

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Englert Ákos

**SÍKBARAJZOLHATÓ GRÁFOK  
REPREZENTÁCIÓI**

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Bérczi Kristóf

Operációkutatási Tanszék



Budapest, 2010.

# Előszó

Szeretném ezúton is megköszönni témavezetőmnek, Bérczi Kristófnak a rengeteg észrevételt és segítséget, hogy mindig szakított rám időt, és sok hasznos tanáccsal látott el formai és tartalmi kérdésekben egyaránt.

Nagy segítséget jelentettek évfolyamtársaim is, hiszen az alapképzés három éve során minden problémát, nehézséget megbeszélhettem velük és minden körülmények között számíthattam rájuk, ezért rendkívül hálás vagyok nekik.

Köszönettel tartozom még tanáraimnak, családomnak, barátaimnak és mindenkinek, aki hozzájárult tanulmányaim sikerességéhez.

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>5</b>
<b>1. Síkbarajzolható páros gráfok</b>	<b>8</b>
1.1. Vízszintes és függőleges szakaszok . . . . .	8
<b>2. Kontakt reprezentációk</b>	<b>15</b>
2.1. Háromszögmentes síkbarajzolható gráfok . . . . .	15
2.2. 4-összefüggő, 3-színezhető gráfok . . . . .	24
<b>3. Metsző reprezentáció</b>	<b>26</b>
3.1. Fogalmak . . . . .	27
3.2. Premodell . . . . .	28
3.3. Bizonyítás vázlat . . . . .	31
<b>4. Síkbarajzolható hipergráfok reprezentációi</b>	<b>32</b>
4.1. Lehetséges reprezentációk . . . . .	32
4.1.1. Ábrázolás függőleges és vízszintes szakaszokkal . . . . .	33
4.1.2. Ábrázolás egymást érintő konvex alakzatokkal . . . . .	33
4.1.3. Kontakt és metsző reprezentációk . . . . .	33
4.2. Reprezentáció egymást érintő háromszögekkel . . . . .	34
4.3. Hipergráfok kontakt reprezentációja . . . . .	37
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>39</b>

# Ábrák jegyzéke

1.1. $G_b$ és $G_w$ . . . . .	9
1.2. $G_w$ irányításának definiálása . . . . .	10
1.3. Nem lehet harmadik forrás . . . . .	10
1.4. $V_i$ és $H_j$ szakaszok előállítására . . . . .	11
1.5. A $b_{k-1}w_j, b_k w_{j+1}$ lapok . . . . .	12
1.6. $G^*$ reprezentációjának kiterjesztése $G$ reprezentációjára . . . . .	14
2.1. Háromszögmentes síkgráf és kontakt reprezentációja . . . . .	16
2.2. Monoton utak . . . . .	17
2.3. Pseudo-konvex lap és az oldalak alkotta részutak . . . . .	18
2.4. Kiterjeszhető és nem kiterjeszhető szakaszok . . . . .	18
2.5. Problémás szakasz-összehúzások . . . . .	19
2.6. Példa a két alapmódszerre . . . . .	20
2.7. Szakaszok átrendezése . . . . .	21
2.8. Példa 4 kivételes úttal rendelkező kivételes lapra . . . . .	22
2.9. Egy háromszöget tartalmazó gráf és kontakt reprezentációja . . . . .	23
3.1. Lap-szakasz . . . . .	27
3.2. Az 5,6,7 és 8. ponttípusokhoz tartozó gráfok . . . . .	29
4.1. $G^+$ és $G_{\parallel}^+$ irányítása . . . . .	35
4.2. 2-típusú pont megszüntetése . . . . .	35
4.3. A háromszög-reprezentáció előállításának lépései . . . . .	36
4.4. Példa biztosan 2. típusú csúcsra . . . . .	37

# Bevezetés

A gráfelméletnek számos gyakorlati alkalmazása ismert, hiszen a gráfok kiválóan alkalmasak egy kapcsolatrendszer vagy hálózat összefüggéseinek ábrázolására. Így például folyamatok megtervezése során vagy adatszerkezetek létrehozásánál egyaránt hasznosnak bizonyultak. Ahhoz, hogy gráfokkal foglalkozzunk, nagy segítséget nyújt, ha valamilyen módon szemléltetni, lerajzolni is tudjuk őket. A gráfrepresentációk vizsgálata napjaink egy sokat kutatott területe a matematikában. Gráfoknak számos reprezentációja ismert, ez különösen igaz a síkbarajzolható gráfokra. Síkbarajzolhatónak nevezük azokat a gráfokat, melyek lerajzolhatók úgy, hogy az éleik nem metszik egymást. Ekkor egy gráf "lerajzolásán" a szokásos reprezentációját értjük, azaz a csúcsokat pontokkal, az éleket pedig a csúcsokat összekötő folytonos vonallal ábrázoljuk.

Gráfok ábrázolása során számos kérdés felvetődhet. Például ha adott egy síkbarajzolható gráf, akkor mekkora felület kell a lerajzolására. Ez a kérdés nagy gyakorlati fontossággal bír, hiszen ha egy kijelzőn gráfot szeretnénk megjeleníteni, csak véges terület áll rendelkezésre. Schnyder [13] bebizonyította, hogy egy  $n$  csúcsú síkbarajzolható gráf lerajzolható úgy, hogy a csúcsai egy  $(n - 2) \times (n - 2)$ -es négyzetrács rácspontjai legyenek, az éleket pedig egyenes szakaszok reprezentálják.

A szokásos reprezentáción kívül azonban másként is ábrázolhatunk síkbarajzolható gráfokat. Például Koebe tétele [11] szerint minden síkbarajzolható gráf reprezentálható egymást érintő körlapokkal úgy, hogy a körlapok a gráf csúcsainak felelnek meg, és két körlap pontosan akkor érinti egymást, ha a megfelelő csúcsok közt megy él a gráfban. Ehhez hasonló az az ábrázolás, amikor a csúcsoknak szakaszokat feleltetünk meg, és két szakasznak pontosan akkor van közös pontja,

ha az általuk reprezentált csúcsok közt megy él a gráfban. Jelen dolgozat célja ezen reprezentáció vizsgálata.

Azt mondjuk, hogy két szakasz metszi egymást, ha van közös belső pontjuk, ha pedig két szakasz közös pontja végpontja az egyik szakasznak, akkor egymást érintő szakaszokról beszélünk. Ha megengedjük a gráf csúcsait reprezentáló szakaszok átmetszését, akkor az ábrázolást *metsző reprezentációnak*, ha csak érinthetik egymást, akkor *kontakt reprezentációnak* nevezzük. A dolgozatban áttekintjük, hogy milyen síkbarajzolható gráfoknak létezik kontakt, illetve metsző reprezentációja.

Az első fejezetben Hubert de Fraysseix, Patrice Ossona de Mendez és Pach János munkája [4] nyomán bizonyítjuk, hogy minden síkbarajzolható páros gráfnak létezik olyan kontakt reprezentációja, hogy a csúcsokat reprezentáló szakaszok csak vízszintes vagy függőleges helyzetűek lehetnek, a második fejezetben pedig háromszögmentes síkbarajzolható gráfokra látjuk be olyan kontakt reprezentáció létezését, melyben a csúcsokat reprezentáló szakaszok helyzete csak háromféle (vízszintes, függőleges vagy átlós) lehet. A fejezet hátralevő részében egy harmadik, kontakt reprezentációval szintén rendelkező gráfosztályt ismertetünk.

A harmadik fejezetben megvizsgáljuk, hogy ha megengedjük a gráf csúcsait reprezentáló szakaszok átmetszését, milyen síkbarajzolható gráfokat tudunk ábrázolni. Scheinermantól ered a sejtés [12], miszerint minden síkbarajzolható gráfnak létezik metsző reprezentációja. A sejtés több, mint húsz éven keresztül állt, mígnem Jérémie Chalopinnek és Daniel Gonçalvesnak sikerült igazolni az állítást. Az ő cikküket [3] követve tekintjük át a bizonyítást.

Az egyszerű síkbarajzolható gráfok reprezentációi után kézenfekvő a kérdés, hogy milyen hipergráfokat tudunk ábrázolni a síkban, illetve a síkbarajzolható gráfok különféle reprezentációi kiterjeszthetők-e hipergráfokra. A negyedik fejezetben ezeket a kérdéseket vizsgáljuk. Először a síkbarajzolhatóság fogalmát terjesztjük ki, majd a kontakt és metsző reprezentációt. A kontakt és metsző reprezentációk kicsit különböznek az egyszerű gráfokétól, itt ugyanis a szakaszok nem a hipergráf csúcsait, hanem a hiperéleket reprezentálják, és két szakasznak pontosan akkor van

közös pontja, ha a reprezentált hiperéleknek van közös csúcsa. Mivel két szakasznak nulla, egy vagy végtelen sok közös pontja van, ezért az ily módon reprezentálható hipergráfokra megköveteljük, hogy a hipergráfban bármely két különböző hiperélek legfeljebb egy közös csúcsa legyen. Az ilyen hipergráfokat *lineáris hipergráfoknak* nevezzük. Egyszerű síkbarajzolható gráfokkal ellentétben a síkbarajzolható lineáris hipergráfokra nem minden esetben adható metsző reprezentáció (ellenpélda a [9]-ben található hipergráf), de minden síkbarajzolható lineáris hipergráf ábrázolható egymást érintő háromszöglapokkal. A negyedik fejezetben ezt a reprezentációt is áttekintjük.

# 1. fejezet

## Síkbarajzolható páros gráfok

Ebben a fejezetben Hubert de Fraysseix, Patrice Ossona de Mendez és Pach János munkája [4] nyomán belátjuk, hogy síkbarajzolható páros gráfok csúcsait reprezentálhatjuk szakaszokkal úgy, hogy a szakaszok közül pontosan azoknak van közös pontjuk, amelyek által reprezentált csúcsok közt megy él az eredeti gráfban. Igaz továbbá az is, hogy a szakaszok csak érinthetik egymást, azaz nincs közös belső pontjuk.

### 1.1. Vízszintes és függőleges szakaszok

Azt mondjuk, hogy két szakasz metszi egymást, ha van közös belső pontjuk, ha pedig két szakasz közös pontja végpontja az egyik szakasznak, akkor egymást érintő szakaszokról beszélünk. Ezzel a megfogalmazással a tétel a következő:

**1.1.1. Tétel** (Fraysseix, Mendez, Pach [4]). *Minden páros síkbarajzolható gráf csúcsai ábrázolhatók a síkban egymást nem metsző vízszintes és függőleges szakaszokkal úgy, hogy két szakasznak akkor és csak akkor van közös pontja, ha az általuk reprezentált csúcsok közt megy él a gráfban.*

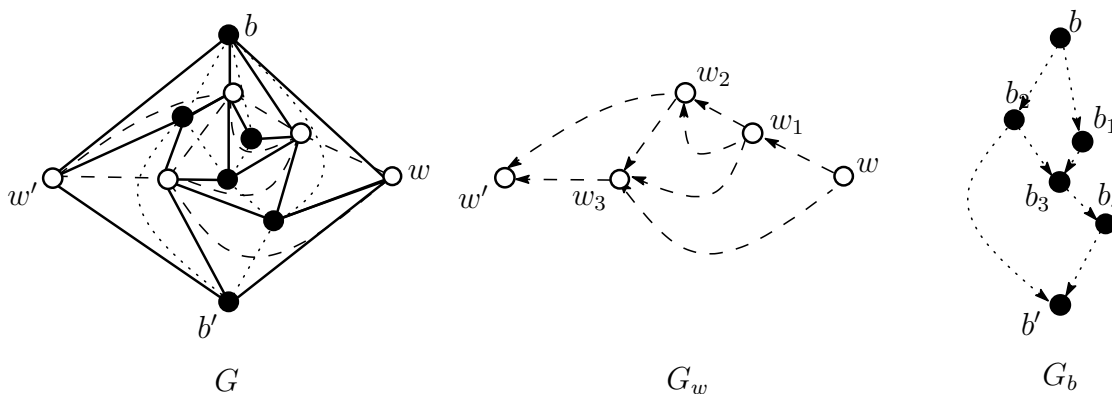
A bizonyításhoz először definiáljuk a bipoláris irányítás fogalmát. *Multigráf* alatt olyan irányítatlan gráfot értünk, amelynek lehetnek többszörös élei. Egy multigráf *2-összefüggő*, ha bármely csúcsát (és a rá illeszkedő éleket) törölve összefüggő marad.

**1.1.1. Definíció.** Egy multigráf *st-bipoláris irányításának* nevezzük az éleinek olyan aciklikus irányítását, melyben  $s$  és  $t$  rendre az egyedüli forrás és nyelő a gráfban.



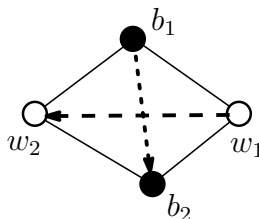
Ismert, hogy egy multigráfnak akkor és csak akkor létezik  $st$ -bipoláris irányítása, ha az  $st$  él hozzávételével a gráf 2-összefüggővé válik. Az irányítás létezése ekvivalens továbbá azzal is, hogy létezik a csúcsok halmazán olyan lineáris rendezés, hogy  $s$  és  $t$  a legnagyobb illetve a legkisebb elem, és minden ezektől különböző csúcsnak van nála nagyobb és kisebb szomszédja is. Az ilyen rendezést  $st$ -rendezésnek nevezzük.

*Bizonyítás.* A tételt elég négyszögelt (olyan gráf, amelynek minden lapja négyszög) páros gráfokra bizonyítani, hiszen bármely síkbarajzolható páros gráf előáll négyszögelt páros gráf részgráfjaként. Ez nyilván igaz lesz a tételben szereplő reprezentációra is, vagyis négyszögelt gráf csúcsait reprezentáló vízszintes és függőleges szakaszokból a megfelelő szakaszokat elhagyva bármely síkbarajzolható páros gráf reprezentációját megkapjuk. A gráf külső csúcsai legyenek  $b, w, b'$  és  $w'$  az óramutató járásával megegyező irányban. A páros gráf két csúcosztályába tartozó csúcsok legyenek fehér, illetve fekete színűek, és tegyük föl, hogy  $b$  fekete csúcs. A gráf minden belső lapjában az átlók behúzásával kössük össze a fekete, illetve a fehér csúcsokat. Az így kapott élek által meghatározott két multigráf legyen  $G_b$ , valamint  $G_w$ . Nyilvánvaló, hogy minden  $G_b$ -beli él pontosan egy  $G_w$ -beli élt metsz, és fordítva.

1.1. ábra.  $G_b$  és  $G_w$ 

Az is könnyen belátható, hogy  $G_b$  a  $bb'$  él hozzávételével 2-összefüggővé válik, tehát a korábbiak alapján  $G_b$ -nek létezik  $bb'$ -bipoláris irányítása. Ennek segítségével definiálhatunk egy  $G_w$ -beli irányítást is a következőképpen: minden  $b_1w_1b_2w_2$  belső

lapra  $\overrightarrow{w_1 w_2} \in \overrightarrow{G_w} \Leftrightarrow \overrightarrow{b_1 b_2} \in \overrightarrow{G_b}$ .



1.2. ábra.  $G_w$  irányításának definiálása

**1.1.1. Lemma.**  $\overrightarrow{G_w}$   $ww'$ -bipoláris irányítás  $G_w$ -ben.

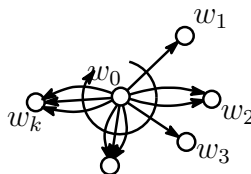
*Bizonyítás.*

**1.1.1. Állítás.**  $\overrightarrow{G_w}$  nem tartalmaz irányított kört.

*Bizonyítás.* Indirekt tegyük föl, hogy van  $\overrightarrow{G_w}$ -ben irányított kör, és tekintsük a legkisebb ilyen. Tegyük föl, hogy ezen kör irányítása az óramutató járásával megegyező. Ekkor a  $G_b$  gráf élei  $\overrightarrow{G_w}$  definíciója miatt a kör által határolt tartományból kilépnek, így a tartomány szükségszerűen tartalmazza  $G_b$  egyetlen forrását, vagyis  $b$ -t, de mivel  $b$  külső pont, ezért ez nem lehetséges, tehát ellentmondáshoz jutottunk.  $\square$

**1.1.2. Állítás.**  $w$  az egyedüli forrás,  $w'$  pedig az egyedüli nyelő  $\overrightarrow{G_w}$ -ben.

*Bizonyítás.* Tegyük föl, hogy  $\overrightarrow{G_w}$ -nek van  $w$ -tól és  $w'$ -től különböző forrása, legyen ez  $w_0$ . Legyenek  $w_0 w_1, w_0 w_2, \dots, w_0 w_k$  a  $w_0$ -ra illeszkedő élek az óramutató járásával megegyező irányban. Ezeket az éleket metsző  $\overrightarrow{G_b}$ -beli élek irányított kört alkotnának, ami nem lehetséges.

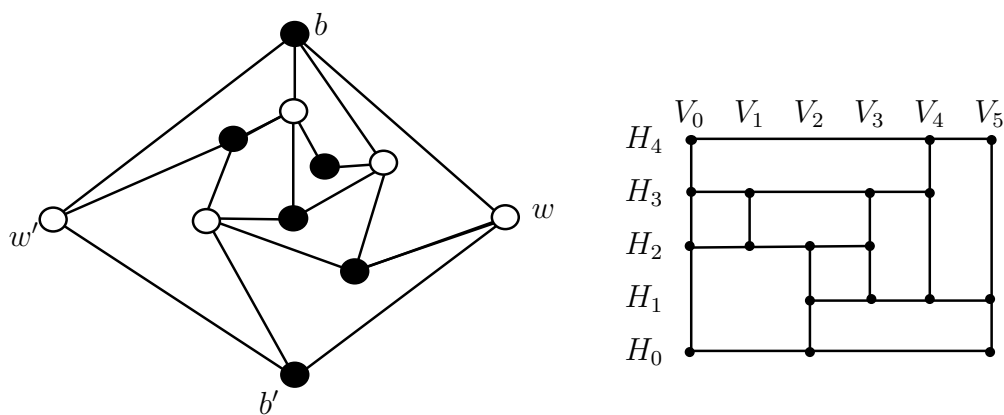


1.3. ábra. Nem lehet harmadik forrás

Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy nincs  $w$ -tól és  $w'$ -től különböző nyelő sem. Ezután bizonyítsuk be, hogy  $w$  a forrás. Tekintsük a  $bw$  élhez tartozó belső lapot  $G$ -ben. Mivel  $b$  forrás  $\vec{G}_b$ -ben, ezért a tekintett lap fekete csúcsokhoz tartozó átlója nem lehet  $b$ -felé irányítva. Ekkor pedig a másik átló  $\vec{G}_w$  definíciója miatt szükségszerűen nem  $w$ -felé van irányítva, tehát nem lehet nyelő. Így  $w$  forrás,  $w'$  pedig a nyelő. Tehát  $\vec{G}_w$  szintén bipoláris irányítás.  $\square$

Ezzel a lemmát beláttuk.  $\square$

Legyen  $b_0 = b < b_1 < b_2 < \dots < b_k = b'$  és  $w_0 = w < w_1 < \dots < w_l = w'$  a  $\vec{G}_b$ , illetve  $\vec{G}_w$  bipoláris irányításokhoz tartozó  $st$ -rendezés úgy, hogy ha  $\vec{b_i b_j} \in \vec{G}_b$ , vagy  $\vec{w_i w_j} \in \vec{G}_w$ , akkor  $i < j$ . Legyen  $x$  a fekete,  $y$  a fehér csúcsok halmazán értelmezett valós, szigorúan monoton függvény, azaz  $x(b_0) < x(b_1) < \dots < x(b_k)$  és  $y(w_0) < y(w_1) < \dots < y(w_l)$ . Minden  $b_i$  fekete csúcsához rendeljük a  $V_i$  függőleges szakaszt, melynek végpontjai legyenek  $(x(b_i), \min_{b_i w_j \in E} y(w_j))$  és  $(x(b_i), \max_{b_i w_j \in E} y(w_j))$ . Ehhez hasonlóan, a  $w_j$  fehér csúcsok mindegyikéhez egy  $H_j$  vízszintes szakaszt rendelünk, ezek végpontjai pedig legyenek  $(\min_{b_i w_j \in E} x(b_i), y(w_j))$  és  $(\max_{b_i w_j \in E} x(b_i), y(w_j))$ .



1.4. ábra.  $V_i$  és  $H_j$  szakaszok előállítás

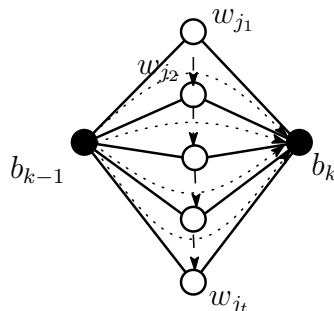
Észrevehetjük, hogy a  $V_i$  és  $H_j$  szakaszok egymáshoz viszonyított helyzete csak a két csúcsosztályon értelmezett  $st$ -rendezéstől függ, az  $x$  és  $y$  függvények aktuális értékeitől nem. A  $V_i$  és  $H_j$  szakaszok definíciójából az is következik, hogy ha  $b_i$  és

$w_j$  szomszédos csúcsai  $G$ -nek, akkor az  $(x(b_i), y(w_j))$  pontot a  $V_i$  és a  $H_j$  szakasz is tartalmazza. A tétel bizonyításához még az alábbi lemmát kell belátnunk:

**1.1.2. Lemma.** *Semelyik  $V_i$  és  $H_j$  szakasz sem metszi egymást, továbbá a  $V_i$  és  $H_j$  szakaszok ( $0 < i < k, 0 < j < l$ ) a  $V_0H_0V_kH_l$  téglalapot kisebb téglalapokra osztják.*

*Bizonyítás.* A  $G$  gráf csúcsainak száma szerinti indukcióval bizonyítunk. Ha a  $G$  gráfnak 4 csúcsa van, akkor az állítás nyilvánvaló, hiszen ez esetben  $G$  egy 4 hosszú kör, és egy téglalappal reprezentálhatjuk. Tegyük föl, hogy  $G$ -nek legalább 5 csúcsa van, és ebből legalább 3 fekete csúcs, valamint a legfeljebb  $n - 1$  csúcsú gráfokra teljesül a lemma.

Tekintsük a  $\overrightarrow{b_{k-1}b_k}$  élt. Ezt  $\overrightarrow{G_b}$  nyilvánvalóan tartalmazza, sőt, akár többszörös él is lehet. Jelölje  $b_{k-1}$  és  $b_k$  közös szomszédait  $w_{j_1} < \dots < w_{j_t}$  ( $t \geq 2$ , mivel a gráf négyszögelt). Minden  $1 \leq r < t$  esetén  $b_{k-1}w_{j_r}b_kw_{j_{r+1}}$  egy lapja  $G$ -nek, amely a  $\overrightarrow{b_{k-1}b_k} \in \overrightarrow{G_b}$  és  $\overrightarrow{w_{j_r}w_{j_{r+1}}} \in \overrightarrow{G_w}$  éleket tartalmazza.



1.5. ábra. A  $b_{k-1}w_{j_r}b_kw_{j_{r+1}}$  lapok

Hozzunk létre  $G$ -ből egy  $G^*$  gráfot a következőképp: töröljük  $b_k$  és  $w_{j_r}$  ( $1 < r < t$ ) csúcsokat, és a  $G$  gráf minden  $xb_k$  éle helyett vegyünk hozzá egy-egy  $xb_{k-1}$  élt ( $x$  a  $G$  gráf tetszőleges  $w_{j_1}$ -től és  $w_{j_t}$ -től különböző nem törölt csúcsa, tehát  $G^*$  egyszerű gráf lesz, mert  $x$  nem lehet egyszerre  $b_k$  és  $b_{k-1}$  szomszédja). Így a  $b_{k-1}w_{j_r}b_kw_{j_{r+1}}$  lapok (1.5. ábra) kivételével minden  $G$ -beli lapnak lesz  $G^*$ -beli megfelelője.  $\overrightarrow{G_b}$ -ből és  $\overrightarrow{G_w}$ -ből származtassunk egy-egy  $G_b^*$ -n és  $G_w^*$ -n értelmezett irányítást a következőképp:

$$\overrightarrow{G_b^*} := (\overrightarrow{G_b} - \overrightarrow{b_ib_k} \in \overrightarrow{G_b}) \cup (\overrightarrow{b_ib_{k-1}} : \overrightarrow{b_ib_k} \in G \text{ és } i \neq k-1)$$

$$\overrightarrow{G_w^*} := \overrightarrow{G_w} - \{\overrightarrow{w_{j_r}w_{j_{r+1}}} : 1 \leq r < t\}$$

A  $\overrightarrow{G}_w^*$  része  $\overrightarrow{G}_w$ -nek,  $\overrightarrow{G}_b^*$  pedig úgy származik  $\overrightarrow{G}_b$ -ből, hogy a  $b_k$ -ba irányított élek helyett  $b_{k-1}$ -be irányított éleket veszünk hozzá a gráfhoz. Mivel  $\overrightarrow{G}_b$  és  $\overrightarrow{G}_w$  bipoláris irányítások voltak, ezért  $\overrightarrow{G}_b^*$  és  $\overrightarrow{G}_w^*$  irányítások is a csúcsok aktuális rendezéséhez tartozó irányítások. Mivel  $G^*$  gráf  $G$ -nél eggyel kevesebb csúcsot tartalmaz, ezért az indukciós feltétel miatt a  $G^*$ -ot reprezentáló  $V_i^*$  függőleges és  $H_j^*$  vízszintes szakaszok nem metszik egymást, és a  $V_0^*, H_0^*, V_{k-1}^*, H_l^*$  téglalapot kisebb téglalapokra osztják. Észrevehetjük, hogy  $V_i^* = V_i$  minden  $0 \leq i < k - 1$  esetén, illetve  $H_j^* = H_j$  minden olyan  $w_j$  csúcsra, ahol  $w_j b_k \notin G$ .

Tekintsük  $G^*$ -ban a  $b_{k-1}$ -gyel szomszédos fehér csúcsokat. Ezek egy  $P = (w_{h_0} = w_0, w_{h_1}, \dots, w_{h_s} = w_l)$  irányított utat határoznak meg  $\overrightarrow{G}_w^*$ -ben és  $\overrightarrow{G}_b^*$ -ben, melyek áthaladnak  $w_{j_1}$ -en és  $w_{j_t}$ -n is. Egy  $w_{h_r}$  csúcs 3 esetben lehet  $b_{k-1}$ -gyel szomszédos a  $G^*$  gráfban:

1.  $b_{k-1}$ -nek és  $b_k$ -nak is szomszédja  $G$ -ben. Ekkor  $h_r = j_1$  vagy  $h_r = j_t$ .
2.  $b_{k-1}$ -nek szomszédja  $G$ -ben, de  $b_k$ -nak nem. Ekkor  $j_1 < h_r < j_t$ .
3.  $b_{k-1}$ -nek nem szomszédja  $G$ -ben, de  $b_k$ -nak igen. Ekkor  $h_r < j_1$ , vagy  $h_r > j_t$ .

Ez alapján a  $G^*$  gráf  $V_i^*, H_j^*$  szakaszokkal való reprezentációját a következőképpen terjeszthetjük ki  $G$  reprezentációjára:

- A "legjobbaldalibb",  $V_{k-1}^* = [(x(b_{k-1}), y(w_0)), (x(b_{k-1}), y(w_l))]$  függőleges szakaszt cseréljük ki  $V_{k-1} = [(x(b_{k-1}), y(w_{j_1})), (x(b_{k-1}), y(w_{j_t}))]$  szakaszra. Ez  $V_{k-1}^*$ -nek egy részszakasza lesz. (Ezzel biztosítjuk, hogy a  $j_1$ -nél kisebb, és  $j_t$ -nél nagyobb indexű fehér pontokhoz tartozó szakaszok ne érintsék a  $b_{k-1}$  pontot reprezentáló, függőleges  $V_{k-1}$  szakaszt.)
- Vegyük hozzá a  $G^*$  ábrázolásához a  $V_k = [(x(b_k), y(w_0)), (x(b_k), y(w_l))]$  függőleges szakaszt. (Ez lesz a  $G^*$  gráf előállításánál törölt  $b_k$  pontot reprezentáló szakasz.)
- $h_r \leq j_1$  és  $h_r \geq j_t$  esetén a  $H_{h_r}^*$  vízszintes szakaszokat hosszabbítsuk meg  $V_k$ -ig. (Ezzel biztosítjuk, hogy a  $j_1$ -nél kisebb, és  $j_t$ -nél nagyobb indexű fehér pontokhoz tartozó szakaszok érintsék  $V_k$ -t.)



## 2. fejezet

# Kontakt reprezentációk

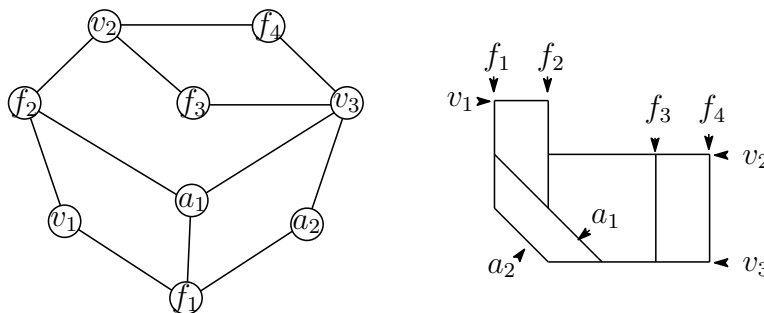
Az 1. fejezetben bemutatott reprezentációra igaz volt, hogy a szakaszok nem metszik egymást, azaz nincs közös belső pontjuk. Egy gráf ezen tulajdonsággal rendelkező reprezentációját a továbbiakban *kontakt reprezentációnak* nevezzük. Ebben a fejezetben ilyen kontakt reprezentációkat vizsgálunk.

Petr Hlineny [10] bizonyította, hogy gráfok kontakt reprezentációjának elkészítése NP-teljes probléma, már speciálisabb esetekben is (például az előző fejezetben tárgyalt síkbarajzolható páros gráfok esetében is). Kézenfekvő azonban a kérdés, hogy mely gráfoknak létezik egyáltalán kontakt reprezentációja? Mondhatunk-e valamit a szakaszok helyzetéről? A következőkben egy-egy olyan gráfosztályt mutatunk be, melyek elemeinek létezik kontakt reprezentációja.

### 2.1. Háromszögmentes síkbarajzolható gráfok

**2.1.1. Tétel.** *Minden háromszögmentes síkbarajzolható gráfnak létezik olyan kontakt reprezentációja, ahol a csúcsokat reprezentáló szakaszok vízszintes, függőleges, és "átlós" helyzetűek. ( $\rightarrow$ ,  $\uparrow$ ,  $\searrow$ )*

Ez az eredmény tulajdonképpen az előző fejezetben tárgyalt eset továbbgondolása, hiszen Grötzsch tétele [14] miatt egy síkbarajzolható háromszögmentes gráf csúcsai színezhetők három színnel. Az előzőekben a két színosztályt kétféle szakasszal reprezentáltuk, itt pedig a három színosztályt háromféle szakasszal fogjuk. A bizonyítás menete is hasonló. Kiindulunk egy



2.1. ábra. Háromszögmentes síkgráf és kontakt reprezentációja

háromszögmentes  $G$  síkbarajzolható gráfból, új csúcsok és utak hozzávételével egy olyan háromszögmentes síkbarajzolható gráfhoz jutunk, amely egy felosztott 3-összefüggő gráf. Egy 3-színezésből indulva a kontakt reprezentáció ebből az új gráfból származik, majd a hozzávett csúcsokat és utakat törölve  $G$  kontakt reprezentációját kapjuk. A teljes bizonyítás [2]-ben részletesen megtalálható, itt csupán vázlatosan tekintjük át.

*Bizonyítás.* Feltehetjük, hogy a reprezentáló szakaszok végpontjai közös pontok valamely másik szakasszal. A kontakt reprezentáció a síkgráfokhoz hasonlóan egymástól jól elkülöníthető tartományokra, *lapokra* osztja a síkot. Egy lapot tekinthetünk  $n$ -oldalú poligonnak ( $n \geq 4$ , hiszen  $G$  háromszögmentes). A bizonyításhoz szükség van a konvex poligon fogalmának egy általánosabb megfelelőjére.

**2.1.1. Definíció.** Egy vízszintes, függőleges és átlós helyzetű szakaszokból álló  $P = \{s_1, \dots, s_n\}$  sorozatot a reprezentációbeli *útnak* nevezünk, ha  $s_i$ -nek pontosan  $s_{i-1}$  és  $s_{i+1}$  szakaszokkal van közös pontja minden  $1 < i < n$  esetén.

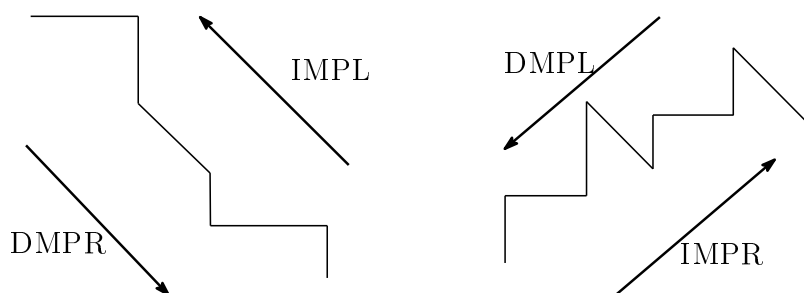
**2.1.2. Definíció.** Egy reprezentációbeli utat *monoton útnak* nevezünk egy  $l$  egyenesre, ha bármely  $l$ -re merőleges egyenes csak egy pontban metszi. A továbbiakban a monotonitást az  $l_1 = \{x + y = 0\}$  és  $l_2 = \{x - 2y = 0\}$  egyenesekre fogjuk vizsgálni.

**2.1.3. Definíció.** Egy-egy monoton utat rajzolhatunk (egy út megrajzolásánál természetesen nem emeljük föl a tollat, és egy szakaszt sem rajzolunk meg kétszer)



balról jobbra, vagy jobbról balra, eszerint négyféle monoton utat különböztetünk meg:

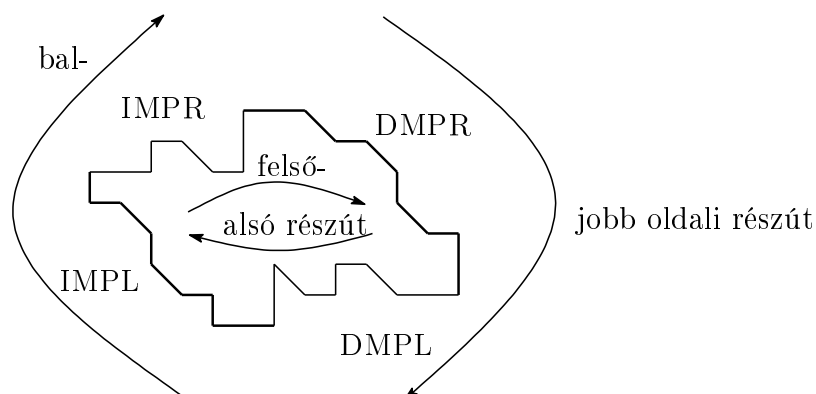
- *Növekvő monoton út jobbra*: A vízszintes szakaszait jobbra, a függőlegeseket fölfelé, az átlósakat jobbra le rajzoljuk ( $\rightarrow, \uparrow, \searrow$ ). Az angol elnevezés alapján ("*Increasing monotone path to the right*") az ilyen utakat az IMPR mozaikszóval fogjuk jelölni.
- *Csökkenő monoton út jobbra* (DMPR): A vízszintes szakaszait jobbra, a függőlegeseket lefelé, az átlósakat jobbra le rajzoljuk. ( $\rightarrow, \downarrow, \searrow$ )
- *Csökkenő monoton út balra* (DMPL): A vízszintes szakaszait balra, a függőlegeseket lefelé, az átlósakat balra föl rajzoljuk. ( $\leftarrow, \downarrow, \swarrow$ )
- *Növekvő monoton út balra* (DMPL): A vízszintes szakaszait balra, a függőlegeseket lefelé, az átlósakat balra föl rajzoljuk. ( $\leftarrow, \uparrow, \swarrow$ )



2.2. ábra. Monoton utak

**2.1.4. Definíció.** A kontakt reprezentáció egy lapját *pszeudo-konvex lapnak* nevezzük, ha az óramutató járásával megegyező sorrendben fölbontható IMPR, DMPR, DMPL és IMPL utakra. Ezen felosztás alapján az IMPR és DMPR utak unióját *fölső részútnak*, a DMPL és IMPL utak unióját *alsó részútnak* nevezzük. Teljesen hasonlóan, egy pszeudo-konvex lap fölosztható *jobb* (DMPR, DMPL) és *bal részutakra* is. A fölső és alsó, illetve jobb és bal részutakat egymással szemközti részutaknak nevezzük.

Vegyük észre, hogy ha  $F$  egy pszeudo-konvex lap, és  $P$  egy  $F$  két nem szomszédos szakaszának végpontjait összekötő monoton út, akkor  $P$  út az  $F$  lapot két szintén

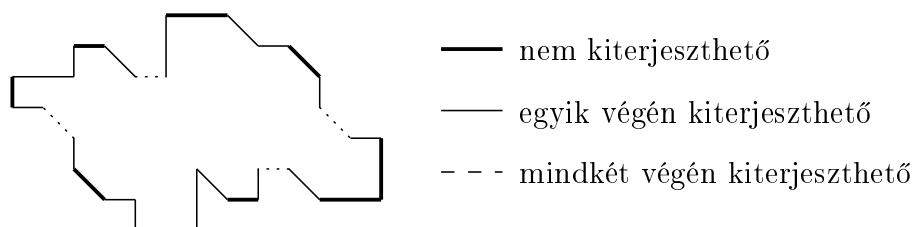


2.3. ábra. Pszeudo-konvex lap és az oldalak alkotta részutak

pszeudo-konvex lapra osztja. Hasonló fölbontást eredményez, ha  $F$  lapon két megfelelő szakaszt meghosszabbítunk  $F$  belseje felé úgy, hogy messék egymást.

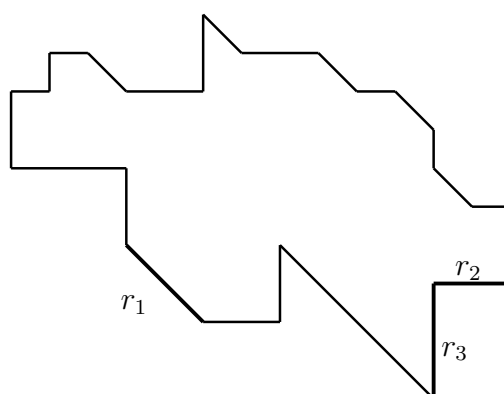
Egy  $G$  síkgráf kontakt reprezentációjának elkészítéséhez először a külső lapját ábrázoljuk egy pszeudo-konvex lappal. Ezt követően, ha a külső lap két csúcsát egy út köti össze  $G$ -ben, akkor ezt az utat egy monoton úttal reprezentáljuk, amely a pszeudo-konvex lap belsejében halad. Az előbbieket alapján így két újabb pszeudo-konvex lapot kapunk. Ezt az eljárást rekurzíven minden lapra elvégezve eljutunk a  $G$  gráfot reprezentáló ábrázolásig.

Látható, hogy a kontakt reprezentáció elkészítése során ahhoz, hogy egy azonos lapon levő két nem szomszédos szakasznak lehessen közös pontja, ki kell terjeszteni legalább az egyik szakaszt a lap belseje felé. Ez azonban nem mindig tehető meg. Egy szakasz *kiterjesztése* pontosan akkor valósítható meg valamely végpontjánál, ha a lapnak az ehhez a ponthoz tartozó belső szöge konkáv. Így egy lapon egy szakasz lehet egyik végén, illetve mindkét végén kiterjeszthető, vagy nem kiterjeszthető.



2.4. ábra. Kiterjeszthető és nem kiterjeszthető szakaszok

Nyilvánvaló, hogy egy lapon két nem szomszédos szakasz összehúzása (annak elérése, hogy legyen közös pontjuk) szükségszerűen legalább az egyik szakasz kiterjesztésével jár, de ez nem mindig lehetséges. Az összehúzás során kétféle probléma is fölmerülhet.

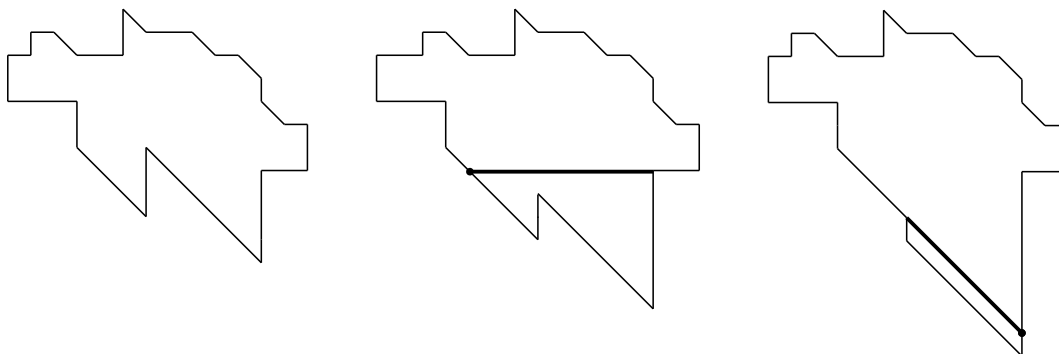


2.5. ábra. Problémás szakasz-összehúzások

- A szakaszok kiterjeszthetők, de az összehúzás során akadályba ütközünk, más szakaszok "eshetnek útba" (például az ábrán  $r_1$  és  $r_2$  összehúzásánál).
- A szakaszok nem kiterjeszthetők, vagy kiterjesztéseik nem metszik egymást (például az ábrán  $r_3$  kiterjesztésének nincs közös pontja az  $r_1$  nem kiterjeszthető szakasszal).

Ezen problémás esetek kiküszöbölésére két módszert alkalmazunk. (2.6. ábra)

1. *Meghosszabbíthatunk egy szakaszt.* Ekkor más szakaszoknak is meg kell változtatni a hosszát a lapon ahhoz, hogy továbbra is lap maradjon. Ezzel a módszerrel elkerülhetjük az összehúzás során a lapon belüli akadályokat.
2. *Megváltoztathatjuk egy szakasz rajzolását.* Ez a módszer megengedi, hogy egy szakaszt a lapból kifelé is kiterjesszünk. Ekkor azonban a lap pseudo-konvexitását megőrzendő, a szomszédos, illetve más, a kiterjesztett szakasszal azonos monoton úton levő szakaszok lerajzolását is meg kell változtatni.



2.6. ábra. Példa a két alpmódszere

Erről a két alpmódszerről szól az alábbi két lemma:

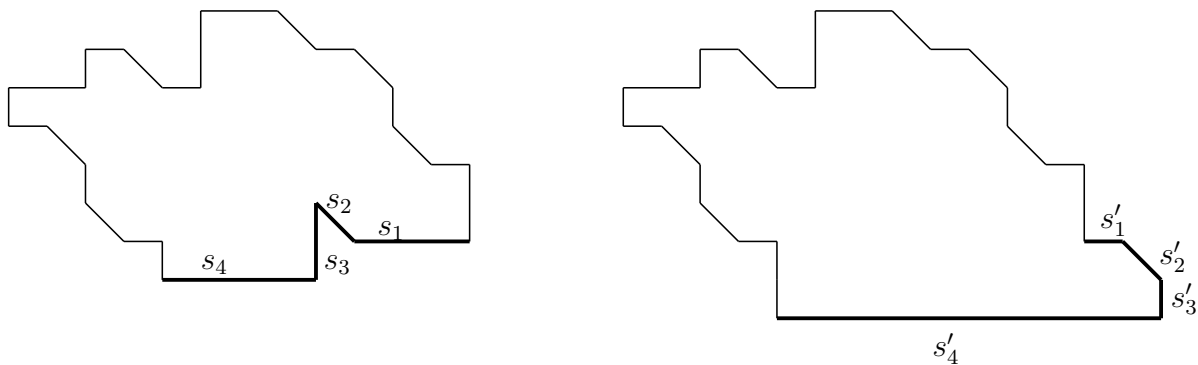
**2.1.1. Lemma.** *Legyen  $I_G$  a  $G$  felosztott 3-összefüggő síkbarajzolható gráf kontakt reprezentációja, melynek minden lapja pseudo-konvex,  $k$  legyen pozitív valós szám,  $s$  pedig az  $I_G$   $F$ -fel jelölt lapján levő szakasz. Ekkor  $I_G$  egy másik,  $I'_G$  kontakt reprezentációvá alakítható, amelyre igaz a következő két tulajdonság:*

- $I'_G$  topologikusan ekvivalens  $I_G$ -vel, és  $I'_G$  minden lapja pseudo-konvex.
- $s$ -et (és legfeljebb két szakaszt a  $F$  szemközti részútjáról) meghosszabbíthatjuk úgy, hogy  $s'$  hossza  $I'_G$ -ben  $k + l$  legyen ( $l$  az  $s$  szakasz hosszát jelöli).

Ez a "szakaszhosszabbítás" művelet segít ugyan, de önmagában nem elég, hiszen szükség lehet a szakaszok átrendezésére. Egy út mentén történő átrendezésnek nevezzük azt a műveletet, amikor az út szakaszainak a rajzolását megváltoztatva azok másik monoton útba kerülnek át. Természetesen az út mentén történő átrendezés szomszédos lapokon is végbemegy, amelyek az utat tartalmazzák.

**2.1.2. Lemma.** *Legyen  $I_G$  a  $G$  felosztott 3-összefüggő síkbarajzolható gráf kontakt reprezentációja, melynek minden lapja pseudo-konvex. Legyen  $F$  az  $I_G$  egyik lapja. Ekkor  $I_G$  egy másik,  $I'_G$  kontakt reprezentációvá alakítható, amelyre igaz a következő két tulajdonság:*

- $I'_G$  topologikusan ekvivalens  $I_G$ -vel, és  $I'_G$  minden lapja pseudo-konvex.
- Az  $F$  laphoz tartozó  $F'$  lapot egy monoton út mentén való átrendezéssel kapjuk.



2.7. ábra. Szakaszok átrendezése

A következő tételt Barnette [1] bizonyította:

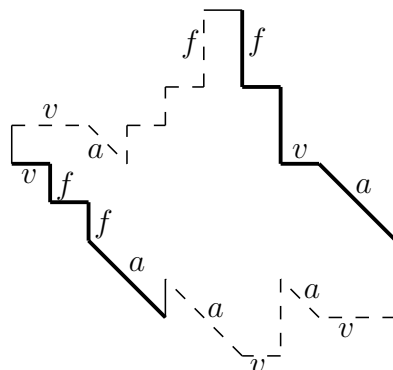
**2.1.2. Tétel.** *Ha  $G$  egy felosztott háromszorosan összefüggő gráf, akkor léteznek olyan  $Q_1, \dots, Q_{n-1}$  utak  $G$ -ben, hogy  $G$ -nek a  $G_1 = G$ ,  $G_2 = G_1 - Q_1$ ,  $\dots$ ,  $G_n = G_{n-1} - Q_{n-1}$  részgráfjaira teljesül, hogy minden  $G_k$  egy felosztott, háromszorosan összefüggő gráf, és  $G_n$  egy felosztott  $K_4$ .*

A tételt használva felosztott 3-összefüggő gráfok reprezentációja háromféle helyzetű szakaszokkal a következőképp áll elő. Először egy felosztott  $K_4$  reprezentációját készítjük el, majd éleket illetve utakat illesztünk be, fordított sorrendben, mint ahogy a reprezentált csúcsokat elhagyjuk  $G$ -ben a  $G_1, G_2, \dots, G_n$  sorozat elkészítése során. A beillesztések során egy lap két nem szomszédos szakasza közé kerülhet út, vagy összehúzhatjuk őket. Utóbbi vizsgáljuk, de a két eset lényegében teljesen hasonló. Az összehúzáskor felmerülő problémák közül a legtöbbre megoldást nyújt a korábban vázolt két alapmódszer, de van négy kivételes eset, amely új művelet bevezetését igényli.

**2.1.5. Definíció.** Egy 3-színezett  $G$  síkgráfban (a három szín legyen  $v$ ,  $f$  és  $a$ ) egy  $P = \{u_1, \dots, u_n\}$  út *kivételes*, ha a következő feltételek valamelyikét teljesíti:

- $u_1$  színe  $v$ ,  $u_2$  színe  $a$  és  $u_n$  színe  $f$
- $u_1$  színe  $f$ ,  $u_{n-1}$  színe  $v$  és  $u_n$  színe  $a$
- $u_1$  színe  $v$ ,  $u_2$  színe  $a$ ,  $u_{n-1}$  színe  $v$  és  $u_n$  színe  $a$
- $u_1$  színe  $a$ ,  $u_2$  színe  $f$ ,  $u_{n-1}$  színe  $f$  és  $u_n$  színe  $v$

**2.1.6. Definíció.** Egy gráf valamely lapját *kivételes lapnak* nevezzük, ha van kivételes részutat tartalmazó monoton út benne.



2.8. ábra. Példa 4 kivételes úttal rendelkező kivételes lapra

**2.1.3. Lemma.** Legyen  $I_G$  a  $G$  síkbarajzolható gráf kontakt reprezentációja, és legyen  $s_1$  és  $s_2$  két nem szomszédos szakasz egy  $F$  pseudo-konvex, nem kivételes lapon. Ekkor  $I_G$  egy másik,  $I'_G$  kontakt reprezentációvá alakítható, amelyre igaz, hogy ugyanazon lapokat tartalmazza, mint  $I_G$  és ezek pseudo-konvexek, valamint  $s_1$  és  $s_2$  összeköthető egy  $k$  hosszú úttal minden  $k > 0$  esetén, vagy ha  $s_1$  és  $s_2$  nem ugyanolyan helyzetű szakaszok  $F'$ -ben, akkor közvetlenül összehúzhatók.

Tehát a nem kivételes lapok esetében a módszerünk működik. A kivételes lapok esetében viszont problémába ütközünk. Ezen a kivételes lapok "kijavitása" segít. Egy kivételes lapot *megjavítottnak* nevezünk, ha a kivételes útját egy új csúcs bevezetésével felosztjuk.

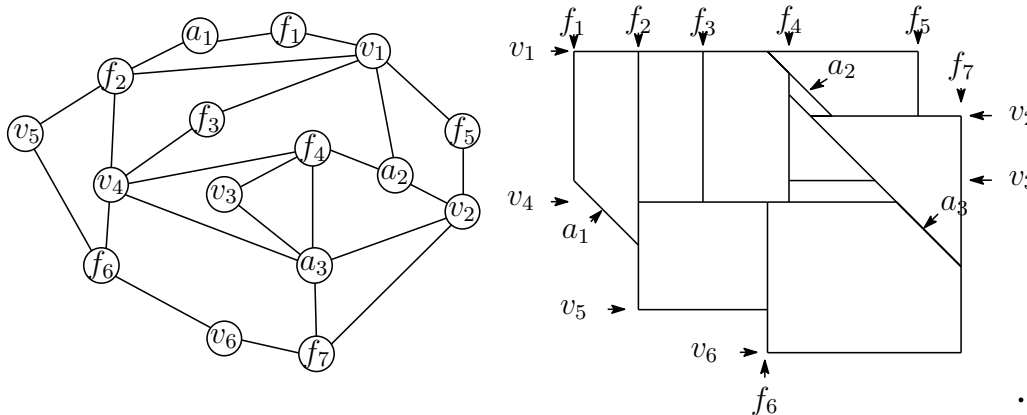
**2.1.4. Lemma.** Minden háromszögmentes síkbarajzolható gráf, amely egy felosztott háromszorosán összefüggő gráf, reprezentálható háromféle irányú szakaszokkal.

Érdekesség ezen lemma bizonyításában, hogy a kivételes lapokat kijavítjuk, de ezen művelet során segédcúcsok keletkeznek, amelyeket később törölni kell, hogy valóban  $G$  gráf csúcsainak reprezentációját kapjuk. Ezek a csúcsok nem hagyhatók el egyszerűen, csak átrendezéssel. Mivel a segédcúcsoknak nincs másik szomszédja, és az átrendezéses elhagyásuk az utolsó lépés, ezért lehetséges az ilyen törlés. Csak abban az esetben nem lehetne törölni, ha a kivételes út 3 hosszú volt, ez azonban nem lehetséges, hiszen  $u_1$  és  $u_3$  összehúzásával háromszöget kapnánk a gráfban.

Felhasználva az eddigieket, már be tudjuk bizonyítani az eredeti tételt:

Legyen  $G$  háromszögmentes síkbarajzolható gráf. Grötzsch tételét alkalmazva  $G$  3-színezhető, legyenek ezek a színek  $v$ ,  $f$  és  $a$  (vízszintes, függőleges és átlós). Létrehozhatunk egy új  $G_1$  háromszögmentes síkgráfot, amely egy felosztott háromszorosán összefüggő gráf, és  $G$ -t részgráfként tartalmazza.  $G_1$  úgy származik  $G$ -ből, hogy új csúcsokat és éleket hozzáadva összeköttöttük  $G$  csúcsait. Ha egy él hozzávételével háromszöget kapnánk, vagy egy él két azonos színű pontot kötne össze, osszuk föl az élt. A hozzávett csúcsokkal és élekkel a gráf tehát 3-színezhető marad. A 4. lemma miatt  $G_1$ -nek létezik kontakt reprezentációja. Ebből a reprezentációból ki kell törölni a hozzávett csúcsokat, éleket, és  $G$  reprezentációját kapjuk.  $\square$

**2.1.1. Megjegyzés.** Természetesen háromféle helyzetű szakaszokból álló kontakt reprezentációja nem csak háromszögmentes gráfoknak van. Erre kiváló példa a 2.9. ábrán található gráf.



2.9. ábra. Egy háromszöget tartalmazó gráf és kontakt reprezentációja

A háromszögmentesség mint feltétel azért volt hasznos, mert a bizonyításban a lapok tulajdonságait használtuk föl. Általános esetben, azaz háromszöget is tartalmazó gráfok esetén előfordulhat, hogy két reprezentáló szakasznak mindenképpen van közös pontja. Ekkor a pseudo-konvex lapokra építő bizonyítás nem használható, hiszen a reprezentáció lapjai nem felelnének meg az eredeti gráf lapjainak. A háromszögek megengedésének egy lehetséges módja, ha kikötjük, hogy

egy 3-színezés csak akkor jó, ha minden háromszög csúcsai ugyanolyan körüljárási irány szerint vannak színezve.

## 2.2. 4-összefüggő, 3-színezhető gráfok

**2.2.1. Tétel.** *Négyszeresen összefüggő, három színnel színezhető síkbarajzolható gráfoknak létezik kontakt reprezentációja.*

*Bizonyítás.* A bizonyítás [7]-ben megtalálható, itt nem bizonyítjuk részletesen. Az alapjául szolgáló tétel kimondása előtt definiáljuk egy szakaszrendszer illeszkedési (incidencia) gráfját.

**2.2.1. Definíció.** *Érintő szakaszrendszernek* olyan szakaszok rendszerét nevezzük, melyek közül semelyik kettőnek sincs közös belső pontja.

**2.2.2. Definíció.** Egy érintő szakaszrendszer *illeszkedési gráfjának* (vagy *incidencia gráfjának*) azt a  $G = (V_\bullet, V_\circ, E)$  páros gráfot nevezzük, ahol  $V_\bullet$  a több szakaszra is illeszkedő pontokat,  $V_\circ$  a szakaszokat,  $E$  pedig a pontok szakaszokra való illeszkedéseit reprezentálja.

Ezek után a tétel a következő:

**2.2.2. Tétel.** *Egy  $G = (V_\bullet, V_\circ, E)$  összefüggő páros gráf pontosan akkor illeszkedési gráfja egy érintő szakaszrendszernek, ha*

- $G$  síkbarajzolható,
- a  $V_\circ$ -beli csúcsok foka legalább 2,
- minden olyan  $X \subseteq V$  esetén, ahol  $X$  legalább két  $V_\circ$ -beli pontot tartalmaz, teljesül, hogy  $|E[X]| \leq 2|X \cap V_\circ| + |X \cap V_\bullet| - 3$ .

□

**2.2.1. Megjegyzés.** A tétel bizonyítása [7]-ben található, itt csupán néhány megjegyzést teszünk a tétellel kapcsolatban.



- A tétel bizonyítása során szükség van a későbbiekben is fontos szerepet játszó ún.  $(2, \leq 1)$ -irányításra. Egy páros gráf  $(2, \leq 1)$ -irányításán olyan irányítást értünk, melyben az egyik csúcsosztály elemeinek befoka pontosan 2, a másik csúcsosztály elemeinek befoka pedig 0, vagy 1.
- A tétel másik fontos következménye, hogy minden olyan 4 színnel színezhető síkbarajzolható gráf, amely nem tartalmaz 4 különböző színnel színezett 4 hosszú kört, reprezentálható egymást metsző szakaszok rendszerével (két szakasz pontosan akkor metszi egymást, ha a reprezentált csúcsokat él köti össze a gráfban). Érdekes tehát megvizsgálni, hogy a reprezentáló szakaszok átmetszésének megengedése esetén milyen gráfokat tudunk ábrázolni. Ezt vizsgáljuk a következő fejezetben.
- A bizonyítás használt olyan eredményeket, amelyek egymást metsző vagy érintő, ún. pszeudo-szakaszokról – vagy más néven Jordan-ívekről – szólnak. Ezek az eredmények a [6]-ban találhatóak.

## 3. fejezet

# Metsző reprezentáció

Az előző fejezetekben a kontakt reprezentációkat vizsgáltuk. Ebben a fejezetben azt fogjuk áttekinteni, hogy amennyiben megengedjük a reprezentáló szakaszok átmetszését, milyen síkbarajzolható gráfokat tudunk ábrázolni.

Az előző fejezet záró megjegyzésében szerepelt, hogy négy színnel színezhető, négyszínű 4 hosszú kört nem tartalmazó síkbarajzolható gráfok esetén létezik ilyen reprezentáció, azonban bizonyítást nyert, hogy ennél több is igaz. Scheinermantól ered a sejtés [12], miszerint minden síkbarajzolható gráfnak létezik egymást metsző szakaszokkal való reprezentációja, ahol a szakaszok a gráf csúcsainak felelnek meg, és két szakasznak pontosan akkor van közös pontja, ha a hozzájuk tartozó csúcsok közt megy él a gráfban. Az ilyen reprezentációt a rövideg kedvéért a továbbiakban *metsző reprezentációnak* fogjuk nevezni.

A sejtés több, mint húsz éven keresztül állt, mígnem Jérémie Chalopinnek és Daniel Gonçalvesnek sikerült igazolni az állítást. Az ő cikküket [3] követve áttekintjük a bizonyítást. A cikk terjedelme, a részállítások, valamint ezek bizonyításának hossza miatt ezúttal is csak vázlatosan bizonyítunk. A fő eredmény a következő:

**3.0.3. Tétel.** *Minden síkbarajzolható gráfnak létezik metsző reprezentációja.*

A tételt nyilvánvalóan elegendő háromszögelt síkgráfokra bizonyítani, hiszen minden síkgráf előáll egy háromszögelt síkgráf részgráfjaként. A továbbiakban, amikor szakaszrendszert említünk, feltételezzük, hogy minden szakasznak különböző

a kezdő- és végpontja, valamint a párhuzamos szakaszoknak nincs közös pontja. A bizonyítás előtt szükséges még definiálni néhány, a bizonyításban fontos szerepet játszó fogalmat.

## 3.1. Fogalmak

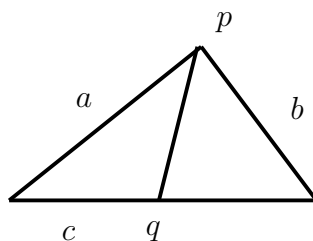
**3.1.1. Definíció.** A reprezentáló szakaszok vég- illetve metszéspontjait *reprezentatív pontoknak* nevezzük.

**3.1.2. Definíció.** Az olyan metsző reprezentációt, ahol minden végpont pontosan egy szakasz végpontja, és semelyik három szakasznak sincs közös metszéspontja, *modellnek* nevezzük.

**3.1.3. Definíció.** A síkgráf lapjait is reprezentálhatjuk szakaszokkal. Egy  $S$  szakaszrendszerben az egymást páronként metsző  $a, b, c$  szakaszhármashoz tartozó  $f = \underline{abc}$  lap-szakaszon azt a  $[p, q]$  szakaszt értjük, ahol:

- $p$  pont az  $a$  és  $b$  szakaszok metszéspontja, és a  $p$ -n áthaladó szakaszok sorrendje  $a, f, b$ ,
- $q$  pont a  $c$  szakasz egy belső pontja, amely semelyik másik  $s \in S$  szakaszhoz sem tartozik,
- $f$  egyik belső pontja sem tartozik semelyik másik  $s \in S$  szakaszhoz.

Ekkor  $p$  pontot az  $f$  lap-szakasz *CE-pontjának*,  $q$  pontot pedig az *FE-pontjának* nevezzük. (Az elnevezés az angol *cross-end* és *flat-end* szavak rövidítése.)



3.1. ábra. Lap-szakasz

Itt érdemes megjegyezni, hogy  $p \neq q$  és a definícióban  $a$  és  $b$  szerepe fölcserélhető, vagyis egy  $\underline{abc}$  lap-szakasz egyben  $\underline{bac}$  lap-szakasz is, de nem  $\underline{acb}$  lap-szakasz.

**3.1.4. Definíció.** Egy  $S$  szakaszrendszerben két lap-szakasz,  $f_1$  és  $f_2$  *nem akadályozó*, ha az alábbi két állítás közül valamelyik teljesül:

- $f_1$  és  $f_2$  szakaszok nem metszik egymást,
- $f_1$ -nek és  $f_2$ -nek a  $CE$ -pontja megegyezik (legyen  $p$ ) és ez a pont pontosan két  $S$ -beli szakasznak,  $a$ -nak és  $b$ -nek a metszéspontja. Továbbá az  $a$ -ra, vagy a  $b$ -re illeszkedő egyenes úgy osztja ketté a síkot, hogy  $f_1$  és  $f_2$  két külön félsíkra esik.

**3.1.5. Definíció.** Egy  $T$  háromszögelés *teljes modelljének* azt a szakaszrendszerekből álló  $M = (S, F)$  párt nevezzük, ahol  $S$  a  $T$  egy modellje, és  $F$  nem akadályozó lap-szakaszok halmaza  $S$ -en úgy, hogy  $T$  minden  $abc$  belső lapjára  $F$  tartalmazza az  $\underline{abc}$ ,  $\underline{acb}$ ,  $\underline{bca}$  lap-szakaszok valamelyikét.

Chalopin és Gonçaves fő eredménye annak belátása, hogy minden  $T$  háromszögelésnek létezik teljes modellje.

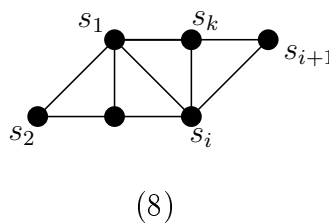
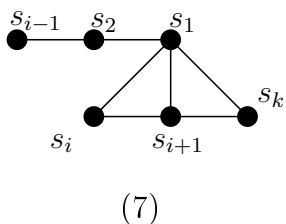
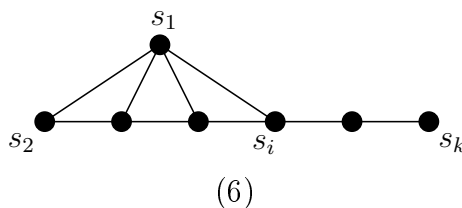
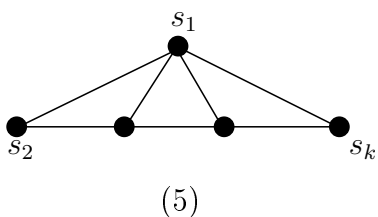
## 3.2. Premodell

A bizonyítás során egy másik modellt is használunk, ennek a neve premodell. A fő különbség a premodell és a teljes modell között az, hogy premodell esetén kettőnél több szakasz is metszheti egymást egy pontban. Tekintsük azt a szakaszrendszert, ami egy  $S$  szakaszrendszer, és egy  $F$  nem akadályozó lap-szakasz rendszer uniója.  $S$  szakaszait jelölje  $s_1, s_2, \dots$ ,  $F$  szakaszait pedig  $f_1, f_2, \dots$ . Egy  $p$  reprezentatív pont *illeszkedési sorozatának* a rá illeszkedő szakaszok ciklikus sorozatát nevezzük. A pont körüljárási iránya lényegtelen, ezért ez a sorozat irányítatlan. Ha egy  $x$  szakasz egyik végpontja  $p$ , akkor a  $p$ -n túli meghosszabbítását  $(x)$ -szel jelöljük. A reprezentatív pontokat típusokba soroljuk az illeszkedési sorozataik szerint. Minden ponttípushoz létezik egy hozzá tartozó gráf is. Így nyolcféle ponttípus létezik (az 5, 6, 7, 8 ponttípusokhoz tartozó gráfok a 3.2. ábrán találhatók):

1. *Szakasz végpont.* Illeszkedési sorozat:  $(s_1)$ . Hozzá tartozó gráf egy  $s_1$  csúcs.

2. *Lap-szakasz FE-pont.* Illeszkedési sorozat:  $(s_1, f_1, s_1)$ . Hozzá tartozó gráf egy  $s_1$  csúcs.
3. *Metszéspont.* Illeszkedési sorozat:  $(s_1, [f_1], s_2, [f_2], s_1, [s_2])$  vagy  $(s_1, [f_1], s_2, s_1, [f_2], s_2)$ . Hozzá tartozó gráf egy  $s_1 s_2$  él.
4.  $(s_1, s_2, \dots, s_k)$ -út pont ( $k \geq 2$ ). Illeszkedési sorozat:  $(s_1, s_2, \dots, s_k, (s_1), (s_2))$   
Hozzá tartozó gráf:  $(s_1, s_2, \dots, s_k)$ -út,  $s_1, \dots, s_k$  csúcsokkal.
5.  $s_1 \triangleleft (s_2, \dots, s_k)$ -*"legyező" pont* ( $k \geq 2$ ) pont.  
Illeszkedési sorozat:  $(s_1, [f_1], s_2, \dots, s_k, (s_1), [f_1], (s_2))$  Ez a ponttípus a nevét a hozzá tartozó gráf legyezőszerű alakjáról kapta.
6.  $s_1 \triangleleft (s_2, \dots, s_i) \cdot (s_i, \dots, s_k)$  *"legyező-út"-pont.*  
Illeszkedési sorozat:  $(s_1, \dots, s_i, \dots, s_k, (s_1), (s_i))$ .
7.  $(s_{i-1}, \dots, s_2, s_1) \cdot s_1 \triangleleft (s_i, \dots, s_k)$  *"út-legyező"-pont.*  
Illeszkedési sorozat:  $(s_1, \dots, s_i, \dots, s_k, (s_1), (s_i))$ .
8.  $s_1 \triangleleft (s_2, \dots, s_i) \cdot s_i \triangleleft (s_{i+1}, \dots, s_k, s_1)$  *"dupla-legyező" pont.*  
Illeszkedési sorozat:  $(s_1, \dots, s_i, \dots, s_k, (s_1), (s_i))$ .

Az illeszkedési sorozatban az  $([r_1, r_2, \dots, r_k]$  jelölés azt jelenti, hogy az illeszkedési sorozat az alábbi három sorozat egyike:  $(r_1, r_2, \dots, r_k), (r_2, \dots, r_k), ((r_1), r_2, \dots, r_k)$



3.2. ábra. Az 5,6,7 és 8. ponttípusokhoz tartozó gráfok

A premodell fogalma előtt definiáljunk egy páros digráfot, melynek  $R$  csúcsosztálya egy  $R$  szakaszrendszer szakaszait, másik csúcsosztálya pedig  $R$  szakaszrendszer reprezentatív pontjait (jelölje ezt  $Rep_R$ ) képviseli. Egy  $R$  belső csúcsot pontosan akkor köt össze él valamely  $Rep_R$ -beli csúccsal, ha a  $Rep_R$ -beli csúcs által reprezentált pont illeszkedik az  $R$ -beli csúccsal reprezentált szakaszra. Ha a szakasznak az aktuális pont végpontja, akkor az él legyen  $Rep_R$  felé irányítva, különben pedig  $R$  felé. Ezt a digráfot jelöljük  $Const_R$ -rel. Ekkor a premodellt a következőképp definiálhatjuk:

**3.2.1. Definíció.** Adott egy  $S$  szakaszrendszer, egy  $F$  nem akadályozó lap-szakaszokból álló rendszer, valamint egy  $\tau$  függvény, amely minden reprezentatív ponthoz egy ponttípust rendel. Az  $M = (S, F, \tau)$  hármast egy  $T$  háromszögelés (itt olyan háromszögelésről beszélünk, ahol a külső lap nem feltétlenül háromszög) *premodellje*, ha a következők teljesülnek ( $V(G)$ ,  $E(G)$  és  $F(G)$  rendre a  $G$  gráf csúcs-, él- és laphalmaza):

- A  $Const_{S \cup F}$  digráf körmentes.
- Az  $a$  pontra  $a \in V(T)$  pontosan akkor, ha a hozzá tartozó  $a'$  szakasz  $S$ -beli.
- Az  $ab$  élre  $ab \in E(T)$  pontosan akkor, ha az  $a$  és  $b$  pontokhoz tartozó  $a'$  és  $b'$  szakasz egy olyan  $p$  pontban metszi egymást, hogy a  $\tau(p)$  típusú ponthoz tartozó gráf tartalmazza az  $ab$  élt.
- Az  $abc$  lapra  $abc \in F(T)$  pontosan akkor, ha létezik  $F$ -ben  $\underline{abc}$ ,  $\underline{acb}$  vagy  $\underline{bca}$  lap-szakasz, vagy az  $a, b, c$  pontokhoz tartozó  $a', b', c'$  szakaszok egy olyan  $p$  pontban metszik egymást, hogy  $abc$  egy belső lapja a  $\tau(p)$  típusú ponthoz tartozó gráfnak.

Figyeljük meg, hogy egy  $T$  háromszögelt gráf  $M = (S, F, \tau)$  premodelljében a reprezentatív pontok számára adható éles felső becslés. Legfeljebb  $2|V(T)|$  szakasz végpont, legfeljebb  $|F(T)|$  lap-szakasz  $FE$ -pont és legfeljebb  $|E(T)|$  egyéb típusú pont van. Megállapítható, hogy ha  $T$  háromszögelt gráf egy  $M = (S, F, \tau)$  premodellje  $2|V(T)| + |F(T)| + |E(T)|$  db reprezentatív ponttal rendelkezik, akkor  $(S, F)$  teljes modellje  $T$ -nek.

### 3.3. Bizonyítás vázlat

A bizonyítás során egy  $M = (S, F, \tau)$  premodellből kiindulva nyerünk  $M' = (S', F')$  teljes modellt. Egy premodellben egy  $p$  pontot *maximálisnak* mondunk, ha két különböző szakasznak belső pontja; *egyszerűnek*, ha vagy szakasz végpont, vagy lap-szakasz  $FE$ -pont, vagy olyan maximális pont, ami egy  $S$ -beli szakasznak sem végpontja. Ha egy premodellbeli pont nem egyszerű, akkor *speciális pontnak* nevezzük.

Három alap transzformációt definiálva ("meghosszabbítás", "csúsztatás" és "keresztelés") olyan eljárást hozhatunk létre, amely egy premodellben minden maximális speciális pontra alkalmazható, és növeli a premodellbeli reprezentatív pontok számát. Ezen műveletek többszöri alkalmazásával eljuthatunk egy olyan premodellig, amelyben a reprezentatív pontok száma maximális. Ez a korábbi állítás miatt teljes modell lesz, így elég a premodell létezését bizonyítani. Ennek a bizonyítását azonban itt nem tárgyaljuk, részletesen megtalálható [3]-ban.

Tehát minden síkbarajzolható gráfnak létezik teljes modellje, vagyis minden síkbarajzolható gráfnak van metsző reprezentációja.

## 4. fejezet

# Síkbarajzolható hipergráfok reprezentációi

Egyszerű síkbarajzolható gráfoknak számos reprezentációja ismert. Adódik a kérdés, hogy milyen hipergráfokat tudunk ábrázolni a síkban, illetve a síkbarajzolható gráfok különféle reprezentációi kiterjeszthetők-e a hipergráfokra. Ebben a fejezetben ezeket a kérdéseket vizsgáljuk.

### 4.1. Lehetséges reprezentációk

A síkbarajzolhatóság fogalmának többféle kiterjesztése ismert hipergráfokra. Zykov [16] a hipergráfok éleit a síkon lapokkal ábrázolta, így például egy 4 csúcsot tartalmazó hiperélt egy négyszöglappal reprezentált. Walsh [15] bebizonyította, hogy ez a reprezentáció pontosan akkor létezik, ha a hipergráf *illeszkedési (incidencia) gráfja* síkbarajzolható.

**4.1.1. Definíció.** Egy hipergráf illeszkedési vagy incidenciacsúcs gráfján azt a  $G = \{V_\bullet, V_\circ; E\}$  páros gráfot értjük, ahol  $V_\bullet$  jelenti a hipergráf csúcsait,  $V_\circ$  a hiperéleket, és egy  $V_\bullet$ -beli csúcsot pontosan akkor köt össze él egy  $V_\circ$ -beli ponttal, ha a megfelelő pont rajta van a megfelelő hiperélen.

A továbbiakban a síkbarajzolható incidenciacsúcs gráffal rendelkező hipergráfokat síkbarajzolhatónak fogjuk nevezni. Az illeszkedési gráf bevezetésével a hipergráfoknak egyszerű síkbarajzolható gráfokat feleltetünk meg, így a



síkbarajzolható gráfokra ismert reprezentációkból egyúttal hipergráfok lehetséges reprezentációit is kapjuk.

#### 4.1.1. Ábrázolás függőleges és vízszintes szakaszokkal

Az első fejezetből megismert módszerrel minden síkbarajzolható páros gráfot reprezentálhatunk egymást érintő függőleges és vízszintes szakaszokkal, így bármely síkbarajzolható hipergráf incidencia gráfját is. Tehát minden síkbarajzolható hipergráfot reprezentálhatunk egymást érintő függőleges és vízszintes szakaszokkal úgy, hogy a függőleges szakaszok a hipergráf csúcsainak, a vízszintes szakaszok pedig a hipergráf éleinek felelnek meg, és egy függőleges és egy vízszintes szakasznak pontosan akkor van közös pontja, ha a reprezentált pont illeszkedik a megfelelő hiperélre.

#### 4.1.2. Ábrázolás egymást érintő konvex alakzatokkal

- Koebe tétele [11] szerint minden síkbarajzolható gráfot reprezentálhatunk egymást érintő körlapokkal. Ez a reprezentáció nem terjeszthető ki hipergráfokra, hiszen kettőnél több körlap nem érintheti egymást egy pontban.
- Ismert, hogy minden síkbarajzolható gráf ábrázolható egymást érintő háromszöglapokkal [5]. A következő szakaszban megmutatjuk, hogy ez a fajta ábrázolás kiterjeszthető hipergráfokra.

#### 4.1.3. Kontakt és metsző reprezentációk

Az előző fejezetekben síkbarajzolható gráfok metsző és kontakt reprezentációival foglalkoztunk. Ezeket a fogalmakat kiterjeszthetjük hipergráfokra, azonban az ábrázolás kicsit különbözik az egyszerű gráfokétól. Itt ugyanis a szakaszok nem a hipergráf csúcsait, hanem a hiperéleket reprezentálják, és két szakasznak pontosan akkor van közös pontja, ha a reprezentált hiperéleknek van közös csúcsa. Mivel két szakasznak nulla, egy, vagy végtelen sok közös pontja van, ezért hipergráfok kontakt és metsző reprezentációi esetén megköveteljük, hogy a hipergráfban bármely két különböző hiperélnek legfeljebb egy közös csúcsa legyen. Az ilyen hipergráfokat

*lineáris hipergráfoknak* nevezzük. Ezáltal a reprezentációban két szakasznak 0, vagy 1 közös pontja lehet.

A 3. fejezetben láttuk, hogy minden síkbarajzolható gráfnak létezik metsző reprezentációja. Fraysseix és Mendez sejtése [6] szerint minden lineáris síkbarajzolható hipergráfra is adható metsző reprezentáció. Ez a sejtés azonban nem igaz, Gonçalves ellenpéldát is adott rá [9]. A lineáris síkbarajzolható hipergráfok kontakt reprezentációját később vizsgáljuk.

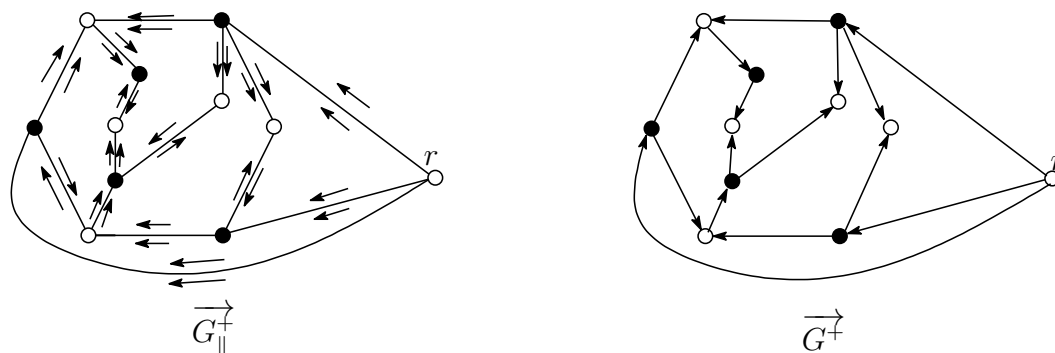
## 4.2. Reprezentáció egymást érintő háromszögekkel

Említettük, hogy az egyszerű síkbarajzolható gráfok esetén ismert háromszöglapokkal való ábrázolás kiterjeszthető hipergráfokra. Ehhez először a következő tételt látjuk be:

**4.2.1. Tétel.** *Minden síkbarajzolható lineáris hipergráf reprezentálható egymást érintő szakaszokkal és háromszöglapokkal úgy, hogy egy hiperélt egy szakasz, vagy egy háromszöglap reprezentál, és két hiperélt reprezentáló alakzatnak pontosan akkor van közös pontja, ha a két hiperélnak van közös csúcsa.*

*Bizonyítás.* Induljunk ki a hipergráf  $G$  incidenciagráfjából. A linearitás miatt  $G$  nem tartalmaz 4 hosszú kört, tehát a legkisebb előforduló kör legalább 6 hosszú lehet. Az állítást elegendő hatszögelt páros gráfok esetén bizonyítani, hiszen minden 4 hosszú körrel nem rendelkező páros gráf előáll hatszögelt páros gráf részgráfjaként.

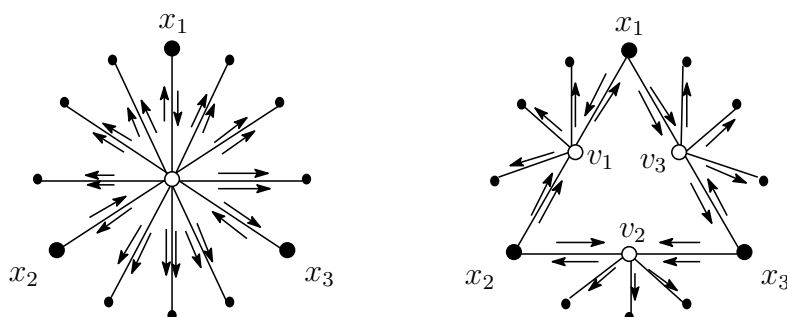
$G$ -hez vegyünk hozzá egy új  $r$  csúcsot, amit kössünk össze a  $G$  külső lapján levő három  $V_{\bullet}$ -beli csúccsal. Az így nyert gráf legyen  $G^+$ . Ezután kettőzzük meg  $G^+$  minden élét, így egy  $G_{\parallel}^+$  multigráfot kapunk. Ebben a multigráfban ([8]-beli 3.3.lemma szerint) megadható olyan  $\overrightarrow{G_{\parallel}^+}$  irányítás, hogy minden csúcs befoka 3 legyen, és  $r$  forrás. Ebből az irányításból  $G^+$  egy  $\overrightarrow{G^+}$  irányítását kapjuk a következőképp: ha egy él megkettőzése ellentétes irányú  $\overrightarrow{G_{\parallel}^+}$ -ben, akkor irányítsuk a  $V_{\circ}$ -beli csúcs felé, ha pedig azonos irányú, akkor irányítsuk ennek az iránynak megfelelően.

4.1. ábra.  $G^+$  és  $G_{||}^+$  irányítása

A  $\vec{G}_{||}^+$  irányítás alapján tipizálhatjuk a  $G$  páros gráf pontjait a következőképp:

- Egy csúcs 1-típusú, ha a 3 befutó él közül 2 ugyanabból a csúcsból jön,
- egy csúcs 2-típusú, ha mindhárom befutó él különböző csúcsból jön.

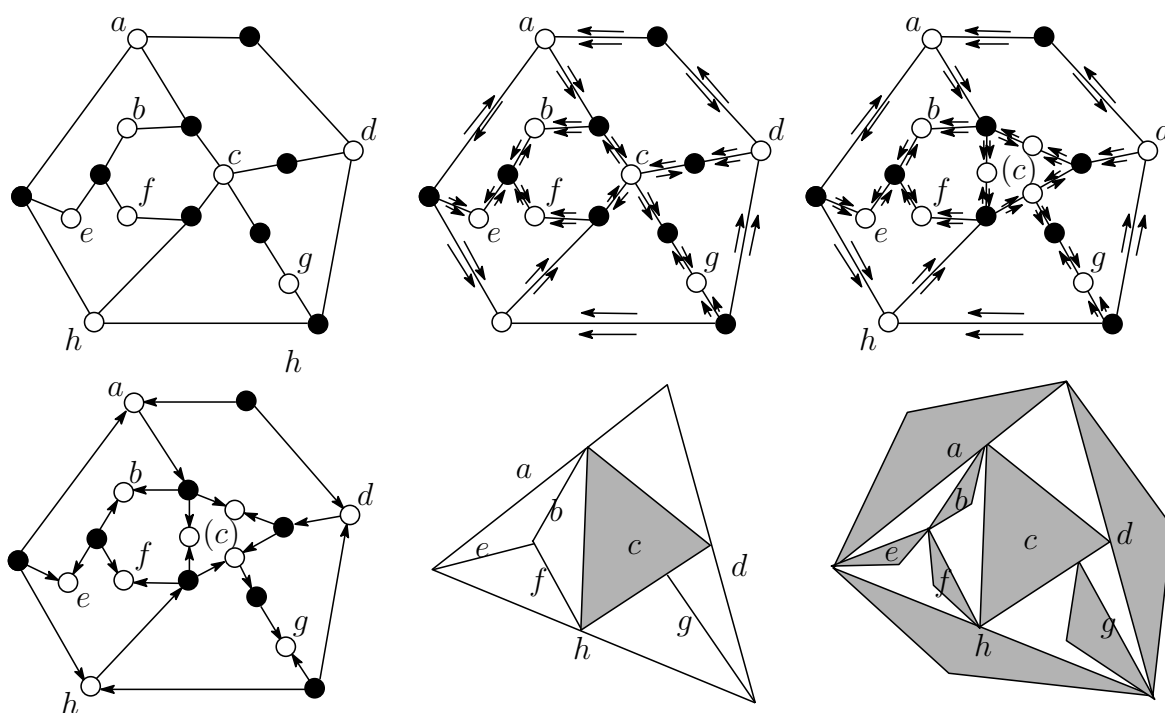
A [8]-beli 6. lemma szerint ha nincs 2-típusú fehér csúcs, akkor a hipergráf egymást érintő szakaszokkal is reprezentálható. A háromszöglapokra a 2-típusú fehér csúcsok esetén van szükség. A 2-típusú fehér csúcsokat az ábrán látható művelettel 3 db 1-típusú fehér csúcsra bontjuk. Az ily módon kapott pontokból kapjuk később az egyes hiperéleket reprezentáló háromszöglapokat.



4.2. ábra. 2-típusú pont megszüntetése

Az előbb bemutatott művelettel elérhető, hogy csak 1-típusú fehér pont legyen

a gráfban, ekkor már elkészíthető a kontakt reprezentáció, de amikor egy 2-típusú csúcsot 3 db csúcsra bontottunk, akkor a kapott új csúcsok nyilván ugyanazt a hiperélt reprezentálják, tehát az új csúcsoknak megfeleltetett szakaszok alkotta háromszöglap egy hiperélt reprezentál. A 4.3. ábra mutatja a szakaszokkal és háromszögekkel való ábrázolás elkészítésének lépéseit, majd ebből a háromszögekkel való ábrázolást.  $\square$



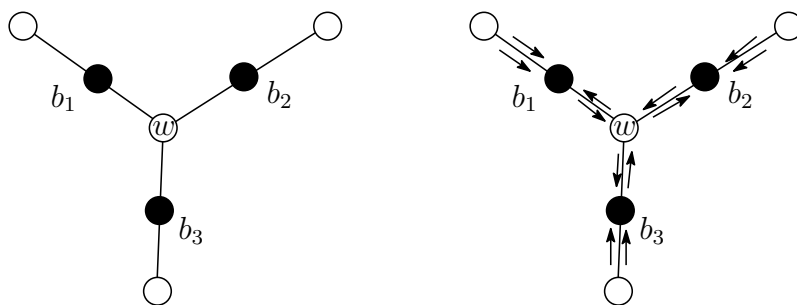
4.3. ábra. A háromszög-reprezentáció előállításának lépései

Célunk, miszerint a hipergráf minden élt háromszöglapokkal reprezentáljuk, innen már könnyen elérhető, hiszen az előbb bemutatott ábrázolásban a szakaszokat háromszögekké egészíthetjük ki anélkül, hogy új érintési pontokat kapnánk. Tehát a kapott háromszöglapok alkotta rendszer ugyanazt a hipergráfot reprezentálja, mint az előbb bemutatott ábrázolás.

### 4.3. Hipergráfok kontakt reprezentációja

Vizsgáljuk meg, mikor lehet egy lineáris síkbarajzolható hipergráf éleit egymást érintő szakaszokkal reprezentálni. Az előző ábrázolás áttekintésénél említettük, hogy az ún. 2. típusú  $V_\circ$ -beli pontok esetén van szükség háromszöglapokra. Kézenfekvő a kérdés, hogy milyen hipergráfokra adható az illeszkedési gráfon olyan irányítás, melyben minden  $V_\circ$ -beli pont 1-típusú.

Könnyen látható, hogy ez nem minden lineáris síkbarajzolható hipergráfra igaz. Ha a hipergráf tartalmaz olyan hiperélt, ami pontosan 3 csúcsot tartalmaz, és ezek foka 2, akkor az ezen hiperélhez tartozó  $V_\circ$ -beli pont mindenképp 2. típusú lesz. Az ábrán látható  $b_1w$ ,  $b_2w$ ,  $b_3w$  éleken a két irányításból legalább az egyiket a  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  csúcsok felé kell irányítani, hiszen másképp a fekete csúcsok befoka nem lehet 3. Viszont ezeken az éleken mindkét irányítás nem mutathat a fekete csúcs irányába sem, mert ekkor  $w$ -nek lenne 3-nál kevesebb a befoka.



4.4. ábra. Példa biztosan 2. típusú csúcsra

Tudjuk, hogy  $\overrightarrow{G}_\parallel^+$ -ben minden csúcs befoka 3. Észrevehetjük, hogy egy  $V_\circ$ -beli csúcs pontosan akkor lesz 2. típusú, ha a  $\overrightarrow{G}^+$ -beli befoka is 3. Mivel  $\overrightarrow{G}^+$ -ban egy  $V_\bullet$ -beli csúcs befoka 0 vagy 1, egy  $V_\circ$ -beli csúcsé pedig 2 vagy 3, ezért pontosan akkor nem kapunk 2. típusú fehér pontot, ha létezik  $G^+$ -ban a már korábban említett  $(2, \leq 1)$  irányítás.

A [8]-beli 1. tétel szerint a  $(2, \leq 1)$  irányítás létezése egy hatszögelt incidencia gráffal rendelkező hipergráf esetén szükséges és elégséges feltétele az ún. pszeudo-szakaszokkal (azaz olyan Jordan-ívekkel, ahol 2 ívnek legfeljebb 1 metszéspontja lehet) való kontakt reprezentációnak. Ahhoz, hogy a kontakt reprezentáció egyenes

szakaszokkal is létezen, szükség van egy harmadik, sokkal bonyolultabb feltételre is. Ez a feltétel [8]-ban megtalálható, itt csak annyit jegyzünk meg, hogy az előző szakaszban a külső  $r$  csúcs bevezetésével biztosítottuk, hogy ez a feltétel teljesüljön, ennek volt köszönhető, hogy ha nincs 2. típusú  $V_0$ -beli csúcs, akkor a kontakt reprezentáció egyenes szakaszokkal is megvalósítható.

# Irodalomjegyzék

- [1] D. W. Barnette, *On Steinitz's theorem concerning convex 3-polytopes and on some properties of planar graphs*, The many faces of graph theory. Lectures Notes in Mathematics Springer, Berlin (1969),110 :27–39.
- [2] N. de Castro, F.J. Cobos, J.C. Dana, A. Márquez, *Triangle-free planar graphs as segment intersection graphs*, Journal of Graph Algorithms and Applications (2002), 7–26.
- [3] J. Chalopin, D. Gonçalves, *Every planar graph is the intersection graph of segments in the plane*, Proc. of the 41st ACM-Symp. Theory of Computing, STOC, (2009), 631–638.
- [4] H. de Fraysseix, P.O. de Mendez, J. Pach, *Representation of planar graphs by segments*, Intuitive Geometry (1991), 109–117.
- [5] H. de Fraysseix, P.O. de Mendez, P. Rosenstiehl, *On triangle contact graphs*, Combinatorics, Probability and Computing 3 (1994), 233–246.
- [6] H. de Fraysseix, P.O. de Mendez, *Intersection Graphs of Jordan Arcs*, Contemporary Trends in Discrete Mathematics, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol. 49, DIMATIA-DIMACS (1999), 11–28.
- [7] H. de Fraysseix, P.O. de Mendez, *On representations by contact and intersection of segments*, Algorithmica (2007), 453–463.
- [8] H. de Fraysseix, P. Ossona de Mendez, P. Rosenstiehl, *Representation of Planar Hypergraphs by Contacts of Triangles*, Graph Drawing (2007), 125–136.

- [9] D. Gonçalves, *A planar linear hypergraph whose edges cannot be represented as straight line segments*, European Journal of Combinatorics, Volume 30, Issue 1, (2009), 280-282.
- [10] P. Hlineny, *Contact graphs of line segments are NP-complete*, Discrete Math. (2001), 235:95–106.
- [11] P. Koebe, *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*, Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen, Akad. d. Wiss., Math.-Physische Klasse 88 (1936), 141–164.
- [12] E.R. Scheinerman, *Intersection classes and multiple intersection parameters of graphs*, Ph.D. thesis, Princeton University (1984).
- [13] W. Schnyder, *Embedding planar graphs in the grid*, First ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (1990), 138–147.
- [14] C. Thomassen, *Grötzsch's 3-colour theorem and its counterparts for the torus and the projective plane*, J. Comb. Theory B, (1994), 62:268–279.
- [15] T.R.S. Walsh, *Hypermaps versus bipartite maps*, J. Combinatorial Theory 18(B),(1975), 155–163.
- [16] A.A. Zykov, *Hypergraphs*, Uspeki Mat. Nauk 6, (1974), 89–154.