Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Funkcionálok szélsőértékeinek vizsgálata és alkalmazásai

BSc szakdolgozat

Készítette: **Kovács Balázs**

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető: **Karátson János**

egyetemi docens

Alkalmazott Analízis és

Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2009

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatom célja olyan problémák megoldása, amelyek a funkcionálanalízis eszközeivel könnyen tárgyalhatóak. Először funkcionálok minimalizálása (illetve maximalizálása) a cél, lehetőleg minél egyszerűbb eszközökkel. A korai fejezetekben a minimum létezésére vonatkozó tételeket tárgyalunk, majd fokozatosan áttérünk a numerikus megoldásokra. A témában alapvető irodalmul szolgál [1, 2, 6]. Utóbbi kettő jelen szakdolgozat írásakor is nagy segítséget nyújtott. Az utolsó fejezetben pedig egy konkrét fizikai példát vizsgálunk meg (bővebben ld. Herbert B. Keller cikkét: [4]).

Kezdetben természetes módon bevezetjük a φ_h függvényeket, amelyek a funkcionál megszorításai egy egyenesre, ezek segítségével pedig könnyen bevezethetőek az iránymenti deriváltak, majd a Gâteaux- és a Fréchet-féle deriváltak. Megvizsgáljuk a közöttük húzódó kapcsolatot, illetve azokat az általuk nyerhető eredményeket, amelyek segítenek a minimumprobléma megoldásában. A fejezet végén egy kis kitérőt teszünk a variációszámítás témakörébe, bár ennek tárgyalása nem alapvető cél (bővebben ld. [5]).

A következő fejezetben a kapott eredményeket, tételeket megvizsgáljuk konvex esetben is, hisz így sokkal többet mondhatnak. Megvizsgáljuk, hogy egy funkcionál (szigorú) konvexitása milyen ekvivalens feltételekkel ellenőrizhető könnyedén. Az első fejezetben tárgyalt tételek újból kulcsszerepet játszanak a minimumproblémában, hiszen nem csak szükségesek, vagy elégségesek, hanem esetleg mindkettő. Szigorúan konvex esetben unicitás is könnyedén igazolható. Ezután röviden áttekintjük, hogy milyen kapcsolat van egy Hilbert-tér felett értelmezett funkcionál és a potenciálja között.

A negyedik fejezetben az

$$Fu = b$$

operátoregyenlet megoldásait keressük, ahol $F : H \to H$ monoton operátor, bihemifolytonosan szimmetrikusan Gâteaux-deriválható, illetve F' egyenletesen pozitív. A megoldás egy minimalizáló részsorozat határértékeként áll elő, az F operátor potenciálja segítségével. A fejezet második felében a monoton potenciáloperátorokra vonatkozó iterációs eljárásokat mutatjuk be, a gradiens-módszeren keresztül.

Az utolsó fejezetben egy konkrét fizikai problémát dolgozunk ki. A problémát Herbert B. Keller röviden tárgyalja [4]-ben. Egy sugározva hűlő test felszíni hőmérsékletét leíró parciális differenciálegyenlet megoldását keressük, adott peremfeltételek mellett. Mi a probléma egydimenziós alakjával foglalkozunk, hiszen ezen tökéletesen demonstrálható azon elméleti eredmények ereje, amelyeket az első négy fejezet tartalmaz.

1. fejezet

Szélsőértékhelyek meghatározása, differenciálható funkcionálok

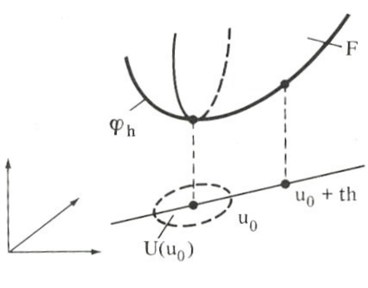
1.1. Jelölések, elnevezések

Ebben a fejezetben végig feltesszük, hogy $D \subseteq X$ egy X Banach-tér (B-tér) részhalmaza, $\Phi, \Psi : D \to \mathbb{R}$ funkcionál, illetve u_0 D egy belső pontja, $U(u_0)$ alatt pedig mindig u_0 egy környezetét értjük. E jelölések közül néhányat a későbbiekben is használni fogunk.

A továbbiakban nagyon fontos szerepet fog játszani a valós-valós φ_h függvények vizsgálata, amelyeket az alábbi módon definiálunk: rögzített $h \in X$ esetén

$$\varphi_h(t) := \Phi(u_0 + th), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Valójában ez Φ megszorítása egy egyenesre.



1.1. ábra. A φ_h függvény

A φ_h függvényeket a már jól ismert módszerekkel vizsgálhatjuk, illetve a valós függvénytanból ismert tételeket használhatjuk. Például, ha φ_h egy $(-t_0, t_0)$ intervallumon n-szer differenciálható, akkor az alábbiak szerint ott Taylor-sorba fejthető:

$$\varphi_h(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi_h^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(t^n). \tag{1.1}$$

Emellett ha Φ-nek u_0-ban lokális minimumhelye van, azaz $\Phi(u) \geq \Phi(u_0)$ minden $u \in U(u_0)$ esetén, a jól ismert tulajdonságok teljesülnek:

$$\varphi_h'(0) = 0, \qquad\qquad \varphi_h''(0) \geq 0, \tag{1.2}$$

feltéve, ha a deriváltak léteznek. Természetesen adódik ezek alapján egy szükséges feltétel, amelyet az 1.1 Tételben mondunk majd ki.

A szélsőérték-feladatok vizsgálatában fontos szerepet játszik a φ_h függvény n-edik deriváltja:

$$\varphi_h^{(n)}(0) = \left.\frac{d^n\Phi(u_0 + th)}{dt^n}\right|_{t=0}. \tag{1.3}$$

1.1. Megjegyzés. *A φ_h függvények segítségével igazolható, hogy a funkcionálok felírhatóak egy Taylor-polinom és egy maradéktag segítségével.*

1.1. Definíció. *A Φ funkcionál n-edik variációját a $h \in X$ irányban a*

$$\partial_h^n \Phi(u_0) := \varphi_h^{(n)}(0) \tag{1.4}$$

mennyiséggel értelmezzük, ha a jobb oldalon szereplő derivált létezik.

A variációt általában δ-val szokás jelölni, de a fentiekből kitűnik, hogy ez nem más, mint a funkcionál n-edik iránymenti deriváltja. Így ez a jelölés egy picit szemléletesebb.

1.2. Gâteaux- és Fréchet-féle derivált

A funkcionálokat hasonlóan szeretnénk deriválni mint a valós függvényeket. Az alábbiakban a különböző deriváltfogalmakat fogjuk megvizsgálni. Kitérünk két értelmezési lehetőségre, megvizsgáljuk a függvényekkel mutatott azonosságokat és különbségeket, belátjuk, hogy egyértelműek és a legtöbb esetben megegyeznek.

1.2.1. Gâteaux-derivált

1.2. Definíció. *A Φ funkcionál az u_0 pontban pontosan akkor Gâteaux-deriválható (G-deriválható), ha létezik egy $\Phi'(u_0)$-lal jelölt folytonos lináris funkcionál, amelyre teljesül, hogy*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u_0+th)-\Phi(u_0)}{t} = \langle \Phi'(u_0), h\rangle \qquad (\forall\, h \in X).$$

A $\Phi'(u_0)$ funkcionált a Φ funkcionál u_0 beli G-deriváljának nevezzük. Használni fogjuk a $\Phi'(u_0)h = \langle \Phi'(u_0), h\rangle$ jelölést. Könnyen látható, hogy a $\Phi'(u_0)$ G-derivált akkor és csak akkor létezik, ha $\partial_h \Phi(u_0)$ minden $h \in X$-re létezik és a $h \mapsto \partial_h \Phi(u_0) \in X$ funkcionál folytonos és lineáris X-en. Ekkor minden $h \in X$-re teljesül, hogy

$$\partial_h \Phi(u_0) = \langle \Phi'(u_0), h\rangle. \tag{1.5}$$

1.2.2. Fréchet-derivált

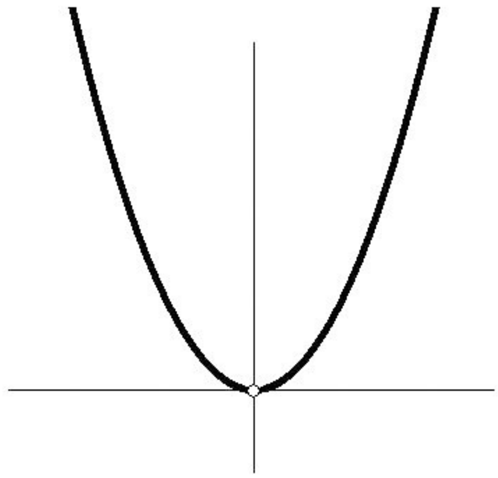
1.3. Definíció. *Legyen X normált tér. A Φ funkcionál egy u_0 pontban akkor és csak akkor Fréchet-deriválható (F-deriválható), ha létezik egy $\Phi'(u_0)$-lal jelölt folytonos lináris funkcionál, amelyre teljesül, hogy*

$$\Phi(u_0+h) = \Phi(u_0) + \langle \Phi'(u_0), h\rangle + r(h) \qquad (\forall\, h \in U(u_0)),$$

ahol $r = o(\|h\|)$, azaz $\lim_{\|h\|\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$. Ekkor $\Phi'(u_0)$-t a Φ funkcionál u_0-beli F-deriváljának nevezzük.

1.2. Megjegyzés. Minden F-differenciálható funkcionálra teljesül az (1.5) egyenlőség. Az F-deriválhatóságból következik, hogy Φ folytonos, továbbá minden differenciálható funkcionál F-deriváltja egyben a G-deriváltja is és teljesül az (1.5) egyenlőség.

Megfordítva ez nem igaz. Könnyen adható ellenpélda, a folytonosság megsértésével.



1.2. ábra. G-deriválható, viszont nem F-deriválható

Éspedig definiáljuk azt a Φ függvényt, ami az ábrán látható görbe mentén 1, egyébként nulla. Ennek a függvények az origóban minden irányban nulla az iránymenti deriváltja, így G-deriváltja: $\Phi'(0) = 0$. A nullának nem létezik olyan U környezete, amelyben a függvény F-deriválható lenne, hisz a 0-ban nem is folytonos.

1.1. Állítás. *A Gâteaux- és a Fréchet-derivált egyértelmű.*

Bizonyítás: (1) A G-derivált a limesz egyértelműsége miatt egyértelmű.
(2) Ha a funkcionál F-deriválható akkor az F-deriváltja a G-deriváltja is, az pedig egyértelmű. ■

Az alábbiakban kiszámítjuk néhány, a mi szempontunkból később fontos szerepet játszó funkcionál Gâteaux-deriváltját.

1.1. Példa. Legyen $L \in C^1(\mathbb{R})$ adott, amelyre teljesül, hogy $L'(t) \leq K|t|$ és tekintsük az alábbi funkcionált:

$$\Phi(u) := \int_a^b L(u(x))\,\mathrm{d}x \qquad (u \in L^2(I)). \tag{1.6}$$

A G-derivált könnyen számítható a definícióból:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\Phi(u+th) - \Phi(u)\Big) = \lim_{t\to 0} \int_a^b \frac{\Big(L(u(x)+th(x)) - L(u(x))\Big)}{th(x)} h(x)\,\mathrm{d}x$$

Mivel $u \in L^2$, így van integrálható majoráns, ezért a limesz és az integrál felcserélhető. Azaz

$$\langle \Phi'(u), h\rangle = \int_a^b L'(u(x))h(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.2. Példa. A második példa egy kicsit konkrétabb, de fontos szerepet fog játszani a későbbiekben.

$$\Psi(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2\,\mathrm{d}x \qquad (u \in H^1(I)). \tag{1.7}$$

Ismét felírjuk a Gâteaux-derivált definícióját,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\Psi(u+th)-\Psi(u)\Big) = \lim_{t\to 0}\int_0^1 \frac{\Big((u'(x)+th(x))^2-(u'(x))^2\Big)}{2t}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{t\to 0}\int_{-1}^1 \frac{(2(u'th')+(th')^2)}{2t}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 u'h'\,\mathrm{d}x$$

egyszerűsítés és a határértékképzés elvégzése után. Így azt kapjuk, hogy

$$\langle \Psi'(u), h\rangle = \int_{-1}^1 u'(x)h'(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.3. Példa. Legyen H egy Hilbert tér, illetve legyen b ennek egy tetszőleges, nem nulla eleme. A funkcionálunk pedig legyen lineáris:

$$\Phi(u) := \langle u, b\rangle \qquad (\forall\, u \in H). \tag{1.8}$$

Ekkor a Φ G-deriváltja

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\langle u+th, b\rangle - \langle u, b\rangle\Big) = \lim_{t\to 0}\Big\langle \frac{u+th-u}{t}, b\Big\rangle = \langle h, b\rangle.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\langle \Phi'(u), h\rangle = \langle h, b\rangle = \Phi(h),$$

$$\Phi'(u) = \Phi,$$

azaz konstans.

1.3. Funkcionálok szélsőértékei

Sok funkcionálokkal kapcsolatos probléma megoldása egy funkcionál minimalizálásához vezet (Pl: a brachisztochron[1] és a tautochron,[2] vagy a minimális felület probléma). Ráadásul φ_h függvény bevezetése után azt várjuk, hogy a funkcionálok deriváltjai a szélsőértékhelyeken, a valós függvényekhez hasonlóan viselkednek. Az alábbiakban megnézzük, hogy hogyan viselkednek a funkcionálok és azok deriváltjai szélsőértékhelyeken és azok környezetében, illetve milyen szükséges vagy elégséges feltételek mondhatók ki a deriváltak vizsgálatával.

1.4. Definíció. *Egy Φ funkcionálnak az u_0 pontban lokális szélsőértékhelye van, ha az u_0 egy U környezetére teljesül, hogy $\forall\, u \in U$-ra $\Phi(u) \geq \Phi(u_0)$.*
Ha a nagyobbegyenlő helyett nagyobbat írunk, akkor azt mondjuk, hogy u_0 szigorú lokális minimumhely.
A Φ funkcionál maximumhelyei pedig pontosan a $-\Phi$ minimumhelyei.

1.1. Tétel. *Legyen X B-tér, $\Phi : D \to \mathbb{R}$, akkor a következők teljesülnek:*
(i) SZÜKSÉGES FELTÉTEL: *Ha Φ-nek lokális minimumhelye van $u_0 \in int(D)$ pontban, akkor*

$$\partial_h \Phi(u_0) = 0, \tag{1.9}$$

$$\partial_h^2 \Phi(u_0) \geq 0 \tag{1.10}$$

teljesül minden X-beli h-ra, ha léteznek az iránymenti deriváltak.

[1] Azt az AB görbét nevezik brachisztochronnak, amely mentén a nulla kezdősebességű részecske a lehető leggyorsabban jut el A pontból B pontba. (A szó a legrövidebb idő kifejezés görög nyelvű alakjából ered.) A brachisztochron görbe tulajdonképpen egy cikloisív.

[2] Ha egy részecske a tautochron valamelyik pontjából zérus kezdősebességgel elindulva végigcsúszik a tautochron mentén a gravitációs erő hatására, akkor a görbe legalsó pontjába való megérkezéséig eltelt idő független attól, melyik pontból indult. (A szó az ugyanannyi idő kifejezés görög nyelvű alakjából ered.) A tautochron is a ciklois .

(ii) Elégséges feltétel: *Legyen $n \geq 2$ páros szám. Ekkor Φ-nek u_0-ban szigorú lokális minimumhelye van, ha a következők teljesülnek:*
(1) *létezik $c > 0$, hogy $\forall\, h \in X$*

$$\partial_h^k \Phi(u_0) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1.11}$$

$$\partial_h^n \Phi(u_0) \geq c\|h\|^n. \tag{1.12}$$

(2) *Az $u \mapsto \partial_h^n \Phi(u)$ leképezés egyenletesen folytonos az u_0 egy U környezetében. Pontosabban, $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz létezik egy $\delta > 0$, amelyre*

$$|\partial_h^n \Phi(u) - \partial_h^n \Phi(u_0)| \leq \varepsilon \|h\|^n \tag{1.13}$$

teljesül $\forall\, h \in X$ és $\forall\, u \in X$, amelyre $\|u - u_0\| < \delta$, és feltesszük, hogy az itt szereplő iránymenti deriváltak léteznek.

Bizonyítás: (i) (1.2) miatt nyilván teljesül.
(ii) Az (1.4) definícióból és az (1.11) feltételből következik, hogy $\varphi_h^{(k)}(0) = 0$ minden $0 \leq k \leq n-1$ esetén. A (1.1) Taylor formulából $t = 1$-re következik a Lagrange-maradéktag alapján, hogy $\exists\, 0 < \xi < 1$ melyre,

$$\Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) = \varphi_h(1) - \varphi_h(0) = \frac{\varphi_h^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Az (1.12) és az (1.13) feltételekből $\varepsilon < \frac{c}{2}$-re és minden olyan h-ra, amelyre $\|h\| < \delta$ azt kapjuk, hogy

$$\Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) = \frac{\partial_h^k \Phi(u_0 + \xi h)}{n!} \geq \frac{c}{2n!}\|h\|^n > 0.$$

■

1.3. Megjegyzés. A (ii) feltétellel leggyakrabban a nagyon fontos $n = 2$ esetben találkozunk, ekkor

$$\partial_h \Phi(u_0) = 0$$

$$\partial_h^2 \Phi(u_0) \geq c\|h\|^2.$$

A második feltétel azt jelenti, hogy a $\Phi'(u_0)$ egyenletesen pozitív operátor.

1.2. Tétel. *Legyen X valós B-tér, $\Phi : D \to \mathbb{R}$ funkcionál és $u_0 \in int(D)$.*
(i) Szükséges feltétel: *Ha Φ-nek lokális minimumhelye van u_0-ban és Φ G-deriválható, akkor*

$$\Phi'(u_0) = 0 \qquad \textit{(általánosított Euler-egyenlet).}$$

(ii) Elégséges feltétel: *Legyen n páros, Φ pedig n-szer G-diffható u_0 egy környezetében. Ekkor Φ-nek szigorú lokális minimumhelye van u_0-ban, ha*

$$\Phi^{(k)}(u_0) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$\Phi^{(n)}(u_0)h^n \geq c\|h\|^n,$$

és $\Phi^{(n)}$ folytonos u_0-ban.

Bizonyítás: (i) az előző tétel (1.9) állítása miatt $0 = \partial_h \Phi(u_0) = \langle \Phi'(u_0), h \rangle$ teljesül minden $h \in X$-re, amiatt $\Phi'(u_0) = 0$.
(ii) Ez az előző tétel speciális esete, mivel $\partial_h^k \Phi(u_0) = \Phi^{(k)}(u_0)h^k$ és

$$|\partial_h^n \Phi(u) - \partial_h^n \Phi(u_0)| \leq \|\Phi^{(n)}(u) - \Phi^{(n)}(u_0)\| \|h\|^n.$$

■

1.4. Variációszámítás

A variációszámítás speciális funkcionálok vizsgálatával foglalkozik, a matematika olyan nagyjai foglalkoztak vele, mint Dirichlet, Euler, Lagrange és Weierstrass, illetve a 23 Hilbert-problémából kettő – a 20.[3] és a 23.[4] – is ebből a témakörből származik.
A variációs alapproblémák egy nagy csoportja a következőképpen írható le.
Legyen a J funkcionál

$$J(u) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x$$

és tekintsük az alapproblémát:

$$J(u) = \min! \qquad u(x_0) = u_0, \qquad u(x_1) = u_1, \tag{1.14}$$

[3] Van-e megoldása minden peremfeltétellel megadott variációs problémának? – *Nemlineáris esetben igen.*
[4] A variációszámítás további fejlesztése – *Megoldatlan.*

ahol x_1, x_2, u_1, u_2 rögzített valós számok és $\{u : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}\}$ függvények valamilyen halmazában keressük az integrál (vagyis a J funkcionál) minimumát.

Az ebben a fejezetben található tételek gyakran hasznosak a variációs problémák esetében (bővebben ld. [6, 5]). Gyakran alkalmazható például, hogy ha u megoldása az (1.14) alapproblémának, akkor kielégíti az Euler-Lagrange differenciálegyenlet, azaz teljesül rá, hogy

$$\partial_2 L(x, u(x), u'(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \partial_3 L(x, u(x), u'(x)).$$

Belátható [5], hogy ez ekvivalens azzal, hogy ha u megoldás, akkor $\partial_h L(u) = 0$ minden h esetén.

Riemann idejében azt sejtették, hogy ha egy variációs problémának van infimuma, akkor azt fel is veszi. Egészen addig, míg Weierstrass egy egyszerű ellenpéldával (ld. [6]) igazolta, hogy ez nem így van.

1.4. Példa. (Weierstrass ellenpéldája): Tekintsük az

$$\inf_{u \in M} \int_{-1}^{1} \big(xu'(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x = \alpha$$

variációs problémát, ahol $M = \{u \in C^1(\mathbb{R}) : u(-1) = 0\ ,\ u(1) = 1\}$.
Továbbá tekintsük az alábbi $(u_n) \subset M$ sorozatot:

$$u_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\arctan(\frac{x}{n})}{\arctan(\frac{1}{n})}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Kiszámítható, hogy $J(u_n) \to 0$, így $\alpha = 0$. Viszont ha $u \in M$ megoldás, akkor $xu'(x) = 0$ a $[-1, 1]$ intervallumon, ekkor $u = \textit{konstans}$, ami ellentmond annak, hogy

$$u(-1) = 0\ ,\ u(1) = 1.$$

2. fejezet

Konvex funkcionálok

Ebben a fejezetben rámutatunk a Φ funkcionál konvexitása és a Φ' operátor monotonitása közötti kapcsolatra, amely az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeknél megismertekkel teljes egyezést mutat. Megvizsgáljuk, hogy a konvexitásból az előző fejezetekhez képest milyen további eredmények nyerhetőek.

Az általános minimumproblémákkal szemben a konvex esetben többet is mondhatunk:
(i) egyszerűbb feltételeket adhatunk a minimum létezésére;
(ii) a szigorú konvexitásból következik a minimum egyértelműsége;
(iii) a lokális minimum globális is;
(iv) a $\Phi'(u) = 0$ Euler egyenlet a minimum létezésének nem csak szükséges, hanem elégséges feltétele is;
(v) hatékony approximációs módszereket ismerünk (gradiens-módszer (ld.: 4. fejezet), konjugált gradiens módszer [2, 6, 3], végeselem-módszer [2], Ritz-módszer [6]).

Az alábbiakban megismétlünk néhány jól ismert definíciót.

2.1. Definíció. *(i) Legyen X lineáris tér. Egy $M \subseteq X$ részhalmaz konvex $\Leftrightarrow u, v \in M$, és $\forall\, t \in [0, 1]$ esetén $(1-t)u + tv \in M$.*
(ii) Legyen M konvex halmaz.

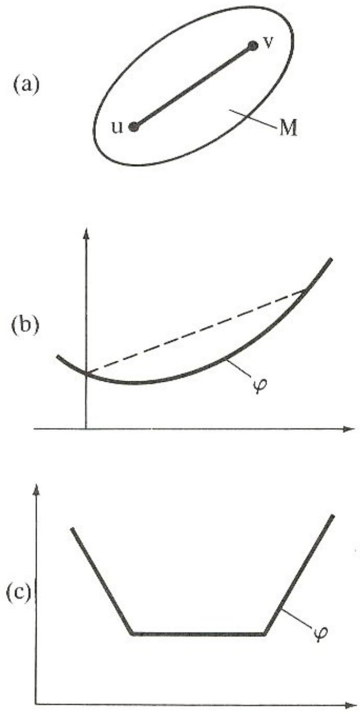
$$\Phi \;\; konvex \quad \Leftrightarrow \quad \Phi((1-t)u + tv) \leq (1-t)\Phi(u) + t\Phi(v), \tag{2.1}$$

$\forall\, u, v \in M$ és $\forall\, t \in [0, 1]$ esetén.

(iii) A Φ funkcionál szigorúan konvex, ha a fenti egyenlőtlenségben $t \in (0,1)$ esetén egyenlőséget nem engedünk meg, azaz

$$\Phi((1-t)u + tv) < (1-t)\Phi(u) + t\Phi(v). \tag{2.2}$$

(iv) Φ konkáv, ha $-\Phi$ konvex.



2.1. ábra. (a) konvex halmaz, (b) szigorúan konvex és (c) konvex függvény

2.1. Konvex funkcionálok és halmazok

2.1. Állítás. *Legyen $M \subseteq X$ konvex részhalmaza X-nek, $\Phi : M \to \mathbb{R}$ konvex funkcionál. Ekkor, ha Φ-nek u_0-ban lokális minimumhelye van, azaz*

$$\Phi(u) \geq \Phi(u_0) \quad \forall\, u \in U(u_0) \cap M\text{-re},$$

akkor u_0 globális minimum is.

Bizonyítás: Legyen $u_0 \neq u \in M$, ekkor létezik egy olyan $\lambda \in [0,1]$, hogy $u_0 + \lambda(u - u_0) \in U(u_0) \cap M$.

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + \lambda(u - u_0)) \leq (1-\lambda)\Phi(u_0) + \lambda\Phi(u)$$
$$(1-(1-\lambda))\Phi(u_0) \leq \lambda\Phi(u)$$
$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u)$$

■

2.1.1. Konvexitási kritérium

2.2. Állítás. *(Konvexitási kritérium): Legyen $\Phi : M \to \mathbb{R}$ konvex funkcionál, továbbá*

$$\mathrm{k}_\Phi(t) := \Phi(u + t(v-u)).$$

A Φ funkcionál (szig.) konvex $\Leftrightarrow$ k_Φ (szig.) konvex a $[0,1]$-en $\forall\, u, v \in M$-re.

Bizonyítás:(1) Tfh. a Φ funkcionál konvex, ekkor minden $u, v \in M$ esetén

$$\mathrm{k}_\Phi(t) = \Phi\big(u + t(v-u)\big) = \Phi\big((1-t)u + tv\big) \leq$$
$$\leq (1-t)\Phi(u) + t\Phi(v) = (1-t)\,\mathrm{k}_\Phi(0) + t\,\mathrm{k}_\Phi(1)$$

teljesül minden $t \in [0,1]$-re, ami pont azt jelenti, hogy k_Φ grafikonja a $(0, \mathrm{k}_\Phi(0))$ és az $(1, \mathrm{k}_\Phi(1))$ pontokon átmenő egyenes alatt fekszik a $(0,1)$ nyílt intervallumon. Mivel ez igaz tetszőleges $u, v \in M$ és $t \in (0,1)$ esetén, ezért azt kapjuk, hogy k_Φ konvex, ha Φ az.

(2) A vissza irányhoz minden $t \in (0,1)$ és tetszőleges $u, v \in M$ esetén

$$\Phi\Big(tu + (1-t)v\Big) = \mathrm{k}_\Phi(t) \leq t\mathrm{k}_\Phi(0) + (1-t)\mathrm{k}_\Phi(1) = t\Phi(u) + (1-t)\Phi(v),$$

ami pont Φ konvexitása az $[u, v]$ szakaszon bármely u, v esetén, azaz Φ konvex M-en. ■

Geometriailag ez azt jelenti, hogy egy konvex funkcionál konvex M minden részhalmaza felett, és fordítva. Fontos továbbá, hogy a konvex funkcionálok vizsgálatát visszavezettük valós konvex függvények vizsgálatára, így alkalmazhatóak az ott érvényes tételek.

2.1.2. Φ konvexitása, Φ' monotonitása és Φ'' definitsége

Mostantól $\Phi : X \to \mathbb{R}$ funkcionál, $\Phi' : X \to X^*$ pedig a Gâteaux-, vagy Fréchet-féle deriváltja, illetve M konvex részhalmaza egy Banach-térnek.

2.1. Lemma. *Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$ funkcionál az X valós B-téren. Tegyük fel, hogy G-deriválható és $\Phi' : X \to X^*$ létezik X-en, ekkor az alábbiak ekvivalensek.*
(1) Φ konvex X-en.
(2) Φ' monoton X-en.
(3) $\Phi(v) - \Phi(u) \geq \langle \Phi'(u), v-u \rangle \qquad (\forall\, u, v \in X)$.

Bizonyítás: (1)$\Leftrightarrow$(2): Φ konvex $\Leftrightarrow$ k_Φ konvex $[0,1]$-en minden $u, v \in X$-re (Konvexitási kritérium) $\Leftrightarrow$ k'_Φ monoton $[0,1]$-en minden $u, v \in X$-re $\Leftrightarrow$ Φ' monoton.
(1)$\Leftrightarrow$(3): Ha a Φ funkcionál konvex, akkor a (2.1) feltétel felírható

$$\Phi((1-t)u + tv) \leq \Phi(u) + t(\Phi(v) - \Phi(u)) \tag{2.3}$$

alakban. Ezt átrendezve kapjuk a

$$\frac{\Phi((1-t)u + tv) - \Phi(u)}{t} \leq \Phi(v) - \Phi(u)$$

egyenlőtlenséget.

Most tartsunk t-vel a nullához, akkor az egyenlőtlenség bal oldala $\langle \Phi'(u), v-u \rangle$ G-deriválthoz tart.
A másik irányhoz legyen $u, v \in X$ és $t \in [0,1]$. Ekkor

$$\Phi(u) \geq \Phi(u + t(v-u)) + \langle \Phi'(u + t(v-u)), u - (u + t(v-u)) \rangle =$$
$$= \Phi(u + t(v-u)) - t\langle \Phi'(u + t(v-u)), (v-u)) \rangle$$

Hasonló egyenlőség írható fel v-re is. A $v \mapsto \langle \Phi'(u), v \rangle$ folytonossága miatt, az elsőt $(1-t)$-vel a másodikat t-vel beszorozva, majd a kettőt összeadva azt kapjuk, hogy

$$(1-t)\Phi(u) + t\Phi(v) \geq \Phi(u + t(v-u)),$$

azaz pont azt, hogy Φ konvex. ■

2.1. Megjegyzés. A fenti lemmát természetesen szigorúan konvex esetben is kimondhattuk volna, a relációk ennek megfelelően változnának mindenhol.

2.1. Következmény. *Ha az előző lemma feltételei mellett még az is teljesül, hogy Φ kétszer G-deriválható, akkor a következők igazak:*
(i) $\Phi''(u)h^2 \geq 0 \quad (\forall h \in X) \Rightarrow \Phi$ *konvex* X*-en;*
(ii) $\Phi''(u)h^2 > 0 \quad (\forall h \neq 0) \Rightarrow \Phi$ *szigorúan konvex* X*-en.*

Bizonyítás: k_Φ definíciójából és a 2.1 Lemmából következik. ∎

2.2. Megjegyzés. [6] Megjegyezzük, hogy az előző feltételek és rögzített $c > 0$ konstans mellett még teljesül, hogy ha

$$\Phi''(u)h^2 \geq c\|h\|^2 \quad (\forall u, v \in X) \Rightarrow \langle \Phi'(v) - \Phi'(u), v - u\rangle \geq c\|v - u\|^2 \quad (\forall u, v \in X),$$

ekkor pedig igaz, hogy

$$\Phi(v) - \Phi(u) \geq \langle \Phi'(u), v - u\rangle + \frac{c}{2}\|v - u\|^2 \quad (\forall\, u, v \in X).$$

illetve, ha a Φ funkcionálnak az u pontban minimuma van, azaz $\Phi'(u) = 0$, akkor

$$\Phi(v) - \Phi(u) \geq \frac{c}{2}\|v - u\|^2 \quad (\forall\, v \in X).$$

Az utolsó két egyenlőtlenség nagyon hasznos különböző hibabecsléseknél.

2.1. Tétel. *Ha* $\Phi : D \to \mathbb{R}$ *konvex és G-diffható a teljes* X*-en, akkor*

$$\Phi\text{-nek minimuma van } u\text{-ban} \Leftrightarrow \Phi'(u) = 0.$$

Bizonyítás: A jobbra irány azonnal következik az 1.2 Tétel (i) részéből.
A balra irány pedig könnyen látható, a 2.1 Lemma (3) állítása alapján. ∎

2.3. Állítás. *A* $\Phi : M \to \mathbb{R}$ *funkcionálnak legfeljebb egy minimuma van az* M *halmazon feltéve, ha*
(i) M *konvex részhalmaza* X*-nek*
(ii) Φ *szigorúan konvex.*

Bizonyítás: Tfh. $\exists u \neq v$ minimumhelyek. Ellentmondásra jutunk, ha a (2.2) egyenlőtlenséget tekintjük a $t = \frac{1}{2}$, illetve a $\Phi(u) = \Phi(v) = \min_{w \in M} \Phi(w)$ esetben. ∎

2.3. Megjegyzés. Természetesen nem mondhatjuk azt, hogy egy szigorúan konvex funkcionálnak pontosan egy minimuma van. Például az $M = \mathbb{R}$, $\Phi(x) = e^x$ funkcionálnak M-en nincsen minimuma.

3. fejezet

Potenciáloperátorok

A fejezetben arra keressük a választ, hogy Hilbert-térben hogyan teremthető kapcsolat az operátor és a potenciálja között. Vagyis adott $A : H \to H$ operátorhoz keressük azt az $F : H \to \mathbb{R}$ funkcionált amire Gâteaux-értelemben teljesül, hogy

$$F' = A. \tag{3.1}$$

Megvizsgáljuk, hogy ehhez milyen szükséges, vagy elégséges feltételek kellenek.

Potenciáloperátorokra jó példák az elliptikus parciális differenciálegyenletekkel és a Hammerstein integrálegyenletekkel[1] kapcsolatos operátorok.

3.1. Definíció. *Legyen H valós Hilbert-tér. Az $A : H \to H$ operátort potenciáloperátornak nevezzük, ha létezik $F : M \to \mathbb{R}$ G-deriválható funkcionál, ami teljesíti a* (3.1) *egyenlőséget. Ekkor F-et A potenciáljának nevezzük.*

3.2. Definíció. *Legyenek X, Y és Z normált terek és $A : X \to L(Y, Z)$ egy leképezés. Azt mondjuk, hogy F hemifolytonos, ha minden $u, v \in X$-re és minden $y \in Y$-ra a $t \mapsto A(u + tv)y$ leképezés folytonos.*
Továbbá, A egy bihemifolytonos leképezés, ha minden $u, v, w \in X; y \in Y$-ra az $(s, t) \mapsto A(u + tv + sw)y$ leképezés folytonos.

Ha A hemifolytonos, akkor definiáljuk $F_A : M \to \mathbb{R}$-et:

$$F_A(u) := \int_0^1 \langle A(tu), u \rangle \,\mathrm{d}t$$

[1] Azaz az $u + \mu K(Fu) = 0$ $u \in X^*$ alakú egyenletekkel, ahol $(Fu)(x) = f(x, u(x))$ (Nemyckii operátor) és $(Kv)(x) = \int_G k(x, y)v(y)\,\mathrm{d}y$

és A pszeudopotenciáljának hívjuk. A hemifolytonosság biztosítja az integrál folytonosságát.

3.1. Tétel. *Ha az $A : H \to H^*$ hemifolytonos operátor a valós H H-tér felett, akkor a két alábbi állítás igaz.*

(i) Integrálkritérium: *A potenciáloperátor akkor és csak akkor, ha*

$$F_A(u) - F_A(v) = \int_0^1 \langle A\big(v + t(u-v)\big), u - v\rangle \, \mathrm{d}t \qquad (\forall\, u, v \in M) \tag{3.2}$$

teljesül. Az F_A pszeudopotenciál potenciál, és A bármely potenciálja csak konstanssal tér el F_A-tól.

(ii) Deriváltkritérium: *Tegyük fel, hogy az A' G-derivált létezik M-en és teljesül rá, hogy $(s,t) \mapsto \langle A'(w+tu+sv)x, y\rangle$ folytonos $[0,1]\times[0,1]$-en minden $u, v, w, x, y \in M$. Ekkor A pontosan akkor potenciáloperátor, ha A' önadjungált, azaz*

$$\langle A'(u)v, w\rangle = \langle A'(u)w, v\rangle \qquad (u, v, w \in M). \tag{3.3}$$

Bizonyítás: (i) ($\Rightarrow$) Legyen $A := F'$, és $\varphi(t) := F(v+t(u-v))$ minden $t \in [0,1]$-re, emiatt $\varphi'(t) = \langle A\big(v + t(u-v)\big), u - v\rangle$. Azaz

$$\begin{aligned} F(u) - F(v) &= \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = \\ &= \int_0^1 \langle A\big(v + t(u-v)\big), u - v\rangle dt = F_A(u) - F_A(v). \end{aligned}$$

Az egyenletbe $v = 0$-t helyettesítve azt kapjuk, hogy $F(u) = F(0) + F_A(u)$.

($\Leftarrow$): Nézzük meg mi F_A Gâteaux-deriváltja:

$$\langle F_A'(v), w\rangle = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\big(F_A(v+sw) - F_A(v)\big)$$

(3.2) illetve a folytonosság miatt (ami miatt a limesz és az integrál felcserélhető), azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \lim_{s\to 0} \langle A\big(v + tsw\big), w\rangle \, \mathrm{d}t = \langle Av, w\rangle.$$

(ii) ($\Rightarrow$) $W(t,s) := F(w+tu+sv)$ minden $t, s \in \mathbb{R}$. Tekintsük W parciális deriváltjait:

$$\begin{aligned} W_{ts} &= \langle A'(w+tu+sv)v, u\rangle, \\ W_{st} &= \langle A'(w+tu+sv)u, v\rangle. \end{aligned}$$

Mivel a deriváltak folytonosak, a Young-tétel miatt $W_{ts}(0,0) = W_{st}(0,0)$, ez pedig pont az, amit szerettünk volna.

($\Leftarrow$) Definiáljunk két segédfüggvényt:

$$U(t,s) := \langle A(tv + su), u \rangle$$
$$V(t,s) := \langle A(tv + su), v \rangle.$$

Ekkor a (3.3) feltétel pontosan azt jelenti, hogy $U_t(t,s) = V_s(t,s) \quad \forall\, s,t \in \mathbb{R}$, illetve tekintsük az

$$0 = \int_{\partial G} U(t,s)\,\mathrm{d}s + V(t,s)\,\mathrm{d}t$$

vonalintegrált, ahol ∂G egy zárt görbe, így az integrál nulla.

Ha a $(0,0)$, $(0,1)$ és $(1,0)$ vektorok által meghatározott negatívan irányított háromszögön integrálunk, akkor pont a (3.2) feltételt kapjuk. $\blacksquare$

4. fejezet

Nemlineáris egyenletek megoldása Hilbert-térben

Ebben a fejezetben egy H Hilbert-térben vizsgáljuk az

$$F(u) = b \tag{4.1}$$

alakú egyenleteket, ahol F monoton potenciáloperátor. Tehát a megoldások egy megfelelő konvex funkcionált minimalizálnak.

A potenciál monotonitásának egy olyan alakját használjuk, ami garantálja az operátor Gâteaux szerinti deriválhatóságát is. Pontosabban F' kívánt folytonossága és $F'(u)$ szimmetriája mellett

$$m\|h\|^2 \leq \langle F'(u)h, h\rangle \leq M\|h\|^2 \qquad (\forall\, u, h \in H) \tag{4.2}$$

ahol $M > m > 0$ konstansok. Bizonyításaink alapjául fog szolgálni legalább a feltétel bal oldali egyenlőtlensége, azaz, hogy $F'(u)$ egyenletesen pozitív operátor.

4.1. Monoton operátorok és potenciálok kapcsolata

Ebben a részben a (4.1) megoldásaira mondunk ki létezési és egyértelműségi tételeket. $F'(u)$ szimmetriáját és pozitivitását szinte mindig használni fogjuk, mert előbbi biztosítja, hogy F potenciál, utóbbi pedig azt, hogy monoton. A létezés és egyértelműség könnyen nyerhető variációs eszközökkel, konkrétan minimalizálnunk kell a (4.1)-hez tartozó konvex potenciált, azaz a $\Phi : H \to \mathbb{R}$ funkcionált, amely kielégíti a

$$\Phi'(u) = F(u) - b \qquad (u \in H) \tag{4.3}$$

egyenletet.

Szükségünk lesz néhány definícióra, melyeket most ki is mondunk.

4.1. Definíció. *Egy $(x_n) \subset H$ Hilbert-térbeli sorozat gyengén konvergál egy $x \in H$ elemhez, ha*

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \qquad (n \to +\infty)$$

teljesül $\forall\, y \in H$-ra.

4.2. Definíció. *Az $F : H \to H$ nemlineáris operátor bihemifolytonosan és szimmetrikusan Gâteaux-deriválható (továbbiakban* BSG*), ha*
(i) F G-deriválható,
(ii) F' hemifolytonos,
(iii) $\forall\, u \in H$-ra az $F'(u)$ operátor önadjungált.

4.1. Megjegyzés. Ha F BSG, akkor F potenciáloperátor, azaz létezik egy $\Psi : H \to \mathbb{R}$, funkcionál, amelyre teljesül: $\Psi'(u) = F(u) \quad (u \in H)$. Ráadásul az előző fejezet 3.1 Tétele alapján a szimmetria elégséges a potenciál létezéséhez.

A következőkben a fentebb definiált operátorokra mondunk ki egy alapvető fontosságú tételt.

4.1. Tétel. *Legyen H egy valós Hilbert-tér, és $F : H \to H$ operátorra legyen igaz az alábbi két tulajdonság*
(i) F BSG*,*
(ii) létezik egy $m > 0$ konstans, hogy

$$\langle F'(u)h, h\rangle \geq m\|h\|^2 \qquad (u, h \in H). \tag{4.4}$$

Ekkor minden $b \in H$ esetén az

$$F(u) = b$$

egyenletnek létezik egy egyértelmű $u^* \in H$ *megoldása, amely egyben az egyértelmű minimuma a* (4.3)*-at kielégítő,* $\Phi : H \to \mathbb{R}$ *funkcionálnak.*

Bizonyítás: (i) miatt F-nek létezik potenciálja, legyen ez $\Psi : H \to \mathbb{R}$ és

$$\Phi(u) = \Psi(u) - \langle u, b \rangle.$$

Továbbá Φ teljesíti (4.3)-at, ezért elegendő bizonyítanunk, hogy $\exists!\, u^* \in H$, amely a Φ funkcionált minimalizálja.
Minden $u \in H$-ra teljesül, hogy

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \langle \Phi'(0), u \rangle + \frac{1}{2}\langle \Phi''(\xi u)u, u \rangle \geq \Phi(0) + \Big(\frac{m}{2}\|u\| - \|\Phi'(0)\|\Big)\|u\|.$$

Emiatt

$$\lim \Phi(u) = +\infty \qquad (\|u\| \to +\infty)$$

és Φ alulról korlátos. Legyen (u_n) olyan H beli sorozat, melyre teljesül:

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi(u_n) = \inf_{u \in H} \Phi(u).$$

Ekkor $(\Phi(u_n))$ korlátos, mivel $(\|u_n\|)$ is korlátos. Tehát (u_n)-nek létezik egy u^*-hoz gyengén konvergáló részsorozata: (u_{n_k}).

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \Phi'(u^*), u_{n_k} \rangle = \langle \Phi'(u^*), u^* \rangle.$$

A (ii) feltételből következik, hogy Φ konvex, így a 2.1 Lemma állítása miatt teljesül minden k-ra:

$$\Phi(u_{n_k}) \geq \Phi(u^*) + \langle \Phi'(u^*), u_{n_k} - u^* \rangle.$$

Ekkor $k \to +\infty$ után azt kapjuk, hogy

$$\inf_{u \in H} \Phi(u) \geq \Phi(u^*),$$

azaz, Φ-nek u^*-ban minimumhelye van. Végezetül, mint láttuk, Φ szigorú konvexitása miatt a minimum egyértelmű. ■

4.1. Példa. Legyen H egy valós Hilbert-tér, $b \in H$ ennek egy rögzített eleme és $\langle ., . \rangle$ pedig a skalárszorzat a térben. Tekintsük az $Au = b$ operátoregyenletet, ahol

$A : H \to H$ egy folytonos lináris (és így korlátos), illetve önadjungált operátor. Könnyű belátni, a valós Hilbert-tér tulajdonságait kihasználva, hogy a

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle u, b\rangle \qquad (u \in H)$$

funkcionál G-deriválható. A G-deriváltját a definícióból számolhatjuk ki és mivel már tudjuk, hogy mi az $\langle u, b\rangle$ alakú funkcionálok deriváltja, így csak az első tagot fogjuk kiszámolni.

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\langle A(u+th), u+th\rangle - \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle\right] =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\big(\langle Au, u\rangle + \langle Au, (th)\rangle + \langle A(th), u\rangle + \langle A(th), (th)\rangle\big) - \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle\right] =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{t}{2}\langle Au, h\rangle + \frac{t}{2}\langle h, Au\rangle + \frac{t^2}{2}\langle Ah, h\rangle\right] =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[t\langle Au, h\rangle + \frac{t^2}{2}\langle Ah, h\rangle\right] = \langle Au, h\rangle$$

Tehát a funkcionál Gâteaux-deriváltja

$$\Phi'(u) = Au - b.$$

Itt jegyeznénk meg, hogy a potenciálokra vonatkozó kritériumot (ld. 4.1 Lemma) teljesíti az operátor, azaz

$$F(u) = Au - b \qquad (u \in H)$$

nyilvánvalóan bihemifolytonosan és szimmetrikusan G-deriválható, mivel minden $u \in H$-ra $F'(u) = A$, ami önadjungált és állandó, így F' bihemifolytonos.
Végül, ha A egyenletesen pozitív, azaz

$$\langle Ah, h\rangle \geq m\|h\|^2,$$

ahol $m > 0$ és nem függ h-tól, akkor F-re teljesül a (4.4) tulajdonság, tehát az $F(u) = Au - b = 0$ egyenlet speciális esete a 4.1 Tételnek.

4.2. Gradiens-módszer

Az F monoton potenciáloperátorokra vonatkozó egyszerű iterációs módszerek könnyedén tárgyalhatóak a gradiens-módszer kereteiben. Legyen $\Phi : H \to \mathbb{R}$ az

$$F(u) = b,$$

tehát a (4.1) egyenlethez tartozó potenciál, azaz $\Phi'(u) = F(u) - b$ teljesül minden $u \in H$ esetén. Ekkor az alább definiált sorozat, valamilyen $\alpha > 0$ konstans mellett minimalizálja Φ-t:

$$u_{n+1} = u_n - \alpha\Phi'(u_n) = u_n - \alpha\big(F(u_n) - b\big) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az alábbiakban ismertetjük a gradiens-módszert. Választunk α-nak egy optimális konstanst, de megjegyezzük, hogy változó α mellett a módszer javítható. Ugyanazokat a feltételeket használjuk, mint a 4.1 Tétel esetében, és még feltesszük, hogy az operátor felülről is korlátos.

A továbbiakban szükségünk lesz egy lemmára, amit most ki is mondunk.

4.1. Lemma. *Legyen A önadjungált operátor H-n. Továbbá léteznek $M \geq m > 0$ konstansok, hogy*

$$m\langle h, h\rangle \leq \langle Ah, h\rangle \leq M\langle h, h\rangle, \tag{4.5}$$

azaz az operátor által indukált norma ekvivalens az euklideszi normával. Ekkor igaz a következő kontrakciós becslés:

$$\Big\| I - \frac{2}{M+m}A \Big\| \leq \frac{M-m}{M+m},$$

ahol I az identitás operátor.

Bizonyítás: Mivel A önadjungált ezért tudjuk, hogy $I - \frac{2}{M+m}A$ szintén önadjungált. A normája tehát számolható az alábbiak szerint.

$$\Big\| I - \frac{2}{M+m}A \Big\| = \sup_{\|h\|=1} \Big\{ \big|\big\langle (I - \frac{2}{M+m}A)h, h\big\rangle\big| \Big\} =$$
$$= \sup_{\|h\|=1} \Big\{ \big|\langle h, h\rangle - \frac{2}{M+m}\langle Ah, h\rangle\big| \Big\} = \sup_{\|h\|=1} \Big\{ \big|1 - \frac{2}{M+m}\langle Ah, h\rangle\big| \Big\}.$$

Az utolsó tagot tudjuk alulról, illetve felülről becsülni a (4.5) becslések segítségével:

$$-\frac{M-m}{M+m} = 1-\frac{2}{M+m}M \leq \sup_{\|h\|=1} \left\{1-\frac{2}{M+m}\langle Ah, h\rangle\right\} \leq 1-\frac{2}{M+m}m = \frac{M-m}{M+m},$$

azaz pont a kívánt egyenlőtlenséget kaptuk. ■

4.2. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy [2]-ben található egy általánosabb lemma, amely a gradiens módszer más változatainál és erősebb tételek bizonyításában jól használható. Az ott található lemma állításai a következőek.

Legyenek A és B egyenletesen pozitív és önadjungált operátorok a H Hilbert-téren. Továbbá $M \geq m > 0$ konstansok, úgy hogy

$$m\langle Bh, h\rangle \leq \langle Ah, h\rangle \leq M\langle Bh, h\rangle,$$

Teljesül. Azaz a két operátor által indukált normák ekvivalensek. Ekkor igaz a következő két kontrakciós becslés:

$$\begin{aligned} \left\| I - \frac{2}{M+m}AB^{-1}\right\|_{A^{-1}} &\leq \frac{M-m}{M+m}, \\ \left\| I - \frac{2}{M+m}B^{-1}A\right\|_{B} &\leq \frac{M-m}{M+m}, \end{aligned}$$

ahol I az identitás operátor.

Nyilvánvalóan, a 4.1 Lemma a második egyenlőtlenség egy speciális esete $B = I$ esetén.

4.2. Tétel. ***(Gradiens-módszer:)*** *Legyen H valós Hilbert-tér, az $F : H \to H$ operátor pedig rendelkezzen az alábbi két tulajdonsággal:*

(i) F Bsg,

(ii) léteznek $M \geq m > 0$ konstansok úgy, hogy

$$m\|h\|^2 \leq \langle F'(u)h, h\rangle \leq M\|h\|^2 \qquad (u, h \in H). \tag{4.6}$$

Legyen továbbá $b \in H$ tetszőleges és jelölje $u^* \in H$ az

$$F(u) = b$$

egyenlet egyedüli megoldását.

Ekkor minden $u_0 \in H$ esetén az

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M+m}\big(F(u_n) - b\big) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.7}$$

sorozat u^*-hoz konvergál és érvényes az

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{1}{m}\|F(u_0) - b\|\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.8}$$

becslés.

Bizonyítás: u^* létezése és egyértelműsége a 4.1 Tétel következménye.

Tekintsük az alábbi $J : H \to H$ funkcionált:

$$J(u) := u - \frac{2}{M+m}F(u) \qquad (u \in H). \tag{4.9}$$

Ekkor, mivel mind az F, mind az identitás operátor G-deriválható, ezért létezik $J'(u)$ és

$$J'(u)h := h - \frac{2}{M+m}F'(u)h \qquad (u \in H), \tag{4.10}$$

így $J'(u)$ önadjungált. Alkalmazható a 4.1 Lemma. Tehát $J'(u)$ egy kontrakció, a kontrakciós állandó pedig $\frac{M-m}{M+m}$. Ekkor J is kontrakció valamilyen konstanssal, mert

$$\|J(v) - J(u)\| = \|\int_0^1 J'(u + t(v-u))(v-u)dt\| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \|J'(u + t(v-u))(v-u)\|dt \leq \int_0^1 \frac{M-m}{M+m}\|v-u\|dt = \frac{M-m}{M+m}\|v-u\|.$$

A (4.7) rekurzió könnyedén felírható a J operátor segítségével:

$$u_{n+1} - u^* = u_n - u^* - \frac{2}{M+m}\big(F(u_n) - F(u^*)\big) = J(u_n) - J(u^*) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

az előző becslést felhasználva adódik, hogy

$$\|u_{n+1} - u^*\| \leq \frac{M-m}{M+m}\|u_n - u^*\| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Teljes indukcióval adódik, hogy

$$\|u_n - u^*\| \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|u_0 - u^*\| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az F operátor alsó korlátja miatt teljesül még az is, hogy

$$\|F(u_0) - F(u^*)\| \geq m\|u_0 - u^*\|$$
$$\frac{1}{m}\|F(u_0) - b\| \geq \|u_0 - u^*\|,$$

azaz a hibabecslésünk teljesül. ■

4.3. Megjegyzés. A fenti bizonyításban látható, hogy a (4.7) sorozat tekinthető egy fixpont-iterációnak is. Írjuk más alakban az $F(u) = b$ egyenletet:

$$u = u - \frac{2}{M+m}(F(u) - b).$$

Ekkor nyilvánvalóan elég azt bizonyítanunk, hogy

$$J = I - \frac{2}{M+m}F$$

egy kontrakció és a kontrakciós állandó $\frac{M-m}{M+m}$.

4.4. Megjegyzés. A 4.2 Tétel állításai akkor is érvényben maradnak, ha a (ii) feltételben felső becslés csak úgy adható, ha M függ u választásától. Valójában csak egy $M : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ függvénnyel tudjuk felülről becsülni a G-deriváltat úgy, hogy a (4.6) egyenlőtlenség jobb oldala, az alábbira módosul:

$$\langle F'(u)h, h\rangle \leq M(\|u\|)\|h\|^2. \tag{4.11}$$

Ekkor a módosított tétel azt mondja ki, hogy minden $u_0 \in H$ esetén az

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M_0+m}\big(F(u_n) - b\big) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat u^*-hoz konvergál és érvényes az

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{1}{m}\|F(u_0) - b\| \left(\frac{M_0 - m}{M_0 + m}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

becslés. Az M_0 konstans értéke pedig

$$M_0 := M\big(\|u_0\| + \frac{1}{m}\|F(u_0) - b\|\big). \tag{4.12}$$

4.2. Példa. Mint fentebb láttuk, a (4.1) példa teljesíti a 4.1 Tétel feltételeit, és ha még teljesül rá, hogy felülről is korlátos valamilyen M konstanssal, akkor alkalmazható rá a gradiens-módszer. Nézzük meg a hozzá tartozó sorozatot és hogy milyen hibabecslést adhatunk.

Az egyenlet, amire alkalmaznunk kell a gradiens módszert: $F(u) = Au - b = 0$. A kezdővektorunk legyen $u_0 = 0$, $b \in H$ pedig egy rögzített elem. Ekkor a sorozat

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M+m}\big(F(u) - 0\big) = u_n - \frac{2}{M+m}\big(Au_n - b\big),$$

a hibabecslés pedig

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{\|b\|}{m}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n.$$

5. fejezet

Egy fizikai példa: sugárzó lehűlés

5.1. Az eredeti feladat

Az egyenletesen sugározva hűlő testek vagy gázok a következő, Neumann-féle peremfeltétellel ellátott problémát elégítik ki (bővebben ld. [4]).

$$\nabla \cdot (\kappa(x)\nabla T) = \sigma(x)T^4 \qquad (x \in D), \tag{5.1}$$

$$\kappa(x)\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(x,T)\Big(T_0(x) - T\Big) \qquad (x \in \partial D). \tag{5.2}$$

A fenti egyenletben κ a hőmérsékletvezető képesség, σ a Boltzmann-tényező, α pedig a hőátviteli tényező, illetve $T_0(x)$ kezdeti hőmérséklet mind pozitívak.

A továbbiakban a függvények változóit nem fogjuk feltüntetni, viszont az integrációs változót igen.

Az előző fejezetekben tárgyalt módszerek könnyen bemutathatóak a fenti példa egydimenziós változatában. Ekkor feltehetjük, hogy az $I = [-1,1]$ intervallumra fektetett, körben szigetelt, azaz csak a végpontjaiban sugárzó drótot tekintjük. Továbbá feltesszük még, hogy $\kappa \equiv 1$, σ pedig állandó[1]. Ha alkalmazni akarjuk a 4.1 Tételt, akkor át kell írnunk az (5.1) egyenletet. Tudjuk, hogy T mértékegysége Kelvin, azaz $T > 0$. Így megszorítás nélkül átírhatjuk az egyenletet az alábbi alakba:

$$-T'' + \sigma|T|^3T = 0 \qquad (x \in [-1,1]). \tag{5.3}$$

[1]Értéke pedig $\sigma = 56,71\frac{nW}{m^2K^4}$.

A peremfeltétel pedig az alábbiakra változik:

$$T'(1) = \alpha\big(T_1 - T(1)\big)$$
$$T'(-1) = -\alpha\big(T_{-1} - T(-1)\big), \tag{5.4}$$

ahol az egyszerűség kedvéért $T_0(\pm 1) = T_{\pm 1}$.

5.2. Az egydimenziós feladat alaptere

Mostantól az (5.4) peremfeltétellel ellátott (5.3) feladatot és funkcionált vizsgáljuk a valós $(H^1(I), \langle .,. \rangle)$ Hilbert-térben, ahol $I = [-1,1]$ és az alábbi skalárszorzatot értelmezzük:

$$\langle u, v\rangle := \int_{-1}^{1} u'v' \,\mathrm{d}t + \alpha\big(u(1)v(1) + u(-1)v(-1)\big).$$

5.1. Állítás. Ez tényleg skalárszorzat.

Bizonyítás: A linearitás és a szimmetria triviális, a pozitív definitséget pedig le kell ellenőriznünk. Tudjuk, hogy α a hőátviteli tényező, így pozitív. Legyen továbbá $u \in H^1(I)$, ekkor

$$\langle u, u\rangle = \int_{-1}^{1} u'u' \,\mathrm{d}t + \alpha\big(u(1)u(1) + u(-1)u(-1)\big) \tag{5.5}$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} (u')^2 \,\mathrm{d}t}_{\geq 0} + \alpha \underbrace{\big((u(1))^2 + (u(-1))^2\big)}_{\geq 0} \geq 0. \tag{5.6}$$

Tudjuk, hogy az integrál pontosan akkor nulla, ha $u = const$, a második tag pedig pontosan akkor, ha $u(\pm 1) = 0$, azaz $\langle u, u\rangle = 0$ akkor $u \equiv 0$. Tehát $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ tényleg skalárszorzat. ■

5.3. A gyenge alak

A könnyebb vizsgálat érdekében hozzuk gyenge alakra az (5.3) közönséges differenciálegyenletet, vagyis szorozzuk be mindkét oldalt egy tetszőleges $h \in H^1(I)$ beli függvénnyel, majd integráljuk I-n mindkét oldalt.

$$0 = \int_{-1}^{1} \Big(- T''h + \sigma |T|^3 T h\Big) \mathrm{d}x = \Big[- T'h\Big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \Big(T'h' + \sigma|T|^3 T h\Big)\,\mathrm{d}x$$

A peremfeltételek beírásával

$$\int_{-1}^{1}\Big(T'h'+\sigma|T|^3Th\Big)\mathrm{d}x+\alpha\big(h(1)T(1)+h(-1)T(-1)\big)=$$
$$=\alpha\big(h(1)T_1+h(-1)T_{-1}\big) \tag{5.7}$$

gyenge alakot kapjuk, azaz $\langle F(T),h\rangle=\langle b,h\rangle$.

5.4. A megoldás létezése

Az egyenlet esetében könnyen egzisztenciát nyerhetünk a 4.1 Tétellel segítségével, vagy megoldhatnánk a gradiens-módszerrel. Előbbihez csak ellenőrizzük kell a BSG tulajdonságot és a (4.4) feltételt.

5.2. Állítás. *Az F operátor teljesíti mindkét feltételt, azaz*
(i) az F bihemifolytonosan szimmetrikusan G-deriválható;
(ii) $\exists\, m>0$ konstans úgy, hogy $F'(u)\geq mI$.

Bizonyítás: (i) Nézzük meg először a Gâteaux-derivált szimmetriáját, majd a bihemifolytonosságot:

$$\Big\langle F'(u)h,k\Big\rangle=\Big\langle \lim_{t\to 0}t^{-1}\big(F(T+th)-F(T)\big),k\Big\rangle, \tag{5.8}$$

ahol $h,k\in H$ tetszőlegesek. Az első fejezetben található példák alapján tagonként kiszámolva ismét könnyen látható, hogy az F operátor T-beli Gâteaux-deriváltja:

$$\Big\langle F'(T)h,k\Big\rangle=\int_{-1}^{1}\Big(h'k'+4|T|^3hk\Big)\mathrm{d}x+\alpha(h(1)k(1)+h(-1)k(-1)). \tag{5.9}$$

Nyilvánvalóan teljesül a szimmetria, azaz $\langle F'(T)h,k\rangle=\langle F'(T)k,h\rangle$.

A bihemifolytonosságot a definícióból ellenőrizzük, a könnyebb kezelhetőség érdekében az operátor deriváltját három részre bontjuk:

$$\langle F_1'(T)h,k\rangle=\int_{-1}^{1}h'k'\,\mathrm{d}x, \tag{5.10}$$
$$\langle F_2'(T)h,k\rangle=\int_{-1}^{1}4|T|^3hk\mathrm{d}x, \tag{5.11}$$
$$\langle F_3'(T)h,k\rangle=\alpha\big(h(1)k(1)+h(-1)k(-1)\big). \tag{5.12}$$

Mivel (5.10) és (5.12) független T-től, így nyilván bihemifolytonos. Egyedül F_2' nem független tőle, tehát azt szeretnénk belátni, hogy

$$F_2'(T+tv+sw)h - F_2'(T)h \to 0 \qquad (s,t\to 0).$$

Elég, ha a fenti különbség normája tart nullához, ami felírható supremummal:

$$\sup_{h\in H,\|h\|=1}\Big\{\big\langle F_2'(T+tv+sw)h - F_2'(T)h, k\big\rangle\Big\} =$$
$$= \sup_{h\in H,\|h\|=1}\Big\{\int_{-1}^{1}\Big(4|T+tv+sw|^3 - 4|T|^3\Big)hk\,\mathrm{d}x\Big\} \to 0$$

$s,t\to 0$ mellett. Alkalmazzuk a Lebesgue-tételt, pontonként az integrál tart nullához. Továbbá, ha $t,s\le 1$, akkor a

$$4\big(|T+v+w|^3 + |T|^3\big)|hk|$$

egy integrálható majoráns.

A fentieket összegezve azt kapjuk, hogy F BSG tulajdonságú.

(ii) Könnyen látható, hogy egyenletes alsó korlátnak $m=1$ választás megfelelő, hiszen ha az integrál második tagját elhagyjuk és $h=k$, akkor pont a $\langle h,h\rangle$ skalárszorzatot kapjuk. ■

A 4.1 Tétel miatt tudjuk, hogy létezik potenciál, a második fejezetben található három példa alapján az a sejtésünk, hogy az operátor potenciálja

$$\Phi(u) = \int_{-1}^{1}\Big(\frac{1}{2}(u')^2 + \sigma\frac{1}{5}|u|^5\Big)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\alpha\big((u(1))^2 + (u(-1))^2\big) - \\ -\big(u(1)\gamma(1) + u(-1)\gamma(-1)\big). \quad (5.13)$$

5.3. Állítás. *Az F operátor potenciáloperátor és a potenciálja nem más, mint az* (5.13)*-ban meghatározott Φ funkcionál.*

Bizonyítás: A könnyebb kezelhetőség érdekében bontsuk Φ-t négy részre:

$$\Phi_1(u) = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(u')^2\,\mathrm{d}x, \qquad (5.14)$$

$$\Phi_2(u) = \int_{-1}^{1}\sigma\frac{1}{5}|u|^5\,\mathrm{d}x, \qquad (5.15)$$

$$\Phi_3(u) = \frac{1}{2}\alpha\big((u(1))^2 + (u(-1))^2\big), \qquad (5.16)$$

$$\Phi_4(u) = \big(u(1)\gamma(1) + u(-1)\gamma(-1)\big) \qquad (5.17)$$

majd tekintsük a G-deriváltjaikat egyenként. Az első esetben az 1.1 példában már kiszámoltuk a Gâteaux-féle deriváltat, hiszen az (1.6) egyenletben $\Psi \equiv \Phi_1$, így

$$\langle \Phi_1'(u), h \rangle = \int_{-1}^{1} u'h' \, \mathrm{d}x.$$

A második funkcionál az 1.2 példa egy speciális esete, $L(t) = \sigma \frac{1}{5}|t|^5$ esetben. L deriváltja pedig pont $\sigma|t|^3 t$, így

$$\langle \Phi_2'(u), h \rangle = \int_{-1}^{1} \sigma |u|^3 u h \, \mathrm{d}x$$

A harmadik esetben ismételten a definícióra kell hagyatkoznunk a G-derivált kiszámolásánál.

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\Phi_3(u+th) - \Phi_3(u)\Big) = \\
&\quad \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t}\alpha\Big((u(1)+th(1))^2 + (u(-1)+th(-1))^2 - (u(1))^2 + (u(-1))^2\Big) = \\
&\qquad \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t}\alpha\Big(2tu(1)h(1) + (th(1))^2 + 2tu(-1)h(-1) + (th(-1))^2\Big) = \\
&\qquad\quad = \alpha\Big(u(1)h(1) + u(-1)h(-1)\Big)
\end{aligned}$$

Tehát a Φ_3 funkcionál G-deriváltja

$$\langle \Phi_3(u), h \rangle = \alpha\Big(u(1)h(1) + u(-1)h(-1)\Big).$$

A Φ_4 funkcionál G-deriváltjának könnyebb kiszámolása érdekében tekintsük az alább definiált vektorokat:

$$\hat{u} := \begin{pmatrix} u(1) \\ u(-1) \end{pmatrix} \qquad (\forall\, u \in H^1(I)), \qquad \hat{\gamma} := \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(-1) \end{pmatrix}.$$

Ekkor a $\Phi_4(u) = u(1)\gamma(1) + u(-1)\gamma(-1)$ funkcionált felírhatjuk a szokásos $\mathbb{R}^2$ beli skalárszorzat alakjában:

$$\Phi_4(u) = \alpha\big\langle \hat{u}, \hat{\gamma} \big\rangle_{\mathbb{R}^2},$$

ahol $\hat{\gamma}$ egy rögzített vektor, azaz egy $\Phi_4 : H^1(I) \to \mathbb{R}$ funkcionál G-deriváltját keressük. Ez viszont az 1.3 Példa alapján nem más mint

$$\langle \Phi_4'(u), h \rangle = \alpha\big\langle \hat{h}, \hat{\gamma} \big\rangle_{\mathbb{R}^2} = \alpha\big(h(1)\gamma(1) + h(-1)\gamma(-1)\big).$$

Adjuk össze a négy funkcionál Gâteaux-féle deriváltját, ekkor a

$$\langle \Phi'(u), h\rangle = \langle \Phi_1'(u), h\rangle + \langle \Phi_2'(u), h\rangle + \langle \Phi_3'(u), h\rangle + \langle \Phi_4'(u), h\rangle$$

egyenlőséget kapjuk és ha visszaírjuk a kiszámított deriváltakat:

$$\langle \Phi'(u), h\rangle = \int_{-1}^{1}\Big(u'h' + \sigma|u|^3 uh\Big)\mathrm{d}x + \alpha\big(u(1)h(1) + u(-1)h(-1)\big) + \\ +\big(h(1)\gamma(1) + h(-1)\gamma(-1)\big),$$

azaz pont az (5.7) gyenge alakot kapjuk (az $u \in H^1(I)$ függvényre és $T_0 = \gamma$ esetén). Tehát a Φ funkcionál valóban F potenciálja. ■

5.1. Következmény. *A peremérték feladatnak $\exists!\, u \in H^1(I)$ gyenge megoldása.*

5.5. A numerikus megoldás: gradiens-módszer

Nézzük meg, hogy a gradiens-módszerrel hogyan tudjuk megoldani az egyenletet. A $|T|^3T$-s tag miatt a gradiens-módszernek csak az előző fejezetben a 4.4 megjegyzésben tárgyalt változatát használhatjuk.

A felső korlátunk M_0 (ld. (4.12)) kiszámítása nehézkes, [2]-ben található.

A sorozatunkat az alábbi rekurzióval definiálhatjuk:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M_0 - 1} z_n \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{5.18}$$

ahol $z_n = F(u_n) - b$ egyenletet elégíti ki.

5.4. Állítás. *A gradiens-módszer-beli z_n az alábbi peremérték feladat gyenge megoldása:*

$$-z_n'' = -u_n'' + \sigma|u_n|^3 u_n,$$

ahol, a vegyes peremfeltétel az alábbi:

$$\alpha z_n(1) + z_n'(1) = \alpha(u_n(1) - T_1) + u_n'(-1)$$
$$\alpha z_n(-1) - z_n'(-1) = \alpha(u_n(-1) - T_{-1}) - u_n'(-1).$$

Bizonyítás: (i) A fentiek szerint teljesülnek a következőek:

$$\langle z_n, h\rangle = \langle F(u_n) - b, h\rangle = \langle F(u_n), h\rangle - \langle b, h\rangle \qquad (\forall h \in H).$$

A fenti egyenlet szerint az alábbiaknak kell teljesülnie:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} z_n' h' \,\mathrm{d}x + \alpha\big(z_n(1)h(1) + z_n(-1)h(-1)\big) = \\ = \int_{-1}^{1} \Big(u_n' h' + \sigma|u_n|^3 u_n h\Big)\mathrm{d}x + \alpha\big(h(1)u_n(1) + h(-1)u_n(-1)\big) - \\ -\alpha\big(h(1)T_1 + h(-1)T_{-1}\big).\end{aligned}$$

A fentieket erős alakra hozva egyrészt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} z_n' h' \,\mathrm{d}x + \alpha\big(z_n(1)h(1) + z_n(-1)h(-1)\big) = \\ =&\int_{-1}^{1} -z_n'' h \,\mathrm{d}x - \Big[-z_n' h\Big]_{-1}^{1} + \alpha\big(z_n(1)h(1) + z_n(-1)h(-1)\big) = \\ =&\int_{-1}^{1} -z_n'' h \,\mathrm{d}x + h(1)\big(\alpha z_n(1) + z_n'(1)\big) + h(-1)\big(\alpha z_n(-1) - z_n'(-1)\big);\end{aligned}$$

másrészt pedig:

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\Big(u_n' h' + \sigma|u_n|^3 u_n h\Big)\mathrm{d}x + \alpha\big(u_n(1)h(1) + u_n(-1)h(-1)\big) = \\ =&\int_{-1}^{1}\Big(-u_n'' h + \sigma|u_n|^3 u_n h\Big)\mathrm{d}x - \Big[-u_n' h\Big]_{-1}^{1} + \alpha\big(z_n(1)h(1) + z_n(-1)h(-1)\big) = \\ =&\int_{-1}^{1}\Big(-u_n'' + \sigma|u_n|^3 u_n\Big)h\mathrm{d}x + \\ &+ h(1)\big(\alpha(u_n(1) - T_1) + u_n'(-1)\big) + h(-1)\big(\alpha(u_n(-1) - T_{-1}) - u_n'(-1)\big).\end{aligned}$$

(ii) Tudjuk, hogy a felső két sor egyenlő, ekkor viszont az utolsó kettő is az, $\forall h \in H^1(I)$ esetén. Először tekintsük az

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} -z_n'' h \,\mathrm{d}x + h(1)\big(\alpha z_n(1) + z_n'(1)\big) + h(-1)\big(\alpha z_n(-1) - z_n'(-1)\big) \\ =&\int_{-1}^{1}\Big(-u_n'' + \sigma|u_n|^3 u_n\Big)h\mathrm{d}x + \\ &+ h(1)\big(\alpha u_n(1) + u_n'(1) - \alpha T_1\big) + h(-1)\big(\alpha u_n(-1) - u_n'(-1) + \alpha T_{-1}\big)\end{aligned}$$

egyenletet minden h-ra a $H_0^1(I)$-ből. Ekkor a két perem eltűnik, és azt kapjuk, hogy

$$\int_{-1}^{1} -z_n'' h \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\Big(-u_n'' + \sigma|u_n|^3 u_n\Big)h\mathrm{d}x \qquad (\forall h \in H_0^1(I)), \tag{5.19}$$

ebből azt kapjuk, hogy $-z_n'' = -u_n'' + \sigma|u_n|^3 u_n$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

(iii) Most $h \in H^1(I)$ mellett tekintsük az (5.19) egyenletet. Mivel tudjuk, hogy az integrálok egyenlőek, így ha minden h-ra fennáll az egyenlőség, akkor a peremen is egyenlőek. ∎

5.1. Megjegyzés. A fenti állításban a peremfeltételek írhatóak az alábbi alakban is:

$$\partial_\nu z_n + \alpha z_n = \partial_\nu u_n + \alpha(u_n - T_0).$$

Ez pedig pont egybecseng a magasabb dimenziós esettel.

5.1. Tétel. *Az* (5.4) *peremfeltétel mellett, az* (5.3) *egyenletnek, létezik megoldása, továbbá az* (5.18) *sorozat ehhez konvergál, ahol* z_n *eleget tesz a 5.4 állításban kimondottaknak.*

A sorozatra pedig az alábbi hibabecslés adható:

$$\|u_n - u^*\| \leq const\Big(\frac{M_0 - 1}{M_0 + 1}\Big)^n.$$

Bizonyítás: A megoldás létezéséhez a 4.1 Tétel feltételeit kell ellenőriznünk, amit az 5.2 állításban meg is tettünk. Továbbá ez a tétel a potenciál létezését is garantálja, amit az 5.3 állításban ki is számoltunk.

A z_n függvényekre vonatkozó állítást a 5.4 állításban megmutattuk.

A konvergenciát és a hibabecslést pedig a 4.2 Tétel, illetve az őt követő 4.4 következmény biztosítja. ■

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék megköszönni témavezetőmnek Karátson Jánosnak, a rengeteg segítséget, türelmet és észrevételt (a vesszőhibák kijavítását nem is említve), illetve azt, hogy megismertette velem funkcionálanalízist.

Köszönettel tartozom még azoknak, akik segítették a hibák számát minimalizálni, és nem utolsósorban a családomnak, Édesanyámnak és Neki.

Irodalomjegyzék

[1] J. Céa: Lectures on: Otimization – Theory and Algorithms, TATA Institute of Fundamental Research (Bombay), Springer-Verlag (1978).

[2] Faragó I., Karátson J.: Numerical solution of nonlinear elliptic problems via preconditioning operators, Advances in Computation, Volume 11, NOVA Science Publishers, New York (2002).

[3] Karátson J.: Funkcionálanalízis és Alkalmazásai a Numerikus Analízisben, elektronikus jegyzet, `http://www.cs.elte.hu/~karatson/funknum.pdf`, (K. J. előadásai alapján: Kurics T.)

[4] H.B. Keller: Elliptic Boundary Value Problemsn Suggested by Nonlinear Diffusion Processes, *8. Radiative-Cooling Problems*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Berlin / Heidelberg, Volume 35, (1969), oldalak: 363-381.

[5] Kósa A.: Variációszámítás, Egyetemi tankönyv, Tankönyvkiadó (1973).

[6] E. Zeidler: Nonlinear Functional Analysis and its Applications III., *Variational Methods and Optimization*, Springer-Verlag, New York (1985).