ELÁGAZÓ FOLYAMATOK

Szakdolgozat

Írta: Szepesváry László

Matematika Bsc,
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Móri Tamás, egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2009

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Tekintsük a következő modellt. Kezdetben van egyetlen egyed, ő alkotja a 0. generációt. A kiindulási egyed p_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) valószínűséggel k db utódot hoz létre, ők alkotják az első generációt. Az n-edik lépésnél az $(n-1)$-edik nemzedék egyedei egymástól és az őket megelőző generációktól függetlenül p_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) valószínűséggel k db utódot hoznak létre. A keletkező új egyedek alkotják az n-edik nemzedéket, akikkel a szaporodási folyamat újra kezdődik. Ezen modellt Galton–Watson folyamatnak, más néven elágazó folyamatnak nevezik.

A fent vázolt problémakör története a 18. századig nyúlik vissza. Sir Francis Galton és Henry William Watson angol tudósok a nemesi családnevek kihalásának valószínűségét vizsgálták az elágazó folyamatok segítségével. 1874-es *On the probability of extinction of families* című cikkük tekinthető a téma alapkövének. Később, a tudomány fejlődésével számos, a fizika és a biológia területéről származó problémát vezettek vissza az elágazó folyamatok modelljére. A Bevezetés végén ezek közül néhányat részletesebben is bemutatunk. Fontossága és szépsége miatt az elágazó folyamatok elmélete mára a valószínűségszámítás külön fejezetévé vált, évről-évre temérdek alkalmazásokban is bővelkedő cikk születik a témával kapcsolatban.

Ebben a dolgozatban azzal fogunk foglalkozni, hogyan alkalmazhatunk generátorfüggvényeket illetve martingálokat az elágazó folyamatok vizsgálatára. Az első részben bevezetjük a generátorfüggvény fogalmát, bebizonyítjuk legfontosabb tulajdonságait, majd ezek segítségével meghatározzuk a Galton–Watson folyamatban az utódszám és a kihalás legfontosabb jellemzőit. Az itt kimondott tételek hasonló formában megtalálhatóak a [2], [3], [6] forrásokban is. Mutatunk majd továbbá néhány érdekes példát a szereplő állítások alkalmazására, valamint azok általánosításaira. A második részben röviden összefoglaljuk a martingálok azon tulajdonságait, melyekre később hivatkozni fogunk, majd több önmagában is érdekes állítás segítségével belátunk egy elágazó folyamatokra vonatkozó centrális határeloszlás-tételt. Ezen szakasz megírásakor az [1] és [5] irodalmakra támaszkodtam.

Megemlítjük továbbá, hogy az itt érintett témák az elágazó folyamatok elméletének csak egy kis szeletébe nyújtanak betekintést. A fentiekben leírt modell többféleképpen általánosítható. Tekinthetünk például olyan elágazó folyamatokat, ahol k különböző típusú egyed él, és egy j-edik fajtájú egyed $p^{(j)}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ valószínűséggel i_1 db első, i_2 darab második, $\ldots$, i_k darab k-adik típusú utódot hoz létre. Például, ha $k = 2$, akkor ,férfi' és ,nő' típusú egyedekkel elkészíthető az emberiség szaporodásának matematikai modellje.

Az általánosítás másik útja lehet a folytonos idejű elágazó folyamatok világa, ahol azt is számításba vesszük, hogy egy adott nemzedék tagjai mikor születtek, és mikor hozzák létre utódaikat. Az említett témákról részletesebben olvashatunk a [3] műben.

Kedvcsináló gyanánt nézzünk néhány egyszerű a köznapi életből, valamint a biológia és a fizika területéről vett példát az elágazó folyamatok alkalmazására.

• *A családnév fentmaradása*

Tekintsünk egy 18. századi az angol nemest, akit hívjanak Sir Lionelnek, és tegyük fel, hogy ő az egyetlen Lionel vezetéknevű a világon (ősei és azok leszármazottai mind meghaltak). Az úr azt szeretné megtudni, hogy milyen valószínűséggel marad fent családneve a későbbiekben. Ehhez elég a fiú utódokat tekintenünk, hiszen a vezetéknév csak az ő révükön öröklődik. Tegyük fel, hogy az egyedek szaporulata független és azonos eloszlású: p_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ valószínűséggel születik k számú fiú gyermeke valakinek. Ezzel némileg leegyszerűsítjük a feladatot, hiszen a természetes szaporulatot a társadalmi hatások befolyásolhatják (ezáltal p_k generációnként változhat), valamint a függetlenség sem mindig teljesül. Ennek ellenére kis finomítással az elágazó folyamat jó modellje a problémának: Sir Lionel alkotja a 0. generációt, az ő fiú gyermekei az első, fiú unokái a második nemzedéket, és így tovább. A családnév kihalása akkor következik be, ha valamely generációban minden egyednek 0 fiú utódja születik.

• *Mutáns gének fentmaradása*

Egy szervezet valamely génje bizonyos külső hatásokra mutáns génné alakulhat. Tegyük fel, hogy ez bekövetkezik, az így létrejött mutáns gén lesz a nulladik generációs ős. Innentől kezdve a következő generáció k darab egyedében p_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ valószínűséggel újra megjelenik a mutáns gén. Az elágazó folyamatok segítségével megbecsülhetjük a mutáns gén kihalásának, avagy elterjedésének valószínűségét.

• *Nukleáris láncreakció*

Ebben a példában az egyedek neutron részecskék lesznek, melyek ha egy atommaggal ütköznek, széthasítják azt. A hasadás eredményeként m számú neutron keletkezik. Ebben a folyamatban az utódok lehetséges száma 0 vagy m, előbbi p_0, míg utóbbi $p_m = 1 - p_0$ valószínűséggel következik be. Ezen a problémát az atombomba működése kapcsán vizsgálták. Ha beindul a maghasadás (azaz a részecskék száma korlátlanul növekszik), akkor bekövetkezik a robbanás.

• *Elektronsokszorozók*

Az elektronsokszorozó olyan műszer, melyet a gyenge elektronáram felerősítésére használnak. Az elektronok útjába kis lapocskákat helyeznek el: mikor egy elektron részecske egy ilyennek ütközik véletlen számú új elektront szakít le. Világos, hogy a probléma jól modellezhető elágazó folyamattal. Az előző példáktól eltérően, mivel a fémlapok száma véges, itt nincs értelme azt vizsgálni, hogy mi történik $n \to \infty$ esetén, de például fontos kérdés lehet, hogy mennyi az utolsó fémlapról távozó elektronok száma, azaz mennyire sikerült felerősíteni az áramot.

• *,,Küldd tovább!" típusú levelek*

Manapság gyakran találkozunk az interneten ,,Küldd tovább!" típusú levelekkel. Tegyük fel, hogy egy felhasználó p_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ valószínűséggel k számú embernek küld tovább egy üzenetet. Ha elküldünk egy levelet egy ismeretlen címre, elágazó folyamatot indítunk el. A címzett lesz a nulladik generációs ős, az ismerősei akiknek továbbküldi az első nemzedék, és így tovább. Itt a folyamat kihalása annak felel meg, hogy valamely generációban egyik felhasználó sem küldi tovább a levelet.

2. Generátorfüggvények és elágazó folyamatok

A dolgozat ezen részében azzal fogunk foglalkozni, hogyan tudunk generátorfüggvényeket alkalmazni az elágazó folyamatok vizsgálatára. Az első szakaszban összefoglaljuk a generátorfüggvények és a véletlen tagszámú összegek legfontosabb tulajdonságait. Ezek alapján a második és a harmadik szakaszban kiszámítjuk egy elágazó folyamatban az egyes generációk lélekszámának generátorfüggvényét és a folyamat kihalásának valószínűségét. A negyedik szakaszban pedig a kezdeti ős leszármazottainak számát vizsgáljuk.

Az első három szakasz felépítésénél leginkább a [3] és [6] művek logikáját követtem. A tételek alkalmazására mutatott példák többsége a [3] forrásban található *Feladatok* formájában, melyeket némileg kiegészítettem, ahol lehetett általánosítottam az eredményeket. A negyedik szakaszban a [2] mű eredményeit használtam fel.

2.1. Generátorfüggvények

2.1. Definíció. *Legyen $a_0, a_1, a_2, \dots$ valós számsorozat. A $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ függvényt az a_k sorozat generátorfüggvényének nevezzük.*

Mivel csak ilyenekkel fogunk dolgozni, tegyük fel mostantól, hogy az a_k sorozat tagjai nemnegatívak, és teljesül a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq 1$ feltétel. Ismeretes, hogy ekkor $g(z)$ abszolút konvergens a $[-1,1]$-ben, akárhányszor differenciálható a $(-1,1)$-ben, és lehet tagonként deriválni:

$$g^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot a_k \cdot z^{k-n}.$$

Fontos lesz az a speciális eset, amikor az a_k sorozat egy nemnegatív egész értékű X valószínűségi változó eloszlása (azaz $P(X = k) = a_k$). Ekkor az a_k sorozat generátorfüggvényét az $E\big(z^X\big)$ várható értékkel is definiálhatjuk, és az ebből adódó összeget legtöbbször X generátorfüggvényének fogjuk nevezni.

2.1. Tétel. *Legyen az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó $g(z)$ generátorfüggvénnyel. Ekkor:*

(a) $E(X) = \lim_{z \to 1-0} g'(z)$,

(b) $\mathcal{D}^2(X) = \lim_{z \to 1-0} g''(z) + g'(z) - \big(g'(z)\big)^2$.

Bizonyítás:
(a) Tudjuk, hogy $z \in (-1,1)$ esetén

$$g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot z^{k-1}.$$

Mivel ez egy nemnegatív együtthatójú hatványsor így létezik a $\lim_{z\to 1-0} g'(z)$ határérték. Továbbá a sor folytonossága miatt $\lim_{z\to 1-0} g'(z)$ megegyezik a $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k$ összeggel. Így amennyiben $\lim_{z\to 1-0} g'(z)$ véges, akkor az $E(X)$ véges várható értéket adja, ha pedig $\lim_{z\to 1-0} g'(z) = \infty$, akkor az $E(X) = \infty$ várható értékkel egyezik meg.

(b) Az előző ponthoz hasonlóan bizonyítunk. $z \in (-1,1)$ esetén

$$g''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot a_k \cdot z^{k-2}.$$

Világos, hogy létezik a $\lim_{z\to 1-0} g''(z)$ határérték, és az megegyezik a $\sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot a_k$ összeggel. Ha $\lim_{z\to 1-0} g''(z)$ véges, akkor szükségképpen $\lim_{z\to 1-0} g'(z)$ is véges. Így ekkor

$$\lim_{z\to 1-0} g''(z) + g'(z) - \big(g'(z)\big)^2 = E\big(X \cdot (X-1)\big) + E(X) - \big(E(X)\big)^2, \qquad (1)$$

ahol egyenlőség jobb oldala a $\mathcal{D}^2\big(X\big)$ véges szórásnégyzetet adja. Az (1)-beli összefüggés igaz lesz $\lim_{z\to 1-0} g''(z) = \infty$ esetén is, és ekkor $\mathcal{D}^2\big(X\big) = \infty$. $\square$

Az egyszerűbb jelölés végett mostantól a $\lim_{z\to 1-0} g'(z)$ és $\lim_{z\to 1-0} g''(z)$ határértékeket $g'(1)$-gyel és $g''(1)$-gyel fogjuk jelölni (akkor is, ha értékük végtelen).

2.2. Tétel (Generátorfüggvények folytonossági tétele). *Legyen tetszőleges rögzített $n = 1, 2, \ldots$ esetén az $a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots$ olyan nemnegatív tagú sorozat, amelyre $\sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j} \le 1$. Az n-edik sorozat generátorfüggvényét jelöljük $g_n(z)$-vel. Ekkor:*

(i) *Ha minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} a_{n,k}$ határérték (jelöljük ezt a_k-val), akkor létezik $\lim_{n\to\infty} g_n(z)$ is minden $|z| < 1$ esetén, és a határfüggvény, amit nevezzünk $g(z)$-nek, megegyezik az a_k sorozat generátorfüggvényével.*

(ii) *Tegyük fel, hogy a $\lim_{n\to\infty} g_n(z)$ határérték létezik tetszőleges $z \in (0,1)$ pontban* *(a határfüggvény legyen most is $g(z)$). Ekkor minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k}$ határérték, amit jelöljünk a_k-val, és az a_k sorozat generátorfüggvénye megegyezik $g(z)$-vel.*

Bizonyítás:

(i) Belátjuk, hogy $g_n(z)$ tart $g(z)$-hez $|z| < 1$ esetén.

$$| g_n(z) - g(z) | = \left| \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n,k} - a_k) \cdot z^k \right| \le \sum_{k=0}^{\infty} | a_{n,k} - a_k | \cdot |z|^k \le \sum_{k=0}^{N} | a_{n,k} - a_k | + \sum_{k=N+1}^{\infty} |z|^k,$$

ahol N tetszőleges természetes szám. Feltételeink miatt az első szumma tagjai mind tartanak a 0-hoz. A második szumma pedig a mértani sor összegképletéből adódóan:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |z|^k = \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k - \sum_{k=0}^{N} |z|^k = \frac{1}{1-|z|} - \frac{|z|^{N+1} - 1}{|z| - 1} = \frac{|z|^{N+1}}{1-|z|} \ .$$

Ha N elég nagy, ez a hányados tetszőlegesen kicsivé tehető, ezzel a tétel első felét beláttuk.

(ii) Tetszőleges rögzített $n = 1, 2, \ldots$ esetén a $g_n(z)$ függvény monoton növekszik, ha $z \in (0, 1)$, így a $g(z)$ határfüggvény is monoton növő lesz. Ebből pedig következik, hogy létezik a $\lim\limits_{z\to+0} g(z)$ határérték, amit jelöljünk $g(0)$-val.
Tetszőleges $0 < z < 1$ esetén:

$$a_{n,0} \le g_n(z) \le a_{n,0} + \sum_{j=1}^{\infty} z^j = a_{n,0} + \frac{z}{1-z} \ .$$ Innen adódik, hogy:

$$g_n(z) - \frac{z}{1-z} \le a_{n,0} \le g_n(z) \ ,$$ amiből $n \to \infty$ mellett:

$$g(z) - \frac{z}{1-z} \le \liminf_{n\to\infty} a_{n,0} \le \limsup_{n\to\infty} a_{n,0} \le g(z).$$

Ebből pedig $z \to +0$ esetén a rendőrelv miatt következik, hogy létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,0} = g(0)$ határérték, amit jelöljünk a_0-val.

Tegyük most fel, hogy $j = 0, 1, \ldots, k-1$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,j} = a_j$ határérték. Belátjuk, hogy ebből következik a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k}$ létezése is. Tekintsük rögzített $n = 1, 2, \ldots$ esetén az eredeti $(a_{n,0}, a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots)$ sorozatokból az első $(k-1)$ tag elhagyásával kapott új $(a_{n,k}, a_{n,k+1}, a_{n,k+2}, \ldots)$ sorozatokat. Ezen sorozatok is nemnegatív tagúak, és a tagok összege kisebb vagy egyenlő, mint 1. Írjuk fel a generátorfüggvényüket:

$$\sum_{j=k}^{\infty} a_{n,j} z^{j-k} = \frac{1}{z^k}\left(g_n(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_{n,j} z^j\right) \to \frac{1}{z^k} \cdot \left(g(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j\right),$$

az indukciós feltevés miatt. Erre pedig a $k = 0$ esetben bizonyított állítást alkalmazva, azt kapjuk, hogy létezik a $\lim_{n\to\infty} a_{n,k}$ határérték, amit jelöljünk a_k-val. Az (i) pontból pedig következik, hogy az a_k sorozat generátorfüggvénye megegyezik $g(z)$-vel. □

Legyenek most az $X_1, X_2, \ldots$ nemnegatív egész értékű, egymástól független valószínűségi változók, generátorfüggvényeik pedig rendre $g_1(z), g_2(z), \ldots$. Tekintsük az $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ összeget. Világos, hogy S_n is nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Meghatározzuk az S_n generátorfüggvényét, amit jelöljünk $g_{S_n}(z)$-vel.

2.3. Állítás. *S_n generátorfüggvénye az őt meghatározó X_i tagok generátorfüggvényeinek szorzata, azaz:*

$$g_s(z) = \prod_{i=1}^{n} g_i(z).$$

Speciális esetben, ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ azonos eloszlásúak, $g(z)$ generátorfüggvénnyel, akkor

$$g_s(z) = g^n(z).$$

Bizonyítás:

$$g_s(z) = E(z^{S_n}) = E(z^{X_1+X_2+\ldots+X_n}) = E(z^{X_1} \cdot z^{X_2} \cdot \ldots \cdot z^{X_n}),$$

ami a függetlenség miatt

$$= E(z^{X_1}) \cdot E(z^{X_2}) \cdot \ldots \cdot E(z^{X_n}) = g_1(z) \cdot g_2(z) \cdot \ldots \cdot g_n(z).$$

A speciális eset rész triviálisan adódik. □

Tekintsük most azt az esetet, amikor nem rögzített n számú valószínűségi változót adunk össze, hanem az összeadandók száma valamilyen N valószínűségi változó értéke. Ilyenkor véletlen tagszámú összegről beszélünk.

Legyenek az $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók, generátorfüggvényük legyen $g_X(z)$. Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $g_{S_n}(z)$ generátorfüggvénnyel. Legyen továbbá N az X_i-ktől független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, generátorfüggvénye legyen $g_N(z)$. Tekintsük az $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ véletlen tagszámú összeget. S_N generátorfüggvényét jelöljük $g_{S_N}(z)$-vel.

2.4. Tétel. *A fenti jelölések mellett teljesül a $g_{S_N}(z) = g_N\big(g_X(z)\big)$ összefüggés.*

Bizonyítás: A teljes várható érték tételét fogjuk alkalmazni.

$$g_{S_N}(z) = E\big(z^{S_N}\big) = \sum_{k:\ P(N=k)>0} E\big(z^{S_N} \mid N = k\big) \cdot P(N = k) =$$

$$= \sum_{k:\ P(N=k)>0} E\big(z^{S_k}\big) \cdot P(N = k) = \sum_{k:\ P(N=k)>0} g_{S_k}(z) \cdot P(N = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \big(g_X(z)\big)^k \cdot P(N = k) = g_N\big(g_X(z)\big).$$

Az utolsó előtti lépésnél a 2.3 Állítás speciális eset részét használtuk ki. $\square$

2.2. Generátorfüggvény összefüggések elágazó folyamatokra

Tekintsük a Bevezetésben bemutatott elágazó folyamat modelljét. Legyen mostantól $X_k^{(n)}$ az n-edik generáció k-adik egyede által létrehozott utódok száma, és S_n az n-edik nemzedék létszáma. Így

$$S_n = \sum_{k=1}^{S_{n-1}} X_k^{(n-1)}.$$

Jelöljük S_n generátorfüggvényét $g_n(z)$-vel, $X_k^{(n)}$ generátorfüggvényét pedig $g(z)$-vel. Azaz $g_n(z)$ az n-edik generáció létszámának eloszlásából, $g(z)$ pedig az egy egyed által létrehozott utódok számának eloszlásából adódik. Mivel $X_k^{(n)}$ eloszlása tetszőleges $n = 0, 1, 2, \ldots$ és $k = 1, 2, ..., S_{n-1}$ esetén azonos, ezért a fenti definíció értelmes. Az eddig bizonyított állítások segítségével könnyen adódik az alábbi tétel.

2.5. Tétel. $g_n(z) = \underbrace{\big(g \circ g \circ \ldots \circ g\big)}_{n\ db}(z).$

Bizonyítás: A 2.4 Tétel miatt $g_n(z) = (g_{n-1} \circ g)(z)$. Tudjuk, hogy $g_1(z) = g(z)$, mivel az első generáció összlétszáma megegyezik a nulladik generáció (azaz egyetlen egyed) által létrehozott utódok számával. Így $g_2(z) = (g \circ g)(z)$, majd indukcióval

$g_n(z) = \big(g \circ g \circ \ldots \circ g\big)(z)$, ahol a jobb oldalon n-szeres kompozíció áll. $\square$

Jelöljük az egy egyed által létrehozott utódok számának várható értékét m-mel, szórásnégyzetét σ^2-tel. Azaz $E\big(X_k^{(n)}\big) = m$ és $\mathcal{D}^2\big(X_k^{(n)}\big) = \sigma^2$. Meghatározzuk az S_n valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

2.6. Tétel.

(a) $E\big(S_n\big) = m^n$,

(b) $\mathcal{D}^2\big(S_n\big) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot m^{n-1} \cdot \dfrac{m^n - 1}{m - 1}, & \textit{ha } m \neq 1, \\ n \cdot \sigma^2, & \textit{ha } m = 1 \ . \end{cases}$

Bizonyítás:

(a) A 2.1 Tétel miatt

$$E(S_n) = g_n'(1) = \big(\underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{n\ db}\big)'(1).$$

Azt is tudjuk továbbá, hogy $g(1) = 1$ és $g'(1) = m$. Az állítást indukcióval bizonyítjuk. $E\big(S_1\big) = g'(1) = m$ miatt az állítás igaz $n = 1$ esetén. Tegyük fel, hogy az egyenlőség igaz n-re. Ekkor $n + 1$ esetén:

$$E\big(S_{n+1}\big) = \big(g \circ (\underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{n\ db})\big)'(1) = g'\big(\underbrace{(g \circ g \circ \ldots \circ g)(1)}_{g_n(1)}\big) \cdot \underbrace{\big((g \circ g \circ \ldots \circ g)(1)\big)'}_{g_n'(1)} =$$

$$= g'(1) \cdot g_n'\big(1\big) = m \cdot m^n = m^{n+1} \text{ az indukciós feltevés miatt.}$$

(b) A 2.1 Tétel miatt

$$\mathcal{D}^2\big(S_n\big) = g_n''(1) + g_n'(1) - \big(g_n'(1)\big)^2. \tag{2}$$

Azt is tudjuk továbbá, hogy $g(1) = 1$, $g'(1) = m$, $g''(1) = \sigma^2 + m^2 - m$. Deriváljuk kétszer a $g_{n+1}(z) = g \circ \big(g_n(z)\big)$ összefüggést:

$$g_{n+1}''(z) = g''\big(g_n(z)\big) \cdot \big(g_n'(z)\big)^2 + g'\big(g_n(z)\big) \cdot g_n''(z), \text{ ami a } z = 1 \text{ helyen:}$$

$$g_{n+1}''(1) = g''(1) \cdot \big(g_n'(1)\big)^2 + g'(1) \cdot g_n''(1) = \big(\sigma^2 + m^2 - m\big) \cdot m^{2n} + m \cdot g_n''(1). \tag{3}$$

Belátjuk, hogy ezen rekurzióból a

$$g_{n+1}''(1) = \big(\sigma^2 + m^2 - m\big) \cdot \big(m^{2n} + m^{2n-1} + \ldots + m^n\big) \tag{4}$$

összefüggés adódik. Ezt indukcióval fogjuk igazolni. A (3) egyenlőségből következik, hogy $g_2''(1) = \big(\sigma^2 + m^2 - m\big) \cdot \big(m^2 + m\big)$, azaz (4) igaz $n = 1$ esetén. Tegyük fel, hogy (4) igaz n-re. Ekkor $n + 1$ esetén:

$$g_{n+1}''(1) = \big(\sigma^2 + m^2 - m\big) \cdot m^{2n} + m \cdot g_n''(1) =$$

$$\big(\sigma^2 + m^2 - m\big) \cdot m^{2n} + m \cdot \big(\sigma^2 + m^2 - m\big) \cdot \big(m^{2n-1} + m^{2n-2} + \ldots + m^{n-1}\big) =$$

$$= \big(\sigma^2 + m^2 - m\big) \cdot \big(m^{2n} + m^{2n-1} + \ldots + m^n\big).$$

Ezzel igazoltuk a (4) egyenlőséget. Végül behelyettesítve a (2) összefüggésbe:

$$\mathcal{D}^2\big(S_{n+1}\big) = \big(\sigma^2 + m^2 - m\big) \cdot \big(m^{2n} + m^{2n-1} + \ldots + m^n\big) + m^{n+1} - m^{2n+2} =$$

$$= \sigma^2 \cdot \big(m^{2n} + m^{2n-1} + \ldots + m^n\big),$$

amiből pedig a mértani sorozat összegképlete miatt már adódik a tétel (b) pontja. □

Nézzünk most néhány példát elágazó folyamatok generátorfüggvényeire.

2.1. Példa. *Legyen $g(z) = 1 - p \cdot (1 - z)^\beta$, ahol p és β állandók, és $0 < p, \beta < 1$. Megmutatjuk, hogy $g(z)$ valamilyen X valószínűségi változó generátorfüggvénye. Ekkor $g(z)$ lehet egy elágazó folyamatban az utódszám generátorfüggvénye. Kiszámítjuk ezen folyamatban az utódszám várható értékét, valamint az n-edik nemzedék összlétszámának generátorfüggvényét.*

Belátjuk, hogy $g(z)$ felírható $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ alakban, ahol az a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ együtthatók nemnegatívak, és $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. Az általánosított binomiális tételből (lásd [4]) adódik, hogy $|z| < 1$ esetén:

$$(1 - z)^\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} (-z)^k, \text{ ahol}$$

$$\binom{\beta}{k} = \frac{\beta \cdot (\beta - 1) \cdot \ldots \cdot (\beta - k + 1)}{k!} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{\beta \cdot (1 - \beta) \cdot \ldots \cdot (k - 1 - \beta)}{k!}.$$

Így $z \in (-1, 1)$ esetén $g(z)$ hatványsorba fejthető, és az is könnyen adódik, hogy együtthatói nemnegatívak. Jelöljük a_k-val a $g(z)$ együtthatóit.

A folytonosság miatt továbbá teljesül egyrészt $\lim\limits_{z\to 1-0}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\cdot z^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, másrészt $\lim\limits_{z\to 1-0}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\cdot z^k=\lim\limits_{z\to 1-0} g(z)=g(1)=1$. Adódik, hogy $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k=1$. Így a $g(z)$ valóban valamilyen X valószínűségi változó generátorfüggvénye.

Tegyük most fel, hogy $g(z)$ egy elágazó folyamatban az utódszám generátorfüggvénye. Az utódszám várható értékét a $\lim\limits_{z\to 1-0} g'(z)$ határérték adja. Tehát

$$E\big(X_k^{(n)}\big)=\lim_{z\to 1-0} p\cdot\beta\cdot(1-z)^{\beta-1}=\infty.$$

Végül belátjuk, hogy ebben a folyamatban az n-edik nemzedék összlétszámának generátorfüggvénye:

$$g_n(z)=1-p^{1+\beta+\ldots+\beta^{n-1}}\cdot(1-z)^{\beta^n}.$$

Ez $n=1$ esetén triviális. Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re. Ekkor a 2.5 Tétel miatt:

$$g_{n+1}(z)=\big(g\circ g_n\big)(z)=1-p\big(1-g_n(z)\big)^{\beta}=$$

$$1-p\cdot\big(1-(1-p^{1+\beta+\ldots+\beta^{n-1}}\cdot(1-z)^{\beta^n})\big)^{\beta}=1-p^{1+\beta+\ldots+\beta^{n}}\cdot(1-z)^{\beta^{n+1}},$$

amivel az állítást beláttuk.

Példa gyanánt vizsgáljuk a következő modellt, a klasszikus elágazó folyamat módosított változatát.

2.2. Példa. *Egy elágazó folyamatban a kezdeti egyed utódszámának eloszlása $f(z)$ generátorfüggvényű. Az első generáció minden tagja $g(z)$ generátorfüggvény szerinti eloszlással hoz létre új egyedeket. Innentől pedig a páros sorszámú nemzedékeknél az eloszlás f, a páratlan sorszámúaknál g generátorfüggvényű. Meghatározzuk ezen folyamatban az n-edik generáció lélekszámának generátorfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.*

Jelölje φ_n az n-edik nemzedék összlétszámának generátorfüggvényét. Állítsuk elő a φ_n függvényt az f és a g segítségével. S_1 generátorfüggvénye $f(z)$, így $\varphi_1(z)=f(z)$. A második generáció lélekszáma az $S_2=\sum\limits_{k=1}^{S_1} X_k^{(1)}$ véletlen tagszámú összegből adódik, így a 2.4 Tétel miatt $\varphi_2=(f\circ g)(z)$. Ezt a gondolatmenetet alkalmazva, indukcióval kapjuk, hogy:

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} (f \circ g \circ \ldots \circ f \circ g)(z), & \text{ha } n \text{ páros} \\ (f \circ g \circ \ldots \circ f \circ g \circ f)(z), & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

ahol a kompozíciók mindig n függvényből állnak.

Nézzük ezek után az $E\big(S_n\big)$ várható értéket. Legyen $f'(1) = m_1$ és $g'(1) = m_2$, az egy egyed által létrehozott utódok számának várható értéke az egyes generációkban. Tegyük fel mostantól, hogy m_1 és m_2 végesek. Ezen jelölésekkel:

$$\begin{aligned} &E\big(S_1\big) = f'(1) = m_1, \\ &E\big(S_2\big) = (f \circ g)'(1) = f'\big(g(1)\big) \cdot g'(1) = f'(1) \cdot g'(1) = m_1 \cdot m_2. \end{aligned}$$

Innen pedig teljes indukcióval adódik, hogy:

$$E\big(S_n\big) = \begin{cases} m_1^{\frac{n}{2}} \cdot m_2^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ m_1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \cdot m_2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Végül meghatározzuk a $\mathcal{D}^2\big(S_n\big)$ szórásnégyzetet. Legyen σ_1^2 a páros, σ_2^2 pedig a páratlan sorszámú nemzedékekben az utódszám szórásnégyzete. Tegyük fel, hogy σ_1^2 és σ_2^2 is véges. Tekintsük először a folyamat páros sorszámú generációit. Legyen $\widetilde{S}_0 = S_0$, $\widetilde{S}_1 = S_2$, $\ldots$, $\widetilde{S_n} = S_{2n}$, $\ldots$. Az $\widetilde{S}_n$ sorozat is egy elágazó folyamat lesz, amely úgy keletkezik az eredetiből, hogy a nulladik generációs őstől kezdve csak minden második nemzedéket tekintünk (az unokákat). Ezen új rendszerben az egy egyed által létrehozott utódok számának generátorfüggvénye $f \circ g$. Az $\widetilde{S}_n$ folyamatban az utódszám várható értéke a fentiek miatt $m_1 \cdot m_2$, szórásnégyzete pedig a 2.1 Tétel miatt:

$$\sigma_{1,2}^2 = (f \circ g)''(1) + (f \circ g)'(1) - \big((f \circ g)'(1)\big)^2 =$$

$$= f''(1) \cdot \big(g'(1)\big)^2 + g''(1) \cdot f'(1) + f'(1) \cdot g'(1) - \big(f'(1) \cdot g'(1)\big)^2 =$$

$$= \big(\sigma_1^2 + m_1^2 - m_1\big) \cdot m_2^2 + \big(\sigma_2^2 + m_2^2 - m_2\big) \cdot m_1 + m_1 m_2 - \big(m_1 m_2\big)^2 =$$

$$= m_2^2 \cdot \sigma_1^2 + m_1 \cdot \sigma_2^2.$$

A 2.6 Tétel alkalmazásával adódik, hogy $n = 0, 1, 2 \ldots$ esetén:

$$\mathcal{D}^2\big(S_{2n+2}\big) = \mathcal{D}^2\big(\widetilde{S}_{n+1}\big) = \big(m_2^2 \cdot \sigma_1^2 + m_1 \cdot \sigma_2^2\big) \cdot \Big(\big(m_1 m_2\big)^{2n} + \ldots + \big(m_1 m_2\big)^n\Big).$$

Tekintsük most a folyamat páratlan sorszámú generációit. Jelöljük a $g \circ f$ függvényt h-val, a h n-edik kompozícióhatványát (azaz a $\underbrace{h \circ h \circ \ldots \circ h}_{n}$ függvényt) pedig $h^{[n]}$-nel. Ekkor $\varphi_{2n+1}(z) = f\big(h^{[n]}(z)\big)$. Világos, hogy $\mathcal{D}^2\big(S_1\big) = \sigma_1^2$. Innentől kezdve pedig $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén:

$$\mathcal{D}^2\big(S_{2n+3}\big) = \big(f \circ h^{[n+1]}\big)''(1) + \big(f \circ h^{[n+1]}\big)'(1) - \Big(\big(f \circ h^{[n+1]}\big)'(1)\Big)^2 =$$

$$= f''(1) \cdot \Big(\big(h^{[n+1]}\big)'(1)\Big)^2 + \big(h^{[n+1]}\big)''(1) \cdot f'(1) + m_1^{n+2} \cdot m_2^{n+1} - m_1^{2n+4} \cdot m_2^{n+2} =$$

$$= \big(\sigma_1^2 + m_1^2 - m_1\big) \cdot (m_1 m_2)^{2n+2} + \Big(\big(m_1^2\sigma_2^2 + m_2\sigma_1^2\big) \cdot \big((m_1m_2)^{2n} + \ldots + (m_1m_2)^n\big) +$$

$$+ (m_1m_2)^{2n+2} - (m_1m_2)^{n+1}\Big) \cdot m_1 + m_1^{n+2}m_2^{n+1} - m_1^{2n+4}m_2^{2n+2} =$$

$$= \sigma_1^2 \cdot \big(m_1m_2\big)^{2n+2} + \big(m_1^2\sigma_2^2 + m_2\sigma_1^2\big) \cdot \big((m_1m_2)^{2n} + \ldots + (m_1m_2)^n\big) \cdot m_1.$$

A fenti képletekből tetszőleges generáció esetén kiszámítható a lélekszám szórásnégyzete.

Megjegyzések:

1. Figyeljük meg, hogy ha $f \equiv g$, akkor a fenti számítások a 2.5 és 2.6 Tételek állításait adják vissza.

2. Ha felcseréljük az egyes nemzedékek generátorfüggvényeit, (azaz ha a páros sorszámú nemzedékek $g(z)$, a páratlan sorszámúak $f(z)$ generátorfüggvény szerint szaporodnak), akkor a fenti képletekben csak fel kell cserélnünk a megfelelő generátorfüggvényeket, várható értékeket, valamint szórásnégyzeteket. Ez például azt fogja jelenteni, hogy $E\big(\widetilde{S}_n\big)$ várható érték nem függ attól, hogy f vagy g generátorfüggvénnyel indítottuk a folyamatot.

3. A fenti példát könnyen általánosíthatjuk az alábbi módon. Tekintsünk egy olyan elágazó folyamatot, ahol a nulladik generációs ős f_1, az első nemzedék egyedei f_2, $\ldots$, a $(k-1)$-edik populáció tagjai pedig f_k generátorfüggvény szerint hoznak létre utódokat. A későbbi generációkban (a k-adiktől kezdve) ez a generátorfüggvény sorozat ismétlődik. A fenti számítások egyszerűen átvihetők erre az esetre, mindössze annyi fog változni, hogy φ_n és $E(S_n)$ képletében 2 helyett k hosszú ciklusok lesznek $f_1, f_2, \ldots, f_k$-val és $m_1, m_2, \ldots, m_k$-val (itt m_1, m_2, $\ldots$, m_k jelöli az utódszám generációnkénti várható értékét) A szórásnégyzet meghatározása több számolást igényelne.

4. Figyeljük meg továbbá, hogy a páratlanadik generációk szórásnégyzeténél egy $f \circ h^{[n]}$ generátorfüggvényű véletlen tagszámú összeg szórásnégyzetet számoltuk ki. A számolás könnyen átvihető az általános esetre. Ha $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ eddigi feltevéseinknek megfelelő véletlen tagszámú összeg, akkor $\mathcal{D}^2\big(S_n\big) = \mathcal{D}^2(N) \cdot \big(E(X_1)\big)^2 + \mathcal{D}^2\big(X_1\big) \cdot E(N)$.

2.3. A kihalás valószínűsége

Következő témánk az elágazó folyamat kihalásának vizsgálata lesz. Ha a folyamat kihal, jelöljük T-vel a kihalás időpontját, azaz $T = \inf\{n : S_n = 0\}$, ha pedig nem hal ki, akkor legyen $T = \infty$. Jelöljük q_n-nel annak a valószínűségét, hogy $P(S_n = 0)$, és legyen q annak a valószínűsége, hogy létezik olyan n, amelyre $S_n = 0$. Ezt fogjuk a kihalás valószínűségének nevezni. Ebben a részben tegyük fel, hogy $0 < g(0) < 1$, ugyanis $g(0) = 1$ esetén a folyamat biztosan kihal, $g(0) = 0$ esetén pedig bizonyosan sosem hal ki. A nem triviális esetekről szól a követező tétel.

2.7. Tétel. *A kihalás q valószínűsége a $g(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.*

Bizonyítás: A generátorfüggvény segítségével könnyedén meghatározhatjuk a q_i valószínűségeket. $q_1 = P(S_1 = 0) = g(0)$, $q_2 = P(S_2 = 0) = g(g(0) = g(q_1)$, majd indukcióval adódik, hogy: $q_n = g(q_{n-1})$. Megmutatjuk, hogy a $q_1, q_2, \ldots$ sorozat konvergens. A $g(z)$ függvény szigorúan monoton növekvő, így $g(0) > 0$ miatt: $q_1 = g(0) < g(q_1) = q_2$, innen pedig indukcióval adódik, hogy: $q_n = g(q_{n-1}) < g(q_n) = q_{n+1}$. Így a q_n monoton növekvő, korlátos sorozat (a 0 alsó, az 1 felső korlátja), tehát létezik $\widehat{q}$ $(0,1]$-beli határértéke.

A q_n-et úgy definiáltuk, mint annak a valószínűségét, hogy a kihalás az n-edik generációban, vagy az előtt következik be, ezért a $\widehat{q}$ határérték megegyezik q-val, a kihalás valószínűségével. Így a $q_n = g(q_{n-1})$ összefüggést vizsgálva $n \to \infty$ feltétel mellett, kihasználva g folytonosságát, látható, hogy $g(q) = q$. Ezzel beláttuk, hogy q a $g(z) = z$ egyenlet gyöke.

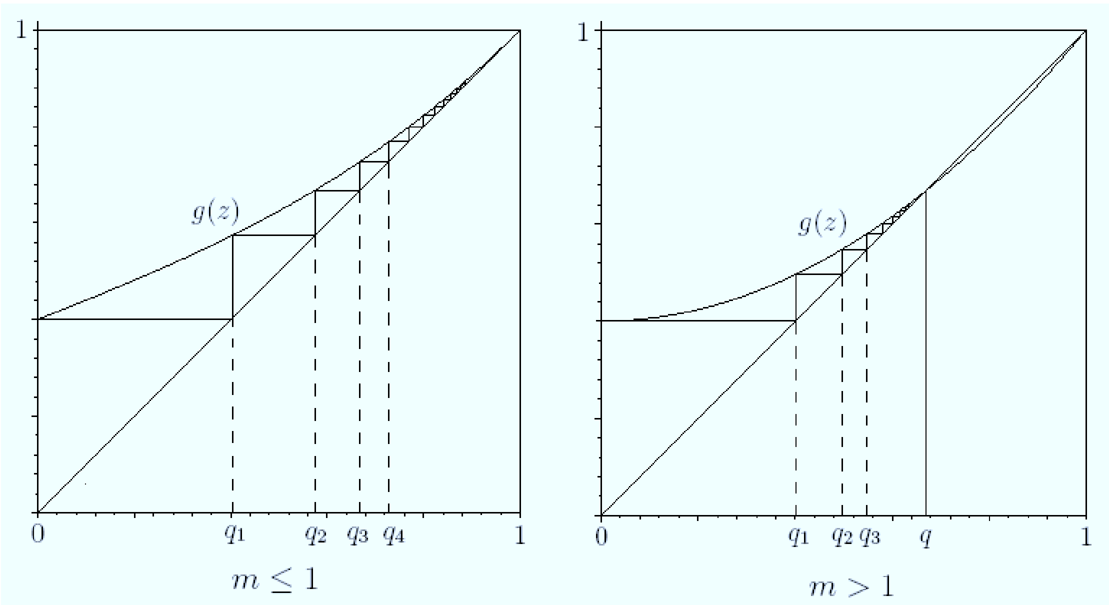
Legyen most $\widetilde{q}$ a $g(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke. Világos, hogy $q_0 = 0 \le \widetilde{q}$. Tegyük fel, hogy valamilyen n-re $q_n \le \widetilde{q}$. Ekkor $q_{n+1} = g(q_n) \le g(\widetilde{q}) = \widetilde{q}$. Innen adódik, hogy $q \le \widetilde{q}$, de mivel q is nemnegatív gyök, ezért $q = \widetilde{q}$. □

A $g(z) = z$ egyenlet gyökeinek kiszámítása helyett a $g'(1) = m$ várható érték segítségével is vizsgálhatjuk a kihalás valószínűségét.

2.8. Tétel. *$m \leq 1$ esetén $q = 1$, $m > 1$ esetén $q < 1$.*

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy $p_0 + p_1 < 1$, ahol p_0 és p_1 annak a valószínűségei, hogy a folyamat valamely egyede 0 illetve 1 utódot hozzon létre. Ekkor a generátorfüggvény deriválására vonatkozó tétel miatt $g''(z) > 0$ minden $z \in (0, 1]$ esetén, azaz g szigorúan konvex ezen az intervallumon. Ebből adódóan $g(z)$ legfeljebb két pontban metszheti el a $z \mapsto z$ egyenest, és mivel $g(1) = 1$, így $z = 1$-ben metszéspont van. Tudjuk továbbá, hogy $m = g'(1)$, ami pedig nem más, mint a $g(z)$ függvény grafikonjához a $z = 1$ pontban húzható érintő meredeksége. Ahogy az a lenti ábrán is látható $m > 1$ esetén $q \leq 1$, $m \leq 1$ esetén pedig $q = 1$ lesz a kihalás valószínűsége.

Ha pedig $p_0 + p_1 = 1$, akkor a generátorfüggvény $g(z) = p_0 + (1 - p_0)z$ alakú. Mivel feltettük, hogy $0 < p_0 < 1$, így $m = 1 - p_0 < 1$, és ilyenkor q valóban 1. $\square$



1. ábra

Szokás m nagysága szerint definiálni az elágazó folyam típusát: $m < 1$ esetén *szubkritikus*, $m = 1$ esetén *kritikus*, $m > 1$ esetén *szuperkritikus* elágazó folyamatról beszélünk.

A következő tételben meghatározzuk, hogy amennyiben kihal a folyamat, az milyen gyorsan következik be.

2.9. Tétel.

(a) *Ha $m < 1$, akkor $P(T > n) = 1 - q_n \leq m^n$*

(b) *Ha $m = 1$, akkor $P(T > n) = 1 - q_n \sim \dfrac{2}{n\sigma^2}$.*

(c) *Ha $m > 1$, akkor $P(T > n \mid T < \infty) = 1 - \dfrac{q_n}{q} \leq \big(g'(q)\big)^n$.*

Bizonyítás:
(a) Felírjuk a $g(z)$ függvényhez a $z=1$ pontba húzott érintő egyenletét:

$$e(z) = 1 + m \cdot (z-1). \tag{5}$$

A $g(z)$ függvény konvexitása miatt tetszőleges $0 \le z \le 1$ esetén $e(z) \le g(z)$. A kihalás idejének becsléshez megkonstruálunk egy z_n sorozatot az alábbi módon. Legyen $z_0 = 0$ és $n = 1, 2, \dots$ esetén $z_n = e(z_{n-1})$. Megmutatjuk, hogy $z_n \le q_n$ tetszőleges n esetén. Ha $n = 0$, akkor $0 = z_0 < q_0$, majd indukcióval adódik, hogy: $z_n = e(z_{n-1}) \le g(z_{n-1}) \le g(q_{n-1}) = q_n$. Nézzük a kihalás idejét:

$$P(T > n) = 1 - q_n \le 1 - z_n = 1 - \big(1 + m \cdot (z_{n-1} - 1)\big) = m \cdot (1 - z_{n-1}).$$

Az utolsó lépést $(n-1)$-szer iterálva, azt kapjuk, hogy:

$$P(T > n) = m^n \cdot (1 - z_0) = m^n.$$

(b) Itt a $g(z)$ függvényt az 1 körüli másodfokú Taylor-polinomjával fogjuk közelíteni:

$$g(z) = g(1) + g'(1) \cdot (z-1) + \frac{1}{2} \cdot \big(g''(1) + o(1)\big) \cdot (z-1)^2, \tag{6}$$

amennyiben $z \to 1$. Tudjuk, hogy $g(1) = 1$, $g'(1) = m = 1$ és $g''(1) = \sigma^2 + m^2 - m = \sigma^2$. Így a (6) egyenlőség az alábbi alakba írható:

$$1 - g(z) = 1 - z - \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + o(1)\right) \cdot (1-z)^2. \tag{7}$$

Jelöljük az $1 - q_n$ valószínűséget a_n-nel. $q_n \to 1$ miatt $a_n \to 0$, így $a_n \sim a_{n+1}$. Így a (7) egyenlet a $z = q_n$ helyen:

$$a_{n+1} = a_n - \left(\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 + o(1)\right) \cdot a_n^2.$$

Így

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \left(\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 + o(1)\right) \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} \to \frac{\sigma^2}{2}. \tag{8}$$

A (8) összefüggésből pedig már adódik, hogy $\dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{\sigma^2 \cdot n}{2}$, amit átrendezve a tétel állítását kapjuk.

(c) Az (a) ponthoz hasonlóan bizonyítunk. A $g(z)$ függvényhez a (q, q) pontba húzott érintő egyenlete: $e(z) = q + g'(q) \cdot (z - q)$. Kihasználva a $z_n \leq q_n$ egyenlőtlenséget:

$$P(T > n \mid T < \infty) = \frac{q - q_n}{q} \leq \frac{q - z_n}{q} = \frac{g'(q) \cdot (q - z_{n-1})}{q}.$$

Végül az utolsó lépést $(n-1)$-szer iterálva azt kapjuk, hogy:

$$P(T > n \mid T < \infty) = \frac{g'(q)^n \cdot (q - z_0)}{q} = (g'(q))^n,$$

amivel a tételt beláttuk. □

Nézzünk most néhány példát a fenti tételek alkalmazására.

2.3. Példa. *Egy elágazó folyamatban az utódszám generátorfüggvénye $f(z) = a \cdot z^2 + b \cdot z + c$, ahol a, b, $c > 0$, és $f(1) = 1$. Meghatározzuk a kihalás valószínűségét.*

A feltételek miatt f egy valószínűségeloszlás generátorfüggvénye, így tetszőleges magadott tulajdonságú a, b, c-re a példa értelmes. A kihalás valószínűsége az $f(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke. Azaz:

$$a \cdot z^2 + (b - 1) \cdot z + c = 0$$

$b = 1 - a - c$ helyettesítéssel a másodfokú egyenlet megoldóképletéből

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = \frac{c}{a} \quad \text{adódik.}$$

Így ha $\frac{c}{a} < 1$, akkor $q = \frac{c}{a}$, máskülönben pedig $q = 1$ lesz a kihalás valószínűsége.

2.4. Példa. *A kihalás valószínűsége a* 2.2 Példában *vizsgált elágazó folyamatra.*

Tekintsük a 2.2 Példában definiált $\widetilde{S}_n$ sorozatot. $\widetilde{S_n}$ úgy keletkezik, hogy az eredeti elágazó folyamat minden páratlan sorszámú nemzedékét elhagyjuk. Így egy olyan elágazó folyamatot kapunk, amelyben az utódszám generátorfüggvénye $f \circ g$. Jelölje az $f \circ g$ függvényt $\widetilde{h}$. Nyilvánvaló, hogy az S_n folyamat akkor, és csak akkor hal ki, ha az $\widetilde{S}_n$ kihal. Így a kihalás valószínűsége nem más, mint a $\widetilde{h}(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

Gondoljuk meg itt is, hogy mi történik, ha $f \equiv g$. Ekkor a már jól ismert közönséges elágazó folyamatról van szó. Ekkor a $g(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyökének meg kell egyeznie a $(g \circ g)(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyökével. A $g \circ g$ is generátorfüggvény, így konvex a [0,1]-en, tehát legfeljebb két helyen metszheti a $z \mapsto z$ egyenest. Tudjuk, hogy $(g \circ g)(1) = 1$, így ezen kívül csak egy metszéspont lehet. Két eset lehetséges:

(i) A kihalás valószínűsége kisebb, mint 1. Tudjuk, hogy $g(q) = q$, és ezáltal $(g \circ g)(q) = q$. Mivel $q < 1$, ezért a második egyenletnek is q lesz a legkisebb nemnegatív gyöke.

(ii) A kihalás valószínűsége 1. Tudjuk, hogy ekkor $m = g'(1) \leq 1$. Be kell látnunk, hogy a $(g \circ g)(z) = z$ egyenletnek is 1 a legkisebb nemnegatív gyöke. Mivel azonban $(g \circ g)'(1) = g'\big(g(1)\big) \cdot g'(1) \leq 1$, így $g \circ g$ konvexitásából adódóan nem lehet 1-nél kisebb gyök.

Végül nézzük azt az esetet, amikor felcseréljük az egyes nemzedékek utódszámának generátorfüggvényét. Ekkor az f és g függvények sorrendjétől függetlenül az $\widetilde{S_n}$ folyamatban $m_1 \cdot m_2$ lesz az utódszám várható értéke (lásd A 2.2 példát követő 2. Megjegyzést). Így amennyiben $m_1 \cdot m_2 \leq 1$ a folyamat a generátorfüggvények sorrendjétől függetlenül 1 valószínűséggel kihal, ha pedig $m_1 \cdot m_2 > 1$, akkor a kihalás valószínűsége 1-nél kisebb. Azonban $m_1 \cdot m_2 > 1$ esetén f és g cseréje megváltoztathatja a kihalás q valószínűségét. Legyen például $f(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^2$ és $g(z) = z^2$. Ekkor:

$$(f \circ g)(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^4 \quad \text{és} \quad (g \circ f)(z) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9}z^2 + \frac{4}{9}z^4.$$

$(f \circ g)(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke: $q_1 \approx 0,34$, $(g \circ f)(z) = z$ legkisebb nemnegatív gyöke pedig: $q_2 \approx 0,11$. Azaz a kihalás valószínűsége nem egyezik meg a csere után.

2.5. Példa. *Tekintsük az alábbi elágazó folyamatot. A nulladik generációs ős λ paraméterű Poisson eloszlás szerint hoz létre utódokat, majd innentől kezdve az összes többi nemzedékben az utódszám generátorfüggvénye $g(z) = \frac{1}{3} \cdot (z^3 + z + 1)$. Meghatározzuk a kihalás valószínűségét.*

A fenti folyamatot tekinthetjük úgy, hogy az első generációban $\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$ valószínűséggel k darab ($k = 0, 1, 2, \ldots$) egyed él, akik egymástól függetlenül elindítanak egy $g(z)$ generátorfüggvényű elágazó folyamatot. A teljes rendszer akkor hal ki, ha mind a k darab első nemzedékből származtatott folyamat kihal.

Először meghatározzuk, hogy valamely ilyen $g(z)$ generátorfüggvényű folyamat milyen valószínűséggel hal ki. A $g(z) = z$ egyenletet átalakítva $z^3 - 2z + 1 = 0$ adódik, ennek keressük a legkisebb nemnegatív gyökét. Mivel $g(1) = 1$, így a bal oldalon lévő polinomból kiemelhetünk $(z-1)$-et:

$$z^3 - 2z + 1 = (z^2 + z - 1) \cdot (z - 1) = 0.$$

Ebből pedig $z_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $z_3 = 1$ adódik. Világos, hogy z_2 lesz a kihalás valószínűsége, jelöljük mostantól ezt a számot q-val. Legyen továbbá Q az az esemény, hogy a teljes, nulladik generációból származtatott folyamat kihal, és jelölje ennek valószínűséget q_0.

Amennyiben az első nemzedéknek k számú egyede van, akkor az általuk indított k darab elágazó folyamat függetlensége miatt a teljes kihalás valószínűsége q^k lesz. A teljes valószínűség tétele alapján:

$$q_0 = \sum_{k=0}^{\infty} P(Q \mid S_1 = k) \cdot P(S_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \cdot q^k = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda q} = e^{\lambda \cdot \frac{\sqrt{5}-3}{2}} \quad \text{lesz a kihalás valószínűsége.}$$

2.6. Példa. *Tekintsünk egy olyan elágazó folyamatot, amelyben a populáció kezdeti nagysága N, és az egy egyed által létrehozott utódok számának generátorfüggvénye pedig $g(z) = q + pz$, ahol $q, p > 0$, és $q + p = 1$. Kiszámítjuk a kihalás idejének eloszlását.*

Mivel a populáció kezdeti nagysága N, ezért a problémát tekintsük úgy, mintha N darab azonos generátorfüggvényű, egymástól független elágazó folyamatunk lenne. A generátorfüggvényből kiolvasható, hogy egy egyednek q valószínűséggel 0, $p = 1 - q$ valószínűséggel egy utódja születik.

Kiszámítjuk, hogy milyen valószínűséggel hal ki a folyamat az n-edik, valamint az $(n-1)$-edik generációig, és e kettő különbsége adja a keresett eloszlást. Annak a valószínűsége, hogy az i-edik folyamat kihal az n-edik generációig $P_i(T \leq n) = 1 - p^n$, annak pedig, hogy mind az N kihaljon az n-edik nemzedékig: $P(T \leq n) = (1 - p^n)^N$. Az a valószínűség pedig, hogy mind az N törzs kihal az $(n-1)$-edik generációig: $P(T \leq n - 1) = (1 - p^{n-1})^N$. A keresett eloszlás tehát:

$$P(T = n) = (1 - p^n)^N - (1 - p^{n-1})^N.$$

2.4. Az utódok összlétszáma

Ebben a szakaszban célunk a $Z_n = 1 + S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ valószínűségi változó vizsgálata lesz. Ez az összeg nem más, mint annak a száma, hogy hány egyed élt az elágazó folyamatban az n-edik nemzedékig bezáródóan, a 0-adik generációs őst is beleértve. $n \to \infty$ esetén megkapjuk a teljes létszámot, jelöljük ezt Z-vel. A 2.8 Tétel miatt $m \leq 1$ esetén Z 1 valószínűséggel véges, $m > 1$ esetén pedig q valószínűséggel véges, $1 - q$ valószínűséggel végtelen.

Jelölje a Z_n generátorfüggvényét $h_n(z)$, az utódszám generátorfüggvényét pedig a szokásos módon $g(z)$. Igaz lesz a következő tétel.

2.10. Tétel. $h_1(z) = z \cdot g(z)$, $n > 1$ *esetén pedig* $h_n(z) = z \cdot g\big(h_{n-1}(z)\big)$.

Bizonyítás: $Z_1 = 1 + S_1$ miatt a $h_1(z)$ generátorfüggvényben z^k együtthatója $P\big(S_1 = k - 1\big)$ kell, hogy legyen, hiszen a Z_1 értéke pontosan akkor lesz k, ha a kiindulási egyednek $(k-1)$ darab utódja születik. Áttérve a generátorfüggvényekre $h_1(z) = z \cdot g(z)$ adódik. $h_0(z) = z$ jelöléssel a rekurzió igaz $n = 1$-re. Tegyük most fel, hogy a formula $(n - 1)$-ig igaz.

Vezessük be a $\widetilde{Z}_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ valószínűségi változót, generátorfüggvényét jelöljük $\widetilde{h}_n(z)$-vel. Az $1, 2, \ldots, n$-edik nemzedék $\widetilde{Z}_n$ számú egyedeinek összessége, az első generációbeli ősök alapján S_1 törzsre osztható. Így $\widetilde{Z}_n$ S_1 darab $Z_n^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, S_1)$ valószínűségi változó összegeként áll elő, ahol $Z_n^{(k)}$ az első generáció k-adik tagjától származó nemzetség összlétszáma az n-edik generációig (beleértve az első nemzedék k-adik tagját is). Azaz:

$$\widetilde{Z}_n = \sum_{k=1}^{S_1} Z_n^{(k)}.$$

Világos, hogy mindegyik $Z_n^{(k)}$ eloszlása megegyezik Z_{n-1} eloszlásával, hiszen $Z_n^{(k)}$ is egy $(n - 1)$ generációs családösszlétszám, és tudjuk, hogy az elágazó folyamat bármely egyede ugyanolyan eloszlás szerint hoz létre új utódokat. Eredeti feltevéseink szerint továbbá $Z_n^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, S_1)$ valószínűségi változók függetlenek. Így $Z_n^{(k)}$-k közös generátorfüggvénye $h_{n-1}(z)$ lesz. Tudjuk, hogy S_1 generátorfüggvénye $g(z)$, a 2.4 Tételt alkalmazva $\widetilde{h}_n(z) = g(h_{n-1}(z))$ adódik.

$Z_n = 1 + \widetilde{Z}_n$ miatt pedig $h_n(z) = z \cdot \widetilde{h}_n(z)$, azaz $h_n(z) = z \cdot g(h_{n-1}(z))$. □

Tekintsük a h_n függvénysorozatot. Tudjuk, hogy $0 < z < 1$ esetén $g(z) < 1$. Így $h_1(z) = z \cdot g(z) < z = h_0(z)$, majd a rekurziós összefüggést alkalmazva, indukcióval adódik, hogy ha $0 < z < 1$, akkor $h_{n+1}(z) = z \cdot g(h_n(z)) < z \cdot g(h_{n-1})(z) = h_n(z)$. Adódik, hogy a $h_n(z)$ függvénysorozat pontonként konvergál valamely $h(z)$ függvényhez a $(0, 1)$ intervallumon. Alkalmazhatjuk a generátorfüggvények folytonossági tételét.

2.11. Következmény. *A $h(z)$ határfüggvény előáll $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ alakban, ahol $a_k \geq 0$ minden k-ra, és $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq 1$.*

Terjesszük ki a h függvényt a $[0, 1]$ intervallumra: legyen $h(0) = 0$, és $h(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Így a h függvény folytonos lesz $[0, 1]$-en. Világos, hogy $i = 0, 1, 2, \ldots$ esetén az a_i együtthatók a $\lim_{n\to\infty} Z_n = i$ határeloszlással egyeznek meg. Amennyiben a folyamat 1 valószínűséggel kihal, akkor mivel az összlétszám 1 valószínűséggel véges, az a_k sorozat valószínűségeloszlás lesz, azaz $h(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. Ha pedig a kihalás q valószínűsége kisebb, mint egy, akkor az összlétszám q valószínűséggel véges, $1 - q$ valószínűséggel végtelen, így ekkor $h(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = q < 1$. A $\lim_{n\to\infty} Z_n = i$ határeloszlásokat a h függvény segítségével számíthatjuk ki.

2.12. Állítás.

(a) *Tetszőleges $0 < z < 1$ esetén $h(z)$ a $t = z \cdot g(t)$ egyenlet egyetlen t gyöke.*

(b) *Tetszőleges $0 < z < 1$ esetén $h(z) < q$.*

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $h_n(z) = z \cdot g\big(h_{n-1}(z)\big)$. Ha $n \to \infty$, akkor a g folytonossága miatt $h(z) = z \cdot g(h(z))$ adódik, így $h(z)$ a $t = z \cdot g(t)$ egyenlet gyöke. Belátjuk, hogy egyetlen ilyen gyök van.

Legyen q a $g(t) = t$ egyenlet legkisebb pozitív gyöke (a kihalás valószínűsége). Legyen továbbá $\varphi(t) = z \cdot g(t)$ és $\psi(t) = t$. $\varphi(t)$ konvex függvény, így a $\psi(t)$ egyenest legfeljebb két pontban metszheti. $t = 0$-ban $\varphi(t) > \psi(t)$, míg $t = q$ és $t = 1$ helyen $\varphi(t) < \psi(t)$. Ez azt jelenti, hogy a $t = z \cdot g(t)$ egyenletnek pontosan egy gyöke van 0 és q között, és nincs gyöke q és 1 között, amivel (a)-t és (b)-t is beláttuk. □

Végül meghatározzuk Z várható értékét és szórásnégyzetét.

2.13. Tétel.

(i) $m < 1$ *esetén* $E(Z) = \dfrac{1}{1-m}$, *és* $\mathcal{D}^2(Z) = \dfrac{\sigma^2}{(1-m)^3}$, *ahol* σ^2 *az utódszám szórásnégyzete.*

(ii) $m \geq 1$ *esetén* $E(Z) = \infty$, *és* $\mathcal{D}^2(Z) = \infty$.

Bizonyítás: Nézzük először a Z várható értékét:

$$E\big(Z\big) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} S_k\right) = E\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} S_k\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{k=0}^{n} S_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} m^k.$$

A Z_n monoton növekedő nemnegatív valószínűségi változók sorozata, így a Beppo Levi tétel miatt a limesz és a várható érték felcserélhető volt. A $\sum_{k=0}^{\infty} m^k$ összefüggésből pedig adódnak a várható értékre vonatkozó állítások. $m \geq 1$ esetén pedig $E(Z) = \infty$ miatt $\mathcal{D}^2(Z) = \infty$.

Legyen végül $m < 1$. Tudjuk, hogy ekkor $h(1) = 1$. Tegyük fel továbbá, hogy σ^2 véges. A $h(z) = z \cdot g\big(h(z)\big)$ összefüggést deriválva:

$$h'(z) = g\big(h(z)\big) + z \cdot g'\big(h(z)\big) \cdot h'(z), \quad \text{amiből:}$$

$$h'(z) = \frac{g\big(h(z)\big)}{1 - z \cdot g'\big(h(z)\big)}$$

$$h''(z) = \frac{g'\big(h(z)\big) \cdot h'(z)\Big(1 - z \cdot g'\big(h(z)\big)\Big) + g\big(h(z)\big)\Big(g'\big(h(z)\big) + z \cdot g''\big(h(z)\big)h'(z)\Big)}{\Big(1 - z \cdot g'\big(h(z)\big)\Big)^2}.$$

Végül némi számolás után

$$\mathcal{D}^2(Z) = \lim_{z\to 1-0} h''(z) + \lim_{z\to 1-0} h'(z) - \Big(\lim_{z\to 1-0} h'(z)\Big)^2 = \frac{\sigma^2}{(1-m)^3}$$

adódik. □

3. Martingálok és elágazó folyamatok

Ebben a részben martingálok segítségével fogjuk elemezni az elágazó folyamatokat. Az első szakaszban kimondunk néhány martingálokkal kapcsolatos állítást, amit a későbbiekben közvetlenül ki fogunk használni. Nem térünk ki a feltételes várható érték, a martingál és a megállási idő definíciójára, ezek valamint az itt szereplő tételek bizonyításai megtalálhatóak az [5] forrásban. A második szakaszban igazolunk pár egyszerű elágazó folyamatokkal kapcsolatos tulajdonságot. Ezen állítások szintén az [5] irodalomban olvashatóak a kitűzött feladatok között. Végül a harmadik szakaszban bebizonyítunk egy centrális határeloszlás tételt az elágazó folyamatokra. Az itt szereplő két tétel az [1] forrásból származik, a bizonyítás pedig az első két szakasz eredményei alapján történik majd.

3.1. Felhasznált martingálelméleti állítások

3.1. Tétel (Martingál konvergencia tételek).
Legyen a W_n sorozat martingál. Ekkor:
1. *Ha W_n korlátos L^1-ben (azaz, ha $\sup_{n\in\mathbb{N}} E\big(|W_n|\big) < \infty$), akkor W_n 1 valószínűséggel konvergens.*
2. *Ha W_n korlátos L^2-ben (azaz, ha $\sup_{n\in\mathbb{N}} E(W_n^2) < \infty$), akkor W_n 1 valószínűséggel és L^2-ben is konvergens.*

Ha a W_n sorozat konvergens, jelöljük W-vel a határértékét. A martingáltulajdonságból következik, hogy $E(|W_n|) < \infty$, és $E(W_0) = E(W_1) = E(W_2) = \dots$ várható értékek megegyeznek. Az 1. állításból következik, hogy nemnegatív martingál 1 valószínűséggel konvergens. Ha W_n L^2-ben is korlátos, akkor tetszőleges n-re $E(W) = E(W_n)$, és $\mathcal{D}^2(W_n) = E(W_n^2) - \big(E(W_n)\big)^2 \to E(W^2) - \big(E(W)\big)^2 < \infty$ miatt $\mathcal{D}^2(W_n) \to \mathcal{D}^2(W) < \infty$.

3.2. Tétel. *Legyenek az $Y_1, Y_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és jelöljük $\mathcal{F}_n$-nel az $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ által generált σ-algebrát. Legyen Z megállási idő $(\mathcal{F}_n)$-re nézve, és tegyük fel, hogy $Z < \infty$. Ekkor $Y_{Z+1}, Y_{Z+2}, \dots$ is független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek ugyanolyan eloszlásúak, mint az eredeti sorozat.*

Bizonyítás: Elég belátnunk, hogy az $\mathbb{R}^k$ tetszőleges B_k Borel-halmazára fenn áll az alábbi egyenlőség:

$$P\Big(\big(Y_{Z+1}, Y_{Z+2}, \dots, Y_{Z+k}\big) \in B_k\Big) = P\Big(\big(Y_1, Y_2, \dots, Y_k\big) \in B_k\Big).$$

A bal oldalt a teljes valószínűség tétele alapján kifejtve:

$$\sum_{n:\ P(Z=n)>0} P\Big(\big(Y_{Z+1}, Y_{Z+2}, \ldots, Y_{Z+k}\big) \in B_k \;\Big|\; Z=n\Big) \cdot P\big(Z=n\big) =$$
$$= \sum_{n:\ P(Z=n)>0} P\Big(\big(Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots, Y_{n+k}\big) \in B_k \;\Big|\; Z=n\Big) \cdot P\big(Z=n\big).$$

Tudjuk, hogy a Z megállási idő, így a $\{Z=n\}$ esemény eleme az $\mathcal{F}_n$ σ-algebrának. Így $(Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots, Y_{n+k})$ és $Z=n$ függetlensége miatt a fenti egyenlet

$$= \sum_{n:\ P(Z=n)>0} P\Big(\big(Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots, Y_{n+k}\big) \in B_k\Big) \cdot P\big(Z=n\big) =$$
$$= \sum_{n:\ P(Z=n)>0} P\Big(\big(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\big) \in B_k\Big) \cdot P\big(Z=n\big) =$$
$$= P\Big(\big(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\big) \in B_k\Big),$$

amivel az állítást beláttuk. □

3.1. Definíció. *Legyen $n=1,2,\ldots$ és $k=1,2,\ldots$ esetén $X_{n,k}$ valószínűségi változó, $\mathcal{F}_{n,k}$ pedig σ-algebra. Azt mondjuk, hogy $(X_{n,k}, \mathcal{F}_{n,k})$ martingáldifferencia szériák sorozata, ha*

(i) *$\mathcal{F}_{n,k-1} \subset \mathcal{F}_{n,k}$, (és legyen $\mathcal{F}_{n,0}$ tetszőleges σ-algebra, amire $\mathcal{F}_{n,0} \subset \mathcal{F}_{n,1}$);*

(ii) *$X_{n,k}$ $\mathcal{F}_{n,k}$-mérhető;*

(iii) *$E(X_{n,k} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}) = 0$.*

Tegyük fel mostantól, hogy rögzített $n=1,2,\ldots$ esetén az $X_{n,k}$ változók közül 1 valószínűséggel csak véges sok különbözhet az azonosan 0-tól. Erre a megszorításra egy későbbi tétel miatt lesz szükségünk.

Számunkra a fenti definíció lesz a legpraktikusabb, de sok esetben szemléletesebb, ha egy avval ekvivalens tulajdonságot tekintünk.

3.3. Állítás. *$(X_{n,k}, \mathcal{F}_{n,k})$ pontosan akkor martingáldifferencia szériák sorozata, ha megadható olyan $\xi_{n,k}$ $(n=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots)$ valószínűségi változókból álló kettős sorozat, amelyre*

(i) *rögzített $n=1,2,\ldots$ esetén $\xi_{n,k}$ $(k=1,2,\ldots)$ martingál sorozat $\mathcal{F}_{n,k}$-ra nézve,*

(ii) *rögzített $n=1,2,\ldots$ esetén $X_{n,1}=\xi_{n,1}$ és $X_{n,k}=\xi_{n,k}-\xi_{n,k-1}$, ha $k=2,3,\ldots$.*

Egy martingáldifferencia sorozat n szerinti tagjait szériáknak fogjuk nevezni. Bevezetünk néhány hasznos jelölést. Legyen $\Sigma_{n,k}$ az n-edik széria első k tagjának összege, és legyen Σ_n az az összeg, melyben az összes tagot adjuk össze. Azaz:

$$\Sigma_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} X_{n,j} \quad \text{és} \quad \Sigma_n = \sum_{j=1}^{\infty} X_{n,j}.$$

Tegyük fel, hogy a martingáldifferenciák négyzetesen integrálhatóak. Legyen ekkor:

$$\sigma_{n,k}^2 = E(X_{n,k}^2 \mid \mathcal{F}_{n,k-1}).$$

Vegyük észre, hogy $\sigma_{n,k}^2$ feltételes szórásnégyzetet definiál, hiszen ha az $X_{n,k}$ sorozatra úgy gondolunk, mint egy $\xi_{n,k}$ martingál sorozatból képzett martingáldifferencia szériákra, akkor:

$$\sigma_{n,k}^2 = E\big((\xi_{n,k} - \xi_{n,k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\big) =$$

$$E\big((\xi_{n,k} - E(\xi_{n,k} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}))^2 \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\big) = \mathcal{D}^2\big(\xi_{n,k} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\big).$$

Jelölje ezen feltétes szórásnégyzetek összegeit

$$V_{n,k}^2 = \sum_{j=1}^{k} \sigma_{n,j}^2 \quad \text{és} \quad V_n^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{n,j}^2.$$

Bevezetjük még a Lindeberg-összegeket. Legyen

$$L(n,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} E(X_{n,k}^2 \cdot \chi\{|X_{n,k}| > \varepsilon\} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}),$$

ahol χ az indikátor függvényt jelöli. Ezzel a jelöléssel a Lindeberg-feltétel akkor teljesül, ha minden $\varepsilon > 0$-ra $L(n,\varepsilon) \to_p 0$, ha $n \to \infty$, ahol a p a sztochasztikus konvergenciát jelöli.

3.4. Tétel. *Legyen* $(X_{n,k}, \mathcal{F}_{n,k})$ $(n = 0, 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots)$ *olyan martingáldifferencia szériák sorozata, ahol* $\mathcal{F}_{n-1,k} \subset \mathcal{F}_{n,k}$*. Tegyük fel, hogy:*

(i) $V_n^2 \to_p V^2$*, ahol* $V > 0$ *1 valószínűséggel,*

(ii) $L(n,\varepsilon) \to_p 0$ *minden* $\varepsilon > 0$*-ra (azaz teljesül a Lindeberg-feltétel).*

Ekkor

$$\frac{\Sigma_n}{V_n} \to_d N(0,1).$$

3.2. Egyszerű martingálok

Tekintsünk egy elágazó folyamatot. Az eddigi jelöléseinkkel összhangban jelölje $X_k^{(n)}$ az n-edik generáció k-adik tagjának utódszámát, S_n az n-edik nemzedék létszámát, q a kihalás valószínűségét, továbbá Z_n az $1 + S_1 + \ldots + S_n$ összeget. Tetszőleges $n = 0, 1, 2, \ldots$ és $k = 1, 2, \ldots, S_{n-1}$ esetén az $X_k^{(n)}$ valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel.

S_{n+1} nagyságát valamely rögzített $n + 1$ érték esetén az n-edik generációs ősök határozzák meg, a korábbi nemzedékek egyedeinek már nincs befolyása S_{n+1} létszámára. Formálisan: $E(S_{n+1} \mid S_n = s_n, S_{n-1} = s_{n-1}, \ldots, S_1 = s_1) = E(S_{n+1} \mid S_n = s_n)$, azaz az S_n sorozat Markov-lánc. Meghatározzuk az $E\big(S_{n+k} \mid S_n\big)$ feltételes várható értékét. Az alábbi állításra fontossága miatt két bizonyítást is adunk.

3.5. Állítás. $E(S_{n+k} \mid S_n) = m^k \cdot S_n$.

1. Bizonyítás: Az $(n+k)$-adik generációt úgy is tekinthetjük, hogy az n-edik nemzedék minden egyede egymástól függetlenül az eredetivel azonos generátorfüggvényű elágazó folyamatot indít, és vesszük ezen új folyamatok k-adik nemzedékeinek összességét. A 2.6 Tétel miatt az n-edik generáció bármely egyedének k lépés múlva várhatóan m^k leszármazottja lesz, innen pedig S_n értékének ismeretében már adódik az állítás. □

2. Bizonyítás: Teljes indukciót használunk. $k = 1$ esetén:

$$E\big(S_{n+1} \mid S_n\big) = E\left(\sum_{i=1}^{S_n} X_i^{(n)} \;\middle|\; S_n\right) = S_n \cdot E(X_i^{(n)}) = m \cdot S_n.$$

Tegyük fel, hogy az állítás igaz k-ra. Ekkor $k + 1$ esetén:

$$E(S_{n+k+1} \mid S_n) = E\Big[E\big(S_{n+k+1} \mid S_{n+k}, S_{n+k-1}, \ldots, S_n\big) \;\Big|\; S_n\Big] =$$

$$E\Big[E\big(S_{n+k+1} \mid S_{n+k}, S_{n+k-1}, \ldots, S_n\big) \;\Big|\; S_n\Big] = E\big(m \cdot S_{n+k} \mid S_n\big) = m^k \cdot S_n,$$

kihasználva a Markov tulajdonságot és az indukciós feltevést. □

Ez az állítás adja az ötletet, hogy vizsgáljuk a $W_n = \dfrac{S_n}{m^n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változókat. Jelöljük $\mathcal{F}_n$-nel a $W_0, W_1, \ldots, W_n$ által generált σ-algebrát. A következő tételben tegyük fel, hogy az elágazó folyamatban $m > 1$.

3.6. Tétel.

(i) *A W_n sorozat martingál $\mathcal{F}_n$-re nézve.*

(ii) *W_n 1 valószínűséggel konvergál egy W valószínűségi változóhoz.*

(iii) *Ha σ^2 véges, akkor $E(W) = 1$ és $\mathcal{D}^2(W) = \dfrac{\sigma^2}{m \cdot (m-1)}$.*

Bizonyítás:

(i) A W_n sorozat martingál hiszen:

(a) $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén W_n $\mathcal{F}_n$ mérhető;

(b) $E(|W_n|) = E\left(\dfrac{S_n}{m^n}\right) = 1 < \infty$;

(c) A 3.5 Állítás miatt pedig

$$E(W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \frac{1}{m^{n+1}} E(S_{n+1} \mid S_n) = S_n \cdot \frac{1}{m^n} = W_n.$$

(ii) W_n korlátos L^1-ben, így létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} W_n$ határérték 1 valószínűséggel.

(iii) A 2.6 Tétel alapján S_n szórásnégyzete $\sigma^2 \cdot m^{n-1} \cdot \dfrac{m^n - 1}{m-1}$. Így:

$$\mathcal{D}^2\big(W_n\big) = \mathcal{D}^2\left(\frac{S_n}{m^n}\right) = \frac{1}{m^{2n}} \cdot \sigma^2 \cdot m^{n-1} \cdot \frac{m^n - 1}{m-1} = \frac{\sigma^2}{m \cdot (m-1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{m^n}\right).$$

Belátjuk, hogy W_n korlátos L^2-ben:

$$E(W_n^2) = \big(E(W_n)\big)^2 + \mathcal{D}^2(W_n) = 1 + \frac{\sigma^2}{m \cdot (m-1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{m^n}\right) < \infty,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma^2 < \infty$. A 3.1 Tétel miatt W_n konvergens lesz L^2-ben, továbbá az is adódik, hogy $E(W) = \lim\limits_{n\to\infty} E\big(W_n\big) = 1$, valamint $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}^2(W_n) \to \mathcal{D}^2(W)$, ami W szórásnégyzetére a bizonyítandó összefüggést adja. □

Megjegyezzük, hogy a tétel (i) és (ii) pontja igaz $m \leq 1$ esetén is. Következő tételünkben megmutatjuk, hogy W értéke és a kihalás q valószínűsége közt szoros összefüggés van.

3.7. Tétel. $P(W = 0) = q$

Bizonyítás: Az elágazó folyamat n-edik nemzedéke az első generációs ősök alapján S_1 törzsre osztható. Jelölje $S_{n-1}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, S_1)$ az első nemzedék i-edik egyedének utódainak számát az n-edik generációból. Világos, hogy ezzel a jelöléssel:

$$\sum_{i=1}^{S_1} S_{n-1}^{(i)} = S_n, \quad \text{amiből azt kapjuk, hogy:}$$

$$\frac{S_n}{m^n} = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{S_{n-1}^{(1)}}{m^{n-1}} + \frac{S_{n-1}^{(2)}}{m^{n-1}} + \ldots + \frac{S_{n-1}^{(S_1)}}{m^{n-1}} \right).$$

Az előbbi tétel miatt minden $\dfrac{S_{n-1}^{(i)}}{m^{n-1}}$ $(i = 1, 2, \ldots, S_1)$ sorozat 1 valószínűséggel konvergens, jelölje $W_1, W_2, \ldots, W_{S_1}$ ezen sorozatok limeszeit. Vegyük észre, hogy minden W_i ugyanolyan eloszlású, mint W, továbbá a tagszámot meghatározó S_1 a W_i-től független. A $W = 0$ esemény pontosan akkor következik be, ha $W_i = 0$ minden $i = 1, 2, \ldots, S_1$ esetén. A fentiek miatt pedig ez azt jelenti, hogy

$$P(W = 0 \mid S_1) = \big(P(W = 0)\big)^{S_1}. \tag{9}$$

A teljes várható érték tétele miatt

$$P(W = 0) = \sum_{i:\ P(S_1 = i) > 0} P(S_1 = i) \cdot P(W = 0 \mid S_1 = i) = E\big(P(W = 0 \mid S_1)\big).$$

A (9)-et felhasználva pedig adódik, hogy

$$E\big(P(W = 0 \mid S_1)\big) = \sum_{i:\ P(S_1 = i) > 0} P(S_1 = i) \cdot \big(P(W = 0)\big)^i = g\big(P(W = 0)\big),$$

ahol g az utódszám generátorfüggvénye. Azt kaptuk, hogy

$$P(W = 0) = g\big(P(W = 0)\big).$$

Tudjuk, hogy a g függvénynek legfeljebb két fixpontja lehet, és $g(z) = z$ legkisebb nemnegatív gyöke a kihalás valószínűsége. $m \leq 1$ esetén $q = 1$, így ekkor szükségképpen $P(W = 0) = q = 1$. $m > 1$ esetén pedig $q < 1$, de $E(W) = 1$ miatt ekkor $P(W = 0) < 1$, így ekkor is teljesül $P(W = 0) = q$. □

Jelölje Q azt az eseményt, ha a folyamat kihal.

3.8. Következmény. *A $W = 0$ és a Q események szimmetrikus differenciája 0 valószínűségű.*

A szakasz zárásaként egy másik érdekes sorozatról mutatjuk meg, hogy martingál.

3.9. Állítás. *Jelölje S_n az n-edik nemzedék létszámát, q pedig a kihalás valószínűségét egy elágazó folyamatban. Ekkor a $Q_n = q^{S_n}$ sorozat martingál.*

Bizonyítás: Jelölje $\mathcal{F}_n$ az $S_0, S_1, \ldots, S_n$ által generált σ-algebrát. Ekkor:

(a) $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén a Q_n $\mathcal{F}_n$-mérhető.

(b) $E(|Q_n|) = \sum_{i=0}^{\infty} P(S_n = i) \cdot q^i = g_n(q)$, ahol g_n az n-edik nemzedék létszámának generátorfüggvénye. $q \leq 1$ és a generátorfüggvény tulajdonságaiból adódik, hogy $g_n(q) \leq 1 < \infty$. Az is világos, hogy $g_n(q)$ értéke éppen q lesz.

(c)

$$E(Q_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(q^{S_n} \mid S_{n-1}, \ldots, S_0) = E\Big(q^{\sum_{i=1}^{S_{n-1}} X_i^{(n-1)}} \;\Big|\; S_{n-1}\Big).$$

Kihasználva, hogy az $X_i^{(n-1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, S_{n-1})$ valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak:

$$= \left(E\Big(q^{X_1^{(n-1)}}\Big)\right)^{S_{n-1}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} P(X_1^{(n-1)} = j) \cdot q^j\right)^{S_{n-1}} = \big(g(q)\big)^{S_{n-1}} = q^{S_{n-1}} = Q_{n-1}.$$

□

3.3. Centrális határeloszlás-tétel elágazó folyamatokra

Tegyük fel ebben a szakaszban, hogy $P\big(X_k^{(n)} = 0\big) = 0$, és $P\big(X_k^{(n)} > 1\big) > 0$. Ekkor minden egyednek legalább egy utódja születik, azaz a folyamat bizonyosan nem hal ki. Tudjuk, hogy ekkor $W \neq 0$. Ezen feltételek mellett az első n generáció összlétszámának ismeretében az utódszám várható értékére a következő becslés adható:

$$\mu_n = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}.$$

3.10. Tétel. *μ_n 1 valószínűséggel tart m-hez, ha $n \to \infty$.*

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1 + S_1 + \ldots + S_n}{1 + m + \ldots + m^n} \to W \quad 1 \text{ valószínűséggel.} \tag{10}$$

Tekintsük ehhez az alábbi becslést.

$$\left| \frac{1+S_1+\ldots+S_n}{1+m+\ldots+m^n} - W \right| = \left| \frac{W_0+m\cdot W_1+\ldots+m^n\cdot W_n}{1+m+\ldots+m^n} - W \right| =$$

$$= \frac{\left| \sum_{i=0}^{n} m^i\cdot(W_i-W) \right|}{\sum_{i=0}^{n} m^i} \le \frac{\left| \sum_{i=0}^{N} m^i\cdot(W_i-W) \right|}{\sum_{i=0}^{n} m^i} + \frac{\left| \sum_{i=N+1}^{n} m^i\cdot(W_i-W) \right|}{\sum_{i=0}^{n} m^i}$$

tetszőleges $N \le n$ esetén. $n \to \infty$ esetén az első tag tart 0-hoz. A második tag pedig felülről becsülhető a $\sup_{i\ge N+1} |W_i - W|$ értékkel. Így

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1+S_1+\ldots+S_n}{1+m+\ldots+m^n} - W \right| \le \sup_{i\ge N} \mid W_i - W \mid \quad \text{tetszőleges } N \text{ esetén.}$$

$W_n \to W$ 1 valószínűséggel, így megfelelő N választásával a jobb oldal tetszőlegesen kicsivé tehető, így a jobb oldal tart a 0-hoz, amiből már adódik a (10) összefüggés . Nyilván igaz lesz az is, hogy

$$\frac{1+S_1+\ldots+S_n}{m+m^2+\ldots+m^n} \to W \quad 1 \text{ valószínűséggel,} \tag{11}$$

és

$$\frac{1+S_1+\ldots+S_n}{1+m+\ldots+m^{n-1}} \to m\cdot W \quad 1 \text{ valószínűséggel.} \tag{12}$$

(11) miatt

$$\frac{S_0+S_1+\ldots+S_{n-1}}{m+m^2+\ldots+m^{n-1}} \to W \quad 1 \text{ valószínűséggel,}$$

(12) miatt pedig

$$\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{m+m^2+\ldots+m^{n-1}} \to m\cdot W \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Végül az utolsó két határérték hányadosából a tétel állítását kapjuk. □

Megjegyzés. Megmutatható továbbá az is, hogy ha az $S_0, S_1, \ldots, S_n$ mennyiségeket figyeltük meg, akkor μ_n lesz a maximum-likelihood becslés m-re.

3.11. Tétel (Centrális határeloszlás-tétel elágazó folyamatokra).

$$\sqrt{W(1+m+m^2+\ldots+m^{n-1})}\cdot(\mu_n-m)\to_d N(0,\sigma^2),$$

ahol d az eloszlásbeli konvergenciát, $N(0,\sigma^2)$ pedig a 0 várható értékű σ^2 szórásnégyzetű normális eloszlást jelöli.

Bizonyítás: Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és eloszlásuk egyezzék meg az egy egyed által létrehozott utódok számának eloszlásával. Definiáljuk a Z_n $(n=0,1,2,\ldots)$ sorozatot a következő módon. Legyen $Z_0=1$ és $Z_{n+1}=1+F(Z_n)$, ahol $F(k)$ jelöli a $\sum_{i=1}^{k} Y_k$ összeget.

Megmutatjuk, hogy Z_n tetszőleges $n=0,1,2,\ldots$ esetén megállási idő az Y_j sorozat természetes filtrációjára nézve. Ezt n szerinti indukcióval tesszük. Világos, hogy $n=0$ esetén $\{Z_0=k\}\in\mathcal{F}_k=\sigma(Y_1,Y_2,\ldots,Y_k)$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $(n-1)$-ig. Ekkor

$$\{Z_n=k\}=\{F(Z_{n-1})=k-1\}=\bigcup_{j=1}^{k-1}\Big\{\{F(j)=k-1\}\cap\{Z_{n-1}=j\}\Big\}.$$

$F(j)\in\mathcal{F}_j$, valamint az indukciós feltevés miatt $\{Z_{n-1}=j\}\in\mathcal{F}_j$, így a jobb oldalon minden esemény mérhető $\mathcal{F}_{k-1}$-re nézve. Így $\{Z_n=k\}\in\mathcal{F}_k$, azaz Z_n megállási idő.

A 3.2 Tétel miatt tetszőleges $n=0,1,2,\ldots$ esetén az $Y_{Z_n+1}, Y_{Z_n+2},\ldots$ valószínűségi változók egymástól és Z_n-től függetlenek és az eredeti Y_k sorozattal azonos eloszlásúak lesznek. Azt kapjuk, hogy:

$$Z_0=1=S_0;$$

$$Z_1-Z_0=Y_1=S_1;$$

$$Z_2-Z_1=\sum_{j=1}^{Z_1-Z_0} Y_{Z_0+j}=S_2;$$

$$\vdots$$

$$Z_{n+1}-Z_n=\sum_{j=1}^{Z_n-Z_{n-1}} Y_{Z_{n-1}+j}=S_{n+1}$$

$$\vdots$$

Így az eddigiekkel összehangban $Z_n=1+S_1+\ldots+S_n$.

Tekintsük az alábbi $(X_{n,k}, \mathcal{F}_{n,k})$ sorozatot. Legyen $n, k = 1, 2, \ldots$ esetén

$$X_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{1 + m + \ldots m^{n-1}}} \cdot (Y_k - m) \cdot \chi\{k \leq Z_{n-1}\}, \text{ és}$$

$$\mathcal{F}_{n,k} = \sigma\big\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\big\} \text{ generált } \sigma\text{-algebra.}$$

Az $X_{n,k}$ kettős sorozat tagjai az alábbi alakúak lesznek:

$$(Y_1 - m),\ 0,\ 0, \ldots;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+m}} \cdot (Y_1 - m),\ \ \frac{1}{\sqrt{1+m}} \cdot (Y_2 - m),\ \ \ldots\ ,\ \ \frac{1}{\sqrt{1+m}} \cdot (Y_{Z_1} - m),\ 0,\ 0, \ldots;$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+m+\ldots+m^{n-1}}} \cdot (Y_1 - m),\ \ \ldots\ ,\ \ \frac{1}{\sqrt{1+m+\ldots+m^{n-1}}} \cdot (Y_{Z_{n-1}} - m),\ 0,\ 0, \ldots;$$

$$\vdots$$

Világos, hogy $(X_{n,k}, \mathcal{F}_{n,k})$ martingáldifferencia szériák sorozata. Meghatározzuk a szériák összegeit, illetve a feltételes szórásnégyzeteik összegeit.

$$\Sigma_n = \frac{F(Z_{n-1}) - m \cdot Z_{n-1}}{\sqrt{1+m+\ldots+m^{n-1}}} = \frac{(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) - m \cdot (1 + S_1 + \ldots + S_{n-1})}{\sqrt{1+m+\ldots+m^{n-1}}},$$

$$\sigma^2_{n,k} = E\big(X^2_{n,k} \mid \mathcal{F}_{n,k-1}\big) = E\left(\frac{(Y_k - m)^2 \cdot \chi\{k \leq Z_{n-1}\}}{1+m+\ldots+m^{n-1}} \;\middle|\; \mathcal{F}_{n,k-1}\right) = \frac{\sigma^2 \cdot \chi\{k \leq Z_{n-1}\}}{1+m+\ldots+m^{n-1}},$$

$$V_n^2 = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} \sigma^2_{n,j} = \frac{\sigma^2 Z_{n-1}}{1+m+\ldots+m^{n-1}} = \sigma^2 \cdot \frac{1 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{1+m+\ldots+m^{n-1}}.$$

Belátjuk, hogy az $(X_{n,k}, \mathcal{F}_{n,k})$ martingáldifferencia szériák sorozatára teljesül a 3.4 Tétel (i) és (ii) feltétele.

(i) A 3.10 Tétel miatt $V_n^2 \to \sigma^2 \cdot W$ triviálisan teljesül.

(ii)

$$L(n, \varepsilon) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{(Y_k - m)^2}{1+m+\ldots+m^{n-1}} \cdot \chi\left\{\frac{|Y_k - m|}{\sqrt{1+m+\ldots+m^{n-1}}} > \varepsilon\right\} \;\middle|\; \mathcal{F}_{n,k-1}\right) \cdot \chi\big\{k \leq Z_{n-1}\big\} =$$

$$\frac{1}{1+m+\ldots+m^{n-1}} \cdot \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} E\Big(\big(Y_k-m\big)^2 \cdot \chi\big\{|Y_k-m| > \varepsilon\sqrt{1+m+\ldots+m^{n-1}}\big\}\Big).$$

Kihasználva, hogy az Y_k $k=1,2,\ldots,Z_{n-1}$ változók függetlenek és azonos eloszlásúak:

$$= \frac{1+S_1+\ldots+S_{n-1}}{1+m+\ldots+m^{n-1}} \cdot E\Big(\big(Y_1-m\big)^2 \cdot \chi\big\{|Y_1-m| > \varepsilon\sqrt{1+m+\ldots+m^{n-1}}\big\}\Big).$$

Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra $\varepsilon\sqrt{1+m+\ldots+m^{n-1}} \to \infty$, ha $n \to \infty$, így a Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel miatt:

$$E\Big(|Y_1-m|^2\chi\big\{|Y_1-m| > \varepsilon\sqrt{1+m+\ldots+m^{n-1}}\big\}\Big) \to 0, \quad \text{ha } n \to \infty.$$

Az első tört pedig 1 valószínűséggel W-hez tart, így korlátos marad. Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra $L(n,\varepsilon) \to 0$ 1 valószínűséggel, és így sztochasztikusan is.

A 3.4 Tétel miatt $\frac{\Sigma_n}{V_n} \to_d N(0,1)$. Azaz:

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma_n}{V_n} &= \frac{(S_1+S_2+\ldots+S_n) - m\cdot(1+S_1+\ldots+S_{n-1})}{\sigma\cdot\sqrt{1+S_1+\ldots+S_{n-1}}} = \\
&= \frac{\sqrt{1+S_1+\ldots+S_{n-1}}}{\sigma} \cdot \left(\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{1+S_1+\ldots+S_{n-1}} - m\right) = \\
&= \frac{\sqrt{1+S_1+\ldots+S_{n-1}}}{\sigma} \cdot (\mu_n - m) \to_d N(0,1).
\end{aligned}$$

Tudjuk továbbá, hogy

$$\sqrt{\frac{1+S_1+\ldots+S_{n-1}}{1+m+\ldots+m^{n-1}}} \to \sqrt{W}, \quad \text{így}$$

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \sqrt{W(1+m+\ldots+m^{n-1})} \cdot (\mu_n - m) \to_d N(0,1).$$

Innen pedig σ-val való szorzás után adódik a tétel állítása. $\square$

Összefoglalás

A dolgozat első részében megvizsgáltuk az elágazó folyamatok legfontosabb jellemzőit. Kiszámítottuk az n-edik nemzedék lélekszámának generátorfüggvényét, várható értékét valamint szórásnégyzetét. Az utódszám generátorfüggvényének segítségével megmutattuk, hogyan lehet a kihalás valószínűségének pontos értékét meghatározni, az utódszám várható értékének ismeretében pedig egyszerűen ellenőrizhető feltételt adtunk a kihalásra és annak idejére a szubkritikus, kritikus valamint szuperkritikus esetekben. Több érdekes példát is mutattunk a szereplő tételek alkalmazásaira. Megvizsgáltuk a kezdeti ős leszármazottainak számának generátorfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.

A második részben martingálok segítségével elemeztük az elágazó folyamatokat. Az $E\big(S_{n+k} \mid S_n\big)$ feltételes várható érték segítségével beláttuk, hogy a $W_n = \dfrac{S_n}{m^n}$ sorozat martingál. Megvizsgáltuk ezen sorozat konvergenciáját, és a határérték kapcsolatát a kihalás eseményével. Az utolsó szakaszban a szuperkritikus esettel foglalkoztunk. Az első n generáció összlétszámának ismeretében becslést adtunk az utódszám várható értékére, majd eddigi eredményeink segítségével bebizonyítottunk egy elágazó folyamatokra vonatkozó centrális határeloszlás-tételt.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Móri Tamás Tanár Úrnak a dolgozatom elkészítésében nyújtott nélkülözhetetlen segítségéért. A készülő munka többszöri figyelmes elolvasásával, a pontatlanságok kijavításával, valamint hasznos tartalmi és formai tanácsaival nagyban hozzájárult a dolgozat végleges formájának kialakításához.

Hivatkozások

[1] Søren Asmussen – Niels Keiding: Martingale Central Limit Theorems and Asymptotic Estimation Theory for Multitype Branching Processes. *Adv. Appl. Probab.* **10** (1978), 109–129.

[2] William Feller: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[3] Samuel Karlin – Howard M. Taylor: *Sztochasztikus folyamatok.* Gondolat, Budapest, 1985.

[4] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: *Analízis II.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007.

[5] Móri Tamás: *Diszkrét paraméterű martingálok.* ELTE jegyzet, Budapest, 1999.

[6] Móri Tamás: *Generátorfüggvények.* http://www.cs.elte.hu/~mori/genfv.pdf, 2007.