Eötvös Loránd University

Faculty of Science

Pajkossy Katalin

Grafikus szubmoduláris függvények minimalizálása

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Bérczi Kristóf

Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2008

Bevezető

A grafikus szubmoduláris függvények olyan, gráfok élhalmazán értelmezett függvények, amelyek a gráf rangfüggvényének és az élek tetszőleges lineáris függvényének összegeként állnak elő. Az ilyen alakú függvények minimalizálásának problémáját először Cunningham vizsgálta, aki ezt egy hálózat optimális támadásának a feladatára vezette vissza. A szakdolgozat célja, hogy áttekintse a főbb megoldó algoritmusokat és a grafikus szubmoduláris függvényminimalizálás sokoldalú alkalmazásait a kombinatorikus optimalizálás és a fizika területéről.

A szakdolgozatban a problémát szinte végig az ekvivalens Optimális Kooperáció Feladat alakban vizsgáljuk. Az első fejezetben ismertetjük a dolgozatban alkalmazott jelölésrendszert. A második fejezetben az Optimális Kooperáció Feladat ismertetése után röviden áttekintjük az általános szubmoduláris függvények minimalizálását megoldó polinomiális algoritmusokat.

A grafikus szubmoduláris függvények minimalizálását megoldó algoritmusok egy adott polimatroidon való optimalizáláson alapulnak. Ezért részletes ismertetésük előtt a harmadik fejezetben áttekintjük a polimatroidokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat és ismertetjük Edmonds 1970-es polimatroid mohó algoritmusát, valamint ennek egy alkalmazását, Frank és Tardos reszelési algoritmusát(1988). Az Optimális Kooperáció Feladatot megoldó algoritmusok implicit módon ez utóbbit használják.

A negyedik fejezetben bemutatunk három algoritmust az Optimális Kooperáció feladatra. Cunningham megoldó algoritmusa egy a gráf élhalmaza által definiált polimatroidon optimalizál,míg a Barahona(1992) és a Sebő-Preissmann(2000)-féle algoritmus a csúcshalmaz által meghatározott polimatroidon. A polimatroid mohó algoritmus futása során egy ponton szükség van egy adott értéket minimalizáló halmazt megtaláló szubrutinra, ez egy hálózati folyamban történő minimális vágásra vezethető vissza. A fejezetben ismertetünk két ilyen lehetséges hálózati folyam - modellt is, az egyik Barahona, Baiou és Mahjoub modellje(2002), a másik a Picard és Queyranne(1982) vagy Padberg és Wolsey (1983) -féle modell.

Az ötödik fejezetben kombinatorikus optimalizálási problémákat mutatunk, amik az Optimális Kooperáció Feladatra vezethetők vissza. Ezek közül a hálózat optimális merevítésének, illetve a gráf ellenállóképességének problémáját Cunningham vezette be 1985-ös cikkében, az Optimális Támadás Feladattal összefüggésben. Utóbbira és az Optimális Növelés feladatra az eredeti algoritmusokon kívül ismertetjük Sebő és Preissmann algoritmusát is.

A Potts modell egy statisztikus fizikai modell, az Ising modell általánosítása, ahol a spinek felvehetik az 1 ... q-1 étékeket. A rendszer partíciófüggvénye egy fontos mennyiség, ami meghatározza a statisztikai tulajdonságait. A grafikus szubmoduláris függvényminimalizálás egy érdekes alkalmazásaként Juhász, Rieger és Iglói(2001) megmutatták, hogy a Potts nagy q-állapotú rendszer esetén a partíciófüggvény nagyságrendjét egy szubmoduláris függvény minimuma határozza meg. Végül a szakdolgozatban bemutatott módszereket illusztrálva megoldunk egy feladatot először a matroid metszet algoritmusra, majd Nash-Williams és Tutte tételein keresztül az Optimális Kooperáció Feladatra visszavezetve.

A szakdolgozat alapjában véve az [1] irodalom tárgyalását követi. Ezen kívül a harmadik fejezetben a [4],[6],[7], a negyedik fejezetben a [2],[3],az ötödik fejezetben az [5],[8] irodalomra támaszkodtunk.

Köszönöm témavezetőmnek a segítséget és a bíztatást amivel a munkám során támogatott.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Jelölések

Legyen G=(V,E) irányított vagy irányítatlan gráf . x:E→ R

Legyen U⊆E

$x(U) = \sum_{e \in U} x(e)$

Legyen S⊆ V.

$x(E(S)) = \sum_{e=xy: x \in S, y \in S} x(e)$

$x(\delta(S)) = \sum_{e=xy: x \in S, y \notin S} x(e)$

Legyen $\{V_1 \dots V_p\}$ V egy partíciója, W $\subseteq$ $\{V_1 \dots V_p\}$

$x(\delta(W)) = \sum_{e: x \in V_i \in W, y \in V_j \in W, V_i V_j} x(e)$

2. fejezet

Az Optimális Kooperáció Feladat

2.0.1. Definíció (szubmoduláris függvény). *Az $f : 2^E \to \mathbf{R}$ függvény szubmoduláris, ha minden A,$B \subseteq E$- re teljesül*

$$f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B)$$

2.0.2. Definíció (moduláris függvény). *Az f szubmoduláris függvény moduláris, ha a fenti egyenlőtlenséget egyenlőséggel teljesíti, és $f(\emptyset)=0$. Ekkor $f(A)=\sum_{a\in A} f(a)$.*

2.0.3. Definíció (grafikus függvény). *Az f szubmoduláris függvényt grafikusnak nevezzük, ha a $G=(V,E)$ gráf élhalmazán értelmezzük, és $f = s + r_G$ ahol f,r_G,m:$2^E \to \mathbf{R}$ függvények, r_G a gráf rangfüggvénye, s pedig tetszőleges moduláris függvény.*

A grafikus függvényminimalizálási feladat tehát az $r_G(A) + s(A)$ értéket minimalizáló A⊆E halmaz megtalálása. Ehelyett a következő ekvivalens problémát fogjuk vizsgálni:
Az Optimális Kooperáció Feladat:

$$Max\{f_{G,s} = c_G(A) + \sum_{a\in A} s(e) : A \subseteq E(G)\}$$

Az elnevezés eredetéül szolgáló elképzelt szituáció a következő:
Közös tudományterületen dolgozó kutatókat kell úgy kutatócsoportokba szervezni, hogy a lehető legnagyobb állami támogatást kapjanak.Az állam támogatja egyes kutatópárosok együttműködését,illetve egységnyi támogatást kap minden kutatócsoport. Két külön kutatócsoportban lévő kutató nem működhet együtt. Világos, hogy a feladatot modellezi az Optimális Kooperáció Feladat.

Mivel s(e)≤0 esetben e-t törölve, s(e)≥ esetben pedig e-t összehúzva ekvivalens problémát kapunk, így föltehetjük, hogy 0 ≤s(e)≤1.Az ilyen s függvényeket a továbbiakban súlyfüggvénynek nevezzük.

2.0.4. Definíció. *Adott G=(V,E) gráf s súlyfüggvény, és a csúcsok egy P partíciója esetén esetén a*

$$g_{G,s}(P) = |P| + s(E(P))$$

értéket a partíció értékének nevezzük.

2.0.1. Állítás. *Az Optimális Kooperáció Feladat egy optimális F*⊆E megoldása tartalmaz minden olyan élet, amit G(F)indukál.(azaz mindkét végpontját tartalmazza)*

2.0.2. Állítás. *Egy $g_{G,s}(P)$-t maximalizáló P* egy osztályába tartozó csúcsok által indukált részgráf összefüggő.*

Tehát egyértelműen megfeleltethetjük egymásnak az $f_{G,s}$-t maximalizáló élhalmaz összefüggő komponenseit és a $g_{G,s}$-t maximalizáló partíció osztályait, így az Optimális Kooperáció Feladat megoldását minden esetben kereshetjük úgy, mint V egy partícióját.

A grafikus szubmoduláris függvények minimalizálását megoldják az általános grafikus szubmoduláris függvények minimalizálását megoldó algoritmusok. Ilyen például Grötschel, Schijver és Lovász az ellipszis módszert használó algoritmusa(1988), vagy Schijver (2000)kombinatorikus algoritmusa. A problémára hatékonyabb megoldást kínálnak azok az algoritmusok, amik kihasználják a grafikus tulajdonságot. Az első, az Optimális Kooperációs Feladatot megoldó és nem az ellipszis módszert használó polinomiális algoritmus Cunningham (1984) algoritmusa, ami Edmonds (1965) matroid partíciós algoritmusának a módosítása. Cunningham(1985) kidolgozott egy speciális algoritmust az Optimális Kooperáció Feladattal ekvivalens Optimális Támadás Feladatra is, ezt a harmadik fejezetben ismertetjük majd a Barahona és a Sebő-Preissmann -féle megoldó algoritmussal együtt.

3. fejezet

Optimalizálás polimatroidon

3.1. Polimatroidok

A 3. fejezetben ismertetésre kerülő algoritmusok polimatroidon való optimalizáláson alapulnak. Szükséges tehát, hogy tisztázzuk a polimatroidokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat, valamint ismertessük Edmonds mohó algoritmusát(1970).
Legyen $\mathbf{R}_+^E = (y = (y_j : j\in\text{E})\text{:y}\geq 0)$.

3.1.1. Definíció (polimatroid). *A polimatroid $P\subseteq \mathbf{R}_+^E$, ami teljesíti az alábbi tulajdonságokat:*
1.$0\in P$
2.Ha $0\leq y \leq x\in P$, akkor $y\in P$.
3.Tetszőleges $x\in \mathbf{R}_+^E$ vektorra a maximális $y\in P$, $y \leq x$ vektorok(ezeket az x P-bázisainak nevezzük) komponenseinek összege megegyezik.

A polimatroidokat megadhatjuk úgy is, mint egy poliéder metszete $\mathbf{R}_+^E$-vel.Ekkor a poliéder határfüggvénye speciális alakú.

3.1.2. Definíció (monoton növő halmazfüggvény). *Az S alaphalmazú h halmazfüggvény monoton növő, ha $h(X) < \infty$ és $X\subseteq Y\subseteq S$ esetén $h(x) < h(Y)$.*

Megjegyzés. Véges értékű monoton növő halmazfüggvény nemnegatív.(a halmazfüggvényeknél megkövetelt $\text{h}(\emptyset)$=0 miatt.)

3.1.3. Definíció (polimatroid függvény). *Véges értékű, szubmoduláris,monoton növő halmazfüggvényt polimatroidfüggvénynek hívunk.*

Megjegyzés. A matroid rangfüggvények egyúttal polimatroid függvények is.

3.1.1. Tétel (polimatroid). *Legyen b polimatroid függvény.Ekkor a*

$$P(b) = \left\{x \in R^E : x \geq 0, x(A) \leq b(A) \forall A \subseteq S\right\}$$

halmaz polimatroid.

3.2. A mohó algoritmus

Adott c:S→R vektorra tekintsük a

$$\left\{max(cx) : x \in x \in R^E : x \geq 0, x(A) \leq b(A) \forall A \subseteq S\right\}$$

optimalizálási feladatot. Ez egy lineáris program, aminek a duálisa a következő:

$$min\{yb : y \in D(c) = R^{2^S} : y(Z) \geq 0, haZ \neq S, \sum_{Z \subseteq S} y_Z \chi_Z \geq c\}$$

$$yb = \sum_{Z \subseteq S} y(Z)b(Z)$$

Feltehető, hogy hogy S elemei a c értéke szerinti csökkenő sorban vannak rendezve:

$$c(s_1) \geq (s_2) \geq \ldots \geq c(s_k) \geq 0 > c(s_{k+1}) \geq \ldots c(s_n)$$

Jelölje S_i az első i elem halmazát.
Definiáljuk a $\bar{x} \in {}^n$, $\bar{y} \in R^{2^n}$ vektorokat a következőképp:

$$\bar{x}(s_1) := b(s_1), \bar{x}(s_i) := b(S_i - b(S_{i-1})), i = 2 \ldots k, \bar{x}(s_j) := 0, j = k+1 \ldots n.$$

$$\bar{y}(S_n) := c(s_n), i = 1{,}2 \ldots n-1 \bar{y}(S_i) := c(s_i) - c(s_{i+1}),$$

S többi részhalmazára (Z):=0.

3.2.1. Állítás. $\bar{y} \in D(c)$

3.2.1. Lemma. *$\bar{x} \in P(b)$.*

Bizonyítás. $\bar{x} \geq 0$ b monotonitása miatt teljesül, így csak azt kell belátnunk, hogy $\sum_{z \in Z} \bar{x}(z) =$ $= \bar{x}(Z) \leq b(Z)$ teljesül minden $Z \subseteq S$ halmazra. Jelölje m(Z) a max{i:$s_i \in Z, c(s_i) \geq 0$}-t. Ekkor $S_{m(Z)} \subseteq S_{m(Z)-1} \cup Z$, és b monotonitása miatt

$$S_{m(Z)}) \leq b(S_{m(Z)-1} \cup Z)$$

Teljes indukciót használva m(Z)-re: m(Z)=0 esetén minden $z \in Z$-re c(z)≤0, így

$$\bar{x}(Z) = \sum \bar{x}(z) : z \in Z = 0 \leq b(Z)$$

m(Z)=1 esetén

$$\bar{x}_Z = \bar{x}(s_1) = b(S_1) = b(Z)$$

Legyen i=m(Z)≥ 2. Alkalmazzuk a teljes indukciót $S_{i-1} \cap Z$-ra

.

$$b(Z) + b(S_{i-1}) \geq b(Z \cup S_{i-1}) + b(Z \cap S_{i-1}), b(Z) \geq b(Z \cup S_{i-1}) + b(Z \cap S_{i-1}) - b(S_{i-1}) =$$

b(Z$\cup S_{i-1}) + \bar{x}(Z \cap S_{i-1}) - b(S_{i-1}) \geq$

(Z$\cap S_{i-1}) + b(S_i) - b(S_{i-1}) = \bar{x}(Z \cap S_{i-1}) + \bar{x}(s_i) = \bar{x}(Z \cap S_i) = \bar{x}(Z)$

□

3.2.1. Tétel. *$\bar{x}$ optimális a primál feladat, $\bar{y}$ pedig a duál feladatoptimális megoldása.*

Bizonyítás. A $c\bar{x} = \bar{y}b$ egyenlőséget kell belátnunk.

$$c\bar{x} = c(S_1)b(S_1) + \sum_{i=2}^{k} c(S_i)[b(S_i) - b(S_{i-1})] + \sum_{Z:Z\neq S_i i=1\ldots k} c(Z)[b(S_i) - b(S_{i-1})] =$$

$$c(S_1)b(S_1) + \sum_{i=2}^{k} c(S_i)[b(S_i) - b(S_{i-1})] = c(S_k)b(S_k) + \sum_{i=1}^{k-1}[c(S_1) - c(S_{i+1})]b(S_i) =$$

$$\sum_{Z\subseteq S} \bar{y}(Z)b(Z) = \bar{y}b$$

□

$$\forall j \leq k\bar{x}(S_j) = \sum_{s_i:i\leq j} x(s_i) = \sum_{i=1}^{j} b(S_i) - b(S_{i-1}) = b(S_i)$$

A fenti egyenlőséget megfigyelve láthatjuk, hogy az algoritmus valóban "mohó" módon működik: az x=0 vektorral indulva súly szerinti csökkenő sorrendben haladva a soron következő elemnek megfelelő komponens értékét az $x \in P$ feltételt nem sértő legnagyobb értékre növeli. Az algoritmus addig fut, amíg még van nem vizsgált pozitív súlyú elem.

3.2.1. Definíció. *(Szubmoduláris poliéder) Legyen S az alaphalmaz, b szubmoduláris halmazfüggvény. Az*

$$S(b) = \{x \in R^S : x(A) \geq b(A) \forall A \subseteq S, x(S) = b(S)\}$$

halmazt szubmoduláris poliédernek nevezzük.

A duális poliéder:

$$\{y \in R^{2^S} : y(Z) \geq 0, haZ \neq S, \sum_{Z\subseteq S} y_Z \chi_Z = c\}$$

3.2.2. Tétel. *Ha b szubmoduláris, b(Z)= max$\{x(Z) : x \in S(b)\} \forall Z \subseteq S$-re.*

Tekintsük a primál - duál optimalizálási feladatot a poliéderen. A dolgozatban bemutatott algoritmusok ismertetéséhez azt az esetet kell csak vizsgálnunk, amikor b véges, a c célfüggvény pedig nemnegatív.

3.2.2. Állítás. *Ekkor a primál - duál optimalizálási feladatot megoldja a (3.1)-ben definiált $(\bar{x}, \bar{y})$ pár.*

A mohó algoritmus alábbi változatát akkor is használhatjuk, ha a polimatroid/szubmoduláris poliéder nem a szubmoduláris határfüggvényével van megadva.
A célfüggvény által meghatározott csökkenő sorrendben végigmegyünk az elemeken, a soron levő s_i elemhez tartozó komponens értékét pedig a lehető legnagyobbra választjuk úgy, hogy létezzék a $(x_1 \dots x_i y_{i+1} \dots y_n) \in$ P(b)/S(b), ahol $x_1 \dots x_k$ a már kiszámított elemeket jelöli.

3.2.3. Tétel. *Az algoritmus előállítja a $max\{cx_x \in P(b)\}$ értéket.*

Bizonyítás. Jelölje $\bar{x}$ az algoritmus által kiszámolt vektort, legyen x∈ tetszőleges másik vektor. Jelölje S_i megint $\{s_1 \dots s_n\}$-t. Nem nehéz belátni,hogy ekkor $\bar{x}(S_{i)} \geq x(S_i)$. Emiatt tetszőleges célfüggvényre teljesül

$$c\bar{x} - cx = \sum_{i=1\dots n} ((c_i - c_{i+1})(\bar{x}(S_i) - x(S_i)) + c_n(\bar{x}(S_n) - x(S_n))) > 0$$

□

Megjegyzés.Az algoritmus implementálásához szükségünk van egy szubrutinra, ami kiszámolja a

$$\alpha = min\big\{b(Z) - x(Z - s_i) : s_i \in Z \subseteq S\big\} = max\{\theta : x + \theta s_i \in P(b)\}$$

értéket.

3.3. Reszelés(Dilworth Truncation)

A szakaszban ismertetjük a reszelés nevű konstrukciót, ami egy módszert ad a grafikus szubmoduláris függvényminimalizálásra.

3.3.1. Definíció (Alsó reszelt)**.** *A b metszőn szubmoduláris függvény alsó reszeltjén a*

$$\bar{b}(Z) = \min_{P(Z):P(Z)\ni X_i \neq \emptyset, |P|\geq 1} \Big\{ \sum_{i=i}^{t} (b(X_i)) \Big\}$$

halmazfüggvényt értjük.

Megjegyzés.$\bar{b}(Z) \leq b(Z) \forall Z \subseteq S$-re.

3.3.1. Tétel (Lovász 1977)**.** *Legyen b metszőn szubmoduláris. Ekkor $\bar{b}$ szubmoduláris. Továbbá S(b)=S($\bar{b}$),azaz S(b) szubmoduláris poliéder, melynek határfüggvénye $\bar{b}$.*

Bizonyítás. Csak a második állítást bizonyítjuk.
$\bar{b}$ ≤b miatt $S(\bar{b}) \subseteq S(b)$. x∈ S(b) esetén tetszőleges Z⊆ S-re vegyük azt a partíciót, amire

$$\bar{b}(Z) = \sum_{Z_i \in Z} x(Z_i).$$

Ekkor

$$x(Z) = \sum x(Z_i) \leq \sum b(Z_i) = \bar{b}(Z),$$

tehát $S(b) \subseteq S(\bar{b})$. □

Frank és Tardos (1988) algoritmusa a polimatroid mohó algoritmust használva számítja ki a b metszőn szubmoduláris függvény alsó reszeltjét. Az S(b) szubmoduláris poliéderen a $\sum x(s_i)$ értéket maximalizáló mohó algoritmust alkalmazza.Ehhez szükség van egy szubrutinra, ami megadja az

$$\alpha = min\{b(Z) - x(Z - s_i) : s_i \in Z \subseteq S\}$$

értéket és ezen felül a minimalizáló $Z_i \subseteq$ S halmazt. Jelölje $\bar{x}$ azt a vektort, amit a mohó algoritmust számítja ki. Nevezzünk egy Z halmazt pontosnak, ha $\bar{x}(Z) = b(Z)$.Ekkor a Z_i halmazok pontosak.

3.3.1. Állítás. *Metsző pontos halmazok uniója pontos.*

Bizonyítás. Legyenek A,B metsző, pontos halmazok. b metsző szubmodularitása miatt teljesül

$$\bar{x}(A) \leq b(A), \bar{x}(B) \leq b(B)$$

Így

$$b(A) + bB = \bar{x}(A) + \bar{x}(B) = \bar{x}(A \cup B) + \bar{x}(A \cap B) \leq b(A \cup B) + b(A \cap B) \leq b(A) + b(B)$$

A fenti egyenlőségekből adódóan

$$\bar{x}(A \cup B) = b(A \cup B)$$

□

Tekintsük a Z_i halmazok által meghatározott hipergráf T_i komponenseit. Ezekre

$$\bar{b}(S) = \sum \bar{x}(T_i) = \sum b(T_i)$$

, tehát az algoritmus valóban előállítja a $\bar{b}(S)$-et megvalósító partíciót.

Megmutatjuk, hogy az Optimális Kooperáció Feladatot megoldó partíció előállíthatjuk a reszelési algoritmus segítségével.

Legyen G=(V, E) tetszőleges összefüggő gráf, S∈ $(0,1)^E$, és F⊆E- re legyen $\chi_F(e)$ 1, ha $e \in F$, egyébként 0.Ekkor Edmonds egy tétele szerint az erdőknek megfelelő incidenciavektorok konvex burka egy polimatroid:

$$\{x \in R_E : x(E(U)) \leq |U| - c_G(U), c \geq 0, (U \subseteq V(G))\}$$

, ahol E(U) azon élek halmazát jelölik, amelyek mindkét végpontja a $U \subseteq V$ halmazban van.

3.3.2. Tétel (Edmonds)**.** *Az*

$$\{x \in R^S : x \in P(b), x \leq y\}$$

rendszer polimatroidot határoz meg.

Tehát az előző rendszerhez hozzávéve az $x \leq s$ feltételt a P(f) polimatroidot kapjuk, ahol

$$f(U) = \begin{cases} w(U) & \text{ha } U = e \\ |U| - c_G(U) & \text{egyébként} \end{cases}$$

3.3.2. Állítás. *f metszőn szubmoduláris.* □

Tehát a P(f) poliéder h szubmoduláris határfüggvénye f alsó reszeltje:

$$h(X) = \min_{P(E)} \sum_{E_i \in P} f(E_i) = \min_{V(P)} \{ \sum_{V_i \in P} |V_i| - 1 + \sum_{e \neq E(V_(i)} s(e) \} =$$

$$\min_{V(P)} \sum_{V_i \in P} \{ |V_i| - 1 - s(E(V_i)) \} + \sum_{e \in E} s(e) = \min_{V(P)} \{ n - |P| - \sum_{V_i \in P} s(E(V_i)) \} + \sum_{e \in E} s(e) =$$

$$-(g_{G,s}(P)) + n + \sum_{e \in E} s(e)$$

Tehát a reszeltet kiszámító mohó algoritmus a futás végén előállítja az Optimális Kooperáció Feladatot megoldó partíciót.

4. fejezet

Algoritmusok

4.1. Cunningham algoritmusa

Cunningham (1985) az Optimális Kooperáció Feladatot az ekvivalens Optimális Támadás alakban vizsgálta. Adott egy összefüggő hálózat, egyes éleinek ellenállóképességét az $s : E \rightarrow R_0^+$ függvény határozza meg (azaz a támadónak s(e) energiát kell befektetni e lerombolásához). Minden a hálózatból kiszakított komponens B értékű "jutalmat" kap.Tehát a

$$min\{s(A) + Bc_G(\bar{A}) : A \subseteq E\}$$

értéket megvalósító élhalmazt fogja lerombolni. A modell abban az esetben sem veszti értelmét, ha a támadónak nem célja a hálózat lerombolása, vagy akár nem is élő (mint például egy vezetéket támadó korrózió). Ugyanis a hálózat sebezhetőségének vizsgálatához célszerű a legrosszabb esetet figyelembe venni, ami megfelel egy intelligens és rosszindulatú támadótól jövő célzott támadásnak.

Ebben a fejezetben csak a B=1 esettel foglalkozunk. Világos, hogy ekkor (az Optimális Kooperáció Feladathoz hasonlóan) feltehetjük, hogy s∈(0,1). Az is látszik, hogy az optimális élhalmaz E $\sum_{V_i} \gamma(V_i)$ alakú,ahol $\{V_1 \dots V_n\}$ V egy partíciója - tehát a feladat valóban ekvivalens az Optimális Kooperáció Feladattal.

A problémát a következő alakban vizsgálhatjuk:

$$min\{s(A) + r_G(\bar{A})\}.$$

Legyen $P(r_G)$ az a polimatroid, amit a gráf E élhalmaza és a grafikus matroid rangfüggvénye definiálnak.

4.1.1. Állítás.

$$min\{s(A) + r_G(\bar{A})\} = max\{x(E) : x \in P(r_G), x \leq s\}$$

Bizonyítás. A max≤min irány könnyen látszik:

$$x(E) = x(A) + x(\bar{A}) \leq s(A) + r_G(\bar{A})$$

A min $\leq$ max irány igazolásához mutatunk egy $A \subseteq E$ halmazt és x vektort,amire az egyenlőség teljesül.

Legyen x $P(r_G)$ egy s-bázisa (azaz egy maximális $P(r_G)$-beli, $x \leq s$ feltételt teljesítő vektor). Egy A⊆E halmazt *pontosnak* nevezünk, ha $x(A) = r_G(A)$.

4.1.2. Állítás. *Pontos halmazok uniója is pontos.*

Bizonyítás. Legyen $\bar{A}$ a pontos halmazok uniója. Ekkor minden e∈E élre x(e)=s(e), vagy x∈ C ⊆E ,ahol C pontos(mivel különben x nem lenne maximális). Tehát

$$x(E) = x(A) + x(\bar{A}) = s(A) + r_G(\bar{A})$$

□

Tehát a $\{x \in R^E : x \geq 0; x(E) \subseteq r_G(E), x(e) \leq s(e)\}$ polimatroidon a $\sum x(E)$ célfüggvényt optimalizáló algoritmus megoldja a feladatot:az Optimális Támadás Feladatot megoldó élhalmaz a pontos halmazok uniója, az Optimális Kooperációt megoldó élhalmaz pedig ennek komplementere lesz.

Az algoritmus:

Kezdetben x=0, $\bar{A} = \emptyset$. Tetszőleges sorrendben sorra vesszük az éleket.

A j-edik lépés:

$\epsilon := \min_{B \subseteq E}\{r_G(B) - x(B) : j \in B \subseteq E\}$

ha $\epsilon \leq s(j) - x(j)$ $\bar{A} := \bar{A} \cup B_j (B_j$ az ϵ-t minimalizáló halmaz)

egyébként $\epsilon := x(j) - s(j)$

x:=x+ϵe_j

Az algoritmus futásideje: |E|, ezenkívül |E|-szer hívja meg a

$$\min_{B \subseteq E}\{r_G(B) - x(B) : j \in B \subseteq E\}$$

értéket, és a minimalizáló halmazt megkereső szubrutint.

4.2. Barahona algoritmusa

Barahona (1992) algoritmusa a feladatot a $|V|$ darab minimális vágás problémára vezeti vissza, ez jelentős előrelépés (az algoritmus futásideje így egy nagyságrenddel kisebb.) Az algoritmus eredeti változatában a gráf, amin minimális vágást keresünk, |V|+2 csúcsból áll. Barahona, Baoiu és Mahjoub (2002) módosították az algoritmust, ami így szintén $|V|$ minimális vágás problémára vezeti vissza a problémát, de az i. lépésben csak i+2 csúcsú gráfon. Itt ezt a javított verziót ismertetjük.

Adott g=(V,E) gráfra, s∈(0,1) súlyfüggvény mellett legyen P(f) az alábbi poliéder:

$$y \in \mathbf{R}^{|V|} y(U) \leq f(U)$$

$$f(U) = \begin{cases} s(\delta(U)) - 2 & ha \quad r \notin U \\ s(\delta(U)) & ha \quad r \in U \end{cases}$$

4.2.1. Állítás. *Az f metszőn szubmoduláris.*

4.2.1. Tétel. *Vegyük a P(f)-en y(V)-t maximalizáló y vektort. Az S⊆ V : $y(S) = f(S)$ halmazok által meghatározott hipergráf komponensei adják meg az Optimális Kooperáció Feladatot megoldó partíciót.*

Bizonyítás. Jelölje $\bar{f}$ az f alsó reszeltjét, ekkor

$$max\{y(V) : y \in P(f)\} = \bar{f}(V) = \min_{V(P)} \{ \sum f(V_i\} =$$

$$\min_{V(P)} \{ \sum_{V_i \in V(P): r \notin V_i} s(\delta(V_i) - 2\} + s(\delta(V_j : r \in V_j))\} =$$

$$\min_{V(P)} \{2(s(\delta(V(P))) - (p-1))$$

$= \min_{V(P)} \{2(x(E) - [2(\sum x(E(V_i)) + (p-1)]\}]$ □

Tehát a P(f)-en futó mohó algoritmus előállítja a kívánt partíciót. Ezúttal is szükségünk van a

$$\alpha = min_{S \subseteq V, v_k \in S} f(S) - x(S)$$

értéket kiszámító szubrutinra, ezt egy hálózat minimális vágására vezethető vissza. A hálózat konstrukciója a következő:

Legyen D=(N,A)irányított gráf, ahol N= V∪z,t, A=(i,j),(j,i)| ij∈ E$\bigcup$ (z,i),(i,t)|i∈V. Legyen
$\eta(i) := -\bar{y}_i i \in$ V-re, ha i $\neq$ V
$\eta(r) := -\bar{(}r)$+2
A következő kapacitásokat definiáljuk: $c(z,i) = -\eta(i), c(i,t) = 0 \quad ha \quad \eta(i) < 0$, i≠$v_k, i \in$ V
$c(z,t) = \eta(i), c(z,i) = 0 \quad ha \quad \eta(i) \geq 0, i_k, i \in$ V
$c(z, v_k) = \infty, c(v_k, t) = \eta(v_k)$
$c(i,j) = c(j,i) = \bar{x}(i,j), ij \in E$-re

4.2.1. Lemma. *Legyen* $z \cup T$ *(z,t) vágás* λ *kapacitással. Ekkor*

$$s(\delta(T)) - \bar{y} = \begin{cases} \lambda + \sum_{\eta(v)<0}\{\eta(v)\} - 2 & har \in T \\ \lambda + \sum_{\eta(v)<0}\{\eta(v)\} & har \notin T \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen r∈T. Ekkor

$$\lambda = \sum_{i \notin T, \eta(i)<0} \{-\eta(i)\} + \bar{x}(\delta(T)) + \sum_{i \in T, n(i) \geq 0} \eta(i)\}$$

$$\lambda + \sum_{\eta(v)<0} \eta(v) - 2 =$$

$$\sum_{i\in T,\eta(i)<0}\eta(i)+\bar{x}(\delta(T))+\sum_{i\in T,\eta(i)\geq 0}-2=$$
$$s(\delta(T))-\bar{y}(T)$$

□

β-val jelölve a minimális kapacitású (z,t) vágást

$$\alpha=2-\beta-\sum_{\eta(v)<0}\eta(v)$$

4.2.2. Lemma. *Ha rendelkezésünkre áll a a G=(V,E) gráfnak megfelelő poliéderre a*

$$max\{y(E):y\in P(f)y\leq s\}$$

feladat megoldása, akkor egy új csúcsot a gráfhoz véve az így kapott G'-re a megoldás visszavezethető egy minimális vágás megkeresésére.

A következő fejezetben ismertetjük egy analóg állítás bizonyítását.
A lemma következményeként a megoldás megkonstruálható kis csúcsszámú gráfból kiindulva és a megoldást lépésenként kiterjesztve, az i. lépésben i+2 csúcsból álló hálózati folyamot használva.

4.3. A Sebő -Preissmann algoritmus

4.3.1. A megoldás kiterjesztése

Sebő és Preissmann algoritmusa szintén kis gráfból indul, és lépésenként terjeszti ki a megoldást. A Barahona-féle algoritmushoz hasonlóan egy olyan polimatroidon futó mohó algoritmuson alapul, amit csúcshalmazon értelmezett függvény definiál. Az eddigi algoritmusoktól eltérően a gráfon végzett elemi lépésekből áll, a futásideje a legrosszabb esetben annyi, mint a Barahona -féle (javított) algoritmusé, de általában gyorsabb annál. Ez annak köszönhető, hogy a futás közben egyes csúcsokat egymással azonosít (összehúzás), és így kisebb gráfon dolgozik tovább. Sebő és Preissmann külön algoritmust dolgozott ki egyes, az Optimális Kooperáció Feladatra visszavezethető problémákra is, ezeket a következő fejezetben be fogjuk mutatni, összevetve a problémákat megoldó régebbi algoritmusokkal.
Az algoritmus részletes ismertetése előtt új jelöléseket vezetünk be: magát az Optimális Kooperáció Feladatot ezentúl (OC)-vel jelöljük.Láttuk, hogy a (OC) optimális megoldása a csúcsok egy partícióját határozza meg, jelölje F⊆E optimális megoldásra a megfelelő partíciót P_F.

4.3.1. Lemma. *Legyen a G=(V,E) egy gráf, G'=(V,E'), ahol E'⊆E tetszőleges részhalmaza E-nek. Legyen F'⊆ E(G') optimális megoldása (OC)-nek G'-re. Ekkor létezik (OC)-nek F' minden élét tartalmazó optimális megoldása G-re.*

Bizonyítás. Az $f_{G,s}$ függvény szupermodularitása miatt teljesül

$$f_{G,s}(F \cup F') + f_{G,s}(F \cap F') \geq f_{G,s}(F) + f_{G,s}(F')$$

Mivel F maximalizálja az $f_{G,s}$-et G-ben,és F∪F'⊆E(G), illetve F' maximalizálja $f_{G,s}$-et G'-ben és F' $\subseteq E(G')$, teljesülnek:

$$f(F \cup F') \leq f(F) \qquad f(F \cup F') \leq f(F')$$

tehát a fenti egyenlőtlenségnek egyenlőséggel kell teljesülnie. □

4.3.1. Állítás. *Legyen P' V partíciója, $W \subseteq P'$ tetszőleges,P pedig a P osztályainak egyesítésével keletkezett gráf (A többi osztály változatlan marad.)Ekkor*

$$g_(P) = g_G(P') - (|W| - 1 - s(\delta(W)))$$

valamint ha P' optimális, akkor $|W|-1-s(\delta(W)) > 0$, és ha P optimális, akkor $|W|-1-s(\delta(W)) \leq$ ≤ 0

4.3.1. Tétel. *Legyen G=(V,E) gráf s súlyfüggvénnyel, legyen v egy tetszőleges csúcs, jelölje G' azt a gráfot, amit G-ből kapunk v és a hozzá csatlakozó élek elhagyásával kapunk. Legyen F' optimális megoldása (OC)-nek G'-re, W* pedig az x∈ $W \in P_{F'}$-ek közül az, amelyik minimalizálja az $|W| -$ $- 1 - s(\delta(W)$ értéket. Ekkor F*=F∪W* optimális megoldása (OC)-nek G-re.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy létezik olyan F* f_G-re optimális megoldás, ami tartalmazza F' éleit, és P_{F*} elemei közül azok, amik nem tartalmazzák $\{x\}$-et, elemei $P_{F'}$-nek is. Legyen W $P_{F'}$-nek olyan részhalmaza, hogy $\left\{\cup_i\right\} \in P_{F*}$. Ha W nem tartalmazza $\{x\}$-et, akkor mivel F' optimális $f_{G'}$-re, $|W| - 1 - s(\delta(W)) \geq 0$, és mivel F* optimális f_G-re, $|W| - 1 - s(\delta(W)) = 0$. Ekkor viszont F*$\delta(W)$ is optimális f_G-re. Tehát a $\{W : x \in W \subseteq P(F')\}$ halmazok közül a $|W| - 1 - s(\delta(W))$ értéket minimalizáló W*-ra F∪δW optimális megoldás. □

Ezzel beláttuk, hogy a megoldás valóban kiterjeszthető egy új csúcs hozzávételekor. Ekkor a $|W|-1-s(\delta(W)$ érték nem függ attól, hogy a $P_{F'}$ osztályai milyen részgráfokat indukálnak, ezeket nem figyelembe véve kisebb gráfon való műveletetekkel megkapható a W*-ot megvalósító partíció. Ez adja a következő definíció motivációját.

4.3.1. Definíció. *(gráf összehúzottja) Legyen a P=$\{X_1 \dots X_n\}$ a G=(V,E) gráf csúcshalmazának egy partíciója, legyen s egy súlyfüggvény a gráf élein.Ekkor az G gráf* összehúzottján *a következő $G_{ossz} = (V_{ossz}, E_{ossz})$ gráfot értjük: $V_{ossz} = (x_i \dots x_k)$, ahol $_{1 \dots k}$ új csúcsok.Az $ossz : V \cup$ $\cup\, E \to x_{1 \dots k} \cup E_{ossz}$ függvényt a következő: v∈ X_i esetén össz(v)=x_i, csak az olyan éleknek van képe, amelyek a, b végpontjai a partíció különböző osztályaiba esnek, ezekre $ossz(e) =$ $= ossz(a)ossz(b), s_{ossz}(e) = s(e)$.*

Legyenek adottak a 4.1.1 Lemma feltételei.Legyenek $\{x, X_1 \dots X_n\}P_{F'}$ osztályai.

4.3.2. Állítás. *A $P_{F'}$ partíció x-et tartalmazó részhalmazai és G_{ossz} csúcsainak x-et tartalmazó részhalmazai között egy az egyhez megfelelés van.* $|W| - 1 - s(\delta(W)) = |W_{ossz}| - 1 - s_{ossz}(E_{ossz} \cap \cap (W_{ossz} X W_{ossz})$ *és W akkor és csak akkor optimális, ha* W_{ossz} *minimalizálja* $|W_{ossz}| - 1 - - s_{ossz}(E_{ossz} \cap (W_{ossz} X W_{ossz})$*-t.*

4.3.2. Hálózati folyam modell

Adott G=(V,E) gráf és az éleken értelmezett s súlyfüggvény esetén legyen

$$b_{G,s}(H) = |H| - 1 - s(E(H))$$

. Az eddigiek alapján látszik, hogy az (OC) megoldó algoritmushoz elég egy szubrutint találni, ami megkeresi a

$$min_{H \subseteq V} \{b_{G,s}(H) : u \in H\}$$

értéket minimalizáló csúcshalmazt.

Erre Picard és Queyranne(1982) és Padberg és Wolsey (1983) direkt megoldást adtak, egy hálózati folyamon történő minimális vágásra visszavezetve azt.

A (D,c) hálózat megkonstruálása:

INPUT:(G,s,u))

1.V(D):=V(G)$\cup\{s, t\}$

2.E(H) minden uv éléhez felveszünk egy uv és egy vu élet,c(u,v)=c(v,u)=$\frac{1}{2}$s(uv).Minden u$\in$ V(G)-re felveszünk egy (s,u) és egy (v,s) élet.

3.u$\in$V(G)-re legyen

$$p(u) = \sum_{v \in V(G), uv \in E(G)} c((u, v)) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G), uv \in E(G)} s(uv),$$

és így c((s,u)):=p(u), c((u,t)):=1.Ekkor $\sum u \in \mathrm{V(G)} p(u) = s(E(G))$.

4.3.2. Tétel. *Az S minimális u-t tartalmazó (s,t) vágásra a W*=Shalmaz minimalizálja b(W)-t minden u-t tartalmazó W-re.*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy a c($\delta((s) \cup W)) - b_{G,s}$ érték nem függ W választásától.

$$c(\delta(\{s\} \cup W)) = |W| - s(E(W)) + = b(W) + c(\delta(s)) + 1$$

ahol $c(\delta(s)) = s(E)$ konstans.

Legyen először $W_0 = \emptyset$, ekkor teljesül az egyenlőség. Nézzük, hogy változik $c(\delta((s) \cup W))$ értéke W csúcsait hozzávéve. Egyrészt minden v csúcsra megjelenik c(v,t)=1 illetve eltűnik a c(s,v)=p(v) érték.Ez összesen

$$\sum_{v \in V} 1 - p(v) = |W| - s(E(W)) - \frac{1}{2} \sum_{x,y \in E=(G), x \in G, y \notin G} s(x, y)$$

A c(W, V) érték kezdetben 0, így a megváltozása:

$$c(W,V) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in E=(G), x \in G, y \notin G} s(x,y)$$

A $c(\delta(\{s\} \cup W))$ érték a az eredeti $c(\delta(s)$-nek és $c(\delta((s) \cup W))$ megváltozásának összege, ami |W|-s(E(W)). □

Az algoritmust általánosíthatjuk arra az esetre, amikor b+m minimumát keressük, ahol m a csúcshalmaz tetszőleges moduláris függvénye. Az m(W)=|W| ennek csak egy speciális esete. A c(u,t)=m(u) változtatással adódó algoritmus megoldja az általános esetet.

4.3.3. Az algoritmus

Összefoglalva az eddig leírtakat, a Sebő-Preissmann féle algoritmus a következő lépésekből áll: Az ∅ =U⊆V halmazzal indul, erre a partíció P=∅.Az algoritmus a következő 1.-5. lépéseket ismételi n-szer egymás után:

1.Legyen u∈ V tetszőleges.

2.Legyen H a P∈ $G = (U \cup u)$ osztályok összehúzásával kapott gráf, s_H az ekkor kapott új súlyfüggvény.

3.A hálózati folyam algoritmus meghívása (H, s_H, u)-val.

Ez kiszámítja a $W* = \{x_1, \ldots x_k\} \subseteq V(H)$-t, ahol $x_i X_i \in P$-nek felel meg.

4.Legyen R a következő: $R := \{u\} \cup \{X_1 \cup \ldots \cup X_k$

5.Legyenek most U és P a következők: $:= U \cup \{u\}, P := (P\{X_1 \ldots X_k\}) \cup \{R\}\}$

4.3.3. Tétel. *P* optimális partíció (G,w)-re.*

Bizonyítás. Kezdetben ∅ optimális megoldás az U=∅ által indukált gráfra. Tegyük fel, hogy az n. lépés kapott P partíció optimális az U által indukált gráfra. Belátjuk, hogy az 1-5. lépések elvégzése után is optimális partíciót kapunk. Az u csúcs hozzávételével (élek nélkül) kapott gráfra az P(U)∪u partíció optimális. A 3. lépés után kapott $W* = \{u, x_1 \ldots x_k\}$ a H csúcsainak u-t tartalmazó részhalmaza, ami minimalizálja $b_{G,s}$-et. Mivel (H,s_H)-t (G,s) összehúzásával kaptuk, a P' partíció osztályainak $\{u, X_1 \ldots _k\}$ részhalmaza minimalizálja a $|W| - 1 - s(\delta(w))$ értéket. Tehát a $P = (P\{X_1 \ldots X_k\}) \cup \{R\}\}$ partíció optimális. □

Két megjegyzés:

Az 1. lépésben u választása tetszőleges, alkalmas megválasztása gyorsíthat az algoritmuson.

$f_{G,s}$ szupermodularitása miatt létezik egy egyértelmű minimális és egy egyértelmű maximális optimális megoldás. Ezeket úgy kaphatjuk meg, hogy a hálózati folyam algoritmus által megadott minimális vágások közül mindig a minimálisat (illetve maximálisat) választjuk.

A Sebő-Preissmann algoritmus tehát |V|-1-szer hívja meg a Picard és Queyranne(1982) és Padberg és Wolsey (1983)-féle hálózati algoritmust, ezen kívül |V|-1-szer hajt végre összehúzást a gráfon. Részben ez utóbbiank, részben a megoldás iterjesztésének köszönhetően a hálózati folyam algoritmust kis csúcsszámú gráfokra hívja meg: az i. lépésben maximum i+2 csúcsból áll,a gráf a legtöbb esetben viszont kisebb ennél.

5. fejezet

Alkalmazások

5.1. Optimális Növelés Feladat

Az Optimális Kooperáció Feladat névadójaként bemutatott szituációt felidézve, tegyük fel, hogy egy kutatóintézet vezetősége támogatni szeretné a kutatócsoport együttmaradását. Ezért hajlandóak egyes kutatópárosok együttműködését külön honorálni.Az egyes együttműködések egységnyi támogatásának költségét a $k : E \to R_+$ függvény határozza meg, az $u \to [s{,}1]$ függvény pedig felső korlát az össztámogatás értékére. Egy(G,s) párt erősnek nevezünk, ha V optimális partíció (OC)-re.

A feladat ekkor egy olyan $s \leq s' \leq u$ új súlyfüggvény találása,amire (G,s) erős, és ami minimalizálja a

$$\sum_{e \in E} k(e)(s(e) - s'(e))$$

értéket.

5.1.1. Állítás. *V akkor és csak akkor optimális partíció (G,s')-re, ha a*

$$\left\{x \in R^E : x(E(U) \leq |U| - c_G(U)) : \forall U \subseteq V, x \leq s'\right\}$$

polimatroidon a $\sum_{e \in E} x(e)$ *célfüggvényre az optimum értéke* $|V| - 1$.

Tekintsük a következő segédgráfot:

G minden élét cseréljük ki e' és e* párhuzamos élekre. Legyen $k(e') := 0, s(e') := s(e), k(e*) :=$ $= k(e), s(e*) := u(e) - s(e)$.

Vegyük a segédgráfnak megfelelő polimatroidot:

$$\left\{x \in R^E : x(U) \leq |U| - c_G x \leq s\right\}$$

Alkalmazzuka mohó algoritmust a

$$-\sum_{e \in E} k(e)x(e)$$

célfüggvény maximalizálására ezen a polimatroidon. Mivel a E célfüggvény optimumának keresésekor tetszőleges sorrendben haladhatunk az éleken, ez megoldja az utóbbi feladatot is. Ha az algoritmus futása végén a komponensek összege |V|-1, akkor legyen s'(e):=x(e*) $\forall e \in E$-re, ez megoldja az Optimális Növelés Feladatot. Ha a komponensek összege nem éri el a |V|-1-et, akkor a feladat nem megoldható.

Bemutatjuk Sebő és Preissmann algoritmusát a problémára. Ez szubrutinként hsználja a 4.3 szakaszban ismertetett, az Optimális Kooperációt megoldó algoritmust, illetve a Picard és Queyranne(1982) és Padberg és Wolsey (1983)- féle hálózati folyam algoritmust.

0.Legyen először s'=s. Legyen P optimális partíció $f_{G,s}$-re (az (OC) algortmus meghívása). $P = \{V\}$ esetén készen vagyunk. $P \neq V$ esetén készítsük el a (H, s'_H) gráfot P osztályainak összehúzásával. Rögzítsük a P osztályain belül lévő éleket. A már rögzített élek halmazát jelölje R.
1.Legyen e H-nak a

$$k(e) = min_{f \in E(G), f \notin R} k(f)$$

értéket megvalósító éle.
2. Legyen s'(e) értéke u(e). Legyen $S_e \subseteq V$ a $b_{H,s'} = |W| - 1 - s'(W)$ értéket minimalizáló halmaz(a hálózati folyam algoritmus meghívása).Legyen R=R$\cup\{u\}$
$S_e = \{x\}$ esetén:

-ha minden él rögzített a G gráfban, akkor az algoritmus leáll. Ekkor s'=u mellett nem V(H) az optimális partíció, így a feladat nem megoldható.
-ha van nem rögzitett él, akkor ismételjük az algoritmust az 1.lépéstől.

$S_e \neq \{x\}$ esetén legyen $s'(e) = u(e) + b_{H,s'}$

-ha $S_e = V(H)$, készen vagyunk, a feladatot megoldja s'.
-ha $S_e \neq V(H)$, készítsük el az új H-t S_e összehúzásával, rögzítsük a S_e-n belüli éleket.Ismételjük meg az algoritmust az 1. lépéstől.

5.1.1. Lemma. *Legyen G=(V,E) egy gráf, legyen ennek e tetszőleges éle.Legyenek s, s' súlyfüggvények, amelyekre s'(e)>s(e) és s'(f)=s(f)* $\forall f \neq e$*-re.Legyen F*$\subseteq E(G)$ *optimális* $f_{G,s}$*-re. Ha e*$\in$ *F, akkor F* $f_{G,s'}$*-re is optimális. Ha e*$\notin$ *F, akkor a* $P_{F'}$ *partíció osztályainak részhalmazai közül vegyük azokat, amelyek tartalmazzák az x-et vagy az y-t tartalmazó osztályok közül legalább az egyiket. Az ilyen W részhalmazok közül a* $|W| - 1 - s'(\delta(W))$ *értéket minimalizáló W*-ra az* $F\cup\delta(W*)$ *optimális* $f_{G,s'}$*-re.*

Bizonyítás. Mivel a partíció értéke a súlyfüggvény változtatása után s'(e)-s(e)- nél nagyobb értékkel nem változhat , az első állítás teljesül.Az e∉F esetre az állítás következik a 4.3.1 tételből. □

Tehát az e∈F élek az optimális megoldásnak megfelelő élhalmazban maradnak.

5.1.1. Következmény. *Az S_e osztályainak összehúzása után kapott H gráfra a $\{\{v\} : v \in V(H)\}$ partíció optimális marad, miután egy él értékét u(e)-s(e)-el növeljük.*

5.1.2. Következmény. *Az algoritmus futása során az 1. lépés megkezdésekor a triviális $\{\{v\} :$ $: v \in V(H)\}$ partíció optimális a az aktuális (H,s') által meghatározott (OC) feladatra, és G ennek megfelelő partíciója is optimális az (G,s') által meghatározott (OC) feladatra.*

Tehát amennyiben a feladat megoldható, az algoritmus megtalálja azt az $s \leq s' \leq u$ értéket, ami minimalizálja a

$$k^T(s' - s)$$

értéket.

5.2. A hálózat ellenállóképessége

Cunningham(1985) vezette be a a gráf ellenállóképességének a fogalmát. Legyen G=(V,E) összefüggő gráf, élein adott egy s→ R függvény. Legyen megint adott egy intelligens támadó, akinek minden kiszakított komponens B értékű nyereséget jelent. Az e élet s(e) költséggel tudja lerombolni.

5.2.1. Definíció. *A hálózat ellenállóképességének ekkor a*

$$\sigma(G, s) = min_{A \subseteq G}\{\frac{s(A)}{c_G(\bar{A}) - 1}\}$$

értéket nevezzük.

Tehát a hálózat ellenállóképessége az a maximális B érték, ami mellett a támadó számára optimális magartartás, ha egyáltalán nem rombol le élt.

5.2.1. Állítás. $\sigma(G, s) \leq B$ *akkor és csak akkor, ha*

$$min_{A \subseteq E}\{s(A) - (B(c_G(\bar{A}) - 1)) = 0$$

Tegyük fel, hogy $B \geq \sigma$.Ekkor ha $min\{(s(A) - B(c_G - 1)(A)) : A \subseteq S\}$=0 akkor $B \leq \sigma$ és készen vagyunk. Ha pedig A a (negatív) minimum, akkor a $\sigma \leq \frac{s(A)}{c_G(U) - 1(A)} = b' < b$, b-t b'-vel helyettesítve ismételjük tovább az előző lépést, amíg $min\{(s(B) - b * (c_G - 1)(B)) : B \subseteq B\}$=0 -t nem kapunk. Ekkor $\sigma = B*$.

5.2.2. Állítás. *Az algoritmus két egymás utáni lépésében a minimalizáló A halmazokra*

$$c_G(A_i) > c_G(A_{i+1})$$

Bizonyítás.

$$0 > (A_{i+1} - b_{i+1}((c_G)(A_{i+1}) - 1)$$

=

$$s(A_{i+1}) - b_i((c_G)(A_{i+1}) - 1) + b_i((c_G(A_{i+1}) - 1) - b_{i+1}((c_G)(A_{i+1}) - 1) \geq$$

$$s(A_i) - b_i((c_G)(A_i) - 1) + b_i((c_G)(A_{i+1}) - 1) - b_{i+1}((c_G)(A_{i+1}) - 1) =$$

$$c_G(A_{i+1}) - c_G(A_i)(b_{i+1} - b_i)$$

□

Tehát az algoritmus legfeljebb |V| lépés után véget ér.Az egyes lépésekben egy általánosított Optimális Kooperáció Feladatot old meg.

Sebő és Preissmann erre a problémára is kifejlesztettek egy algoritmust. Ez Cunninghaméhoz nagyon hasonlóan működik,szintén n Optimális Kooperáció Feladatot old meg, viszont egyre kisebb gráfokon (az összehúzás műveletének köszönhetően).

5.2.3. Állítás. $\sigma(G, s)$=*max*$\{\lambda : (G, \frac{s}{\lambda})$*erős*$\}$

0. Legyen G=(V,E) gráf, σ ellenállóképességgel , s súlyfüggvénnyel. σ definíciója miatt V optimális $f_{G,\frac{s}{\sigma}}$-ra, így teljesül $f_{G,\frac{s}{\sigma}}(E) \geq f_{G,\frac{s}{\sigma}}(0)$, és $\sigma \leq \frac{s(E)}{n-1}$.Tehát ha a súlyok értékeit $\frac{s(E)}{n-1}$ -el leosztva V optimális marad, akkor $\sigma = \frac{s(E)}{n-1}$és készen vagyunk. Ellenkező esetben $\sigma = \frac{s(E)}{n-1}$. Jelöljük az $f_{G,\frac{n-1}{s(E)}s}$-et maximalizáló élhalmazt A-val. A≠E. Legyen G' a P_A osztályainak összehúzásával kapott gráf, σ(G')=σ(G). A 5.1.1.Lemma miatt az előző lépést ismételve, A élei mindig az optimális megoldásban maradnak, így addig ismételjük az eljárást, amíg E nem lesz optimális. $|V(G')| <$ $< |V(G)|$ miatt az eljárás legfeljebb n Optimális Kooperáció Feladat megoldása után véget ér.

A B$\neq$ 1 esetben az egyes lépések során az általánosított Optimális Kooperáció Feladatot kell megoldanunk:

$$max\{f_{G,w,B} = Bg_G(A) + \sum_{e \in A} w(e), A \subseteq E(G)\}$$

Ezt megoldhatjuk egyszerűen azzal, hogy az éleket leosztjuk B-vel.Egy másik lehetőség, hogy a hálózati folyam algoritmus általánosítását használjuk, az $m(W) = B|W|$ választással.

5.3. A hálózat optimális merevítése

Az alapszituáció ugyanaz, mint az előző szakaszban. Adott továbbá egy c:$E \rightarrow R$, illetve l:$E \rightarrow R$ függvény. c(e) az él s(e) ellenállóképességének egységnyi növelésével járó költség, l(e) pedig felső korlát s(e)-re. Minimális költséggel szeretnénk elérni, hogy a σ(G,s') legalább σ_0 legyen. Vegyük a következő Optimális Növelés Feladatot: legyen G=(V,E), a súlyfüggvényt jelölje most w. $w = \frac{s}{\sigma_0}$ A költségfüggvény legyen c, a felső korlát pedig σ_0.

5.3.1. Állítás. *A fenti Optimális Növelés Problémát megoldó w' súlyfüggvényre s'= w'*σ_0 *megoldja az eredeti feladatot.*

5.4. A Potts modell

A Potts modell szilártestek mágneses tulajdonságainak számítására alkalmazott statisztikus fizikai modell. Az egyes spineket egy n dimenziós rács rácspontjaihoz rendeli, és az egyes rácspontokon lévő $\sigma_1 \dots \sigma_n$ spinek egy adott $Z_q := 0 \dots q-1, q \in$ halmazból vehetik fel az értékeiket. A szomszédos rácspontok között van kölcsönhatás, ezt kötéseknek nevezzük.A spinek számát jelölje n, a kötésekét m. A rendszer energiája (az ún. Hamiltin függvénye) $(\sigma_1; \dots \sigma_n)$(n$\in$ $\in N$) állapot esetén

$$E(\sigma) = \sum_{i,j} Ki, j\delta_{\sigma_i, \sigma_j}$$

ahol a kötésekre összegzünk, $\sigma_i \in Z_q$, a $K_{ij} \in R_+$ a kötés erőssége , és δ_{ab} a Kronecker- szimbólum (1, ha a=b és 0, ha a$\neq b$).

A rendszer partíciós függvénye egy fontos mennyiség, amely meghatározza a termodinamikai egyensúlyban lévő rendszer statisztikai tulajdonságait.A függvénnyel vagy deriváltjaival kifejezhető például a rendszer nyomása, entrópiája vagy szabadenergiája -utóbbiról megmutatjuk, hogy egy szubmoduláris függvény. A partíciós függvényt Z-vel jelölve

$$Z = \sum_{\sigma} exp(E\sigma) = \sum_{\sigma} \prod_{ij} e^{K_{ij}\delta_{\sigma_i \sigma_j}}$$

, ahol a kötések szerint összegzünk, a szorzat tényezőit pedig a lehetséges $(\sigma_1 \dots \sigma n)$ tényezők határozzák meg. $\delta \in$ 0,1-ekre $^{K\delta} = 1 + (e^K - 1)\delta$ A $v_{i,j} = e^{K_{i,j}} - 1$ jelölést bevezetve:

$$\prod_{ij} e^{K_{ij}\delta_{\sigma_i \sigma_j}} = \prod_{ij} (1 + (e^{K_{ij}-1)\delta_{\sigma_i \sigma_j}})) = \sum_{L} \prod_{ij \in L} v_{ij}\delta_{\sigma_i \sigma_j}$$

ahol a lehetséges kötések halmazaira összegzünk.

Tehát

$$Z = \sum_{\sigma} \sum_{L} \prod_{ij \in L} v_{ij}\delta_{\sigma_i \sigma_j} = \sum_{L} \sum_{\sigma} \prod_{ij \in L} v_{ij}\delta_{\sigma_i \sigma_j} = \sum_{L} q^{c(L)} \prod_{ij \in L} v_{ij}$$

,ahol c(L) L összefüggő komponenseinek a számát jelöli.

Vezessük be az α_{ij} új változókat, legyen

$$v_{ij} = g^{\alpha_{ij}}$$

Ekkor

$$Z = \sum_{L} q^{c(L) + \sum_{ij \in L} \alpha_{ij}}$$

Vezessük be az f függvényt, melyre

$$f(L) = c(L) + \sum_{ij \in L} \alpha_{ij}$$

Így

$$Z = \sum_L q^{f(L)}$$

$q \to \infty$ esetén (ekkor ferromágneses nagy q-állapotú rendszerről beszélünk) Z nagyságrendjét az

$$F_0 = max_{U \subseteq E} F(U)$$

érték határozza meg. A rendszer szabadenergiája pedig konstansszor ennek -1 -szerese, ami a kötési energiából és az összefüggő komponensek száma által meghatározott hőenergiából áll össze. A rendszer tehát megfeleltethető egy olyan Optimális Kooperáció Feladatnak, ahol az egyedek a párkölcsönhatásból és a hőmérsékletből adódó bevételek maximalizálásával igyekeznek megtalálni a számukra optimális konfigurációt.

5.5. Feladat

Végül a dolgozatban bemutatott módszerek segítségével kétféleképp bizonyítjuk az alábbi állítást:

5.5.1. Állítás. *Legyen G=(V,E) tetszőleges gráf. Ekkor minden k-ra létezik a csúcsoknak egy olyan $P_1 \dots P_n$ partíciója, hogy az osztályokon belül létezik k diszjunkt feszítőfa és az osztályok összehúzásával keletkezett gráf fedhető k erdővel.*

5.5.1. Matroid metszet algoritmussal

A matroidokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat ismertnek vesszük.

5.5.1. Tétel. *Legyenek $M_1 \dots M_k$ az S közös alaphalmazok adott matroidok. Ekkor összegük is matroidot alkot, az $\cup M_i$ rangja*

$$min_{X \subseteq S}\{\sum r_i + |X - S|\}$$

Edmonds partíciós algoritmusa konstruktív bizonyítást nyújt a tételre: a futás végén megad $F_1, \dots F_k$ halmazokat úgy, hogy F_i független M_i-ben , valamint egy X halmazt úgy, hogy $E = X \cup (\cup F_i)$ és $F_i \cap X$ feszíti X-et M_i-ben.

5.5.2. Tétel. *Adott egy S alaphalmazon két matroid. A független halmazok összességét jelölje I_1 és $_2$. Ekkor*

$$max\{|J| : J \in I_1 \cap I_2\} = min_{X \subseteq S}(r_1(X) + r_2(S - X))$$

Az M_1 és M_2 maximális elemszámú közös független halmazának keresése az M_1 és M_2*(ahol $M_2 * M_2$ duálisa) olyan bázisának a keresésével ekvivalens, amelyek egyesítése maximális elemszámú. A partíciós algoritmus tehát kiszámítja a két matroidban maximális közös független halmazt.

(Emlékeztetőül:

A partíciós algoritmus általánosításának tekinthető Cunningham-féle algoritmus a

$$max\{x(E) = min_{A \subseteq E} s(A) + r_G(\bar{A})\}$$

egyenlőségen alapult.

Térjünk vissza a feladatra.

Legyen az alaphalmaz az élek halmaza, vegyük ezen k darab körmatroid unióját. A matroid metszet algoritmus megad egy X és F_i halmazokat, utóbbiak függetlenek egy körmatroidban, és mindegyik F_i feszíti $X \cap F_i$-t. Ez pont annak felel meg, hogy X minden összefüggő komponensében van k diszjunkt feszítőfa. Az E halmaz pedig előáll a k darab, egyenként egy körmatroidban független halmaz uniójaként,tehát fedhető k darab erdővel. Még be kell látnunk, hogy a gráf összehúzottja is fedhető k erdővel.

5.5.1. Definíció (Matroid összehúzottja)**.** *Legyen az S alaphalmazon adott egy matroid, aminek a rangfüggvénye r, legyen Z ennek valódi, nemüres részhalmaza. M' az M-ből Z összehúzásával összehúzásával keletkezett matroid, ha alaphalmaza S, rangfüggvénye pedig $r' = r(X \cup Z) - r(Z)$.*

5.5.3. Tétel. *A következők ekvivalensek:*

1.F'$\subseteq$S' független M'-ben.

2.Létezik Z-nek egy I maximális M-ben független részhalmaza, amire $I \cup F$ független M-ben.

Tekintsük az M'=M matroidot (ahol M=$\cup(M_i)$). Azt kell belátnunk, hogy F'(ahol F=$\cup F_i$) független M'-ben, ez pedig teljesül a fenti tétel miatt (az $I = X \cap F$ választással.)

Tehát az összehúzás után a gráf valóban fedhető k erdővel.

5.5.2. Visszavezetése az Optimális Kooperáció Feladatra

5.5.4. Tétel (Nash- Williams)**.** *Egy G=(V,E) irányítatlan gráf akkor és csak akkor fedhető k erdővel, ha minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ részhalmazra*

$$e(X) \leq k(|X| - 1)$$

5.5.5. Tétel (Tutte)**.** *Egy G=(V,E) irányítatlan gráfban akkor és csak akkor van k élidegen feszítőfa, ha V minden $_1 \ldots V_i$ partíciójára (P)$\geq$ $k(t-1)$ahol e(P) a partíció osztályai között menő élek számát jelöli.*

Nézzük az Optimális Kooperáció Feladatot a G gráfra, s=$\frac{1}{k}$ súlyfüggvény mellett. Ekkor egy optimális partíciót véve mindkét tétel feltétele teljesül. (Láttuk, a Nash-Willams tétel feltételének teljesülése esetén a gráf összehúzottja is fedhető k erdővel). Nézzük a G-ből a partíció osztályainak összehúzásával kapott gráfot. Tegyük fel, hogy létezik olyan $X \subseteq V'_{ossz}$ csúcshalmaz, hogy $e|X| >$ $> k(|X|-1)$.Ekkor

$$|X|-1-s(\delta(X)) > |X|-1-\frac{1}{k}k(|X|-1) > 0$$

miatt nem teljesül az optimalitási feltétel a partícióra, ellentmondást kapunk.

A Tutte- tétel feltételének igazolásához tegyük fel, hogy létezik az optimális partíciónak olyan osztálya, amelyet tudunk úgy tovább partícionálni, hogy $e(X) < k(t-1)$. Ekkor viszont $t-1-$ $-e(X)\frac{1}{k} > t-1-t-1 > 0$ miatt a partíció nem lehet opimális, így megint ellentmondáshoz jutunk.

□

Irodalomjegyzék

[1] Sebő,A.,Preissmann,M., *Graphic Submodular Function Minimization:a Graphic Approach and Applications* Research Trends in Combinatorial Optimization.Springer, Berlin 2009

[2] William H.Cunningham,*Optmal Attack and reinforcement of a network*J.AssocComputh.Math.32(3),549-561(1985)

[3] Baiou, M., Barahona,F,, Mahjoub,A.R. *Separation of partition inequalities*, Math.Oper.Res.25(2),243-254(2000)

[4] Frank,A., Tardos, É.,*Generalized polymatroids and submodular flows*, Math.Program.42, 489-563(1988)

[5] Juhász,R.,Rieger,H.,Iglói,F. *The random bond Potts model in the large-q limit*,Phys.Rev.E 64,56122(2001)

[6] Edmonds,J.: *Matroids and the greedy algorithm*, Math. Program. 1,127-136(1971)

[7] A. Frank, *Poliéderes kombinatorika, egyetemi jegyzet*

[8] A.Frank,