sem biztosítja azt, hogyha megpróbálnak kooperálni, ezt a gesztust a másik viszonozza. Semmi okuk nincs rá, hogy eltérjenek a vallomástétel lehetőségétől, hiszen ez a stratégia szigorúan dominálja a másik stratégiájukat, azaz a kooperációt. Ennek eredményeképpen mindketten öt évet fognak kapni.

Külső szemlélőként viszont úgy látjuk, hogy tíz év börtönbüntetés, amit együttesen kaptak jóval több, mint összesen négy év börtönbüntetés, amit akkor kaptak volna, ha összefognak. Ehhez a nem túl jó eredményhez az együttműködés hiánya vezetett, mivel együttesen is kerülhettek volna jobb helyzetbe.

Most számoljuk ki az anarchia árát ebben a fogolydilemmában. Az egyetlen Nash-egyensúly a (Vall; Vall) stratégia-pár, ennek összköltsége 10 év. A társadalmi optimum - amennyiben a két gyanúsított alkotta társadalmat tekintjük - a (Nem vall; Nem vall) stratégia-pár, ennek összköltsége pedig 4. Így az anarchia ára: $10/4 = 2,5$.

2.3.2. A nemek harca

Egy másik fontos példa egy nemek harca játék.

| | | B | |
|----------|---------|------------|------------|
| | | OPERA | FUTBALL |
| A | OPERA | 2;1 | 0;0 |
| | FUTBALL | 0;0 | 3;6 |

2.2. ábra. A nemek harca

2.3.2. Példa. Az *A* és *B* játékosunk most szórakozni szeretne menni. Mindkettőjüknek van egy hasznosságfüggvénye, ami azt mondja meg, hogy mennyire értékeli a következő lehetőségeket. Ha *A* operába megy *B*-vel, ennek hasznossága számára 2, míg *B* számára ez az eshetőség 1 hasznossággal jár. Ha futballmeccsre mennek együtt, akkor ezt *A* 3-ra értékeli, míg *B* 6-ra. Amennyiben külön mennének valahova, mindketten 0-ra értékelnék az időtöltést.

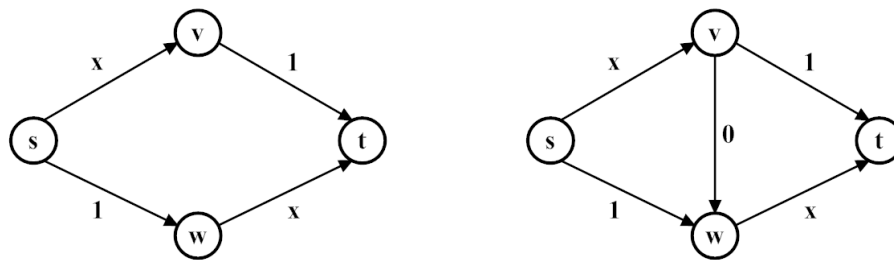
Mindketten ismerik a másik preferenciáit és annak értékeit. A fogolydilemmával ellentétben itt most nincsenek domináns stratégiák. Ennek a játéknak két tiszta Nash-egyensúlya van az (Opera; Opera) és a (Futball, Futball) stratégia-párok. Egyik stratégiától sem éri meg egyik játékosnak sem eltérni, ha a másik nem tér el. Az első Nash-egyensúly értéke összesen 3, a másodiké pedig 9. Így az anarchia ár $9/3 = 3$, míg a stabilitás ára 1.

2.3.3. Megjegyzés. Ennek a játéknak van egy kevert Nash-egyensúlya is, ebben *A* játékos $6/7$ valószínűséggel (Opera) és $1/7$ valószínűséggel (Futball) stratégiát játszik,

míg B játékos $3/5$ valószínűséggel (*Opera*) és $2/5$ valószínűséggel (*Futball*) stratégiát játszik.

2.3.3. A Braess paradoxon

A következő példa egy első hallásra mehökkentő, a józan észnek ellentmondani látszó Braess paradoxon [3] [4]. Ez azt mutatja be egyszerű hálózaton, hogy *egy új él bevezetése összességében megnövelheti az összes közlekedő utazási idejét*. Azt gondolhatnánk, hogy ez csak egy mesterkélt matematikai konstrukció esetében fordulhat elő, ám például Bloy munkája [2] megmutatja, hogy a valóságban is megfigyelhetjük ezt a jelenséget. Sőt, Youn et al. [35] cikkükben Boston, London és New York úthálózatának egy részén, különböző nagyságú forgalmi helyzeteket modellezve és lineáris költségfüggvényeket alkalmazva mutatták be a közlekedés hatékonyságát és a Braess paradoxon jelenségét.



2.3. ábra. A Braess paradoxon

2.3.4. Példa. Vegyünk egy négy csúcsból álló hálózatot, ahol kezdetben két diszjunkt út vezet s -ből t -be, $s \rightarrow v \rightarrow t$ és $s \rightarrow w \rightarrow t$. Mindkét út két élből áll, ahol a költségek összesen, az ábrának megfelelően $1 + x$. Az x a forgalom mennyisége az adott élen.

Tegyük fel, hogy 1 egység forgalom halad át a hálózaton. Az egyensúlyi folyamatban a forgalom egyenlően oszlik meg a két útvonalon, mivel a két útvonal teljesen egyforma. Ez a játék egyetlen Nash-egyensúlya, így a játékosoknak mindkét útvonalon $3/2$ a költsége. Mennyi a társadalmi optimum? Könnyen látható, hogy megegyezik a fenti elosztással, tehát a forgalom két egyenlő részre való osztása esetén valósulhat meg. Ebben az esetben tehát, az anarchia ára 1.

Most beépítünk a hálózatba egy új, nulla költségű $v \rightarrow w$ élt. Az új egyensúlyi folyamat ezen keresztül fog haladni, $s \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow t$, erről az útvonalról nem éri meg senkinek eltérni, mert sohasem hosszabb a többi útnál, sőt rövidebb is lehetne, ha esetleg valaki "eltéved". Viszont ennek az útvonalnak a költsége a nagy forgalom miatt már 2. Az optimális folyamat ebben az esetben is, a forgalom két eredeti útvonalon

történő irányítása. Az anarchia ára így

$$\frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}.$$

A *Braess paradoxon detektálása probléma* egy (G, s, t, c) egyetlen (s, t) forrásnyelő párt tartalmazó hálózatban keresi azt a (H, s, t, c) részhálózatot, amelyben a Nash-egyensúlyi folyam költsége minimális. Ez a probléma tetszőleges c költségfüggvények esetén NP-nehéz. Roughgarden [27] bebizonyította azt is, hogy egy n csúcsú hálózatban, folytonos, nemnegatív, nemcsökkenő költségfüggvények esetén, $\epsilon > 0$ -ra nem létezik $(\frac{n}{2} - \epsilon)$ -nál jobb közelítő algoritmus egy minimális részhálózat megtalálására, feltéve, hogy $P \neq NP$.

A Braess paradoxonhoz hasonló jelenséget vizsgáltak Helbing et al. [12]. Embertömegek viselkedését modellezték zárt helységekből kitörő pánik esetén. Többek között arra jutottak, hogy ha egy szűk kijáratot hirtelen sok ember rohamoz meg, akkor adott idő alatt több ember juthat ki, ha a kijárat közelében egy szélesebb oszlopot helyeznek el, így csökkentve az emberek nyomását. Tehát kisebb kapacitással nagyobb társadalmi hasznosság érhető el.

2.3.4. További példák gráfokon értelmezett játékokra

A Shapley hálózat tervezési játékok

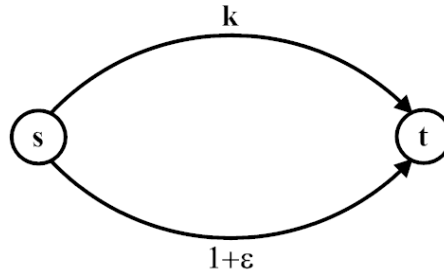
Shapley hálózat tervezési játékokkal is találkozhatunk Anshelevich et al. [1] cikkében, ezeket a következőképpen definiáljuk: legyen G egy egyszerű irányított gráf, aminek minden élén értelmezünk egy nemnegatív, konstans c_e költségfüggvényt. Összesen k játékos van, és az i -edik játékosnak megfelel egy s_i forrás és egy t_i nyelő csúcspár. Az i -edik játékos s_i -ből t_i -be szeretne eljutni, ezért legyenek a stratégiáik $s_i \rightarrow t_i$ utak G -ben. Minden játékos választ magának egy P_i utat, így

$$P = \bigcup_{i=1}^k P_i$$

alkotnak egy hálózatot. A hálózat ára:

$$\sum_{e \in P} c_e.$$

Az olyan élek költségét, amit több játékos is használ, az adott élt használó játékosok egyenlően osztják el maguk között. Ilyen véges, nemkooperatív játéknak keressük a hatékonyságát a játék tiszta Nash-egyensúlyaira nézve. A társadalmi optimum a hálózat árának a minimuma.

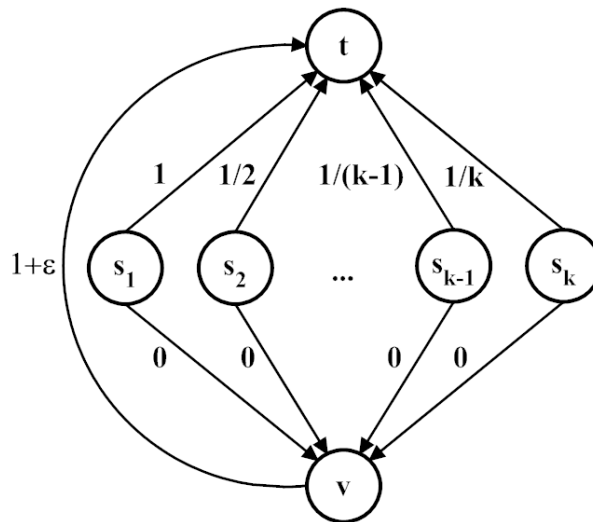


2.4. ábra. Egy egyszerű Shapley hálózat tervezési játék

2.3.5. Példa. Tekintsük a következő egyszerű példáját a Shapley hálózat tervezési játékoknak. Legyen G egy s forrás és t nyelő pontból álló gráf, továbbá legyen, két párhuzamos s -ből t -be mutató él, és legyen k játékosunk. Az első élnek a költsége legyen k , a másodiknak $1 + \epsilon$, ahol ϵ pozitív és tetszőlegesen közel van a 0-hoz.

A játéknak két Nash-egyensúlya van, az egyik ha minden játékos az első élt választja, ennek költsége összesen k , míg a másik, ha minden játékos a második élt választja, ennek költsége $1 + \epsilon$. Egyik esetben sem éri meg egy játékosnak önmagában eltérni ezekről az útvonalokról. Az optimális megoldás az lenne, ha minden játékos a második élt választaná, összesen $1 + \epsilon$ -t fizetve.

Láthatjuk, hogy ebben a játékban az anarchia ára tart k -hoz, ha ϵ tart nullához, míg a stabilitás ára 1.



2.5. ábra. Egy összetettebb Shapley hálózat tervezési játék

2.3.6. Példa. Tekintsük a következő játékot: legyen k játékosunk, akik s_1, \dots, s_k csúcsokból indulnak, és egy közös t nyelő csúcspontba szeretnének eljutni. Az i -edik já-

tékos s_i kezdőpontjából vezet egy közvetlen él t -be, $\frac{1}{i}$ költséggel, $i \in 1, \dots, k$. Ezenkívül van egy v csúcs, amibe minden játékosnak vezet egy nulla költségű éle, végül v -ből vezet egy él t -be $1 + \epsilon$ költséggel, ahol ϵ pozitív és tetszőlegesen közel van a 0-hoz.

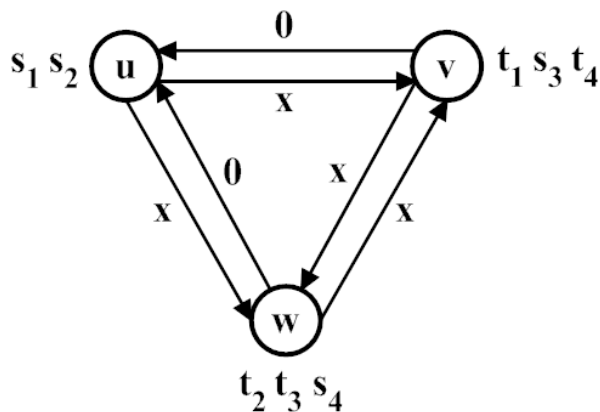
A társadalmilag optimális megoldás az lenne, ha minden játékos az $s_i \rightarrow v \rightarrow t$ utat választaná, ekkor az összköltség $1 + \epsilon$ lenne. De ez nem Nash-egyensúly, mert ebben az esetben a k -adik játékosnak megéri eltérni a közvetlen $s_k \rightarrow t$ útra, mert így $\frac{1+\epsilon}{k}$ -ról $\frac{1}{k}$ -ra csökkentheti a költségét, ez a szigorúan domináns stratégiája. Beláthatjuk, hogy az egyetlen Nash-egyensúlyi pontja ennek a játéknak az, ha minden játékos a közvetlen $s_i \rightarrow t$ élen éri el t -t. Ennek az összköltsége a k -adik harmonikus szám:

$$H_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \approx \ln k.$$

Így az anarchia ára és a stabilitás ára is tart $\ln k$ -hoz.

2.3.7. Megjegyzés. Belátható, hogy minden Shapley hálózat tervezési játékban, ahol k játékos van, a stabilitás ára legfeljebb H_k .

Az AAE példa



2.6. ábra. Az AAE példa

A következő példát B. Awerbuch, Y. Azar és A. Epstein neveinek kezdőbetűi után nevezik AAE példának.

2.3.8. Példa. Tekintsük a következő irányított gráfot: három csúcsa van (u, v, w) és minden csúcsból vezet egy irányított él a másik két csúcsba. Az élek költsége az ábrán látható, a költségfüggvények lineárisak. Legyen négy játékos, akik mind egy-egy egység forgalmat szeretnének lebonyolítani a következő útvonalakon: az első játékos

u-ból v-be, a második játékos u-ból w-be, a harmadik játékos v-ből w-be, a negyedik játékos w-ből v-be, és a játékosok első megérkezése számít.

Mind a négy játékosnak két stratégiája van, az első stratégia az, hogy közvetlenül egy lépésben jut el a nyelől a forrásba, a második stratégia az, hogy két lépésben, a harmadik csúcs közbeiktatásával.

Az *optimális folyam*, azaz a társadalmi optimum az, ha mind a négy játékos az első stratégiát játsza, ennek a folyamnak az értéke 4, és ez egyben egyensúlyi folyam is. Ha mind a négy játékos a második stratégiát játsza, akkor is egy egyensúlyi folyamat kapunk. Ebben a folyamban az első két játékosnak 3 – 3, a harmadik és negyedik játékosnak 2 – 2 költséget kell fizetnie, így a folyam összértéke 10.

Az anarchia ára ebben az esetben:

$$\frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

3. fejezet

Útvonalválasztási játékok

Az útvonalválasztási játékokban egymással nem kooperáló, önzó - önzó - játékosok próbálnak forgalmat lebonyolítani egy zsúfolt hálózaton. Ebben a fejezetben két modellt, és ezekben az egyensúlyi folyamatok létezéséről és egyértelműségéről szóló tételeket mutatunk be. Továbbá megvizsgáljuk ezen modellek keretei között adható korlátokat az előző fejezetben bemutatott anarchia árára. Az ebben a fejezetben elmondott modellek részletesen megtalálhatók Nisan et al. könyvének 18-adik fejezetében [29]. A két modell között teremt kapcsolatot A. Haurie és P. Marcotte 1985-ben megjelent cikke [11].

Az útvonalválasztási játékoknak két fajtáját különböztetjük meg a játékosok számossága és az általuk irányított forgalom nagysága szerint.

3.0.9. Definíció. *Nematomos útvonalválasztási játéknak* nevezzük az olyan játékokat, amelyekben végtelen sok játékos szerepel, és mindegyik elhanyagolható mennyiségű forgalmat irányít az összforgalomhoz képest.

3.0.10. Definíció. *Atomos útvonalválasztási játéknak* nevezzük az olyan játékokat, amelyekben véges sok játékos szerepel, és mindegyik el nem hanyagolható mennyiségű forgalmat irányít az összforgalomhoz képest.

3.1. Nematomos önzó útvonalválasztás

Tim Roughgarden és Tardos Éva [29] eredményei, a nematomos önzó útvonalválasztási játékokban az egyensúlyi folyamat létezésére és egyértelműségére vonatkoznak. Ezek a tételek kimondják, hogy nematomos esetben mindig van egyensúlyi folyamat és több egyensúlyi folyamat létezése esetén ezeknek az értékei megegyeznek. A legérdekesebb eredményük, hogy a hálózat élein értelmezett különböző költségfüggvények esetén az anarchia ára nem lehet tetszőlegesen nagy. Nematomos önzó útvonalválasztási játékban lineáris költségfüggvények esetén az anarchia ára legfeljebb $4/3$.

Roughgarden [26] azt is megmutatta, hogy az anarchia ára független a hálózat topológiájától. Correa et al. [6] Roughgarden és Tardos modelljét terjesztették ki és adtak egyszerűbb bizonyítást a legfontosabb tételükre. Továbbá megvizsgálták azt az esetet, amikor kapacitásokkal is ellátunk egy hálózatot, és bebizonyították, hogy az anarchia ára nem változik az eredeti modellhez képest.

3.1.1. A modell

A hálózatot egy $G = (V, E)$ irányított gráffal adjuk meg, ahol V a csúcspontok, E pedig az irányított élek halmaza. A csúcspontokon belül kitüntetjük az $W = (s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$ forrás-nyelő párok halmazát, a forráspontból csak kifelé, míg a nyelőpontba csak befelé mutat irányított él. Amennyiben $W \subset V \times V$ elemeire, mint pontpárookra hivatkozunk, legyen egy általános pár w . Ezeket elképzelhetjük úgy is, mintha egy város úthálózatán autóvezetők a város egyik pontjából a másikba szeretnének eljutni. Jelöljük P_i -vel az $s_i \rightarrow t_i$ utakat és tegyük fel, hogy $P_i \neq \emptyset \forall i$ -re, és

$$P = \bigcup_{i=1}^k P_i.$$

A G gráfnak lehetnek párhuzamos élei, és egy csúcs szerepelhet több P_i útban is. A játékosok által választott útvonalakat egy f *folyam* írja le, ami itt egy egy komponensében sem negatív vektor, indexhalmaza pedig P . Legyen f_p az a mennyiségű forgalom, amit az i -edik játékos küld s_i -ből t_i -be a p útvonalon keresztül, ahol $p \in P_i$. Egy forrásból egy nyelőbe eljuttatni kívánt forgalom mennyisége a *kereslet* rögzített, és d_i -vel jelöljük. Egy f folyamatot *megvalósíthatónak* nevezünk egy d vektorra nézve, ha $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ -re teljesül, hogy

$$\sum_{p \in P_i} f_p = d_i.$$

Az éleknek végtelen a kapacitásuk, tehát elvileg bármekkora forgalom lebonyolítható rajtuk. Végül $\forall e \in E$ élen értelmezünk egy *költségfüggvényt*, $c_e : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, ami nemnegatív, folytonos és nemcsökkenő. Jelöljük a nematomos önző útvonalválasztási játékot (G, d, c) -vel.

3.1.1. Megjegyzés. *A nematomos önző útvonalválasztási játékok eltérnek a 2.1.1 definícióban megadott formától. A játékosok halmaza legyen $\{(1, [0, d_1]), \dots, (k, [0, d_k])\}$, a stratégiáik a P halmaz, a kifizetések pedig az utazási idők a különböző útvonalakon. Így egy végtelen szereplős **torlódási játékot** kapunk, ahol az egyes játékosoknak elhanyagolható a befolyásuk a hálózatra.*

Ezután határozzuk meg a nematomos önző útvonalválasztási játékokban az egyensúly fogalmát. A p út teljes költsége az f folyamra vonatkozóan legyen:

$$c_p(f) = \sum_{e \in p} c_e(f_e), \quad (3.1)$$

ahol

$$f_e = \sum_{p \in P} f_p.$$

A játékosok célja, hogy a lehető legkisebb költséggel tudják a forgalmat lebonyolítani a forrás-nyelő párok között.

3.1.2. Definíció. Egy (G, d, c) nematomos önző útvonalválasztási játékban **nematomos egyensúlyi folyamnak** nevezünk egy megvalósítható f folyamot, ha minden $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ és minden $p, q \in P_i$ párra, amelyre $f_p > 0$,

$$c_p(f) \leq c_q(f).$$

Később belátjuk, hogy minden nematomos önző útvonalválasztási játékban van egyensúlyi folyam, és több egyensúlyi folyam létezése esetén ezek értéke megegyezik.

Annak a játékosnak, aki a p utat választotta az f folyamban $c_p(f)$ -et kell fizetnie. Jelöljük f_p -vel a p úton áthaladó forgalom mennyiségét, és legyen f folyam költsége,

$$C(f) = \sum_{p \in P} c_p(f) f_p.$$

3.1.3. Megjegyzés. A folyam költségét a (3.1) behelyettesítésével írhatjuk:

$$C(f) = \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e \quad (3.2)$$

alakban is.

A nemlineáris folyam probléma

Correa et al. [6] cikke alapján felírhatjuk a következő, több forrás-nyelő páros folyam problémát, aminek az optimális megoldása a társadalmi optimum.

$$\min \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e \quad (3.3)$$

$$\sum_{p \in P} f_p = f_e, \quad \forall e \in E, \quad (3.4)$$

$$\sum_{p \in P_w} f_p = d_w, \quad \forall w \in W, \quad (3.5)$$

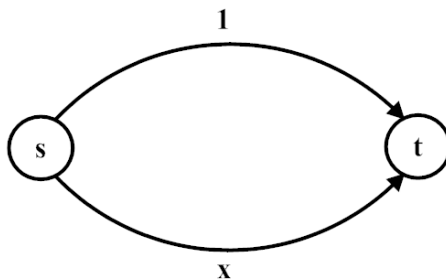
$$f_p \geq 0, \forall p \in P. \quad (3.6)$$

3.1.4. Definíció. A legkisebb költségű megvalósítható folyamatot **optimális folyam-nak** nevezzük.

3.1.5. Megjegyzés. Ennek megfelelően a nematomos önző útvonalválasztási játékban az **anarchia árán** egy egyensúlyi folyam költségének és az optimális folyam költségének az arányát értjük. Mivel nematomos esetben mindegyik egyensúlyi folyamnak ugyanannyi a költsége, ezért az anarchia árának kiszámításához bármelyiket vehetjük.

Pigou példája

Arthur Pigou, brit közgazdász 1920-ban alkotta ezt a nevezetes példát.



3.1. ábra. A Pigou példa

3.1.6. Példa. Tekintsünk egy egyszerű, irányított gráfot, egy s forrás és egy t nyelő ponttal, és ezek között két különböző éllel. Legyen a forgalom nagysága x . Az éleken értelmezzünk egy költségfüggvényt, ami a forgalom nagyságától függ, és az adott élen áthaladni kívánó játékosoknak kell megfizetniük. Ezt a költséget tekinthetjük úgy, mint utazási időt órában kifejezve. Az egyik élen legyen a költségfüggvény a konstans 1, ez például egy olyan út, ami viszonylag hosszú, de nincs rajta torlódás. A másik élen legyen a költségfüggvény x , aminek értéke a forgalom növekedésével egyenes arányban változik. Az alsó él használata csak abban az esetben olcsóbb, ha egy egységnyi kisebb forgalom halad át rajta. Tegyük fel, hogy egy egység forgalom halad át a hálózaton, amit végtelen sok játékos generál, akik egymástól függetlenül választanak a két út között s -ből t -be. Minden játékos minimalizálni próbálja a költségfüggvényét, azaz az utazási idejét.

A Nash-egyensúly - az egyensúlyi folyam - az alsó él igénybevétele lesz. Ez gyen-gén domináns stratégia, ugyanis az alsó útvonal mindenkinek vonzóbb a biztos egy

órás utazásnál. Így minden játékos várhatóan ezt választja és végül 1 költségegységet fizet. A társadalmi optimum - az optimális folyam - a forgalom két egyenlő részre osztása az éleken. Ebben az esetben azok a játékosok, akik az első élen haladnak 1 óra alatt érnek célba, míg a másik élen haladóknak ehhez 1/2 kell, így az optimális társadalmi költségfüggvény értéke 3/4, azaz átlagosan háromnegyed óra kell az utazáshoz. Mivel a játékban csak egy egyensúly van, az anarchia ára és a stabilitás ára is

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

3.1.7. Megjegyzés. *Tetszőleges költségfüggvény esetén még a legegyszerűbb hálózaton értelmezett játékban is lehet tetszőlegesen nagy az anarchia ára. Pigou példájának egy kis módosításával megmutatható, hogy az egyensúly hatékonysága növelhető [29]. Cseréljük ki az alsó élen található lineáris költségfüggvényt a következő nemlineáris függvényre: $c(x) = x^p$, ennek következtében elérhető, hogy az anarchia ára végtelen nagy legyen.*

3.1.2. Fontosabb eredmények

Ebben a részben a nematomos önző útvonalválasztási játékok kapcsán született legfontosabb eredmények találhatóak. Először az egyensúlyi folyam létezésének és egyértelműségének a bizonyítása [29] következik potenciálfüggvények segítségével. Ezután az anarchia árára felállított korlátokat tekintjük át speciális esetekben.

Az egyensúlyi folyam létezése és egyértelműsége

3.1.8. Definíció. *Tegyük fel, hogy $x \cdot c_e(x)$ egy folytonosan differenciálható, konvex függvény és az e élen haladó forgalom hozzájárulását reprezentálja a társadalmi költségfüggvényhez (3.2). Legyen*

$$c_e^*(x) = (x \cdot c_e(x))' = c_e(x) + x \cdot c_e'(x)$$

az e él **határköltség függvénye**. Továbbá legyen

$$c_p^*(f) = \sum_{e \in p} c_e^*(f)$$

az f folyamra nézve a **határköltség függvények összege a p útvonalon**.

A következő lemma az optimális folyamok jellemzésére szolgál, ezt itt nem bizonyítjuk.

3.1.9. Lemma. *Legyen (G, d, c) egy olyan nematomos önző útvonalválasztási játék, amelyben minden e élen az $x \cdot c_e(x)$ függvény konvex és folytonosan differenciálható. Ekkor f^* egy optimális folyam (G, d, c) -ben, akkor és csak akkor, ha minden $i \in \{1, \dots, k\}$ és minden $p, q \in P_i$ párra, ahol $f_p^* > 0$,*

$$c_p^*(f^*) \leq c_q^*(f^*),$$

azaz egy folyam pontosan akkor optimális, ha az általa használt utak határkölsége nem nagyobb, mint bármely más utaké.

3.1.10. Következmény. *Legyen (G, d, c) egy olyan nematomos önző útvonalválasztási játék, hogy minden e élen az $x \cdot c_e(x)$ függvény konvex és folytonosan differenciálható. Ebben az esetben f^* akkor és csak akkor optimális folyam (G, d, c) -ben, ha egyensúlyi folyam (G, d, c^*) -ban.*

Pigou példájában 3.1.6 a két él határkölség függvénye: 1 és $2x$. Ha az egy egység forgalom egyenlően oszlik meg a két él között, akkor a határkölségfüggvényre már egyensúlyi folyamatot kapunk, és a határkölség 1. A 3.1.10 következmény értelmében ez optimális folyam az eredeti hálózatban.

3.1.11. Definíció. *A*

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(x) dx$$

*kifejezést nevezzük (G, d, c) nematomos önző útvonalválasztási játék **potenciálfüggvényének**.*

3.1.12. Lemma. *Egy (G, d, c) nematomos önző útvonalválasztási játékban egy megvalósítható folyam akkor és csak akkor egyensúlyi folyam, ha globális minimuma a megfelelő Φ potenciálfüggvénynek.*

3.1.13. Tétel. *(Az egyensúlyi folyam létezése és egyértelműsége)*

1. *(G, d, c) nematomos önző útvonalválasztási játéknak van legalább egy egyensúlyi folyama.*
2. *Ha f és g egyensúlyi folyamok (G, d, c) -ben, akkor $c_e(f_e) = c_e(g_e), \forall e$ élre.*

Bizonyítás. A tétel első részének bizonyítása a játék kimenetelein értelmezett potenciálfüggvények segítségével történik. Keressünk egy olyan függvényt, amelynek globális minimumai az egyensúlyi folyamok lesznek. A 3.1.2 definíciót, mint optimalitási feltételt felhasználva, keressük azt a $h_e(x)$ függvényt minden e -re, amelyre teljesül, hogy $h'_e(x) = c_e(x)$. Ebből következik, hogy a

$$h_e(x) = \int_0^x c_e(y) dy \quad (3.7)$$

lesz minden e -re a keresett potenciálfüggvény. Mivel a c_e függvény folytonos és nemcsökkenő, ezért a h_e függvény folytonosan differenciálható és konvex. Ha a 3.1.9 lemmában az $x \cdot c_e(x)$ függvényt a (3.7) függvénnyel helyettesítjük, a 3.1.2 definíciónak megfelelő feltételt kapjuk.

A (G, d, c) -ben megvalósítható folyamok halmaza megfelel az euklideszi tér egy $|P|$ dimenziós, kompakt (korlátos és zárt) részhalmazának. Mivel az éleken vett költségfüggvények folytonosak, a potenciálfüggvény is folytonos ezen a halmazon. A Weierstrass-tételből következik, hogy a Φ felveszi a minimális értékét ezen a halmazon. A 3.1.12 lemmából következik, hogy minden pont, ahol Φ eléri a minimumát, megfelel (G, d, c) egy egyensúlyi folyamának.

A tétel második részének a bizonyításához felhasználjuk, hogy minden költségfüggvény nemcsökkenő, és a 3.1.11 egyenlet jobb oldalán minden összeadandó konvex, így Φ potenciálfüggvény is konvex. Tegyük fel, hogy f és g egyensúlyi folyamok (G, d, c) -ben. A 3.1.12 lemma szerint, f és g is minimalizálják a Φ potenciálfüggvényt. Tekintsük f és g konvex kombinációit, azaz az összes $\lambda f + (1 - \lambda)g$, $\lambda \in [0, 1]$ alakú vektort. Ezek a vektorok mind megvalósítható folyamok. Mivel Φ konvex, ezért minden $\lambda \in [0, 1]$ teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\Phi(\lambda f + (1 - \lambda)g) \leq \lambda \Phi(f) + (1 - \lambda)\Phi(g) \quad (3.8)$$

Mivel f és g globális minimuma Φ -nek, a 3.8 egyenlőtlenség, egyenlőséggel teljesül az összes konvex kombinációjukra. Mivel Φ minden tagja konvex, ez csak akkor lehetséges, ha

$$\int_0^x c_e(y) dy$$

lineáris f_e és g_e értékek között. Ebből következik, hogy minden c_e költségfüggvény konstans f_e és g_e között.

A 3.1.13 tétel második részéből és a 3.1.2 definícióból adódik, hogy két egyensúlyi folyamnak egy nematomos önző útvonalválasztási játékban ugyanannyi a költsége.

□

Korlátok az anarchia árára

A következő tétel Roughgarden és Tardos nevéhez fűződik [25].

3.1.14. Tétel. (Roughgarden-Tardos) *Ha (G, d, c) nematomos önző útvonalválasztási játékban c lineáris költségfüggvény, akkor a játékban az anarchia ára legfel-*

jebb:

$$4/3 \approx 1,333.$$

3.1.15. Megjegyzés. Nézzünk néhány további korlátot az anarchia árára, különböző fokú polinomok esetén.

- Másodfokú polinom költségfüggvény esetén az anarchia ára legfeljebb:

$$\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2} \approx 1,626$$

- Harmadfokú polinom költségfüggvény esetén az anarchia ára legfeljebb:

$$\frac{4\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{4}-3} \approx 1,896$$

- p -ed fokú polinom költségfüggvény esetén az anarchia ára legfeljebb:

$$\frac{(p+1)\sqrt[p]{p+1}}{(p+1)\sqrt[p]{p+1}-p} = \theta\left(\frac{p}{\ln p}\right)$$

3.2. Atomos önző útvonalválasztás

A nematomos esettel ellentétben van olyan atomos önző útvonalválasztási játék, amiben nincsen egyensúlyi folyam, és arra is van példa, hogy a különböző egyensúlyi folyamatok különböző értékeket vesznek föl. Egyensúlyi folyam létezését csak abban a speciális esetben bizonyíthatjuk, ha a játékosok egyforma nagyságú forgalmat irányítanak vagy a költségfüggvények lineárisak. Így atomos önző útvonalválasztási játékok esetében egyértelműségről nem, és létezésről is csak speciális esetekben beszélhetünk. Atomos esetben is vannak korlátok az anarchia árára, ha a költségfüggvény lineáris, ebben az esetben az anarchia ára legfeljebb $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,618$.

3.2.1. A modell

Az atomos önző útvonalválasztási játékot a nematomos esethez hasonlóan definiáljuk. Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf, és legyen k darab forrás-nyelő pár: $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$. Minden (s_i, t_i) -hez egy $d_i > 0$ nagyságú forgalom tartozik $\forall i$ -re. Továbbá legyen egy nemnegatív, folytonos, nemcsökkenő költségfüggvény: $c_e : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, \forall e$ élre. Az atomos esetet is (G, d, c) -vel jelöljük.

A játékban is az (s_i, t_i) forrás-nyelő párokhoz rendeljük a játékosokat, és egy forrás-nyelő párhoz tartozhat több játékos is. Az i -edik játékos stratégiái az $s_i \rightarrow t_i$ utak P_i halmaza, és a p utat választva d_i egység forgalmat visz át p -n. Egy $f_p^{(i)}$ folyam legyen egy egyik koordinátájában sem negatív vektor, a játékosokkal

és utakkal indexelve, és jelentse azt a forgalom mennyiséget, amit az i -edik játékos a p úton visz át s_i -ből, t_i -be. Az atomos esetben egy f folyamatot akkor nevezünk *megvalósíthatónak*, ha minden játékosra fennáll, hogy $f_p^{(i)} = d_i$ pontosan egy $s_i \rightarrow t_i$ úton, és a többi p útvonalon 0.

3.2.1. Definíció. Egy (G, d, c) atomos útvonalválasztási játékban **atomos egyensúlyi folyamnak** nevezünk egy megvalósítható f folyamatot, ha minden $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ és minden $p, q \in P_i$ párra, amelyre $f_p^{(i)} > 0$,

$$c_p(f) \leq c_q(f^*),$$

ahol f folyam megegyezik f^* folyammal, kivéve, hogy $f_p^{*(i)} = 0$ és $f_q^{*(i)} = d_i$.

3.2.2. Megjegyzés. Az atomos önző útvonalválasztási játékok esetében az egyensúlyi folyam a Nash-egyensúlynak felel meg.

3.2.3. Megjegyzés. Minden atomos önző útvonalválasztási játékban, amelyben a játékosok egyforma nagyságú forgalmat irányítanak, létezik egyensúlyi folyam. Ezeket **súlyozatlan** atomos önző útvonalválasztási játékoknak nevezzük. Ilyen eset a 2.3.8 példa.

3.2.2. Fontosabb eredmények

Atomos esetben az egyensúlyi folyamnak csak a létezéséről beszélhetünk, egyértelműségről nem, mint ezt a 2.3.8 példa megmutatta. Az egyik egzisztencia tétel bizonyítással együtt kerül bemutatásra, végül az anarchia árára adható korlátot vizsgáljuk meg.

Az egyensúlyi folyamatok létezése

3.2.4. Tétel. (Az egyensúlyi folyamatok létezése súlyozatlan esetben) Legyen (G, d, c) egy atomos önző útvonalválasztási játék, ahol $d_i = d \in \mathbf{R}^+$ minden i -re. Ekkor (G, d, c) -ben van legalább egy egyensúlyi folyam.

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért, tegyük fel, hogy $d = 1$. A tétel bizonyításához, a nematomos esetben bevezetett potenciálfüggvény (3.1.11) diszkrét változatára lesz szükségünk. Legyen

$$\Phi_a(f) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{f_e} c_e(i), \quad (3.9)$$

minden f megvalósítható folyamra.

Mivel atomos esetben a véges sok játékosnak véges sok stratégiája van, ezért csak véges számú lehetséges folyam van. Ezek közül legyen f egy globális minimuma Φ_a potenciálfüggvénynek. Azt állítjuk, hogy f egyensúlyi folyam (G, d, c) -ben.

Ugyanis, tegyük fel indirekt, hogy f folyamban, az i -edik játékos csökkenteni tudja a költségét, azáltal, hogy p útról q útvonalra tér át, létrehozva az új f^* folyamat. Azaz,

$$0 > c_q(f^*) - c_p(f) = \sum_{e \in q \setminus p} c_e(f_e + 1) - \sum_{e \in p \setminus q} c_e(f_e). \quad (3.10)$$

Másrésről, tekintsük az i -edik játékos eltéréseinek hatását Φ_a potenciálfüggvényre. A $q \setminus p$ -beli élek költsége új tagként $(c_e(f_e + 1))$ megjelenik (3.9)-ben, a $p \setminus q$ -beli élek költsége pedig kiesik $(c_e(f_e))$, a $p \cap q$ -ban lévő élek változatlanul szerepelnek. Így, $\Phi_a(f^*) - \Phi_a(f)$ pontosan (3.10)-ben a harmadik kifejezés. Mivel ez negatív, f^* potenciálfüggvény értéke kisebb mint f potenciálfüggvény értéke, ami ellentmondás. \square

3.2.5. Megjegyzés. *A 3.2.4 tételben nem tettünk föl semmit a költségfüggvényekről. A tétel akkor is igaz marad, ha a költségfüggvény növekvő.*

3.2.6. Megjegyzés. *A Φ_a potenciálfüggvény megváltozása, ha egy játékos eltér egy másik útvonalra, pontosan egyenlő a játékos költségeinek megváltozásával.*

A következő tétel szerint az olyan atomos önző útvonalválasztási játékban, ahol az éleken értelmezett költségfüggvények lineárisak, azaz $c_e(x) = a_e x + b_e$, $a_e, b_e \geq 0$ alakúak létezik egyensúlyi folyam [29].

3.2.7. Tétel. *(Az egyensúlyi folyamatok létezése lineáris költségfüggvények esetén) Legyen (G, d, c) egy atomos önző útvonalválasztási játék, ahol a költségfüggvények az éleken lineárisak. Ekkor (G, d, c) -nek van legalább egy egyensúlyi folyama.*

Egy korlát az anarchia árára

A következő tétel atomos önző útvonalválasztási játékokban szab korlátot az anarchia árára, lineáris költségfüggvények esetén. A bizonyítás [29] nehézségét az adja, hogy atomos esetben az egyensúly létezés és egyértelmősége sem biztosított. Különböző egyensúlyoknak különböző értékeik lehetnek, ellentétben a nematomos esettel. A nematomos esetben használatos bizonyítási eljárások az atomos esetben legfeljebb a *stabilitás árára* használhatóak.

3.2.8. Tétel. *(Az anarchia ára lineáris költségfüggvények esetén) Ha (G, d, c) atomos önző útvonalválasztási játék, lineáris költségfüggvényekkel, akkor az anarchia*

ára (G, d, c) -ben legfeljebb

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,618.$$

3.3. A Nash- és a Wardrop-egyensúly kapcsolata

A fejezet eddigi részében bemutattuk a nematomos és az atomos önző útvonalválasztási játékokat. A két modell közötti különbség a játékosok számosságában és a rendszerre való befolyásukban van. Az atomos esetben egy véges, szimultán játékot vizsgálunk, és mint a 3.2.2 megjegyzésben említettük, az atomos egyensúlyi folyam megfelel a Nash-egyensúlynak. Nematomos esetben kicsit más a helyzet, mint azt a 3.1.1 megjegyzésben megfogalmaztuk. A két modellben az egyensúly létezésére és egyértelműségére vonatkozó eredmények között is nagy különbségek mutatkoztak.

Ebben a részben egy nagyon szép és megnyugtató eredmény kerül bemutatásra, mégpedig az, hogy a két modell egyensúly koncepciója között van kapcsolat. A Nash-egyensúly Wardrop-egyensúlyhoz való konvergenciáját A. Haurie és P. Marcotte 1985-ben [11] megjelent sokat idézett cikkükben bizonyították. Ebben a fejezetben az ő munkájuk egy részét tekintjük át röviden.

3.3.1. A Wardrop-egyensúly

John Glen Wardrop 1952-ben publikált cikkében [34] alkotta meg az alapelveit a később róla elnevezett egyensúlynak. Arra a problémára kereste a választ, hogy egy olyan úthálózaton, ahol vannak alternatív útvonalak, a forgalom hogyan oszlik el. **Wardrop két alapelve** a következő:

1. Az utazási idő bármelyik használatban lévő útvonalon nem nagyobb, mint bármelyik használaton kívüli útvonalon.
2. Az átlagos utazási idő minimális.

Az úthálózatokkal, számítógép-hálózatokkal és kommunikációs hálózatokkal foglalkozó szakirodalomban három alapvető egyensúly vagy optimum fogalmat szoktak megkülönböztetni.

1. A *társadalmi optimumban* a költségfüggvények összegét minimalizáljuk.
2. A *Nash-egyensúlyban* véges számú, nem kooperáló játékos el nem hanyagolható mennyiségű forgalmat irányít az összforgalomhoz képest, és egyedül egyik játékos sem tudja csökkenteni a költségét azáltal, hogy az éppen adott útvonalról egy másikra tér át.

3. A *Wardrop-egyensúlyban* végtelen sok, nem kooperáló játékos elhanyagolható mennyiségű forgalmat irányít az összforgalomhoz képest, és egyedül egyik játékos sem tudja csökkenteni a költségét azáltal, hogy az éppen adott útvonalról egy másikra tér át.

A Wardrop-egyensúly precíz definíciója a következőképpen írható fel.

3.3.1. Definíció. Egy f^* folyamot **Wardrop-egyensúlynak** nevezünk, ha minden $s_i \rightarrow t_i$ útra, minden $p^* \in P_i^*$ és minden $p \in P_i$ -re teljesül, hogy

$$\sum_{e \in p^*} c_e(f^*) \leq \sum_{e \in p} c_e(f^*),$$

ahol P_i az $s_i \rightarrow t_i$ utak halmaza, $P_i^* \subseteq P_i$ pedig a használatban lévő utak halmaza, azaz amelyeken a folyam nagysága pozitív.

3.3.2. A Nash-egyensúly konvergenciája a Wardrop-egyensúlyhoz

A Nash-egyensúly és a Wardrop-egyensúly kapcsolatát speciális esetekben már többen is tanulmányozták. R. W. Rosenthal [24] és S. Devarajan [8] bizonyos feltételek és speciális költségfüggvények esetén vizsgálták a kapcsolatot. Kamada et al. [14] megmutatták, hogy lehetséges olyan példát konstruálni számítógép hálózatokra, hogy a Braess paradoxon megjelenik véges sok játékos esetében, de ha a játékosok számával tartunk a végtelenhez a jelenség már nem figyelhető meg ugyanabban a környezetben.

Haurie és Marcotte [11] cikkük első felében az egyensúly létezésére és egyértelműségére adtak elégséges feltételeket. A második felében bebizonyították, hogy ha a játékosok számával tartunk a végtelenhez, akkor a Nash-egyensúly tart a Wardrop-egyensúlyhoz.

A modell

Tekintsünk egy $G = (V, E)$ irányított gráfot és az ezen értelmezett $\Gamma(n)$ játékot, ahol a játékosok m osztályba vannak sorolva, jelöljük ezeket M_i -vel, $i = 1, \dots, m$. Minden osztályban legyen n egyforma játékos, így összesen $n \cdot m$ játékosunk van. Minden osztálynak megfeleltetünk egy (s_i, t_i) forrás-nyelő párt. Ezeket elképzelhetjük úgy, mint különböző gyárak, akik a termékeik szállítását próbálják meg lebonyolítani ezen az úthálózaton. A játékosok célja a szállítási költségek minimalizálása. A játékosok által irányított folyamok összege a hálózatban a *teljes folyam* vektor:

$$f = (f_e), \quad e \in E.$$

Tegyük fel, hogy minden játékos számára a $c_e(f)$ élköltség csak f -től függ, tehát független maguktól a játékosoktól. A játékosok között kétféle kölcsönhatás léphet fel, egyrészt a kereslet, másrészt a hálózaton tapasztalható torlódás, ami aszerint befolyásolja a szállítási költségeket, hogy mennyien használnak egy adott utat.

A játéknak az egyik speciális esete, ha egyetlen játékos van, ekkor a probléma leegyszerűsödik egy konvex szállítási feladatra. A másik speciális eset, ami elvezet minket a Wardrop-egyensúlyhoz, ha a játékosok száma tart a végtelenhez. A Wardrop-egyensúlyban az f folyamat végtelen sok, az összforgalomhoz képest elhanyagolható mennyiségű forgalmat irányító játékos generálja, ami azt jelenti, hogy ha egy játékos egymaga áttér egy másik útvonalra, emiatt érezhetően nem változik meg a teljes folyam költsége.

A játékosok egymás között egyenlően osztoznak a $c_e(f)$ élköltségeken, és a keresleten $d_i(g_1, \dots, g_m)$, ahol g_j a teljes folyam a j útvonalon, azaz a különböző játékosok által küldött folyamatok összessége:

$$g_j = \sum_{k \in M_j} f_{e_k}^{(k)},$$

$j = 1, \dots, m$, és $f_{e_k}^{(k)}$ a k -adik osztály által küldött folyam.

Fontosabb eredmények

Most következzen ennek a résznek a legfontosabb eredménye, a Nash-egyensúly Wardrop-egyensúlyhoz való konvergenciája. Ezeknek a tételeknek a bizonyítása megtalálható a [11] cikkben.

3.3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a játékosok kifizetőfüggvényei folytonosak és szigorúan kvázikonkávok, továbbá teljesülnek a következő feltételek:*

1. *Minden i játékoshoz létezik egy g_i^* folyam, hogy a kereslet függvény kielégíti a következő egyenletet:*

$$d_i(g_1, \dots, g_m) = 0,$$

ha $g_i \geq g_i^$, $\forall g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_m$ -re.*

2. *Minden $j = 1, \dots, m$ -re létezik $g_j < g_j^*$, hogy minden $i = 1, \dots, m$ -re:*

$$d_i(g_1, \dots, g_m) > 0.$$

3. *A d_i és c_e^i pozitív függvények, minden $i = 1, \dots, m$ -re.*

Ekkor létezik f^* Wardrop-egyensúly a G hálózaton, és $\{\Gamma(n_k)\}$, $k \in \mathbf{N}$ játékok egy olyan sorozata, hogy a $f^*(n_k)$ Nash-egyensúlyaira fennáll:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^*(n_k) = f^*.$$

3.3.3. Tétel. *Ha minden $\Gamma(n)$ játéknak van Nash-egyensúlya, és $c(f)$ szigorúan monoton, akkor egyértelműen létezik f^* Wardrop-egyensúly, és $(f^*(n))$, $n \in \mathbf{N}$ Nash-egyensúlyok minden sorozatára:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^*(n) = f^*.$$

4. fejezet

Közlekedési modellek

Ebben a fejezetben először közlekedési modellek két osztályát vizsgáljuk meg, a statikus és a dinamikus útvonalválasztási problémákat. Ezekben a problémákban adott egy úthálózat, amit egy irányított gráffal reprezentálunk és rendezett pontpárok egy halmaza, amelyek között forgalom bonyolódik le. Amennyiben ez a forgalom mennyiség nem függ az időtől, akkor *statikus*, ha pedig függ, *dinamikus* útvonalválasztási problémáról beszélünk. Bár a statikus útvonalválasztási problémának kiterjedt irodalma van és a megoldására is többféle algoritmus kínálkozik, ezek a modellek valós közlekedési helyzetek leírására kevésbé alkalmazhatók.

Ezután felvázolunk egy koncepciót a dolgozatomban bemutatott eredmények potenciális alkalmazására.

4.1. Statikus útvonalválasztási probléma

A következő modell Dafermos és Sparrow [7] statikus útvonalválasztási problémája.

4.1.1. A Dafermos-Sparrow modell

Tekintsük a $G = (V, E)$ irányított gráffal megadott úthálózatot, ahol $V = 1, 2, \dots, n$ a csúcsok, E pedig az irányított élek halmaza. Legyen P az összes lehetséges út G -ben, és egy általános utat jelöljünk p -vel. Az $W \subset V \times V$ halmaz elemeit *kapcsolódó pároknak* nevezzük, ha van köztük irányított út, jelöljünk w -vel egy ilyen általános párt. Legyen d_w egy pozitív valós szám a *kereslet* az s és t csúcs között, ahol $w = (s, t) \in W$, speciálisan lehet az s *forráspont*, t egy *nyelőpont*. Legyen $P_w \in P$ az s és t közti kereslet kiszolgálásában résztvevő utak halmaza, továbbá legyen:

$$\delta_{e,p} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e \in p, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

A kereslet mennyiség az összes s -ből t -be vezetű úton oszlik el, figyelembe véve a költség minimalizálás vagy különböző egyensúlyi feltételeket. Amennyiben csak a költségek minimalizálására törekszünk, akkor egy rendszer optimalizálási problémát kell megoldanunk, azaz a társadalmi optimumot kiszámítanunk. Itt most ezt az esetet vizsgáljuk. Legyen x_e az e élen lebonyolított teljes forgalom mennyisége és $c_e(x_e)$ ennek a költsége. Erről a költségfüggvényről feltesszük, hogy növekvő és konvex, így érzékeltetve a torlódás, azaz a közlekedési dugók jelenségét.

A rendszer optimalizálási probléma

A rendszer optimalizálási probléma a következő képpen írható fel.

$$\min \sum_{e \in E} c_e(x_e) \quad (4.1)$$

$$x_e = \sum_{p \in P} \delta_{e,p} x_p, \quad \forall e \in E \quad (4.2)$$

$$\sum_{p \in P_w} x_p = d_w, \quad \forall w \in W \quad (4.3)$$

$$x_p \geq 0, \quad \forall p \in P \quad (4.4)$$

4.1.1. Megjegyzés. Ebben a modellben tehát az összköltséget szeretnénk minimalizálni (4.1). A (4.2) a megmaradási egyenlet, a (4.3) a kereslet kielégítését, míg a (4.4) a megvalósíthatóságot biztosítja.

Fontosabb eredmények

A következő tétel szükséges feltételeket ad az optimális megoldásra. Ehhez bevezetjük a következő jelöléseket. Legyen $X = \{x_e\}$ egy megvalósítható megoldása a rendszer optimalizálási problémának, és legyen

$$C'(p) = \sum_{e \in p} c'_e(x_e),$$

ahol

$$c'_e(x_e) = \frac{\partial c_e(x_e)}{\partial x_e}.$$

Legyen továbbá $P_{s,t}$ az összes s -ből t -be tartó útvonalak halmaza és

$$P_{s,t}^* = \{p : p \in P_{s,t}, x_e > 0 \forall e \in p\}.$$

4.1.2. Tétel. *Ha $X = \{x_e\}$ optimális megoldás, akkor minden $(s, t) \in W$ -re és minden $p^* \in P_{s,t}^*$ -re*

$$C'(p^*) = \min_{p \in P_{s,t}} C'(p).$$

4.1.3. Megjegyzés. *A 4.1.2 tétel megfordítása is igaz, ha a $c_e(x_e)$ költségfüggvények konvexek.*

4.2. Dinamikus útvonalválasztási problémák

Ebben a részben Deepak K. Merchant és George L. Nemhauser [19] dinamikus útvonalválasztási modelljét, és annak M. Carey által [5] egy továbbfejlesztett változatát mutatjuk be. Ez egy diszkrét idejű közlekedési probléma egy nemlineáris, nemkonvex programozási feladatként megfogalmazva. Nemlineáris optimalizálásról részletesebben a [23] és a [16] jegyzetekben olvashatunk. Bemutatják, hogy a probléma szakaszos lineáris közelítése, a célfüggvényre vonatkozó további feltételekkel megoldható egy egylépéses simplex algoritmus segítségével. Ez a dolgozatom keretein kívül esik, de részletesen megtalálható a [19] cikk harmadik részében. Továbbá a [20] cikkben bebizonyítják, hogy a dinamikus modelljük az előző részben bemutatott 4.1.1 statikus modell általánosítása.

A Merchant-Nemhauser modell 4.2.1 nemkonvex, ami az optimum kiszámítását nehezíti. Carey modellje 4.2.2 ezzel szemben egy konvex, nemlineáris programként írja fel a dinamikus hálózati folyam problémát, aminek számos előnyös tulajdonsága van.

A két modell közti fő különbség a torlódás jelenségének és az élkapacitásoknak a kezelésében van. Carey cikkében [5] ezenfelül bemutatja, hogy hogyan lehet kiterjeszteni a modelljét többtermékes esetre. Fő eredményként pedig megmutatja, hogy milyen feltételek mellett lesz az optimális megoldásban minden élen és minden időperiódusban az él kapacitása maximálisan kihasználva.

4.2.1. A Merchant-Nemhauser modell

Tekintsünk egy $G = (V, E)$ irányított gráfot, ahol $V = 1, 2, \dots, n$ a csúcsok, E pedig az irányított élek halmaza, ahol lehetnek párhuzamos élek is. Ebben a modellben n az egyetlen nyelő csúcs. A vizsgált időszakot egyenlő hosszúságú intervallumokra osztjuk fel, ezek a következők: $t = 0, 1, \dots, T$. Legyen $F_t(v)$ külső bemenet a *beérkező forgalom mennyiség* a v csúcsban, a t -edik periódusban, és $c_{t,e}$ az $e \in E$ élhez tartozó *költségfüggvény* a t -edik periódusban és legyen I_e a kezdeti forgalom mennyiség e élen, azaz $x_{0,e} = I_e \geq 0$. Legyen továbbá g_e az élhez tartozó *távozási függvény*

$\forall e \in E$ élre, ami feltevésünk szerint nem függ az időtől, csak a periódus elején jelenlévő forgalom nagyságától. Jelöljük $d_{t,e}$ -vel a t periódus alatt az e élre *beérkezők* számát. A g függvény mutatja meg a modellben a torlódás jelenségét, ezért ez egy folytonos, nemcsökkenő, konkáv függvénye a forgalom nagyságának. A c függvény pedig folytonos, nemnegatív, nemcsökkenő és konvex.

A fenti jelölésekkel tehát, ha x darab jármű érkezik az e élre a t -edik periódus elején, ennek költsége: $c_{t,e}(x)$, és $g_e(x)$ nagyságú forgalom hagyja el ezt az élt, ahol $0 \leq g_e(x) \leq x$.

Az *állapot egyenletet* a következő formában írható fel:

$$x_{t+1,e} = x_{t,e} - g_e(x_{t,e}) + d_{t,e}, \quad (4.5)$$

ahol $t = 0, \dots, T - 1$ és $x_{t,e}$ az állapot változó.

4.2.1. Megjegyzés. A (4.5) egyenletben feltettük, hogy azon járművek száma, melyek elhagyják az e élt a t -edik periódus alatt ($g_e(x)$), csak a periódus elején jelenlévő járművek számától ($x_{t,e}$) függ és független a periódus közben beérkező járművek számától ($d_{t,e}$). Továbbá, azon járművek akik a periódus közben érkeznek ($d_{t,e}$), az adott periódusban nem hagyják el az adott élt. Ahhoz, hogy ezekkel a feltételezésekkel a modell jól írja le a valóságok, megfelelően rövid idő intervallumokra vagy megfelelően hosszú élekre van szükség.

Legyen $A(v)$ azon G -beli él halmaza, melyek kifelé mutatnak v -ből és legyen $B(v)$ azon G -beli él halmaza, melyek befelé mutatnak v -ba. Így a nyelő csúcs kivételével, minden csúcsra, minden periódusra a *megmaradási egyenlet* a következő formában írható fel:

$$\sum_{e \in A(v)} d_{t,e} = F_t(v) + \sum_{e \in B(v)} g_e(x_{t,e}). \quad (4.6)$$

A T -periódusú egy nyelős probléma

Most már felírhatjuk a T -periódusú, egy nyelős problémát.

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{e \in E} c_{t,e}(x_{t,e}) \quad (4.7)$$

$$x_{t+1,e} = x_{t,e} - g_e(x_{t,e}) + d_{t,e}, \quad \forall e \in E, t = 0, \dots, T - 1 \quad (4.8)$$

$$\sum_{e \in A(v)} d_{t,e} = F_t(v) + \sum_{e \in B(v)} g_e(x_{t,e}), \quad \forall v \in V - n, t = 0, \dots, T - 1 \quad (4.9)$$

$$x_{0,e} = I_e, I_e \geq 0, \forall e \in E \quad (4.10)$$

$$d_{t,e} \geq 0, \forall e \in E, t = 0, \dots, T-1 \quad (4.11)$$

$$x_{t,e} \geq 0, \forall e \in E, t = 0, \dots, T \quad (4.12)$$

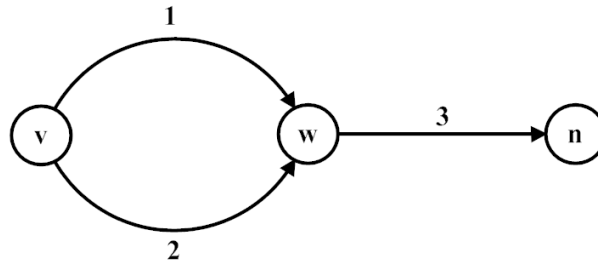
4.2.2. Megjegyzés. A 4.2.1 problémában (4.8) megfelel az állapot egyenletnek (4.5), (4.9) a megmaradási egyenletnek (4.6), (4.10) a kezdeti feltételek, (4.11) és (4.12) a nemnegativitást biztosítják.

4.2.3. Megjegyzés. A (4.8), (4.10), (4.11) és $g_e(x) \leq x$ feltételekből következik (4.12).

4.2.4. Megjegyzés. A 4.2.1 problémában nem tettünk fel semmit az élek kapacitásáról, ezért ennek a problémának mindig van lehetséges megoldása, sőt a feltételek miatt mindig van optimális megoldása is.

Egy példa dinamikus útvonalválasztásra

Merchant és Nemhauser 2-periódusú példája azt mutatja meg, hogy ha a $g_e(x)$ függvény nem lineáris, akkor 4.2.1 probléma lehetséges megoldásainak halmaza általában nem konvex. Így a 4.2.1 problémának több lokális optimuma lehet, még akkor is, ha $c_{t,e}$ függvény lineáris.



4.1. ábra. Egy példa 2 periódusú dinamikus útvonalválasztásra

4.2.5. Példa. Legyen $e = 1, 2$ -re

$$g_e(x_{t,e}) = \begin{cases} x_{t,e}, & \text{ha } 0 \leq x_{t,e} < 50, \\ 50, & \text{ha } 50 \leq x_{t,e}, \end{cases}$$

$$g_3(x_{t,3}) = x_{t,3}.$$

A periódusok elején a jármű mennyiségek, azaz a bemenetek a következők:

$$F_0(v) = 100,$$

$$F_0(w) = F_1(v) = F_1(w) = 0.$$

A kezdeti feltétel: $x_{0,e} = 0$, $e = 1, 2, 3$ -ra.

Tekintsük a következő két lehetséges megoldást:

$$D_1 = \{d_{0,1} = 100; d_{1,3} = 50; d_{t,e} = 0\}, \text{ amiből}$$

$$X_1 = \{x_{1,1} = 100; x_{1,2} = 0; x_{1,3} = 0; x_{2,1} = 50; x_{2,2} = 0; x_{2,3} = 50\}.$$

$$D_2 = \{d_{0,2} = 100; d_{1,3} = 50; d_{t,e} = 0\}, \text{ amiből}$$

$$X_2 = \{x_{1,1} = 0; x_{1,2} = 100; x_{1,3} = 0; x_{2,1} = 0; x_{2,2} = 50; x_{2,3} = 50\}.$$

Legyen

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2} = \{d_{0,1} = 50; d_{0,2} = 50; d_{1,3} = 50; d_{t,e} = 0\},$$

mivel ez nem lehetséges megoldás, beláttuk, hogy a korlátozó feltételek halmaza nem konvex.

Most nézzük meg a következő költségfüggvényeket $t = 1, 2$ -re:

$$c_{t,1}(x_{t,1}) = x_{t,1}$$

$$c_{t,2}(x_{t,2}) = 2x_{t,2}$$

$$c_{t,3}(x_{t,3}) = 4x_{t,3}.$$

Ezekkel a költségfüggvényekkel belátható, hogy (D_1, X_1) globális minimum és az értéke 350, (D_2, X_2) pedig lokális minimum és az értéke 500.

Fontosabb eredmények

Merchant és Nemhauser [20] cikkükben, a 4.1.2 statikus modellben bemutatott feltételek általánosításaként szükséges feltételeket adnak az optimális megoldásra. Ezek lényegében a Kuhn-Tucker optimalitási feltételek a dinamikus modellre.

Amikor több lokális optimuma van a feladatnak, nem mindig könnyű megtalálni a globális optimumot. A [19] cikk harmadik részében a modell egy linearizált változata található, aminek a kiszámíthatóság szempontjából számos előnye van.

A költségfüggvényre vonatkozó alábbi feltételek biztosítják, hogy a probléma egy szakaszos lineáris közelítéséhez megtaláljuk a globális optimumot.

1. $c_{t,e}(x)$ nemnegatív, nemcsökkenő és konvex minden t -re és e -re,
2. $c_{t,e}(x)$ jobbról deriválható minden t -re, e -re és x -re és minden olyan csúcstra, melyből a n -hez vezető út tartalmazza e és f élt (f van közelebb n -hez),

$$\sup_x \frac{\partial c_{t,e}^+}{\partial x} \leq \inf_x \frac{\partial c_{t,f}^+}{\partial x},$$

minden t -re.

4.2.6. Megjegyzés. *Ha G gráf nem tartalmaz irányított kört, akkor a második feltétel szükségtelen.*

Két példa költségfüggvényre

Érdemes megemlíteni két költségfüggvényt, amelyek teljesítik az előző feltételeket tetszőleges hálózaton.

1. $c_{t,e}(x) = x \quad \forall t, \forall e$
2. $c_{t,e}(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } t = T, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$

Az első költségfüggvénnyel a teljes költség a forgalomban résztvevő járművek száma a vizsgált időszakban. Ezzel a függvénnyel a vizsgált időszakban a hálózaton tartózkodó járművek számát minimalizálhatjuk. Míg a második költségfüggvénnyel a teljes költség azon járművek száma, melyek nem érték el a nyelőt a vizsgált időszak végéig. Ezzel pedig azon járművek számát minimalizálhatjuk, amelyek nem érik el a nyelőt.

4.2.2. A Carey modell

Tekintsünk egy $G = (V, E)$ irányított gráfot, ahol $V = 1, 2, \dots, n$ a csúcsok, E pedig az irányított élek halmaza. Ebben a modellben is n az egyetlen nyelő csúcs. Legyen a vizsgált időszak egyenlő intervallumokra osztva: $t = 0, \dots, T$. Legyen továbbá $x_{t,e}$ a forgalom mennyisége a t -edik időperiódus elején az e élen, jelöljük $d_{t,e}$ -vel a t -edik periódusban az e élre belépő forgalom mennyiségét. A 4.2.1 modelltől eltérően itt most legyen $b_{t,e}$ az e élről aktuálisan kimenő forgalom mennyisége a t -edik periódusban. Jelentse $g_e(x_{t,e})$ az e él, mint útszakasz különböző tulajdonságaiból adódó természetes kapacitáskorlátot a forgalom függvényében. Mivel g függvény felelős a torlódásért, tegyük fel róla, hogy folytonos és konkáv függvénye a forgalomnak, és $g_e(0) = 0, g_e(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. Legyen $s_{t,e} = g_e(x_{t,e}) - b_{t,e}$ az úgynevezett *forgalomvezérlés*. Azt szeretnénk elérni, hogy ez az érték 0 legyen minden élre, minden periódusban, lásd 4.2.2. Jelölje $c_{t,e}$ az e élhez tartozó *költségfüggvényt*, a t -edik periódusban, és tegyük fel, hogy ez folytonos, konvex, nemnegatív és nemcsökkenő függvény. A közlekedési modellekben a leggyakoribb költségfüggvény az utazási idő. Legyen $F_t(v)$ külső változó a beérkező forgalmommennyiség a v pontban, a t időpontban és legyen I_e a kezdeti forgalmommennyiség e élen, azaz $x_{0,e} = I_e \geq 0$. A 4.2.1 modellben bemutatottakhoz képest szükségünk lesz még egy feltételre a kapacitás eltérő értelmezése miatt. Ez a következő:

$$0 \leq b_{t,e} \leq g_e(x_{t,e}), \quad \forall e \in E, t = 0, \dots, T \quad (4.13)$$

4.2.7. Megjegyzés. *A probléma megoldása szempontjából hasznos egyenlőtlenséget írni a (4.13) feltételben. Carey [5] cikkének hatodik fejezetében bemutatja, hogy sok esetben az optimális megoldásban (4.13) egyenlőséggel teljesül.*

A dinamikus folyam probléma

A társadalmi optimumra vonatkozó dinamikus folyam probléma a következőképpen írható fel.

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{e \in E} c_{t,e}(x_{t,e}) \quad (4.14)$$

$$g_e(x_{t,e}) \geq b_{t,e}, \quad \forall e \in E, \forall t = 0, \dots, T-1 \quad (4.15)$$

$$b_{t,e} = x_{t,e} - x_{t+1,e} + d_{t,e}, \quad \forall e \in E, t = 0, \dots, T-1, \quad (4.16)$$

$$\sum_{e \in A(v)} d_{t,e} = F_t(v) + \sum_{e \in B(v)} b_{t,e}, \quad \forall v \in V - n, t = 0, \dots, T-1 \quad (4.17)$$

$$x_{0,e} = I_e, \quad I_e \geq 0, \quad \forall e \in E \quad (4.18)$$

$$b_{t,e} \geq 0, \quad d_{t,e} \geq 0, \quad x_{t,e} \geq 0, \quad \forall e \in E, t = 0, \dots, T-1 \quad (4.19)$$

4.2.8. Megjegyzés. *Ha a (4.15) egyenlőtlenséget egyenlőséggé változtatjuk és így az itt bevezetett $b_{t,e}$ függvényt elhagyjuk a (4.16) és (4.17) egyenletekből, a Merchant-Nemhauser modellt kapjuk 4.2.1.*

4.2.9. Megjegyzés. *Mivel (4.15) feltétel konvex és a többi feltétel lineáris, így a probléma korlátozó halmaza is konvex. Sőt, (4.14) is konvex, ezért ez probléma konvex, aminek több jó tulajdonsága is van.*

1. *Egy lokális optimum egyben globális optimum is.*
2. *Ha $c_{t,e}(x)$ szigorúan konvex, akkor egy lokális optimum az egyetlen optimum.*
3. *A Kuhn-Tucker feltételek szükségesek és elégségesek a globális optimum létezéséhez, szemben a Merchant-Nemhauser modellel, aminél nem elégségesek.*

4. Többféle algoritmus létezik egy konvex probléma megoldására. Vethetjük például a probléma szakaszonként linearizárizált változatát, azaz $g_e(x)$ és $c_{t,e}(x)$ függvényeket szakaszonként linearizálhatjuk, és a problémát lineáris programként is megoldhatjuk.

Fontosabb eredmények

4.2.10. Tétel. *Ha a 4.2.2 problémára és minden élre teljesülnek a következők:*

$$0 \leq I_e, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial c_{t,e_2}(y)}{\partial y} \leq \frac{\partial c_{t,e_1}(z)}{\partial z}, \quad \forall 0 \leq y, 0 \leq z, \quad (4.21)$$

ahol minden a nyelőbe vezető útra, amely tartalmazza e_1 és e_2 éleket és ezek közül e_2 van közelebb a nyelőhöz, és ez a feltétel az utolsó periódusban szigorú egyenlőtlenséggel teljesül, továbbá

$$0 < g_e < x, \quad (4.22)$$

$$0 \leq g'_e(x) < 1, \quad 0 < x, \quad (4.23)$$

$$g_e(0) = 0, \quad (4.24)$$

akkor minden optimális megoldásban, minden élre és minden időperiódusban az $s_{t,e} = g_e(x_{t,e}) - b_{t,e} = 0$.

4.2.11. Megjegyzés. *A 4.2.10 tétel csak akkor igaz, ha a feltételeket az összes él teljesíti. Carey éppen ezért kimond egy erősebb állítást is. A 4.21, 4.22, 4.23 és 4.24 feltételeket kimondhatjuk olyan élekre is, amik közvetlenül egymásután következnek. Így egy olyan tételt kapunk, ami elégséges feltételt szolgáltat egy élre a kapacitás teljes kihasználtságára.*

4.2.12. Megjegyzés. *A 4.21 feltételben, ha e_1 közvetlenül a nyelőbe mutat, akkor az egyenlőtlenség baloldala 0, és így ebből következik, hogy $c'_{t,e} \geq 0, \forall t, e$.*

4.2.13. Következmény. *Ha a 4.2.10 feltételei fennállnak, akkor 4.2.1 globális optimuma megegyezik 4.2.2 globális optimumával.*

4.2.14. Következmény. *Ha a 4.2.10 feltételei fennállnak, akkor a Kuhn-Tucker feltételek a 4.2.1 bármely globális optimumában érvényesek.*

4.2.15. Megjegyzés. *Az előző következmény 4.2.14 megerősíti Merchant és Nemhauser eredményeit, amik feltételezték ugyan a Kuhn-Tucker feltételek teljesülését a 4.2.1 program optimális megoldásában, de ezt nem bizonyították.*

4.3. A közlekedés optimalizálása a társadalmi optimum szerint

Carey 1987-es cikkében [5] javasol egy olyan megoldást az útdíjak meghatározására, ami arra ösztönözné az autósokat, hogy a társadalmi optimumnak megfelelően válasszák meg az útvonalukat. Lényegében arról van szó, hogy akik nem követik a közösség érdekeit, azok fizessék meg az anarchia árának rájuk eső részét. A 4.2.10 tétel feltételei segíthetnek abban, hogy - ahol ez lehetséges - eleve úgy alakítsák ki az úthálózatokat, hogy a forgalomban résztvevők saját érdekeiket követve is megközelítsék a társadalmilag optimális állapotot, így az anarchia ára közelíthet 1-hez.

4.3.1. A koncepció

A dolgozatomban eddig bemutatott eredmények, továbbá a mára elterjedt GPS alapú navigációs készülékek tudásának ismeretében szinte azonnal felmerül egy fontos gyakorlati alkalmazás lehetősége. Ezek az eszközök alkalmasak arra, hogy a felhasználójuknak kiszámolják a legrövidebb, a leggyorsabb vagy a legolcsóbb útvonalat az úti céljukhoz. Fejlettebb rendszerek arra is kísérletet tesznek, hogy valamilyen módon érzékeljék a forgalom nagyságát, a várt és nem várt eseményeket és ennek megfelelően optimalizáljanak. Amikor egy ilyen készüléknek megadjuk a kívánt úti célunkat, az útvonal a társadalmi szempontokat figyelmen kívül hagyva, az egyéni optimumunknak megfelelő javaslat lesz.

Érdeemes lenne kidolgozni egy olyan rendszert, amely nem az egyénekre optimalizál, hanem a társadalomra. Elképzelhető például egy olyan mobil alkalmazás, amelynek megadhatjuk az úti célunkat és a kívánt érkezési időt. Ezek az információk egy központi rendszerbe kerülnek, ahonnan - feltéve, hogy elég sokan küldik be kívánt úti céljukat - a társadalmi optimumnak megfelelő egyéni útvonalat kapunk javaslatként.

Amennyiben a hatékonyságot egy kicsit is sikerülne javítani, óriási költségmegtakarítást érhetnénk el pénzben vagy időben kifejezve. Az Amerikai Egyesült Államokban évente több tíz milliárd dollárra becsülik a közlekedési dugók miatti veszteségeket, 2005-ben például 78,2 milliárd dollárra [30].

4.3.2. Az igazságosság

A fenti koncepcióval kapcsolatban felmerül egy fontos probléma. Egyes játékosok akár nagyon rosszul is járhatnak a társadalmi optimumban számukra javasolt útvonallal. A Nash-egyensúlyról tudjuk, hogy általában nem hatékony a társadalom szempontjából, de olyan szempontból legalább igazságos, hogy akik ugyanabból a pontból akarnak eljutni ugyanahhoz a célállomáshoz, ugyanazon az útvonalon haladnak, így ugyanannyi időt töltenek a dugóban. A társadalmi optimum hatékony ugyan, hiszen az adott hálózat lehetőségeit maximálisan kihasználja és nem vesz figyelmebe egyéni érdekeket, de nem feltétlenül igazságos a fent említett szempontból.

Jahn et al. [13] többféle lehetséges mérőszámot mutatnak be az *igazságosság* mérésére. Például egy játékos el szeretne jutni s pontból t pontba és kap egy ajánlott útvonalat. A kapott útvonalon tapasztalt utazási időt vagy az útvonal hosszát összehasonlíthatjuk a legrövidebb utazási idővel vagy legrövidebb úttal, amit s és t pont között a legszerencsésebb játékosok kaptak. Alapvető elvárás, hogy az s pontból t pontba tartó játékosok esetében az utazási időkben ne legyen túl nagy eltérés. Egy másik fontos szempont, hogy ha egy játékos mindennap ugyanazt az utat teszi meg, minden más körülmény változatlan, az ehhez szükséges utazási idő ne változzon jelentősen az egyes napokon.

Schulz és Stier-Moses [32] a Jahn et al. által bemutatott modellt vizsgálják elméleti szempontból és különböző korlátokat adnak a hatékonyságra és az igazságosságra. Cikkükben egy olyan modellt mutatnak be, amelyben a feltételek lehetővé teszik, hogy az egyes játékosok egymáshoz képest ne járassanak túl rosszul. Így a Nash-egyensúlynál a társadalom szempontjából hatékonyabb, míg a társadalmi optimumnál igazságosabb megoldás jön létre.

4.3.3. A korlátozott rendszer optimum

Tekintsük a $G = (V, E)$ irányított gráfot és legyen minden e élhez rendelve egy rögzített $\tau_e \geq 0$ *normális hosszúság*, ami egy a priori becslés az eredeti utazási időre az e élen. Legyen c_e folytonos, nemcsökkenő költségfüggvény. Ez a forgalomban kialakuló tényleges utazási idő az e élen. A [32] cikkben később bemutatott néhány eredmény megköveteli azt a megkötést, hogy a c_e költségfüggvény lineáris. A járművek itt is az $s \rightarrow t$ forrás-nyelő párokhoz vannak rendelve és egy párhoz jelen esetben is több jármű tartozhat. Jelöljük ezeket a párokat $w = (s, t) \in W \subset V \times V$ -vel. Minden w párhoz legyen P_w a lehetséges útvonalak halmaza, és legyen $d_w > 0$ a w párhoz tartozó kereslet.

A modell legfontosabb eleme, hogy bevezetünk egy $\varphi \geq 1$ *tolerancia faktort*. Ez biztosítja, hogy egyik játékos sem kaphat javaslatként olyan útvonalat, ami φ -szer hosszabb lenne legrövidebb útnál a normális hosszúságra nézve. Ezt a legrövidebb utat jelöljük T_w -vel. Legyen továbbá

$$P_w^\varphi = \{p \in P_w : \tau_p \leq \varphi T_w\},$$

$$P^\varphi = \bigcup_{w \in W} P_w^\varphi.$$

Ezek segítségével definiálhatjuk az úgynevezett **korlátozott rendszer optimumot**, mint a következő probléma megoldását.

A korlátozott rendszer optimum probléma

$$\min \sum_{e \in E} c_e(x_e)x_e \quad (4.25)$$

$$x_e = \sum_{p \in P^\varphi} \delta_{e,p}x_p, \quad \forall e \in E \quad (4.26)$$

$$\sum_{p \in P_w^\varphi} x_p = d_w, \quad \forall w \in W \quad (4.27)$$

$$x_p \geq 0, \quad \forall p \in P^\varphi \quad (4.28)$$

4.3.1. Megjegyzés. *A korlátozott rendszer optimum feladat NP-nehéz, de a branch and bound módszer segítségével adható rá megoldás [13].*

4.3.2. Megjegyzés. *A korlátozott rendszer optimum értéke minden $\varphi \geq 1$ esetben legalább akkora, mint a társadalmi optimum értéke, és $\varphi = \infty$ esetben megegyezik vele.*

4.3.3. Megjegyzés. *A 4.3.3 probléma megegyezik a 4.1.1 statikus problémával, a különbség csak annyi, hogy a megvalósítható folyamok halmaza szűkebb, és itt a teljes költségre minimalizálunk.*

5. fejezet

Következtetések

A közlekedés mindennapi életünk szerves része, mivel egy nap akár több órát is kénytelenek vagyunk utazással tölteni. A közlekedés szervezettsége ezért gazdaságilag is nagyon lényeges kérdés. A számítástechnika fejlődésével mára igen komoly eszközök vannak a kezünkben a forgalom nagyságának mérésére és a forgalomban résztvevőkkel történő kommunikációra.

A közlekedésben a játékelmélet elsősorban a különböző egyensúly koncepciók vizsgálatát segítheti. Feltételezhetjük, hogy a közlekedésben résztvevő egyének - a játékosok - a legrövidebb idő alatt szeretnék eljutni az úti céljukhoz. Sajnos az egyének számára legjobb stratégiák általában nem egyeznek meg a társadalom számára legjobb lehetőségekkel. Ennek a hatékonyságnak időben és pénzben is mérhető ára van, amit viszonylag egyszerűen, olcsón és jelentős mértékben javíthatunk.

Dolgozatomban megismerkedhettünk az egyensúlyok hatékonyságával, ezen belül a legfontosabb fogalommal, az anarchia árával. Továbbá bemutatásra került a nemkooperatív játékelmélet egy kis szelete a gráfokon - úthálózatokon - értelmezett játékok. Az ezt követő részben két úthálózatokkal kapcsolatos modell került bemutatásra és vizsgáltuk az ezek közötti kapcsolatot. Ezeknél a modelleknél az első részben tárgyalt egyensúlyok hatékonyságával kapcsolatos eredményeket is megvizsgáltuk. Ezután bemutattunk mára klasszikussá vált közlekedési modelleket, melyek az operációkutatás eszközeivel vizsgálják a hálózatokon értelmezett folyamatok viselkedését, továbbá segíthetik a társadalmi optimum meghatározását. Végül az eddig áttekintett ismeretek alapján egy fontos gyakorlati alkalmazás lehetőségét vettük fel, amelynek nagy jelentősége lehet a már kialakult és a kapacitást tekintve nehezen bővíthető úthálózatokon a forgalom optimalizálására.

A tárgyalt téma több tudományág különböző területeiről érkező kutatók eredményei nyomán jött létre. A felmerülő kérdések a közlekedésmérnököket, az operáció-

kutatással foglalkozó matematikusokat, és természetesen a közgazdászokat is foglalkoztatják. Egy nagyváros úthálózatának megtervezése, különböző szállítási feladatok megoldása, vagy az emberek csoportos viselkedésének leírása mind nagyon különböző tudományos eszközöket igényel. A matematikai nyelvezet segíthet az ilyen, egymástól távol álló tudományterületek összekapcsolásában, így teljesen új eszközöket adva az egyes problémák megoldásához.

Az eddigi kutatások alapján a következő kérdések merültek fel bennünk, amelyek további vizsgálatok tárgyaivá válhatnak.

A Braess paradoxon talán az egyik legmeglepőbb példája az egyensúlyok hatékonyságának. Azt mutatja be, hogy egy úthálózatban egy új út építésével a forgalom akár még romolhat is, mivel a város különböző pontjain dugók alakulhatnak ki. A kutatások egy lehetséges iránya a Braess paradoxonnal kapcsolatos kérdések modellezése és vizsgálata. Ezzel segíthetnénk a városi közlekedés tervezését, elkerülve téves beruházások megvalósulását. Nehéz probléma egy városi úthálózatban annak a megállapítása, hogy tartalmaz-e olyan utat, ami Braess paradoxon kialakulásához vezethet, de tudjuk, hogy a valóságban vannak ilyen esetek. További lehetséges kérdés, különböző körülmények között a hatékonyságokat okozó jelenségek karakterizációja.

Láttuk az útvonalválasztási játékoknál, hogy speciális költségfüggvények esetén különböző felső korlátokat bizonyítottak az anarchia árára. Ezek a speciális költségfüggvények mind különböző fokú polinomok voltak, melyek valóságos forgalmi helyzetekre igen korlátozottan alkalmazhatók. Érdemes lenne megvizsgálni és modellezni, hogy különböző forgalmi helyzetekben, időpontokban a nagyvárosi úthálózatok költségeinek becslésére alkalmazott függvények esetében, milyen korlátok adhatók az anarchia árára.

Orvosi kutatások során hatékonyan alkalmaztuk a főkomponens elemzés módszerét biológiai rendszerekről készült infravörös képsorozatokra. Ennek a módszernek a lényege az, hogy kiemelve az érhálózatokon a releváns időbeli hőmérsékletváltozásokat. Ezzel elemezni lehetne a városi úthálózatokon történő dinamikus jelenséget, amely segíthetne felderíteni az utazók viselkedését. Például, hogy egy baleset vagy útlezárás milyen forgalmi következményekkel jár.

Irodalomjegyzék

- [1] Anshelevich, E., Dasgupta A., Kleinberg, J., Tardos É., Wexler, T., Roughgarden, T. *The price of stability for network design with fair cost allocation*. 45th Symposium on Foundations of Computer Science, 295-304, 2004.
- [2] Bloy, L. A. K. *An investigation into Braess' paradox*. Diplomamunka, letöltés időpontja: 2012. április 25., <http://uir.unisa.ac.za/bitstream/10500/2195/1/dissertation.pdf>, 2007.
- [3] Braess, D. *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung*. Unternehmensforschung, 12, 258-268, 1968.
- [4] Braess, D., Nagurney, A., Wakolbinger T. *On a paradox of traffic planning*. Transportation Science, Vol. 39., No. 4, 446-450, 2005.
- [5] Carey M. *Optimal time-varying flows on congested networks*. Operations Research, Vol. 35., No. 1, 58-69, 1987.
- [6] Correa J. R., Schulz A. S., Stier-Moses N. E., *Selfish routing in capacitated networks* Mathematics of Operations Research, Vol. 29, No. 4, 961-976, 2004.
- [7] Dafermos S. C., Sparrow F. T. *The traffic assignment problem for a general network*. Journal of Research of the National Bureau of Standards, Series B, Vol. 73B, No. 2, 91-118, 1969.
- [8] Devarajan, S. *A note on network equilibrium and noncooperative games*. Transportation Research Part B: Methodological, Vol. 15, No. 6, 421-426, 1981.
- [9] Forgó F., Pintér M., Simonovits A., Solymosi T. *Játékelmélet*. Elektronikus jegyzet, letöltés időpontja: 2012. április 26., http://web.uni-corvinus.hu/~pmiklos/Works/PDF/forgo_jatekelmelet.pdf, 2005.
- [10] Frank A. *Operációkutatás*. Elektronikus jegyzet, letöltés időpontja: 2012. április 14., <http://www.cs.elte.hu/~frank/jegyzet/opkut/ulin.2008.pdf>, 2008.

- [11] Haurie, A., Marcotte, P. *On the relationship between Nash-Cournot and Wardrop equilibria*. Networks, Vol. 15, 295-308, 1985.
- [12] Helbing D., Farkas I., Vicsek T. *Simulating dynamical features of escape panic*. Nature, 407., 487-490, 2000.
- [13] Jahn, O., Möhring, R. H., Schulz, A. S., Stier-Moses, N. E. *System-optimal routing of traffic flows with user constraints in networks with congestion*. Operations Research, Vol. 53., No. 4, 600-616, 2005.
- [14] Kameda, H., Altman, E., Kozawa, T. *A case where a paradox like Braess's occurs in the Nash equilibrium but does not occur in the Wardrop equilibrium - a situation of load balancing in distributed computer systems*. Decision and Control, Proceedings of the 38th IEEE Conference, Vol. 4., 4014-4019, 1999.
- [15] Katona Gy. Y., Recski A., Szabó Cs. *A Számítástudomány Alapjai*. 2. javított kiadás, Typotex Kiadó. Budapest, 2006.
- [16] Király T. *A konvex programozás alapjai*. Elektronikus jegyzet, letöltés időpontja: 2012. április 26., <http://www.cs.elte.hu/~tkiraly/students/nemlin.pdf>, 2008.
- [17] Koutsoupias, E., Papadimitriou, C. H. *Worst-case equilibria*. In Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, 404-413, 1999.
- [18] Leyton-Brown K., Shoham, Y. *Essentials of Game Theory*. Szerk.: Brachman, R. J., Dietterich, T., Morgan & Claypool, 2008.
- [19] Merchant, D. K., Nemhauser, G. L. *A model and an algorithm for the dynamic traffic assignment problems*. Transportation Science, Vol. 12, No. 3, 183-199, 1978.
- [20] Merchant, D. K., Nemhauser, G. L. *Optimality conditions for dynamic traffic assignment model*. Transportation Science, Vol. 12, No. 3, 200-207, 1978.
- [21] Nagy B. *Útvonalválasztási játékok*. Szakdolgozat, letöltés időpontja: 2012. május 25. http://szd.lib.uni-corvinus.hu/2443/1/szakdolgozat_nagy_balazs_2010.pdf 2010.
- [22] Papadimitriou, C. H. *Algorithms, games, and the internet*. Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing, 749-753, 2001.

- [23] Rapcsák T. *Nemlineáris optimalizálás*. Elektronikus jegyzet, letöltés időpontja: 2012. április 26., <http://www.oplab.sztaki.hu/tanszek/download/nemlinopt.pdf>, 2007.
- [24] Rosenthal, R. W. *The network equilibrium problem in integers*. Networks, Vol. 3, 53-59, 1973.
- [25] Roughgarden, T., Tardos É. *How bad is selfish routing?*. Proceedings of the 41st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 93-102, 2000.
- [26] Roughgarden, T. *The price of anarchy is independent of the network topology*. Journal of Computer and System Sciences 67, 341-364, 2003.
- [27] Roughgarden, T. *On the severity of Braess paradox: designing networks for selfish users is hard*. Journal of Computer and System Sciences 72, 922-953, 2006.
- [28] Roughgarden, T., Tardos É. *Introduction to the Inefficiency of Equilibria*. Algorithmic Game Theory, 17. fejezet, Szerk.: N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. V. Vazirani. Cambridge University Press, 2007.
- [29] Roughgarden, T. *Routing Games*. Algorithmic Game Theory, 18. fejezet, Szerk.: N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. V. Vazirani. Cambridge University Press, 2007.
- [30] Schrank, D., Lomax, T., *The 2007 Urban Mobility Report*. Texas Transportation Institute, The Texas A. and M. University System, 2007.
- [31] Schulz, A. S., Stier-Moses, N. E. *On the performance of user equilibria in traffic networks*. Proceedings of the fourteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, 86-87, 2003.
- [32] Schulz, A. S., Stier-Moses, N. E. *Efficiency and fairness of system-optimal routing with user constraints*. Networks, Vol. 48, No. 4, 223-234, 2006.
- [33] Végh L. *Algoritmikus játékelmélet jegyzet*. Elektronikus jegyzet, letöltés időpontja: 2012. május 9., <http://www.cs.elte.hu/~veghal/orak/alg-jatek-v2.11.pdf>, 2010.
- [34] Wardrop, J. G. *Some theoretical aspects of road traffic research*. Proceedings of the Institute of Civil Engineers, Part II, Vol. 1, 325-378, 1952.
- [35] Youn H., Jeong H., Gastner M. T., *Price of anarchy in transportation networks: efficiency and optimality control* Physical Review Letters 101, 128701, 2008.