Lineáris algebra alkalmazásai

Szakdolgozat

Írta: Pósfay Andrea Bernadett

Matematika Bsc,

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Dr. Szabó Csaba, egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A matematika egy klasszikus ága a lineáris algebra, mely elengedhetetlen segédeszköz annak minden területén. Segítségével könnyen kidolgozhatunk bonyolult problémákat, egyszerűbb és rendezettebb alakban írhatunk fel feladatokat és ezzel áttekinthetőbbé tehetjük a megoldásra váró kérdéseket. Jól alkalmazható például olyan esetekben amikor sok ismeretlennel és összefüggéssel találjuk szemben magunkat. Ha ezeket rendezetlenül vázoljuk, könnyen elképzelhető, hogy a probléma átláthatatlanná válik. Ekkor valószínűleg nem is veszünk észre egyszerűbb kapcsolatokat és a válaszra sem bukkanunk rá olyan gyorsan.

A szakdolgozatomban szeretném megmutatni, hogy miként alkalmazható a lineáris algebra a térfogatszámításban. Először David Hilbert híres problémái közül a harmadikat ismertetem, majd megmutatom, hogy lineáris algebra - ezen belül a determináns- segítségével milyen egyszerűen ki lehet számítani testek térfogatát.

Hilbert harmadik problémáját Bolyai Farkas vetette fel először. Ugyanis Bolyai Farkas bevezette a *"végszerű területegyenlőség"* fogalmát, amelyet a következőképpen értelmezett: *"két egyenlő területű síkidom akkor végszerűen egyenlő, ha véges számú, kölcsönösen egybevágó darabokra oszthatók."* Igazolása nagy szerepet játszott a mai területszámítás megalkotásában. Ennek bizonyítását a későbbiekben meg is fogom mutatni (Bolyai Farkas-P. Gerwin tétele). Ennek kapcsán Bolyai Farkasban felmerült a kérdés, hogy hogyan alkalmazható ez a térben. Ezért meghatározta a "térfogat-egyenlőség" fogalmát: *"két egyenlő térfogatú poliéderről akkor mondjuk, hogy végszerűen egyenlő, ha véges számú, páronként egybevágó darabokra bonthatók"*. Bolyai Farkas tetraéderekre vetette fel a problémát. Ezzel szemben Bolyai János hagyatékában olvashatunk arról, hogy ő már általánosságában vizsgálta a kérdést:

> *"Apámnak az volt az eszméje, hogy mindenütt, ahol csak lehetséges, a végszerű egyenlőséget mutassa, és engem már kora ifjúságomban, természetesen csak néhány figyelmeztetéssel, utasított erre a fogalomra[...]. A gúla feladata, nevezetesen bármely két egyenlő [térfogatú] háromoldalú gúla és evvel együtt bármely két [egyenlő térfogatú] síktér, vagyis poliéder végszerű egyenlőségének kimutatása reám nézve egyike volt a legridegebbeknek, a legnagyobb ellenállást kifejtőknek és hihetetlen nehézséget okozott nekem... Izgatva a feladat egészen sajátságos, legnagyobb mértékű csinossága által, nem kevés időt szántam neki, de ami a fő célt illeti, teljesen eredménytelenül. Aki erről meg akar győződni, és erejét meg akarja ismerni, az fogjon hozzá."*

Érzékelhetjük, hogy sokat foglalkozott a kérdéssel és felismerte, hogy a térben csak bizonyos esetekben teljesül a térfogat-egyenlőség.

Ez a probléma motiválta David Hilbertet, hogy bevegye ezt az 1900-as előadásában felvázolt 23 probléma közé.

2. David Hilbert élete és munkássága

2.1. David Hilbert

David Hilbert (1862-1943) kora egyik legkiemelkedőbb matematikusa volt: a matematika szinte minden területén jelentőset alkotott. Hilbert munkáival az algebra, a számelmélet, a geometria, az analízis, a funkcionálanalízis, a matematikai fizika, a logika, a differenciálegyenletek, a matematika alapjai, a variáció számítás és a topológia területén is találkozhatunk. David Hilbert 1862-ben született Königsbergben, Poroszországban (Königsberg mai neve Kalinyingrád, melyet a II. világháború után Oroszországhoz csatoltak). Szülővárosában járt gimnáziumba, majd egyetemi tanulmányait is itt folytatta. Diákévei alatt ismerkedett meg Hermann Minkowskival, akivel később életre szóló barátságot kötött. 1886-ban magántanári képesítést szerzett, majd 1895-ig tanított a königsbergi egyetemen. 1895-ben a göttingeni egyetem meghívására, Göttingenbe költözött és a matematikai tanszék vezetője lett.

1892-ben feleségül vette Käthe Jeroscht és egy évvel később megszületett fiuk, Franz Hilbert.

1899-ben jelent meg híres könyve, a Grundlagen der Geometrie (A geometria alapjai). Ebben a művében axiómarendszer feltételeit vizsgálta és egy formális axiómarendszert javasolt az euklideszi axiómarendszer helyett, valamint tetszőleges dimenzióra általánosította az euklideszi geometriát.

Célja volt, hogy kiküszöbölje az euklideszi axiómarendszer hibáit.
1909-ben megoldotta a Waring-sejtést. Foglalkozott még függvény- és integrálelmélettel is.
1910-ben Hilbert megkapta a világ legkíválóbb matematikusainak járó díjat, a Bolyai-díjat (Könnig Gyula, Rados Gusztáv Mittag-Leffer és Heri Poincaré döntése alapján).

2.2. A II. Nemzetközi Matematikai Kongresszus

A XX. század elején a Francia Matematikai Társaság megrendezésében került sor a II. Nemzetközi Matematikai Kongresszusra. A kongresszus 1900 augusztus 6-án 9:30-kor kezdődött. A nyító ülést a Párizsi Kongresszusi Központban (Palais des Congres) tartották meg, elnöknek Jules Henri Poincarét (1854-1912), francia matematikust választották, míg Charles Hermite (1822-1901) szintén francia matematikust pedig tiszteletbeli elnöknek, habár ő nem jelent meg ezen a rendezvényen.
A világ minden tájáról érkeztek híres matematikusok a kongresszusra, közülük néhányat említenék csak meg külön: elnökhelyettesek voltak: *Czuber (Bécs), Geiser (Zürich), Gordan (Erlangen), Greenhill (London), Lindelof (Helsingfors), Lindemann (München), Mittag-Leffler (Stockholm), Moore (Chicago), Tikhomandritzky (Kharkoff), Volterra (Torino), Zeuthen (Koppenhága)*; titkárok voltak: *Bendixson (Stockholm), Capelli (Nápoly), Minkowski (Zürich), Ptaszycki (Szentpétervár), Whitehead (Cambridge)* és a vezető titkár pedig *Duporcq* volt Párizsból.
Az elnök rövid megnyítója és a jelenlévők bemutatása után körülbelül egy-egy órás beszédet tartott Cantor és Volterra.

A kongresszus további 5 napján a párizsi egyetemen, a Sorbonne-on üléseztek. A konferencia témaköreit hat részre osztották és minden témakörnek külön választottak egy elnököt és egy titkárt. A témák a következők voltak:

I. Aritmetika és algebra *(elnök: David Hilbert, titkár: Élie Cartan)*

II. Analízis *(elnök: Paul Painlevé, titkár: Jacques Salomon Hadamard)*

III. Geometria *(elnök: Jean-Gaston Darboux, titkár: Boleslas Niewenglowski)*

IV. Mechanika és matematikai fizika *(elnök: Joseph Larmor, titkár: Tullio Levi-Civita)*

V. Életrajz és történelem *(elnök: Roland Bonaparte, titkár: Maurice d'Ocagne)*

VI. Tanítási módszerek *(elnök: Georg Ferdinand Cantor, titkár: Charles-Ange Laisant)*

Hilbert elsők között tartott előadást *Matematikai problémák* címmel. Ebben 23 problémára hívta fel a matematikusok figyelmét, mellyel nagy mértékben befolyásolta a XX. századi matematika fejlődési irányát. Ezek között van olyan ami még ma is megoldatlan, és akad olyan amelyet nem sokkal a kongresszus után megoldottak. Az utóbbiak közé tartozik a harmadik probléma is, ami a poliéderek átdarabolhatóságáról szól:
Adott két azonos térfogatú tetraéder. Szét lehet-e vágni az egyik tetraédert véges sok poliéderre úgy, hogy a részpoliéderek forgatásával és eltolásával ki lehessen rakni a másik tetraédert?

3. Motiváció

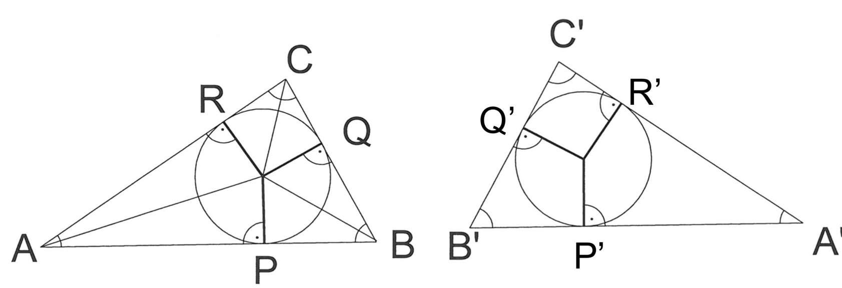
Kezdjük egy egyszerű példával a problémakör tárgyalását:

A szórakozott cukrász problémája:

Egy cukrászt felkértek, hogy készítsen egy háromszög alakú tortát, melyhez kapott egy háromszög alakú dobozt. Sajnos a szórakozott cukrász a tortának rossz oldalára kente fel a cukormázat, de ez csak akkor derült ki amikor a tortát az előre elkészített díszdobozba be akarta tenni. Hogyan darabolhatná fel a tortát, hogy beférjen a dobozba?

A matematika szavaival:

Tekintsük a következő két háromszöget: Jelölje az ABC (nem szabályos, nem egyenlőszárú) háromszög a tortát és legyen az $A'B'C'$ háromszög az ABC tükörképe.(3.1. ábra) Ez az $A'B'C'$ háromszög jelképezi a dobozt, amibe át szeretnénk darabolni a tortát. Elég megmutatni, hogy csupán forgatással és eltolással át lehet darabolni, ha fel tudjuk vágni mindkét háromszöget néhány síkidomra úgy, hogy a megfelelő darabok páronként egybevágóak legyenek.



3.1. ábra

Kihasználjuk, hogy a háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást és ez a pont a háromszögbe írható kör középpontja. Rajzoljuk be a háromszögekbe a beírható köröket és az érintési pontokhoz (P, Q, R illetve P', Q', R') a sugarakat. (Mivel a két háromszög egymás tükörképe, ezért a körök egyforma sugarúak lesznek.) Így a sugarak segítségével mindkét háromszöget 3-3 négyszögre vágjuk fel, melyek páronként egybevágóak, hiszen a két háromszögben a megfelelő szögek megegyeznek és a beírt kör sugara is mindkét háromszögben ugyanakkora. Ezek a négyszögek forgatással átvihetők egymásba, mert szimmetrikusak és páronként egybevágóak. □

Mielőtt mélyebbre ásnánk magunkat a témában, tisztáznunk kell néhány definiciót. Mit is értünk az alatt, hogy két poliédert át lehet darabolni egymásba?

3.1. Definíció. *Két poliédert (P és Q) egymásba darabolhatónak nevezzük, ha fel lehet bontani őket véges sok $P_1, \dots P_n$ és $Q_1 \dots Q_n$ poliéderre úgy, hogy minden i-re ($1 \leq i \leq n$) P_i és Q_i egybevágó.*

3.2. Definíció. *Két poliéder (P és Q) együttesen kiegészíthető, ha vannak olyan P_i illetve Q_i poliéderek ($i = 1, \dots, m$) amelyek páronként egybevágóak és belsejük diszjunkt P-től (illetve Q-tól), valamint minden $i \neq j$-re P_i és P_j (illetve Q_i és Q_j) diszjunktak. Továbbá $\tilde{P}$ és $\tilde{Q}$ egymásba darabolhatók, ahol $\tilde{P} := P \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m$ és $\tilde{Q} := Q \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m$.*

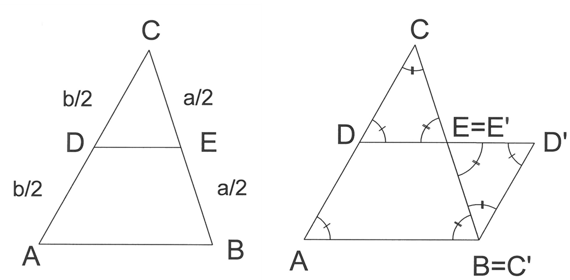
3.3. Definíció. *Két sokszöget eltolás-átdarabolhatónak nevezzünk, ha az egyik sokszöget fel lehet vágni véges sok sokszögre úgy, hogy a másik sokszög kirakható a részekből csak eltolással. Azaz pontosan akkor darabolhatók át csak eltolással, ha (véges sok) páronként egybevágó háromszögre bonthatók.*

A poliéderek átdarabolhatóságáról Carl Friedrich Gauss is írt: 1844-es leveleiből kiderül, hogy már foglalkozott a problémával. Ezek a levelek halála után 45 évvel, 1900-ban jelentek meg Gauss összegyűjtött munkáiban. Gauss kortársa, Bolyai Farkas síkbeli sokszögekre megmutatta, hogy lehetséges az átdarabolás.

3.1. Tétel. *(Bolyai Farkas-P.Gerwin tétele)*
Síkbeli sokszögek egymásba darabolhatók és együttesen kiegészíthető pontosan akkor, ha területeik megegyeznek.

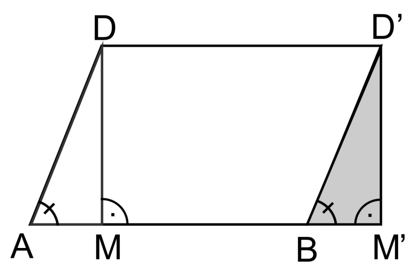
Más szóval fel lehet darabolni az egyik sokszöget egyenesekkel véges sok részre úgy, hogy a másik sokszöget össze lehessen rakni a részek eltolásával és forgatásával. Vagyis két egyenlő területű sokszöget fel lehet bontani páronként egybevágó részsokszögekre.

Bizonyítás:
Legyen P egység területű sokszög. Bontsuk fel P-t háromszögekre. Először belátjuk, hogy mindegyik háromszöget át lehet daradolni paralelogrammává, és minden paralelogrammából készíthetünk téglalapot átdarabolással.
Tekinsük a következő ABC háromszöget (3.2. ábra).



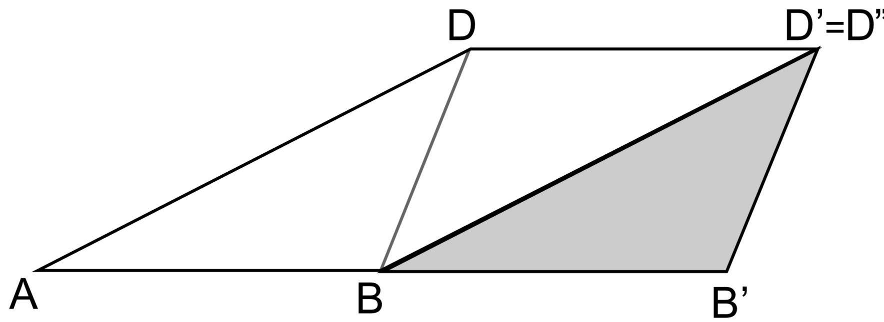
3.2. ábra

Vágjuk ketté az egyik középvonala mentén. Így kaptunk egy DEC háromszöget és egy $ABED$ trapézt. Forgassuk el a DEC háromszöget az E csúcsa körül úgy, hogy a C csúcs az eredeti háromszög B csúcsába kerüljön. (Ezt megtehetjük, mert az E pont a $\overline{BC}$ oldal felezőpontja.) Ekkor egy $ABD'D$ négyszöget kapunk, ami paralelogramma, hiszen a forgatás szögtartó transzformáció, ezért az $DEC\sphericalangle = D'EB\sphericalangle$ és $BD'E\sphericalangle = CDE\sphericalangle = DAB\sphericalangle$ (mert a $\overline{DE}$ középvonal párhuzamos az $\overline{AB}$ oldallal). Vágjuk két részre ezt a paralelogrammát a D csúcshoz tartozó magasságvonala mentén. (3.3. ábra) Az így kapott AMD háromszöget toljuk el úgy, hogy az A csúcs a B csúccsal megegyezzen. Ekkor az $MM'D'D$ négyszög téglalap lesz.



3.3. ábra

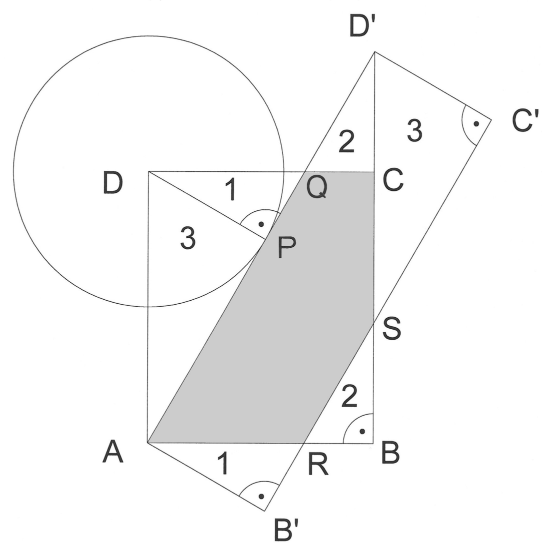
Előfordulhat olyan eset is amikor a paralelogramma D csúcsához tartozó magasságvonal talppontja az $\overline{AB}$ szakaszon kívül esik.(3.4. ábra) Ekkor vágjuk ketté a paralelogrammát a $\overline{BD}$ átlója mentén és toljuk el az ABD háromszöget úgy, hogy az A csúcs a B csúcsra, a D csúcs a D' csúcsra illeszkedjen. (Ezt megtehetjük, mert $DAB\sphericalangle = D''BB'\sphericalangle$ és $|\overline{AD}| = |\overline{BD''}|, |\overline{AB}| = |\overline{BB''}|$.) Az így kapott $BB'D''D$ paralelogrammát az előző esethez hasonlóan átdarabolhatjuk téglalappá.



3.4. ábra

Így mindegyik háromszögből készíthetünk téglalapot átdarabolással. Vagyis a két sokszöget átdaraboltuk két téglalapba.

Azt szeretnénk még belátni, hogy minden ($ABCD$) téglalapot át lehet darabolni egy másik (adott magasságú, vele azonos területű $A'B'C'D'$) téglalapba. Legyen $ABCD$ egy téglalap és legyen adott a keletkező $\overline{A'B'}$ oldal hossza. A D csúcsból egy $|\overline{A'B'}|$ sugarú kört rajzoluk és ehhez a körhöz húzunk érintőt az A pontból. (3.5. ábra)



3.5. ábra

Így felbontottuk a téglalapot egy ötszögre és három háromszögre. A 3.5. ábrán látható módon DPQ háromszög egybevágó $AB'R$ háromszöggel (mert $|\overline{DP}| = |\overline{AB}'|$ és $QDP\sphericalangle = RAB'\sphericalangle$ és $AB'R\sphericalangle = DPQ\sphericalangle = 90°$). Az RBS háromszög egybevágó QCD' háromszöggel, (hiszen $|\overline{DQ}| = |\overline{AR}|$ miatt $|\overline{QC}| = |\overline{RB}|$ és a rajtuk fekvő két szög is megegyezik a párhuzamosság miatt). Végül DAP háromszög egybevágó $D'SC'$ háromszöggel mert $|\overline{D'C'}| = |\overline{DP}|$ és a rajtuk fekvő szögek is egyenlők.

Így a két téglalapot át lehet darabolni egymásba csak eltolások segítségével. Erre a későbbiekben még szükségünk lesz. Ezzel beláttuk, hogy síkbeli sokszögek átdarabolhatók egymásba. □

Megjegyzés: Nyílván egymásba darabolható sokszögek együttesen kiegészíthetők.

4. Dehn invariánsok

4.1. Dehn invariáns meghatározása és tulajdonságai

Még 1900-ban, csak néhány hónappal a kongresszus után David Hilbert tanítványa, Max Dehn mutatot két egyenlő alapterületű és magasságú tetraédert, amelyeket nem lehet átdarabolni egymásba.
Két évvel később megjelent egy másik cikke, amelyben az együttes kiegészíthetőség is szerepelt.
Ismerkedjünk meg a Dehn-invariánssal, amely segítségével könnyen ellenőrizhetjük poliéderek egymásba darabolhatóságát.

Legyen $M = \{m_1, \dots, m_k\} \subseteq \mathbf{R}$ halmaz. Jelölje $V(M)$ az M -beli számok összes racionális együtthatós lineáris kombinációjának halmazát. Vagyis,

$$V(M) = \{\sum_{i=1}^{k} q_i m_i : q_i \in \mathbf{Q}\} \subseteq \mathbf{R}.$$

Legyen M_p a 3-dimenziós P poliéder lapszögeit és π-t tartalmazó halmaz. Adott $M \subseteq \mathbf{R}$ M_p-t tartalmazó véges halmaz és $f : V(M) \to \mathbf{Q}$ $\mathbf{Q}$-lineáris függvény, ahol $f(\pi) = 0$. P poliéder f szerinti Dehn invariánsán a

$$D_f(P) := \sum_{e \in P} l(e) f(\alpha(e))$$

valós számot értjük.
Jelölések:$l(e)$ az e él hossza és $\alpha(e)$ az e élnél lévő lapok szöge.

4.1. Lemma. *A Dehn invariáns additív.*

Bizonyítás:
Legyen P egy poliéder. Azt szeretnénk belátni, hogy ha P-t szétvágjuk egy

S síkkal P_1 és P_2 poliéderekre akkor a keletkezett két poliéder Dehn invariánsainak az összege megegyezik az eredeti poliéder Dehn invariánsával. Vagyis, $P = P_1 \cup P_2$

$$\Rightarrow D_f(P) = D_f(P_1) + D_f(P_2).$$

Nézzük meg mi történik az egyenlet bal oldalán, ha az S síkkal szétvágjuk P poliédert. Vegyük a bal oldal egy tetszőleges $l(e)f(\alpha(e))$ tagját.

- Ha az S sík nem metszi ezt az e élt, akkor ez a tag a jobb oldalon érintetlen marad és pontosan az egyik P_i-ben szerepel ($i = 1, 2$).

- Ha az S az e élt két részre osztja, e_1-re és e_2-re, (Ekkor persze az e élnél találkozó lapok szöge nem változik, tehát ($\alpha(e) = \alpha(e_1) = \alpha(e_2)$).
  Az e_1 él az egyik részpoliéderbe, az e_2-él a másik részpoliéderbe kerül. A jobb oldalon a szummákat kibontva pedig egy olyan összeget kapunk amelyben szerepel egy $l(e_1)f(\alpha(e_1))$ és egy $l(e_2)f(\alpha(e_2))$ tag.
  Látható, hogy ebben az esetben is teljesül az additívitás, mert $l(e_1)f(\alpha(e_1)) + l(e_2)f(\alpha(e_2)) = l(e_1)f(\alpha(e)) + l(e_2)f(\alpha(e)) = (l(e_1) + l(e_2))f(\alpha(e)) = l(e)f(\alpha(e))$

- Ha az S sík tartalmazza az e vektort akkor S két részre vágja a $\alpha(e)$ lapszöget. Legyenek ezek $\alpha_1(e)$ és $\alpha_2(e)$, ($\alpha(e) = \alpha_1(e) + \alpha_2(e)$). Ekkor az egyenlőség jobb oldalán megjelenik egy ilyen összeg:

  $$l(e)f(\alpha_1(e)) + l(e)f(\alpha_2(e)).$$

  Mivel f lineáris függvény, ezért ez a kifejezés egyenlő

  $$l(e)(f(\alpha_1(e) + f(\alpha_2(e))) = l(e)f(\alpha(e)).$$

- Ha az S síkkal elvágjuk a poliédert és a vágáskor olyan éleket kapunk amik eddig P-ben nem szerepeltek, akkor ez az új él a keletkezett P_1 és P_2 poliédereknek is éle lesz. Legyen egy ilyen új él e'. Világos, hogy az új élnél keletkező lapszögek (${\alpha'}_1$ és ${\alpha'}_2$) összege π, ($\alpha'_1 + \alpha'_2 = \pi$). A jobb oldalon ekkor szerepelni fog ez az összeg: $l(e')f({\alpha'}_1) + l(e')f({\alpha'}_2)$. Ami f linearitása miatt éppen

$$l(e)(f({\alpha'}_1) + f({\alpha'}_2)) = l(e)f({\alpha'}_1 + {\alpha'}_2) = l(e)f(\pi) = 0.$$

  Tehát az új élek a Dehn invariáns értékén nem változtatnak.

Ezzel a lemmát beláttuk.□

4.1. Következmény. *Ha két poliéder egymásba darabolható, akkor Dehn invariánsaik megegyeznek.*

Ha két poliéder átdarabolható egymásba akkor világos, hogy együttesen ki is egészíthetőek. Ha két poliéder együttesen kiegészíthető akkor következik, hogy át is darabolhatók? Nem feltétlenül. Hadwiger következő tételéből kiderül, hogy hogyan találhatunk olyan tetraédereket, amelyek térfogata megegyezik, de nem együttesen kiegészíthetőek és nem is darabolhatók át egymásba.

4.1. Tétel. *(Dehn-Hadwiger tétel)*
Legyen P és Q két poliéder $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ illetve $\beta_1, \ldots, \beta_q$ lapszögekkel, valamint M a valós számok egy véges halmaza, melyre $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q, \pi\} \subseteq M$. Ha $f : V(M) \to \boldsymbol{Q}$, ($\boldsymbol{Q}$-lineáris függvény), melyre $f(\pi) = 0$, valamint $D_f(P) \neq D_f(Q)$, akkor P és Q nem együttesen kiegészíthető.

A tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő lemmára.

4.2. Lemma. *Minden véges $M \subseteq M'$ $\boldsymbol{R}$-beli részhalmazra a $V(M)$ $\boldsymbol{Q}$ feletti vektortér altere a $V(M')$ $\boldsymbol{Q}$ feletti vektortérnek. Ezért, ha $f : V(M') \to \boldsymbol{Q}$ $\boldsymbol{Q}$-lineáris függvény, akkor f kiterjeszthető $f' : V(M') \to \boldsymbol{Q}$ $\boldsymbol{Q}$-lineáris függvénnyé úgy, hogy $\forall\ m \in M$-re $f'(m) = f(m)$.*

Bizonyítás:

A lineáris függvényeket megharátozzák egy-egy bázisuk. A $V(M)$ függvénynek minden bázisa kiterjeszthető $V(M')$ bázisává ($M \subseteq M'$), és ezért az f függvény kiterjeszthető f' függvénnyé.□

Dehn-Hadwiger tétel bizonyítása:

Tegyük fel indirekt, hogy P és Q együttesen kiegészíthető $\tilde{P}$ és $\tilde{Q}$ poliéderekké ($\tilde{P} = P \cup P_1 \cup \ldots P_m$ és $\tilde{Q} = Q \cup Q_1 \cup \ldots Q_m$).Ekkor az M halmazt ki lehet bővíteni egy olyan M' véges halmazzá, amely tartalmazza az összes szereplő rész lapszögét is. Az előző lemma alapján f-et ki lehet terjeszteni $f' : V(M') \to \mathbf{Q}$ függvénnyé. Mivel tudjuk, hogy a Dehn invariáns additív, ezért:

$$D_{f'}(\tilde{P}) = D_{f'}(P) + D_{f'}(P_1) + \cdots + D_{f'}(P_m) = D_{f'}(\tilde{Q}) =$$
$$D_{f'}(Q) + D_{f'}(Q_1) + \cdots + D_{f'}(Q_m)$$

Minden i-re P_i és Q_i egybevágó, ezért Dehn invariánsaik megegyeznek, vagyis $\forall i$-re $D_{f'}(P_i) = D_{f'}(Q_i)$. Így $D_f(P) = D_{f'}(P)$ és $D_f(Q) = D_{f'}(Q)$ miatt azt kapjuk, hogy $D_f(P) = D_f(Q)$. Tehát ellentmondáshoz jutottunk.□

4.2. Forgatások nélküli átdarabolás

Korábban már definiáltuk, hogy mit jelent az, hogy két sokszög eltolás-átdarabolható. Most vizsgáljuk meg milyen feltételek mellett darabolható át egymásba két síkidom.

A Dehn-invariáns a síkban:
A P sokszög oldalait feleltessük meg vektoroknak $(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n})$ és rögzítsünk egy tetszőleges $\underline{v_0}$ vektort a síkon.
Az $M_p = \{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq \mathbf{R}$ halmaz elemei a $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}$ vektorok $\underline{v_0}$ vektorral bezárt szögei.
Adott $M \subseteq \mathbf{R}$ M_p-t tartalmazó véges halmaz és jelölje $V(M)$ az M-beli számok összes racionális együtthatós lineáris kombinációjának halmazát.
Legyen $f : V(M) \to \mathbf{Q}$ függvény. A P sokszög f szerinti Dehn invariánsa:

$$D_f(P) := \sum_{\underline{v_i} \in P} l(\underline{v_i}) f(\alpha(\underline{v_i}))$$

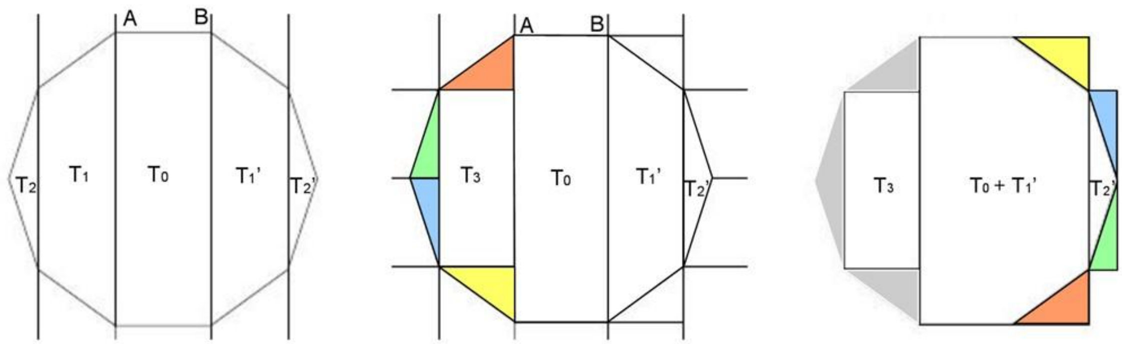
Itt $l(\underline{v_i})$ a $\underline{v_i}$ vektor hossza, $\alpha(\underline{v_i})$ pedig a $\underline{v_i}$ és $\underline{v_0}$ által bezárt szög. A továbbiakban az f fügvényt úgy határozzuk meg, hogy az $f(\alpha(\underline{v_i})) = 1$, ha $\alpha(\underline{v_i}) = 0°$, $f(\alpha(\underline{v_i}) = -1$, ha $\alpha(\underline{v_i}) = 180°$, különben $f(\alpha(\underline{v_i})) = 0$.

4.1. Állítás. *A háromszöget és a négyzetet nem lehet csak eltolásokkal átdarabolni egymásba.*

Bizonyítás: Legyen a háromszög egyik oldala párhuzamos a négyzet egyik oldalával. Úgy válasszuk meg a $\underline{v_0}$ vektort, hogy az is párhuzamos legyen az előbb említett oldalakkal. Ekkor a négyzet Dehn invariánsa 0, míg a háromszög Dehn invariánsa nem lehet 0.$\square$

4.2. Tétel. *(Hadwiger-Glur, 1951)*
Egy P konvex sokszög és egy Q négyzet, amiknek a területeik megegyeznek eltolás-átdarabolhatók akkor és csak akkor ha P középpontosan szimmetrikus.

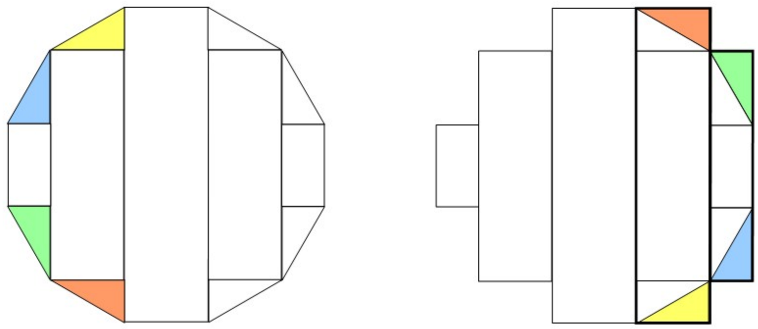
Bizonyítás:
Először nézzük meg a könnyebik irányt, vagyis azt, hogy ha P középpontosan szimmetrikus akkor csupán vágásokkal és eltolásokkal átdarabolható egy P-vel azonos területű négyzetbe.
Vegyünk egy középpontosan szimmetrikus sokszöget. Most egy szabályos tízszögön fogom szemlétetni az átdarabolást (4.1. ábra). Válasszuk ki az egyik oldalát ($\overline{AB}$) és vágjuk fel a síkidomot ezzel az oldallal párhuzamos és merőleges egyenesekkel úgy, hogy ezek az egyenesek átmenjenek a sokszög két-két csúcsán. Első négy vágásunk legyen négy olyan egyenes, amely a kiválasztott oldalra merőleges. Ekkor egy téglalapot (T_0), két egyenlőszárú trapézt (T_1 és T_1') és két egyenlő szárú háromszöget (T_2 és T_2') kapunk. További három olyan vágással, (amellyek párhuzamosak az $\overline{AB}$ oldallal) feldarabolhatjuk a trapézokat egy-egy téglalapra és két-két háromszögre.



4.1. ábra

A szimmetria miatt az ábrán látható módon az egyik trapézból (T_1) levágott két háromszögeket eltoljuk a másik trapézhoz (T_1') úgy, hogy azok kiegészítsék a T_1' trapézt egy téglalappá. A két egyenlőszárú háromszöget feldaraboltuk két-két derékszögű háromszögre, amelyeket szintén eltolással összeilleszthetjük egy téglalapba. A T_1 trapézból "megmaradt" téglalap és a négy háromszögből összeillesztett téglalap egy újabb téglalapot alkot (amit szintén eltolással kapunk). Ekkor átdaraboltuk a szabályos tízszöget két téglalapba. Korábban már beláttuk, hogy bármely téglalapból készíthetünk adott oldalú és ugyanolyan területű téglalapot csak eltolással. Ezért a két téglalapot átdarabolhatjuk egy téglalapba és a kapott téglalapot egy négyzetbe.

Hasonlóan járhatunk el egy szabályos tizenkét szög esetén is, csak ott először egy téglalapot és négy trapézt kapunk. Ezeket a fenti módszer segítségével átdarabolhatjuk téglalapokba, majd ezeket egy négyzetbe.



4.2. ábra

Most nézzük meg a bizonyítás másik irányát. Ha egy n oldalú sokszög és egy négyzet eltolás-átdarabolhatók akkor Dehn invariánsaik megegyeznek. Legyen a megfelelő invariáns a sokszögek egy adott irányba eső (valamelyik körüljárás szerinti) előjeles összege. Ekkor a négyzet és a sokszög Dehn invariánsa is 0 lesz. Világos, hogy a négyzet párhuzamos oldalai ellentétes irányúak lesznek ezért kioltják egymást és összegük 0 lesz.

Azt kellene megvizsgálni, hogy az n sokszög Dehn invariánsa mikor lesz 0. A sokszög oldalait tekintsük pozitív irányításúaknak és minden oldalra tekintsünk úgy, mintha vektor lenne. Ekkor ahhoz, hogy a Dehn invariánsra 0-t kapjunk az n vektor között kell lennie $\frac{n}{2}$ db különböző vektornak és $\frac{n}{2}$ olyan vektornak amellyek ezekkel a vektorokkal párhuzamosak de ellentétes irányításúak. Kezdjük el felrajzolni a sokszöget a következőképpen: Vegyük az egyik vektort és sorban illesszük hozzá a többit. Az előző vektorral a legnagyobb szöget bezáró vektor legyen a következő, így egy középpontosan szimmetrikus (konvex) sokszöget kapunk.$\square$

4.3. Segéd tételek

Az alábbi lemmák a későbbiekben még segítségünkre lesznek a Dehn invariáns számolásában:

4.3. Lemma. *Ha* $\alpha = arccos(1/3)$ *akkor* α/π *irracionális.*

Bizonyítás:

Tegyük fel indirekt, hogy α/π racionális. Ekkor léteznek k, l pozitív egészek, melyekre teljesül, hogy $l\alpha = 2k\pi$. Azt kellene belátni, hogy $cos(l\alpha)$ egy $\frac{A_l}{3^l}$ alakú szám, ahol A_l egy 3-al nem osztható egész szám.

A következő összefüggést felhasználva, teljes indukcióval könnyen igazolható az állítás: $cos(n\alpha) = 2cos((n-1)\alpha)cos\alpha - cos((n-2)\alpha)$.

Tegyük fel, hogy i-nél kisebb egészekre igaz az állítás. Vagyis $cos(l\alpha) = \frac{A_l}{3^l}$ $(\forall l \leq i)$. Vizsgáljuk meg az $i+1$ esetet.

$$cos((i+1)\alpha) = 2cos(i\alpha)cos\alpha - cos((i-1)\alpha)$$

Az indukciós feltevés alapján ez tovább egyenlő:

$$\frac{2A_i}{3^i}cos\alpha - \frac{A_{i-1}}{3^{i-1}} = \frac{2A_i}{3^i}\frac{1}{3} - \frac{A_{i-1}}{3^{i-1}} = \frac{2A_i - 9A_{i-1}}{3^{i+1}}$$

$A_{i+1} = 2A_i - 9A_{i-1}$ egész szám és nem osztható 3-al mert A_i nem osztható 3-al. Valamint $cos(l\alpha) = cos(2k\pi) = 1$, de az $\frac{A_l}{3^l}$ (ahol A_l és l egész és A_l nem osztható 3-al) alakú számok soha nem lesznek egyenlőek 1-el. Tehát ellentmondásra jutottunk, ezzel az állítást beláttuk.$\square$

4.4. Lemma. *Ha* $\alpha = arccos(1/\sqrt{n})$*(* $\forall n \geq 3$*, páratlan egész) akkor* α/π *irracionális.*

Bizonyítás:

Tegyük fel indirekt, hogy $\frac{\alpha}{\pi}$ racionális szám, azaz felírható két egész szám hányadosaként: $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{k}{l}$ ($\forall\, k, l > 0$, egészre). Ekkor $l\alpha = k\pi$. Azt szeretnénk megmutatni, hogy $cos(l\alpha)$ egy $\frac{A_l}{\sqrt{n}^l}$ alakú racionális szám (ahol A_l nem osztható n-el). Ezt teljes indukcióval fogjuk belátni:

Legyen az indukciós feltevésünk a következő: Minden j-nél nem nagyobb egész számra teljesül, hogy $\frac{A_l}{\sqrt{n}^l}$ alakban felírható. Alkalmazhatjuk itt is a korábban már használt összefüggést:

$$cos((m+1)\alpha) = 2cos(m\alpha)cos\alpha - cos((m-1)\alpha)$$

Ekkor $cos((j+1)\alpha) = 2cos(j\alpha)cos\alpha - cos((j-1)\alpha)$,($\forall j \geq 1$) ami az indukciós feltevés szerint egyenlő

$$2\frac{A_j}{\sqrt{n}^j}\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{A_{j-1}}{\sqrt{n}^{j-1}} = 2\frac{A_j}{\sqrt{n}^{j+1}} - \frac{A_{j-1}}{\sqrt{n}^{j-1}} = \frac{2A_j - \sqrt{n}^2 A_{j-1}}{\sqrt{n}^{j+1}}$$

$$cosk\pi = \pm 1 = l\alpha = \frac{2A_j - nA_{j-1}}{\sqrt{n}^{j+1}} = \frac{A_{j+1}}{\sqrt{n}^{j+1}}$$

Ha $n \geq 3$ páratlan és A_j nem osztható n-el, akkor A_{j+1} sem lesz osztható n-el.

Ezek alapján $\sqrt{n}^{j+1} = \pm A_{j+1}$ tehát n osztja $\sqrt{n}^{j+1}$-et és $\sqrt{n}^{j+1}$ osztja A_{j+1}-et ezért n-nek osztania kell A_{j+1}-et, ami viszont ellentmond a feltevésünknek.$\square$

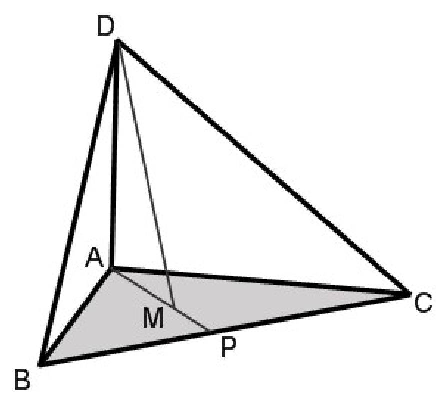
5. A Dehn invariáns alkalmazása

A következőkben néhány példán keresztül megmutatjuk, hogy a tetraédert nem lehet átdarabolni egy (a tetraéderrel azonos térfogatú) kockába.

Első példa

Tekintsük először a szabályos (e élhosszúságú, egység térfogatú , $ABCD$) tetraédert, legyen ez most T_1. Számítsuk ki a lapszögét és nézzük meg milyen értéket kapunk a Dehn invariánsára.

Legyen a tetraéder alapjának a középpontja M és az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasságvonal talppontja P.



5.1. ábra

Ekkor az M pont $1:2$ arányban osztja az $\overline{AP}$ magasságot, úgy hogy a hosszabb szakasz az A csúcsnál van. Mivel ez egy szabályos tetraéder az oldallapjainak magasságai megegyeznek, vagyis $|\overline{AP}| = |\overline{DP}|$. Valamint $3|\overline{MP}| = |\overline{DP}|$, ezek segítségével megkaphatjuk a tetraéder lapszögét (α-t):

$$cos\alpha = \frac{|\overline{MP}|}{|\overline{DP}|} = \frac{1}{3}$$

Korábban láttuk, hogy ha $cos\alpha = \frac{1}{3}$ akkor az α és π hányadosa irracionális szám. Ekkor a $V(M)$ vektortér két dimenziós $\mathbf{Q}$ felett és az $M = \{\alpha, \pi\}$ egy bázisa valamint létezik egy $f : V(M) \to \mathbf{Q}$ $\mathbf{Q}$-lineáris függvény, hogy $f(\pi) := 0$ és $f(\alpha) := 1$.
ezek alapján tetraéder Dehn invariánsa:

$$D_f(T_1) = 6 \cdot e \cdot f(\alpha) = 6e$$

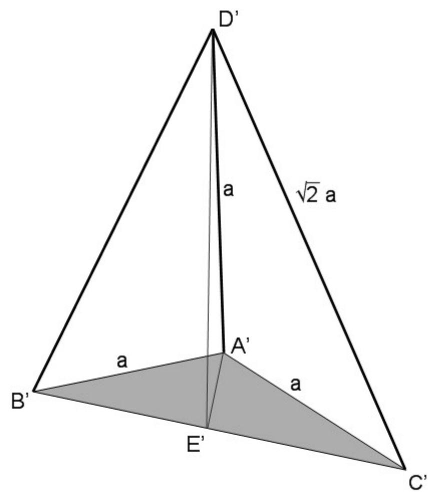
Vizsgáljuk meg mit kapunk a kocka invariánsára: Az egység térfogatú (K) kocka élei 1 hosszúak és minden lapszöge $\frac{\pi}{2}$. Vagyis a Dehn invariánsa:

$$D_f(K) = 12 \cdot e \cdot f(\tfrac{\pi}{2}) = 12 \cdot e \cdot \tfrac{1}{2} \cdot f(\pi) = 0$$

A tetraéder oldalai nem lehetnek 0 hosszúak ezért $D_f(T_1) \neq D_f(K)$. Emiatt a tetraéder nem darabolható át a kockába.

Második példa

Most egy olyan tetraédert vizsgálunk, amelynek egyik csúcsából induló három éle páronként merőleges. Nevezzük ezt az A',B',C',D' csúcsok által kifeszített tetraédert T_2-nek. (5.2. ábra)



5.2. ábra

Mivel $\overline{A'B'}$,$\overline{A'C'}$,$\overline{A'D'}$ merőlegesek, ezért a tetraéder három lapszöge derékszög, a maradék lapszögek pedig megegyeznek. Nevezzük el ezeket α-nak. A tetraéder három merőleges éle: $|\overline{A'B'}| = |\overline{A'C'}| = |\overline{A'D'}| = a$. A további három él pedig $|\overline{B'D'}| = |\overline{B'C'}| = |\overline{C'D'}| = \sqrt{2} \cdot a$. Tekintsük az 5.2. ábrán látható $A'E'D'$ derékszögű háromszöget. Ennek oldalai a,$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a$ és $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot a$ hosszúak. Ekkor az α szög a következő egyenletből kifejezhető.

$$cos\alpha = \frac{|\overline{A'E'}|}{|\overline{D'E'}|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vagyis

$$\alpha = arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$$

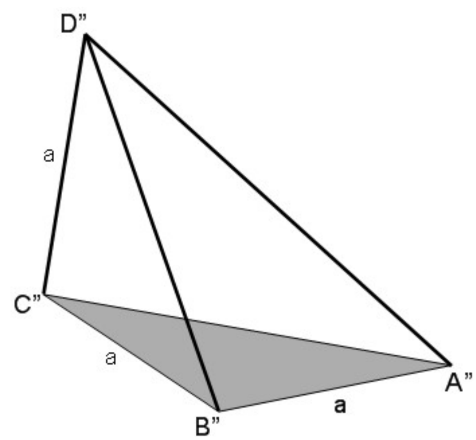
Legyen $M := \{\frac{\pi}{2}, \alpha, \pi\}$. Mivel $\frac{\pi}{2}$ és π lineárisan összefüggő és $\frac{1}{\pi} \cdot \alpha$ irracionális, ezért $V(M)$ 2-dimenziós vektortér $\mathbf{Q}$ felett. Az f $\mathbf{Q}$ lineáris függvényt alakítsuk a következők szerint. Legyen $f(\pi) := 0$ és $f(\alpha) := 1$. Mivel f lineáris függvény, $f(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{2} \cdot f(\pi) = 0$. Így a T_2 tetraéder Dehn invariánsa a következő:

$$D_f(T_2) = 3 \cdot a \cdot f(\tfrac{\pi}{2}) + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot f(\alpha) = 3 \cdot a \cdot 0 + 3\sqrt{2} \cdot a = 3\sqrt{2}a \neq 0$$

Tehát a T_2 tetraédert nem lehet átdarabolni egy vele azonos térfogatú kockába.

Harmadik példa

Tekintsük a következő T_3 tetraédert, amelynek csúcsai A'',B'',C'' és D''. Legyen ez a tetraéder olyan, hogy az $\overline{A''B''}, \overline{B''C''}, \overline{C''D''}$ oldalak egymáshoz csatlakoznak, páronként merőlegesek és mind a három oldal hossza a.



5.3. ábra

Vegyük észre, hogy egy a élhosszúságú K' kocka feldarabolható hat ilyen tetraéderre. Ezek közül három egybevágó a további három pedig ezek tükörképe. Ekkor a Dehn invariánst kiszámíthatjuk az alábbiak szerint:

$$D_f(T_3) = \frac{1}{6} \cdot D_f(K') = 0$$

Ha összehasonlítjuk ezt a tetraédert az előző példában vizsgált tetraéderrel, akkor észrevehetjük, hogy mindkettőnek ugyanakkora területű ($\frac{a^2}{2}$) az alapja és mindkettőnek a a magassága. Viszont $D_f(T_2) \neq D_f(T_3)$. Így a Dehn-Hadwiger tétel alapján a két tetraédert nem lehet átdarabolni egymásba.

6. Determináns mint térfogat

Az analízisben az integrálszámítás nyújt nekünk segítséget a térfogatszámítás ban. Most megnézzük a térfogat lineáris algebrai definicióját.

A determináns fogalma olyan algebrai segédeszköz, amellyel többek között jellemezhető egy négyzetes mátrix invertálhatósága, rangja, valamint eldönthető vele egy lineáris egyenletrendszer megoldhatósága. Geometriai jelentése az előjeles terület, illetve térfogat. A determináns és a térfogat tulajdonságait vizsgálva szeretnénk megmutatni, hogy milyen kapcsolat van e két fogalom között.
Jelen esetben a valós test feletti vektortereket vizsgájunk, de a következő gondolatmenet bármilyen test feletti vektortéren értelmezhető.

A síkon bármely két különböző (nem párhuzamos és nem nulla) vektor origóba történő eltoltja egy paralelogrammát, a térben bármely három különböző (nem párhuzamos és nem nulla) vektor egy paralelogramma alapú hasábot feszít ki. Általánosan a valós számtest feletti n-dimenziós vektortérben bármely n db vektor egy paralelepipedont határoz meg. A paralelepipedon élei a megadott vektorok, illetve ezek eltoltjai, míg a csúcsai a vektorokból képzett összegek. A síkon (n=2) a csúcsok: $0, v_1, v_2, v_1+v_2$, a térben (n=3) a csúcsok: $0, v_1, v_2, v_3, v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3, v_1+v_2+v_3$.
Általánosan n dimenzióban 2^n csúcsa van a paralelepipedonnak.
Nézzük meg, hogy milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie a térfogatnak. Egy olyan lineáris leképezést vizsgálunk amely minden paralelepipedonhoz egy valós számot rendel, vagyis $D : V^n \to \mathbf{R}$. Továbbá teljesülnie kell a

következő feltételeknek:

- Az egységkocka térfogata legyen 1.
- Ha egy paralelepipedont valamelyik élét λ-szorosára nyújtjuk, akkor a paralelepipedon térfogata is λ-szorosára változik.
- Ha valamelyik élét két vektor összegére bontjuk, akkor az így keletkezett két paralelepipedon térfogatainak összege legyen egyenlő a kiinduló test térfogatával.
- A paralelepipedon térfogata legyen 0, ha élei egy m dimenziós alteret generálnak ($m < n$), vagyis azok a vektorok, amelyek kifeszítik a paralelepipedont lineárisan összefüggők.

Ahhoz, hogy az egységkocka térfogata 1 legyen, rögzítsünk egy bázist V^n-ben.
Legyen ez $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Valamint teljesüljön, hogy $D(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$. Látható, hogy ezekkel a feltételekkel megkapjuk a determináns alapvető tulajdonságait:

- az egységmátrix determinánsa 1,
- a skalárszorzó kiemelhető, vagyis

$$det(\lambda v_1, v_2, \ldots, v_n) = \lambda \cdot det(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

- a determináns oszlopvektoraiban (sorvektoraiban) additív, azaz

$$det(v_1 + v_1', v_2, \ldots, v_n) = det(v_1, v_2, \ldots, v_n) + det(v_1' + v_2, \ldots, v_n)$$

- ha a determinánsnak van két oszlopa (vagy sora) amelyek lineárisan összefüggők, akkor a determináns 0.

6.1. Tétel. *Legyen V egy n-dimenziós vektortér* $\boldsymbol{R}$ *felett és* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *egy rögzített bázis V-ben. Ekkor pontosan egy olyan* $D : V^n \to \boldsymbol{R}$ *függvény létezik, amely*

(i) mindegyik változójában lineáris;

(ii) lineárisan összefüggő vektorokhoz 0-t rendel;

(iii) $D(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1.$

Ha az a_i *vektoroknak az* $e_1, \ldots, en$ *bázis szerinti koordinátáját* α_{ij}*-vel jelöljük, akkor*

$$\mathbf{D}(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}) = det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

vagyis $D(a_1, \ldots, a_n)$ *éppen az* a_j *oszlopvektorokból álló mátrix determinánsa.*

Bizonyítás:

Először felteszük, hogy a $D : V^n \to \mathbf{R}$ függvényre teljesülnek az (i),(ii),(iii) tulajdonságok, majd ezeket felhasználva belátjuk, hogy pontosan egy ilyen függvény létezik. Végül megmutatjuk, hogy a determináns valóban rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal.

Tegyük fel, hogy D-re teljesül (i)-(iii).

Vizsgáljuk meg a (ii) tulajdonságot. Ha a $a_1, \ldots, a_n$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor létezik $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, amelyek nem mind 0-k, és $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$. Ennek egy speciális esete, ha $a_1 = a_2$, akkor $1a_1 + (-1)a_2 + 0a_3 + \dots + 0a_n = 0$, tehát

(iv) ha az a_i vektorok között van két azonos, akkor $D(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Ezek alapján nézzük meg mi történik a következő vektor n-essel,
$(a_1 + a_2, a_1 + a_2, a_3, \dots, a_n)$.
$D(a_1 + a_2, a_1 + a_2, a_3, \dots, a_n) = D(a_1, a_1, a_3, \dots, a_n) + D(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + D(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n) + D(a_2, a_2, a_3, \dots, a_n)$.

Ez teljesül, mert D minden változójában lineáris. A (ii) tulajdonság alapján, pedig

$$D(a_1, a_1, a_3, \dots, a_n) = D(a_2, a_2, a_3, \dots, a_n) = 0.$$

Tehát, $$D(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + D(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n) = 0,$$

és $$D(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = -D(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n).$$

Így eljutottunk a következő tulajdonsághoz, (feltételhez).
(v) ha két vektort felcserélünk, akkor D az ellentetjére vátozik.

Most megmutatjuk, hogy legfeljebb egy ilyen D függvény létezik.
Legyen az a_i vektorok, az e_j bázissal vett lineáris kombinációja $a_i = \sum_{j=1}{}^{n} a_{ij} e_j$.
Mivel D minden változójában lineáris, felírhatjuk n^n db tag összegeként. Az egyes tagok a következőképpen néznek ki:

$$\alpha_{\sigma_1 1} \alpha_{\sigma_2} \dots \alpha_{\sigma_n n} D(e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \dots e_{\sigma_n})$$

A (iii),(iv) és (v) feltételekből következik, hogy $D(e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \dots e_{\sigma_n})$ egyértelműen meghatározott. Ugyanis,

- ha $\sigma_k = \sigma_l$ ($\forall\, k \neq l) \Rightarrow D(e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \dots e_{\sigma_k}, \dots e_{\sigma_l}, \dots, e_{\sigma_n}) = 0$,

- ha $\sigma_k < \sigma_l$ ($\forall\, k \neq l) \Rightarrow D(e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \dots e_{\sigma_k}, \dots e_{\sigma_l}, \dots, e_{\sigma_n}) = 1$,

- ha $\sigma_k < \sigma_l$ $(\forall\, k \neq l) \Rightarrow D(e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \dots e_{\sigma_l}, \dots e_{\sigma_k}, \dots, e_{\sigma_n}) = -1$

Más szóval, ha a bázisvektorok között szerepel két azonos vektor, akkor $D(e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \dots, e_{\sigma_n}) = 0$.

Ha minden e_{σ_k} különböző, akkor $D((e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \dots, e_{\sigma_n} = \pm 1)$. Ekkor az $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ számok az $1, \dots, n$ számok egy permutációja. A (iii) és (v) fetételből következik, hogy D előjele csak attól függ, hogy az $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ permutáció páros vagy páratlan. (Ugyanannyi páros és páratlan permutáció szerepel). Így,

$$D(a_1, \dots, a_n) = \textstyle\sum_\sigma (-1)^{I(\sigma)} \alpha_{\sigma_1 1} \alpha_{\sigma_2 2} \dots \alpha_{\sigma_n n},$$

Ahol $I(\sigma)$ a $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ permutáció inverzió száma és $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ az $1, \dots, n$ számok összes lehetséges permutációja. Ez pontosan az α_{ij} számokból képzett mátrix determeninánsának az értéke.

Megmutattuk, hogy legfeljebb egy ilyen D függvény létezik valamint, hogy a determináns megfelelhet a kívánt feltételeknek. Ahhoz, hogy D függyvény valóban a determináns legyen, meg kell mutatni, hogy a determinánsra is teljesülnek az (i),(ii),(iii) feltételek. Amik pedig következnek a determináns tulajdonságaiból. Mégpedig:

- A determináns minden változójában lineáris, ugyanis
  $det(\lambda(a_1 + a_1'), a_2, \dots, a_n) = \lambda det(a_1, a_2, \dots, a_n) + \lambda det(a_1', a_2, \dots, a_n)$

- Ha a determinánsban két oszlop (vagy sor) egyenlő, akkor a determináns értéke 0.
- Az egységmátrix determinánsa 1.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Szabó Csabának, aki mindig időt szakított megbeszéléseinkre és hasznos tanácsaival segítette a munkámat. Ezúton szeretném még megköszönni Besenyei Ádámnak a matematikatörténeti háttér felkutatásában nyújtott segítségét.

Hivatkozások

[1] *M*artin Aigner-Günter M.Ziegler: Bizonyítások a Könyvből

[2] *F*reud Róbert: Lineáris algebra

[3] *L*aszlo Babai- Peter Frankl: Linear Algebra Methods in Combinatorics. With Applications to Geometry and Computer Science

[4] *S*ain Márton: Matematikatörténeti ABC

[5] *D*avis-Hersh: A matematika élménye

[6] *W*eszely Tibor: Bolyai János

[7] *C*h. A. Scott, The International Congress of Mathematicians in Paris, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 7, Number 2 (1900), 57-79.