Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Komplex számok

BSc szakdolgozat

Készítette:

Tóth András

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Fialowski Alice

egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest

2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatommal a legtöbb tudományágban fontos szerepet betöltő komplex számokról szeretnék átfogó tudást nyújtani az Olvasó számára. Sajnos a középiskolákban a feszített tanterv miatt nincs lehetőség alap óraszámban tanítani ezeket, csupán önszorgalomból, vagy fakultáción találkozhat vele a diák, míg az egyetemeken és a főiskolákon általában csak az alapokkal ismertetik meg a hallgatókat.

Szakdolgozatomat egy rövid történeti áttekintéssel kezdem arról, hogy kik voltak az első matematikusok, akik foglalkoztak a komplex számokkal, miért foglalkoztak velük, milyen eredményekre jutottak, és hogyan váltak ezek a lehetetlen számok egyre elfogadottabbá a későbbi matematikusok körében. Ezek után sorra vesszük a komplex számok különböző ábrázolási módjait, majd egyenként megnézzük mindegyiknek a tulajdonságait, és az ábrázolási mód előnyeit. Kicsit belekóstolunk a csoportelméletbe is, majd behatóbban foglalkozunk az egyik legfontosabb alakjukkal, a polárkoordinátás ábrázolási móddal. Ennek kapcsán bevezetjük a gyökvonást a komplex számok körében, majd definiáljuk az n-edik primitív egységgyök fogalmát, és kitérünk a körosztási polinomokra is. Végül szakdolgozatom zárásaképpen a komplex számok alkalmazásairól is ejtek néhány szót.

Itt szeretném megragadni az alkalmat, és szeretnék köszönetet mondani, elsősorban témavezetőmnek Fialowski Alicenak, aki idejét nem sajnálva, segített megtalálni a témához kapcsolódó, megfelelő színvonalú, külföldi és magyar szakirodalmat. Rengeteg segítséget és hasznos tanácsot kaptam a szakdolgozatom szerkezetével kapcsolatban, illetve a nyelvtani hibák kijavításában is nagy segítségemre volt. Szeretnék még köszönetet mondani hallgatótársaimnak, akik több alkalommal segítettek megtalálni a helyes utat a LaTeX útvesztőiben.

1. fejezet

Történeti áttekintés

1.1. Röviden a kialakulásról

Az $x^2 + 1 = 0$ másodfokú egyenletnek nincs megoldása a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött, hiszen minden $r^2 + 1$ kifejezés, ahol $r \in \mathbb{R}$, pozitív lesz. Az alábbi felismeréssel, hogy az adott probléma nem oldható meg eddigi ismereteinket felhasználva, új korszakot indított el a matematika történetében. Az egyenlet megoldásához az $\mathbb{R}$ valós számok kiterjesztésére volt szükség, melynek eredménye a $\mathbb{C}$ komplex számok teste lett.

A komplex számok elméletének kialakulása a matematikában egy nagyon hosszú folyamat eredménye, hiszen már a reneszánsz korában megjelentek ezek az új számok, melyeket "lehetetlen mennyiségek"-nek *(quantitates impossibiles)* neveztek, tehát, akárcsak korábban a negatív számokat, ezeket is kétkedve fogadták. Mindezek ellenére elkezdték használni a komplex számokat, igaz, csak óvatosan, és nem is igazán fogadták el őket, egészen a XVIII. század végéig, amíg nem definiálták a képzetes egységet. Az $i = \sqrt{-1}$ szám, aminek a négyzete $i^2 = -1$, negatív volta miatt elképzelhetetlennek tűnt. Annak ellenére, hogy a legtöbb matematikus nem tudta elképzelni ezeket a számokat, elég magabiztosan használták őket a számolásaik során. A komplex számok alkalmazhatósága minden várakozást felülmúlt. Azok a megtámadhatatlan eredmények, amiket a használatukkal elértek, és az olyan fontos tételek, mint az *Algebra alaptétele*, segítették e számok teljes megismerését, reprezentációjuk pedig mindenki számára lehetővé tette az elképzelésüket, majd szép lassan az elfogadásukat is.

1.2. Cardano, az első úttörő

1.1. ábra. GIROLAMO CARDANO

Girolamo Cardano (1501–1576). Másodfokú és harmadfokú egyenletekkel foglalkozott, és azok megoldásával, illetve megoldóképletével. Ő volt az első, aki gyökjel alá negatív számot írt, amit *"formális szám"*-nak nevezett el. A problémát a következő jelenség okozta. Tudjuk, hogy az $x^2 + b = ax$ másodfokú egyenletnek a megoldóképlet szerint az $x_1 = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ és $x_2 = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ gyökök a megoldásai. Tehát ha $a^2 < 4b$, akkor nincs valós gyöke a másodfokú egyenletnek, azaz lehetetlen megoldani. Ezzel szemben az $x^3 = px + q$ harmadfokú egyenletnek mindig van valós gyöke. A megoldást az $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{d}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{d}}$ képlet adja, ahol $d := (\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3$, tehát abban az esetben lehet probléma, ha $(\frac{p}{3})^3 > (\frac{q}{2})^2$ fennáll. Cardano a következők miatt jutott ellentmondásra. Az $x^3 = 20x + 25$ és az $x^3 = 30x + 36$ egyenletek esetében a gyökjel alá negatív szám került, de ő a következő képlet segítségével mindkét egyenlethez talált megoldást: $x^3 = (x^2 - x)x + x^2$, miszerint $x = 5$ és $x = 6$ az egyenletek megoldásai lesznek, tehát ezt a harmadfokú egyenletet mégsem lehetetlen megoldani.

1.3. Bombelli már tanította is

1.2. ábra. RAFAEL BOMBELLI

Rafael Bombelli (1526–1572). Anélkül, hogy sokat tudott volna a komplex számok természetéről, nyolc alapvető számítási szabályt fektetett le. Többek között (mai jelölésekkel) a $(-i)(-i) = -1$ is ezek között volt. Emellett Bombelli képes volt pontos és helyes számításokat végezni a komplex számok körében. Például tudta, hogy $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$, azaz $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}$. Az $x^3 = 15x + 4$ egyenlet megoldása Cardano képletével: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, és a nyilvánvaló x=4 megoldást ezen számításai segítségével kapta meg. Ugyanis az egyenletet tovább alakítva azt kapjuk, hogy $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$, tehát a komplex számok segítségével kapta meg az egyenlet valós megoldását. Ő volt az első, aki tanította is a komplex számok helyes számítási szabályait.

1.4. Descartes, Newton és Leibniz

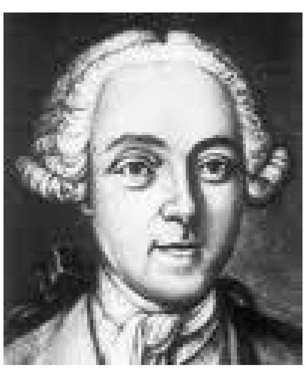
1.3. ábra. René Descartes

René Descartes (1596–1650) a "La géométrie" könyvében kimondta az antitézist a valós és a képzetes egység között. Ő helyesen úgy gondolta, hogy minden egyenletnek annyi gyöke van, ahányad fokú az adott egyenlet, de ez nem mindig egyezik meg a valós gyökök számával. Egyébként Descartes nagyságát mutatja, hogy őszintén beismerte, nem képes elképzelni a képzetes egységet.

Isaac Newton (1642–1727) szintén a komplex gyökökkel foglalkozott, és az ő ténykedésének köszönhetően jelentek meg ezek a számok a fizikában is. Úgy gondolta, hogy a komplex gyökök egy egyenlet megoldhatatlanságára utalhatnak. Ő a következőket mondta: *"But is is just that the Roots of Equations should be impossible, lest they should exhibit the cases of Problems that are impossible as they were possible."*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) egy Huygensnek írt levelében közöl egy, akkor már annyira nem is meglepő összefüggést, miszerint: $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$. Illetve ő volt az, aki rávilágított arra, hogy a $\log(-1)$ is komplex szám. 1702-ben a lipcsei Acta Eruditorum nevű folyóiratban megjelent cikkben a komplex gyököket egyfajta hermafroditának nevezi, ami valósból és nem valósból áll.

1.5. Euler, az ösztönös zseni



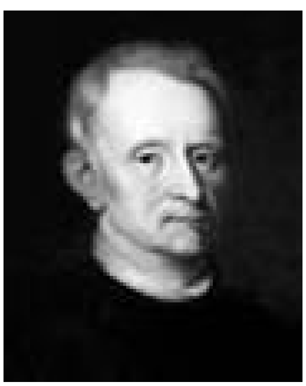
1.4. ábra. Leonhard Euler

Leonhard Eulernek (1707–1783), a nagyszerű svájci matematikusnak nem jelentett problémát komplex számokat használni a számolásai során, egyszerűen ösztönösen helyesen és mesteri módon használta őket. Ő már ismerte a következő összefüggést is, miszerint: $i \log i = -\frac{1}{2}\pi$, azaz ami ezzel ekvivalens: $i^i = e^{-\frac{1}{2}\pi}$, bár az is igaz, hogy ezen eredményeire még nem tudott precíz bizonyítást adni. Híres könyvében,*"Introductio in Analysin infinitorum"* teljesen hirtelen és igazi motiváció nélkül jelentek meg a komplex számok, ennek ellenére fontos szerepet játszott az *"Euler-formula"* kialakulásában is, ami a következőt állítja:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \text{ és } \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

Eulernek több könyve jelent meg, amelyekben igazi nehézséget jelentett neki a komplex számok megmagyarázása, definiálása, ennek ellenére mégis mesterien bánt velük. Többek között megmutatta, hogy egy negatív szám négyzetgyöke nem lehet nagyobb nullánál, sem kisebb, de még egyenlő sem. A következőket mondta erről az eredményéről: *"emiatt teljesen nyilvánvaló, hogy a negatív számok négyzetgyökével nem számolhatunk a valós számok körében: tehát azt kell mondanunk, hogy ezek a számok nem valósak."* Ezek a körülmények vezettek minket az új számfogalomhoz, az *elképzelt* vagy *képzeletbeli* számokhoz, hiszen ezek csak a képzeletünkben léteznek.
Mivel Euler csak ösztönösen használta a komplex számokat, vétett néhány hibát is velük kapcsolatban. Például bizonyította a $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ szabály alapján, hogy $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = \sqrt{1}\sqrt{4} = 2$.

1.6. Wallis, Wessel és Argand, az első reprezentálók



1.5. ábra. JEAN R. ARGAND

John Wallis (1616–1703) angol matematikus volt, akinek már volt egy határozatlan elképzelése, miszerint a komplex számokat a sík pontjaiként lehetne reprezentálni, de ez az elképzelése elég kusza volt, éppen ezért nem gyakorolt nagy hatást a kortársaira.

Caspar Wessel (1745–1818) norvég földmérő és amatőr matematikus volt az első, aki felfedezte a komplex számsíkot, viszont szerencsétlenségére ezt csupán anyanyelvén publikálta, így ezt csak 100 évvel később vették észre, és a dicsőséget nem ő aratta le. Az ő reprezentációjában koordináta rendszerben ábrázolta a komplex számokat, a függőleges tengelyt komplex tengelynek nevezte el és az egység a $\sqrt{-1}$ volt, míg az erre merőleges vízszintes tengely maradt a valós tengely. Tehát a komplex számokat, mint vektorokat ábrázolta, és bevezette rájuk a szokásos vektorműveleteket, de tekintélyes felfedezése észrevétlen maradt.

Jean Robert Argand (1768–1822) svájci könyvelő, szintén amatőr matematikus, Wesselhez hasonló geometriai bevezetését adta meg a komplex számoknak. Ő a $\sqrt{-1}$-et úgy fogta fel, mint egy 90°-os forgatás az óramutató járásával ellentétes irányban. Argand munkája sem volt nagy hatással kortársaira, annak ellenére, hogy a későbbi irodalmak gyakran utalnak a munkájára, Argand diagram néven.

1.7. Gauss

1.6. ábra. CARL F. GAUSS

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) hatása volt az első, ami megváltoztatta a komplex számokról alkotott nézeteket. Bebizonyította az algebra alaptételét, majd később Besselnek írt levelében a következőket mondta: *"a végtelen síkban tudjuk elképzelni a komplex számokat, ahol az ordináta legyen 'a', az abcissza 'b' és így a valós számpárok segítségével reprezentáljuk az összes $a + bi$ alakú komplex számot"*.
Ő volt az, aki szembefordult a kortársaival és a kétkedőkkel, és az ezidáig ismeretlennek és idegennek tartott komplex számokat úgymond teljes jogokkal ruházta fel, azaz a valós számok szintjére emelte őket.

1.8. Cauchy új elképzelése

1.7. ábra. AUGSUTIN-LOUIS CAUCHY

Augsutin-Louis Cauchy (1789–1857) nem volt teljesen megelégedve a Gauss-féle reprezentációval. Úgy gondolta, hogy az $a + b\sqrt{-1}$ kifejezés csupán szimbolikus, és elégedetlen volt az i szimbólum bevezetésével is. Ő teljesen másképp vezette be a komplex számokat, úgy értelmezte a velük történő számolásokat, mintha valós polinomokkal számolnánk modulo X^2+1. Azaz, a mai tudásunkkal a $\mathbb{C}$ komplex számok testét a következő $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ faktorgyűrűvel adta meg. Cauchy a ma már jól ismert Kronecker-tétel speciális esetét használta fel, miszerint minden $\mathbb{K}$ test és minden irreducibilis $f \in \mathbb{K}[X]$ polinomhoz létezik egy L faktorgyűrű, ahol $L = \mathbb{K}[X]/(f)$, ami egy véges kiterjesztése a $\mathbb{K}$ testnek, és amiben f főideál.

1.9. Hamilton és a rendezés

1.8. ábra. SIR WILLIAM R. HAMILTON

Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) szerint hasznos a komplex számok geometriai bevezetése, de így nehéz velük számolni, ezért ő úgy gondolta, ne csak valós számpárok, hanem rendezett valós számpárokként tekintsük őket. Úgy vezette be ezeket, hogy a jól ismert számítási tulajdonságok, mint a disztributivitás, asszociativitás és kommutativitás igazak legyenek rájuk. Gauss azt írta levelében Bolyai Farkasnak, hogy a rendezett valós számpárokkal való új bevezetés sokkal érthetőbb.

1.10. Az utolsó évszázadok

A komplex számok az elmúlt évszázadokban a matematika minden egyes területén megjelentek. Több nagyszerű matematikus is foglalkozott velük, mint például Riemann vagy Dedekind. Nem kellett sokat várni, és a többi tudományágban, többek között a fizikában is használni kezdték a komplex számokat. Fresnel volt az első, aki több tételében is alkalmazta őket. Manapság a fizikusok úgy gondolják, hogy nem beszélhetünk komplex értékű fizikai objektumokról. A villamosmérnökök is használják a komplex számokat, de az i szimbólum helyett ők a j-t vezették be, mert az i már foglalt volt, ugyanis az intenzitást jelölték ezzel. És egy kevésbé ismert, ugyanakkor roppant érdekes tény, hogy az első számítógép szorzásokat és osztásokat végzett el komplex számok körében.

Az elmúlt néhány évszázadban biztos helye lett a komplex számoknak a tudományokban, mindenféle ellentmondás nélkül használják őket a számolásokban.

2. fejezet

A komplex számok reprezentációja

2.1. Halmazelméleti modell

Mindazok, akik már foglalkoztak matematikával, tisztában vannak azzal a ténnyel, hogy a tökéletes tudás elsajátításához, az adott témakört meg kell érteni. A komplex számokkal is ez volt a helyzet, sokan foglalkoztak velük, de kezdetben csak ösztönösen használták őket, hiszen a legtöbb híres matematikusnak nehezére esett e számok elképzelése, egészen *Hamiltonig*, akinek először sikerült ezeket a számokat reprezentálnia.

Definiáljuk a komplex számokat rendezett valós számpárokként, azaz ha $z \in \mathbb{C}$, akkor $z := (x, y)$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Értelmezzük rajtuk az összeadást a következő módon:

(1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,

és vezessünk be a szorzást az alábbiak szerint:

(2) $(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$.

Ez első ránézésre elég mesterkéltnek tűnhet, de így kell definiálnunk a szorzást, ha azt akarjuk, hogy a kommutativitás, az asszociativitás és a disztributivitás szabályai érvényben maradjanak a komplex számokra is. Jelöljük az egységelemet e-vel és $e := (1{,}0)$ értelemszerűen. Kiszámolhatjuk egy $z = (x, y) \neq 0$ komplex szám inverzét is, amit z^{-1}-gyel jelölünk, és amire teljesül, hogy $zz^{-1} = e$:

$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

Tehát $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fölött megadtuk a komplex számokat, azaz mint rendezett valós számpárokat, amelyekre teljesülnek az (1)-es és (2)-es szabályok, $\exists$ egységelem és $\exists$ inverz. Ezt a komplex számok testének nevezzük, amit $\mathbb{C}$-vel jelölünk.

Vegyük észre, ha a valós számpár második tagja 0, és ha két ilyen számot adunk, illetve szorzunk össze, akkor a valós számokon értelmezett összeadást, illetve szorzást fogjuk megkapni, azaz $(x_1,0) + (x_2,0) = (x_1 + x_2,0)$ és $(x_1,0)(x_2,0) = (x_1x_2,0)$. Ez annyit jelent, hogy minden valós számhoz rendelhetünk egy komplex számot a következőképpen. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor rendeljük hozzá az $x \mapsto (x,0)$ számpárt. Tehát a $\mathbb{C}$ komplex számok az $\mathbb{R}$ valós számok testének egy testbővítése, ahol az egységelem $e = (1,0) = 1$.

Nézzük meg, mi motivált minket a (2)-es szabályban látott szorzás ilyen bevezetésére. $\mathbb{R}^2$-ben a természetes bázis az $(1,0)$ és a $(0,1)$ vektorokból áll. Az első az egységelem, a másodikra pedig rendelkezni kell azzal a tulajdonsággal, hogy a négyzete az egységelem minusz egyszerese, azaz $(0,1)^2 = -(1,0)$. Ugyanis ha ezt a szabályt tudja, akkor igaz a következő összefüggés:

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1)(x_2, y_2) &= [x_1(1,0) + y_1(0,1)][x_2(1,0) + y_2(0,1)] \\
&= x_1x_2(1,0) + (x_1y_2 + y_1x_2)(0,1) + y_1y_2(0,1)^2 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2)(1,0) + (x_1y_2 + y_1x_2)(0,1) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).
\end{aligned}$$

Éppen ezt akartuk megkapni. Tehát ezért vezettük be így a szorzást a valós számpárokon értelmezett komplex számokon.

2.1.1. A képzetes egység

Korszakalkotó ötlet volt a komplex számokat, valós számpárokként elképzelni. Ez elősegítette a megismerésüket, kialakultak a számolási szabályok, de ezeket a kifejezéseket, leírni nem a legbarátságosabb, így valami egyszerűsítésre volt szükség.

A képzetes egység, azaz az i jelölést hagyományosan Euler óta használjuk, bár igazán elterjedtté csak Gauss idejében vált.

$$i := (0,1) \in \mathbb{C}.$$

Az i képzetes egységre teljesül: $i^2 = -1$. Ez a jelölés a következő módon egyszerűsítette a komplex számok felírását. Minden $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ számra $(x, y) = (x,0) + (0,1)(y,0)$, ami az új jelöléssel egyszerűen:

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

A komplex szám általánosan két - egy valós és egy képzetes - részből áll. A $z = x + iy$ komplex szám valós része Re$z = x$ és képzetes része Im$z = y$. Két komplex szám, z_1 és z_2, akkor és csak akkor egyenlő, ha valós és képzetes részük is egyenlő:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re} z_1 = \mathrm{Re} z_2 \quad \text{és} \quad \mathrm{Im} z_1 = \mathrm{Im} z_2.$$

Egy $z \in \mathbb{C}$ komplex szám valós, ha Im$z = 0$, és tisztán képzetes, ha Re$z = 0$, azaz $z = iy$ alakú.

2.2. Geometriai modell

Nagyszerű ötlet volt a komplex számoknak számpárokként való ábrázolása, hiszen ez sokat segített a matematika fejlődésében és a komplex számok megismerésében, de elképzelni még mindig nem tudtuk ezeket a számokat, pedig ha valamit képesek vagyunk vizualizálni, az megkönnyíti az elfogadásukat, és a megértésüket is.

Wesselnek, Argandnak és Gaussnak köszönhetően nekünk már nem jelent problémát elképzelni a komplex számokat. Ők azt mondták, gondoljunk ezekre, úgy mint a sík pontjaira egy derékszögű koordináta rendszerben. Az összeadás legyen a szokásos vektor összeadás a paralelogramma szabállyal. A szorzásnál pedig használjuk az eddig elért eredményeket, azaz:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

A későbbiekben szó lesz a komplex számok polárkoordinátás bevezetéséről, ami a geometriai modellre támaszkodik, pontosabban ebből alakult ki.

2.3. Rendezés

Az $\mathbb{R}$ valós számok teste rendezett, hiszen definiálva van rajta egy rendezési reláció. Ezzel szemben a $\mathbb{C}$ komplex számok teste nem rendezett, hiszen nem tudunk definiálni egy ">0" relációt, azaz nem tudjuk egy komplex számról megállapítani, hogy az pozitív-e. Emiatt meg kell elégednünk a következő két szabállyal:

2.1. Állítás. *1. Minden $z \in \mathbb{C}$ komplex számra pontosan egy reláció teljesül az alábbiak közül: $z > 0$, $z = 0$, $-z > 0$.*

2. Ha $w > 0$ és $z > 0$, akkor $w + z > 0$ és $wz > 0$ egyaránt teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik egy rendezési reláció a komplex számokon. Ekkor a valós eset szerint fennáll $z^2 > 0$ minden z nem nullára. De akkor $1^2 > 0$ és $i^2 > 0$ teljesülne, azaz $0 = i^2 + 1^2 > 0$ ellentmondásra jutunk. □

Tehát nem tudunk a komplex számok körében olyan rendezési relációt definiálni, mely "kompatibilis" az összeadás és a szorzás műveletekkel, így nem alkotnak rendezett testet, bár egyéb módon, például lexikografikusan rendezhetőek, de ez nem kompatibilis a hagyományos $+$ és $\cdot$ műveletekkel.

A rendezés hiánya okozta a legtöbb problémát és a legtöbb nehézséget a korabeli matematikusoknak a számolásaik során, és emiatt jutottak gyakran ellentmondásokra, illetve rossz eredményekre.

2.4. Algebrai modell

Cauchy, aki nem volt teljesen megelégedve Gauss ötleteivel, a komplex számoknak új modelljét adta meg. Az ő elképzelése szerint $\mathbb{C} := \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$, azaz a valós együtthatós polinomok x^2+1 polinommal történő osztásának maradékai. Pontosabban az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrű (x^2+1) szerinti maradékosztályai.

Ennek a modellnek előnye, hogy a szorzást és az összeadást egyszerűen a hagyományos polinom szorzással és összeadással definiáljuk. Az egységelem az $1 :=$ azonosan 1 polinom.

Az eddig tárgyalt három modellnek közös tulajdonsága, hogy mindegyik a valós számtest feletti kétdimenziós vektortér, melyen egy szorzás is értelmezve van, ami az összeadással együtt testet alkot. Az ilyen algebrai struktúrát a valós számok testbővítésének nevezzük.

2.5. 2×2-es valós elemű mátrixokkal való reprezentáció

Reprezentálhatjuk a komplex számokat valós elemű 2×2-es mátrixokkal a következő módon. Először is legyen:

$$T_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto cz = ax - by + i(bx + ay).$$

T_c lineáris leképezés, $c = a + bi$, tehát $T_c(z) = cz$ lesz. Tekintsünk egy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ komplex számra úgy, mint egy kétdimenziós oszlopvektorra, azaz $z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ekkor:

$$T_c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Tehát a T_c lineáris leképezést egyértelműen meghatározza a $c = a + ib$, ugyanis ez a leképezés mátrixszorzásként fogható fel, amely mátrixot a c egyértelműen meghatározza. Azaz:

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad c = a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Tehát az F leképezés egyértelmű megfeleltetés a komplex számok és az olyan 2×2 valós elemű mátrixok között, ahol az átlóban ugyanaz a szám, míg a mellékátlóban az egyik helyen egy tetszőleges valós szám, míg a másik helyen ennek az ellentettje áll.

Vezessük be a $\mathcal{C} := \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$ jelölést.

3. fejezet

Algebrai tulajdonságok

3.1. Algebrai alak

Bárhogy definiáljuk a $\mathbb{C}$ komplex számok halmazát, mindig megtaláljuk benne a multiplikatív egységelemet, az 1-et, és a képzetes egységet, az i-t. Ezek ketten bázist alkotnak a $\mathbb{C}$ komplex számok kétdimenziós terében, tehát minden $z \in \mathbb{C}$ komplex szám előáll a következő alakban: $z = a \cdot 1 + b \cdot i$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Ehelyett azonban egyszerűbb a következő jelölésre áttérni: $z = a + bi$. Mivel a és b egyértelműen meghatározottak, ezeknek nevet is adhatunk. Legyen a a komplex szám valós része, és jelöljük Rez-vel, míg b legyen a komplex szám képzetes része, és jelöljük Imz-vel. Tehát $z =$Re$z + i\cdot$Imz.

3.2. Konjugálás

Cauchy volt az első, aki bevezette ezt a komplex számok körében elvégezhető műveletet. A konjugálás $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lineáris leképezés, ami minden $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ komplex számhoz hozzárendeli a következő komplex számot az alábbi jelöléssel:

$$\overline{z} := x - iy = 2\mathrm{Re}z - z.$$

A konjugálás geometriailag az abcisszára való tükrözést jelent.
Ez a művelet elengedhetetlen két komplex szám skalárszorzatának definiálásához és egy komplex szám abszolút értékéhez is. A következő módon vezetjük be ezeket:

$$\langle w, z \rangle := \mathrm{Re}(w\overline{z}) = ux + vy, \quad |z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

ahol $z = x + iy$ és $w = u + iv$. Egy komplex szám valós és képzetes részét kifejezhetjük a konjugált segítségével:

$$\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}), \quad z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}, \quad z\overline{z} > 0, \text{ha } z \neq 0.$$

Azt is tudjuk, hogy egy komplex szám akkor és csak akkor valós, ha $z = \overline{z}$, és pontosan akkor tisztán képzetes, ha $z = -\overline{z}$.

Az alább tulajdonságok minden z és w komplex számra teljesülnek:

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{zw}$
3. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$, ha $w \neq 0$
4. $|\overline{z}| = |z|$
5. $z^2 = z\overline{z}$
6. $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, ha $z \neq 0$

Ha $p(x)$ valós együtthatós polinom, és $p(z) = 0$, akkor $p(\overline{z}) = 0$ is teljesül, így a valós együtthatós polinomok nemvalós komplex gyökei konjugált párokat alkotnak.

3.3. A természetes skalárszorzás és az euklideszi hossz

Most hogy már bevezettük a konjugálást, definiálhatjuk a természetes skalárszorzatot és egy komplex szám euklideszi hosszát. Ahogy már korábban szó volt róla, a skalárszorzatot a következő módon definiáljuk:

$$\langle w, z\rangle := \mathrm{Re}(w\overline{z}) = ux + vy, \quad \text{ahol } z = x + iy \text{ és } w = u + iv.$$

A Gauss által kitalált ábrázolási módban, - amikor a komplex számokat a sík pontjainak feleltettük meg - egy komplex szám abszolútértéke, az origótól vett távolsága az általa reprezentált pontnak, vagy más szóval, az általa meghatározott vektornak a hossza. Tehát:

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ez mindig nemnegatív, hiszen egy vektor hossza nem lehet negatív. Ha z valós szám, akkor annak az abszolút értékéről és nem a hosszáról beszélünk. Amióta tudjuk, hogy $z\overline{z} = |z|^2$, azóta könnyedén ki tudjuk fejezni egy komplex szám inverzét, miszerint:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \text{ minden } z \neq 0\text{-ra.}$$

A $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$,$(w, z) \mapsto \langle w, z\rangle$, leképezés azaz ha két komplex számhoz a skalárszorzatukat rendeljük, szimmetrikus, bilineáris és pozitív definit leképezés, hiszen minden $w, w', z \in \mathbb{C}$ számra fennállnak a következő tulajdonságok:

$$\langle w + w', z\rangle = \langle w, z\rangle + \langle w', z\rangle; \quad a\langle w, z\rangle = \langle aw, z\rangle, \quad a \in \mathbb{R};$$
$$\langle w, z\rangle = \langle z, w\rangle; \quad \langle z, z\rangle > 0, \text{ ha } z \neq 0.$$

Ezek a tulajdonságok egyenesen következnek a skalárszorzat definiciójából.

Két vektort, azaz két komplex számot ortogonálisnak nevezünk, ha fennál a $\langle w, z\rangle = 0$ összefüggés. Két vektor, z és iz mindig ortogonálisak, hiszen definició szerint $\text{Re}(iz\overline{z}) = = |z|^2\text{Re}(i) = 0$, sőt mivel $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ így két vektor, $z, cz \in \mathbb{C}^\times$ akkor és csak akkor ortogonális, ha c tisztán képzetes.

Ha az abszolút értékkel akarunk számolni, akkor használhatjuk a szorzásnál és az osztásnál fennálló összefüggéseket, miszerint:

$$\begin{aligned} |wz| &= |w||z|, && \text{minden } w, z \in \mathbb{C}\text{-re.} \\ |\frac{w}{z}| &= \frac{|w|}{|z|}, && \text{minden } w \in \mathbb{C}\text{-re és } z \in \mathbb{C}^\times\text{-re.} \end{aligned}$$

3.4. Négyzetgyök és n-edik gyök

3.4.1. A négyzetgyök

Minden $r \geq 0$ valós számhoz létezik pontosan egy olyan $s \geq 0$ valós szám, melyre igaz hogy $s^2 = r$. Ezt az s-et az r szám nemnegatív négyzetgyökének hívjuk és $\sqrt{r}$-rel jelöljük. Negatív valós számból nem tudunk négyzetgyököt vonni, ezzel szemben a komplex számoknál egészen más a helyzet.

3.1. Állítás. *Legyen $c = a + bi$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor definiáljuk ξ-t a következőképpen:*

$$\xi := \sqrt{\tfrac{1}{2}(|c| + a)} + i\eta\sqrt{\tfrac{1}{2}(|c| - a)},$$

ahol $\eta := \pm 1$, amelyre fennáll hogy $b = \eta|b|$. Ekkor $\xi^2 = c$.

Bizonyítás. Ha valaminek a négyzete c-vel egyenlő, az ekvivalens azzal, hogy $(x+iy)^2 = = a+bi$. Mivel tudjuk, hogy két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha a képzetes és a valós részük is megegyezik, ezért fennállnak a következők: $x^2 - y^2 = a$ és $2xy = b$. Azt tudjuk, hogy $x^2 + y^2 = |c|$, tehát $2x^2 = |c| + a$, és $2y^2 = |c| - a$. Innen pedig már adódik az összefüggés. □

Ezt a ξ-t a c négyzetgyökének nevezzük, és $\sqrt{c}$-vel jelöljük. A ξ-n kivül egyetlen másik gyöke van c-nek, a $-\xi$. Tehát $\sqrt{c}$-nek két értéke van, szemben a valósakkal, ahol csak egy.

A másodfokú komplex együtthatós egyenletek standard alakja: $z^2 + 2cz + d = 0$, ahol $c, d \in \mathbb{C}$, amit könnyedén megoldhatunk egy - már a babiloniaiak által is ismert - trükkel. Írjuk az egyenletet a következő alakba: $(z + c)^2 + d - c^2 = 0$. Ebből az alakból a két megoldás könnyedén kiolvasható:

$$z_1 := -c + \sqrt{c^2 - d}, \quad z_2 := -c - \sqrt{c^2 - d}.$$

Gyöktényezés alakkal felírva:

$$z^2 + 2cz + d = (z - z_1)(z - z_2).$$

Viéte-formula: $z_1 + z_2 = -2c$, $z_1 z_2 = d$, azaz a gyökökkel kifejezhetjük az egyenlet együtthatóit.

3.4.2. Az n-edik gyök

3.2. Állítás. *Legyen $n \geq 1$ természetes szám, és $c \in \mathbb{C}$. Minden komplex számhoz létezik olyan ξ, melyre igaz, hogy $\xi^n = c$, amit a c szám, n-edik gyökének nevezünk.*

Bizonyítás. Bizonyítsunk n szerinti teljes indukcióval. Először páros n-ekre. Az állítás $n = 1$-re triviális, $n = 2$-re pedig már bizonyítottuk. Tegyük fel, hogy m-re igaz, és próbáljuk meg belátni, hogy $n = 2m$-re is igaz lesz. Azt tudjuk, hogy létezik olyan $\eta \in \in \mathbb{C}$, melyre $\eta^2 = c$. Ekkor az indukciós feltevés szerint létezik olyan $\xi \in \mathbb{C}$ melyre igaz hogy $\xi^m = \eta$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\xi^n = c$. Tehát páros kitevő esetén beláttuk az állítást.

Most nézzük azt az esetet, ha n páratlan. Tegyük fel, hogy $c \in \mathbb{C}$ és $|c| = 1$, és legyen $d \in \mathbb{C}$, melyre igaz, hogy $d^2 = c$. Ekkora $\overline{dd} = 1$. Vegyük a következő polinomot:
$p(X) := i[\overline{d}(X + i)^n - d(X - i)^n] = i(\overline{d} - d)X^n+$ alacsonyabb kitevőjű tagok.
Tudjuk, hogy $\overline{p(x)} = p(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$-re és p valós polinomra fennáll. Mivel $d \notin \mathbb{R}$, p-nek van n-edfokú gyöke, ahol n páratlan. Létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ melyre $p(\lambda) = 0$ teljesül. Ekkor:

$$\overline{d}(\lambda + i)^n = d(\lambda - i)^n, \text{ azaz}$$
$$\left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^n = \frac{d}{\overline{d}} = d^2 = c.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük, amivel az Algebra-alaptételének egy speciális esetét kaptuk meg, miszerint a $z^n - c = 0$ egyenlet minden n-re megoldható. $\square$

4. fejezet

Geometriai tulajdonságok

4.1. Geometriai alak

A geometriai ábrázolásban minden komplex szám a sík egy pontjának, azaz a kétdimenziós sík egy vektorának feleltethető meg. Ez az ábrázolás a Gauss-féle számsík, vagy Argand-diagram nevet viseli. Mivel vektoroknak feleltethetőek meg, minden komplex számnak van hossza, ami a korábban tárgyalt abszolút értéknek felel meg, és van irányszöge is, vagy arkusza, ami a valós tengellyel bezárt irányított szög, ami majd a polárkoordinátás, vagy más néven trigonometrikus alaknál lesz fontos.

Ez az ábrázolási mód mindenekelőtt a komplex számok összeadását teszi szemléletessé, hiszen a komplex számok összeadása vektorösszeadásnak feleltethető meg.

4.2. Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség

4.1. Állítás. *Minden $w, z \in \mathbb{C}$ számra teljesül a következő összefüggés:*

$$\langle w, z\rangle^2 + \langle iw, z\rangle^2 = |w|^2|z|^2.$$

Bizonyítás. $\langle w, z\rangle^2 + \langle iw, z\rangle^2 = (\mathrm{Re}w\overline{z})^2 + (-\mathrm{Im}w\overline{z})^2 = |w\overline{z}|^2 = |w|^2|z|^2.$ □

Ezen összefüggés következményeként juthatunk el a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséghez, ami gyakran használatos a skalárszorzatos terek elméletében, a végtelen sorok és szorzatok integrálásának elméletében és a valószínűségszámításban:

$$|\langle w, z\rangle| \le |w||z|, \quad \text{minden } w, z \in \mathbb{C}\text{-re.}$$

4.2. Állítás. *Egyenlőség pedig akkor, és csak akkor áll fenn, ha w és z lineárisan összefüggő.*

Bizonyítás. Korábbról tudjuk, hogy $|\text{Re}z| \leq |z|$, és $|\text{Im}z| \leq |z|$, $z \in \mathbb{C}$. Tehát $|\langle w, z\rangle| = |\text{Re}(w\overline{z})| \leq |w\overline{z}| = |w||z|$, egyenlőség pedig akkor állhat csak fenn, ha $|\text{Re}(w\overline{z})| \leq |w\overline{z}|$ azaz ha $w\overline{z} \in \mathbb{R}$. □

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget, angol nyelvterületen Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségnek hívják, az orosz matematikai irodalomban pedig Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenségként ismert.

4.3. A háromszög-egyenlőtlenség és a koszinusz-tétel

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség mellett még két nagyon fontos összefüggés ismert.

4.3. Tétel. *Koszinusz-tétel:*

$$|w+z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2\textit{Re}(w\overline{z}).$$

Bizonyítás. A $\langle w, z\rangle$ skalárszorzat két tulajdonságát használjuk ki a bizonyításunk során, az additivitását és a szimmetriáját.

$|w+z|^2 = \langle w+z, w+z\rangle = \langle w, w\rangle + \langle w, z\rangle + \langle z, w\rangle + \langle z, z\rangle = |w|^2 + 2\text{Re}(w\overline{z}) + |z|^2.$

□

Később majd szó lesz róla, miért ezt a nevet választották ennek az egyenlőségnek.

4.4. Tétel. *Háromszög-egyenlőtlenség:*

$$|w+z| \leq |w| + |z|, \quad \textit{minden } w, z \in \mathbb{C}\textit{-re.}$$

Egyenlőség pedig akkor és csak akkor áll fenn, ha $w\overline{z} \geq 0$.

Bizonyítás. $|w+z|^2 = |w|^2 + 2\langle w, z\rangle + |z|^2 \leq |w|^2 + 2|w||z| + |z|^2 = (|w| + |z|)^2$. A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség szerint, $|\langle w, z\rangle| = |w||z|$, $\Leftrightarrow w\overline{z} \in \mathbb{R}$. Azaz abban az esetben, ha $\langle w, z\rangle = |w||z|$, ami csak akkor áll fenn, ha $w\overline{z} \geq 0$. □

4.4. "Három-párt"-tétel

4.5. Állítás. *Legyenek* z_1, z_2 *és* z_3 *különböző komplex számok, melyek abszolút értéke megegyezik, azaz teljesül:* $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. *Ekkor a következő három állítás ekvivalens:*

(i) z_1, z_2, z_3 *egy szabályos háromszög csúcsai;*

(ii) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$*;*

(iii) z_1, z_2, z_3 *a gyökei a* $Z^3 = c$ *egyenletnek, ahol* $c \in \mathbb{C}$.

Ha z_1-re, z_2-re, és z_3-ra, mint politikai pártokra gondolunk, melyek egyenlő erőt képviselnek minden tekintetben, akkor az (i) és (ii) tulajdonságokat kapjuk. Ez motiválta a tétel nevének a választását.

Analóg módon az előző tétel alapján, létezik a következő változat is:

4.6. Állítás. *Legyenek* z_1, z_2, z_3 *és* z_4 *különböző komplex számok, melyek abszolút értéke megegyezeik, azaz teljesül rájuk hogy:* $|z_1| = \cdots = |z_4|$. *Ekkor a követekező három állítás ekvivalens:*

(i) z_1, z_2, z_3, z_4 *egy téglalap csúcsai;*

(ii) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$*;*

(iii) $z_1, \cdots, z_4$ *a gyökei a* $(Z^2 - a^2)(Z^2 - b^2) = c$ *egyenletnek, ahol* $|a| = |b| \neq 0$.

4.5. Kettősviszony

A kettősviszony egy egyenes négy pontjára, illetve egy sugársor négy elemének kölcsönös elhelyezkedésére jellemző viszonyszám. Ez a projektív geometria fontos alapfogalma.

4.7. Definíció. *Néhány pontot a síkban kollineárisnak nevezünk, ha azok egy egyenesre esnek.*

Legyen $a, b, c \in \mathbb{C}$, és $a \neq b$. Ez a három pont akkor és csak akkor kollineáris, ha:

$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}, \quad \text{ez pedig akkor van ha } c\bar{b} - c\bar{a} - a\bar{b} \in \mathbb{R}.$$

Legyen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $a \neq d$, $b \neq c$. Ezek kettősviszonyát $CR(a, b, c, d)$-vel jelöljük és így definiáljuk:

$$
\begin{aligned}
CR(a, b, c, d) &:= \frac{a-b}{a-d} : \frac{c-b}{c-d} = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)} = \\
&= \frac{(a-b)(c-d)(\overline{a}-\overline{d})(\overline{c}-\overline{b})}{|a-d|^2|c-b|^2} \in \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

4.8. Tétel. *Legyen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, ahol $a \neq d$ és $b \neq c$. Ezek akkor és csak akkor nincsenek egy egyenesen vagy körön, ha a kettősviszonyuk valós.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a, b, c nem kollineárisak. Ekkor feltételezhetjük, hogy az általuk meghatározott háromszög középpontja az origó. Ekkor $|a| = |b| = |c|$ és

$$(a-b)(c-d)(\overline{a}-\overline{d})(\overline{c}-\overline{d}) + i(|c|^2 - |d|^2)\mathrm{Im}(c\overline{b} - c\overline{a} - a\overline{b}) \in \mathbb{R}.$$

Mivel a, b, c nem kollineáris, így $\mathrm{Im}(c\overline{b} - c\overline{a} - a\overline{b}) \neq 0$. Azaz:

$$(a-b)(c-d)(\overline{a}-\overline{d})(\overline{c}-\overline{d}) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |c| = |d|.$$

$\square$

4.6. Forgatások

Definiáljuk a következő halmazt: legyen $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, azaz álljon az összes egységnyi hosszú komplex számból. Ez részcsoportot alkot a szorzásra nézve $\mathbb{C}$-ben.

Az S^1 halmaz a Gauss-féle számsíkon az origó középpontú, egységsugarú kör peremét reprezentálja. Ez a ciklikus csoport elengedhetetlen lesz az ortogonális csoport $\mathrm{O}(\mathbb{C})$ definiálásához, illetve fontos szerepet fog játszani a korábban említett polárkoordinátás bevezetés kapcsán.

4.6.1. Távolságtartó leképezések

4.9. Definíció. *Egy $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ leképezést, távolságtartónak hívunk, ha teljesül az alábbi összefüggés:*

$$|f(w) - f(z)| = |w - z|, \quad \textit{minden } w, z \in \mathbb{C}\textit{-re.}$$

4.10. Tétel. *A következő két állítás ekvivalens, egy $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ leképezésre:*

(i) *f-re igaz, hogy $f(z)=f(0)+cz$ vagy $f(z)=f(0)+c\overline{z}$, ahol $c\in S^1$.*

(ii) *f távolságtartó leképezés.*

Bizonyítás. $(i)\Rightarrow(ii)$. Triviális, hiszen $f(w)-f(z)=c(w-z)$, vagy $=c(\overline{w}-\overline{z})$, azaz távolságtartó.
$(ii)\Rightarrow(i)$. Legyen $c:=f(1)-f(0)\in S^1$, és legyen $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}{:}z\mapsto c^{-1}(f(z)-f(0))$ távolságtartó leképezés. Mivel $g(0)=0$ és $g(1)=1$, emiatt $|g(z)|^2=|z|^2$ és $|g(z)-1|^2=$ $=|z-1|^2$, ebből azt kapjuk, hogy Re$g(z)=$Rez, és $g(i)=\pm i$. Abban az esetben, amikor $g(i)=i$, $\hat{g}(z):=-ig(iz)$ távolságtartó leképezés, ahol $\hat{g}(0)=0$, $\hat{g}(1)=1$ és így Re$(-$ $-ig(iz))=$Rez és Im$g(z)=$Imz. Ezért $g(z)=z$ és $f(z)=f(0)+cz$. A másik esetben, ahol $g(i)=-i$, hasonlóan gondolkodhatunk. Legyen $\hat{g}(z):=ig(iz)$, Re$(ig(iz))=$Rez, és Im$g(z)=-$Imz, tehát itt $f(z)=f(0)+c\overline{z}$. □

Minden távolságtartó leképezés $\mathbb{C}$-ben az origót fixen hagyja. Ez a tétel, amit bizonyítottunk, egy speciális esete az általános távolságtartó leképezéseknek, ahol $f:V\to V{:}x\to f(0)+h(x)$, ahol $h:V\to V$ ortogonális leképezés.

4.6.2. Az $O(\mathbb{C})$ és $SO(2)$ csoportok

4.11. Definíció. *Egy $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ leképezést ortogonálisnak, ha $\langle f(w),f(z)\rangle=\langle w.z\rangle$ minden $w,z\in\mathbb{C}$-re. Az ortogonális leképezés csoportját $O(\mathbb{C})$-vel jelöljük.*

4.12. Tétel. *Az $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ leképezés akkor és csak akkor ortogonális, ha:*

$$f(z)=cz \quad \textit{vagy} \quad f(z)=c\overline{z} \quad \textit{ahol } c\in S^1.$$

Bizonyítás. Ezek a leképezések ortogonálisak lesznek. Vegyük például a második esetet:

$$\langle f(w),f(z)\rangle=\text{Re}(c\overline{w}(\overline{c\overline{z}})=|c|^2\text{Re}(\overline{w}z)=\langle w,z\rangle,\text{ ha } c\in S^1.$$

□

A 2×2-es valós elemű ortogonális mátrixok azok, amelyeknek a transzponáltja egyben az inverze is:

$$O(2):=\{A\in GL(2,\mathbb{R}):AA'=E\}.$$

Az ortogonális mátrix speciális, ha determinánsa $+1$:

$$SO(2) := \{a \in O(2) : detA = 1\},$$

ami $O(2)$-nek egy normális részcsoportja, és részcsoportot alkot az összes ortogonális $2 \times$ $\times\, 2$ valós elemű mártixok között. Vezessük be a következő jelölést: $\mathcal{C} := \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} :$ $: a, b \in \mathbb{R}\}$. Ekkor:

4.13. Tétel. $SO(2) = \{A \in \mathcal{C} : detA = 1\}$.

Bizonyítás. Az $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mátrixnál azonnal beláthatjuk, hogy $AA^t =(\text{det}A)E$, mivel $\{A \in \mathcal{C}$:det$A = 1\} \subset SO(2)$. Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$. Ekkor $A^{-1} =$ $= A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, de azt is tudjuk, hogy $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, hiszen det$A = 1$ kell legyen, ekkor viszont azt kapjuk, hogy $d = a$ és $c = -b$, azaz $A \in \mathcal{C}$. □

Ezen tétel egyenes következményeként megkapjuk az izomorfizmus tételt:

4.14. Tétel. *Az S^1 ciklikus csoport és az $SO(2)$ csoport között létezik egy kölcsönösen egyértelmű leképezés, azaz izomorfak egymással. Ez a leképezés: $F : \mathbb{C} \to \mathcal{C}$, $a + bi \mapsto$ $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.*

Bizonyítás. Az állítás triviális, hiszen:

$$F(S^1) = \{A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{C} : detA = a^2 + b^2 = 1\}.$$

□

5. fejezet

Polárkoordinátás bevezetés és az n-edik gyökök

5.1. Polárkoordinátás bevezetés

A komplex számokkal a másodfokú egyenletek megoldása során találkoztunk először, amikor nem tudtunk negatív számból négyzetgyököt vonni. A valós számokkal ellentétben minden komplex számnak létezik négyzetgyöke, viszont egy algebrai alakban megadott komplex számból négyzetgyököt vonni elég komplikált számolással jár, és a módszer már köbgyökvonás esetén is használhatatlanul bonyolultnak tűnik.

Szerencsénkre a komplex számokat a Gauss-féle számsíkban két dolog egyértelműen meghatározza. Az origótól vett távolságuk, és az x tengely pozitív felétől mért, irányított szögük. Egy z komplex szám szögét, $\arg z$-vel jelöljük, és radiánban mérjük. Ez a szög egyértelműen meghatározott, ha kikötjük hogy $0 \leq \arg z < 2\pi = 360°$. Tehát minden $z \neq 0$ komplex szám felírható a következő alakban:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ahol φ az x tengely pozitív felével bezárt szöge, r pedig az origótól vett távolsága. Ezt a fölírást a $z \neq 0$ komplex szám trigonometrikus, vagy polárkoordinátás felírásának nevezzük. A nulla komplex számnak se szöge, se polárkoordinátás alakja nincs.

5.1.1. Euler-formula

A komplex számokat kifejezhetjük a $\sin$ és a $\cos$ függvények segítségével, de vajon miért lehetséges ez?

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy az exponenciális függvény hatványsora a következő:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Szintén korábbról tudjuk, hogy a szögfüggvények Taylor-sora a következő alakban írható fel:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7'} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6'} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

A végtelen sor definiciója segítségével igazolni lehet, hogy a szinusz és a koszinusz függvény a komplex exponenciális függvény képzetes illetve valós része, ha az argumentum tisztán képzetes:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Ezt az összefüggést először Euler mutatta ki, éppen ezért Euler-formulának nevezzük. Ilyen módon a szögfüggvények alapvetően fontosak lettek a komplex analízis geometriai interpretációjában. Ha az egységsugarú kört a komplex síkon az e^{ix} egyenlettel adjuk meg, másrészt a kör paraméteres alakját nézzük, az összefüggés a komplex exponenciális függvény és a szögfüggvények között nyílvánvaló lesz. A trigonometrikus függvényeknek ezt a definicióját alkalmazva a z komplex argumentumokra:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i\sinh(iz),$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh(iz).$$

Hasonlóan valós x-re:

$$\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix}),$$
$$\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}).$$

5.1.2. Tulajdonságai

A komplex számoknál az algebrai alakjuk megkönnyítette az összeadásukat, a geometria alakjuk szemléletessé tette azt, tehát feltehetjük a kérdést, vajon mi hasznát vehetjük az elég bonyolultnak tűnő polárkoordinátás alaknak?
Először is nézzük meg az ilyen alakban megadott komplex számoknak egy-két tulajdonságát:

5.1. Tétel. *Minden $z \in \mathbb{C}^x$ komplex szám egyértelműen előáll a következő alakban:*

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \textit{ahol } r := |z| \quad \textit{és } \varphi \in [0{,}2\pi).$$

Amennyiben $z = pe^{i\psi} = p(\cos\psi + i\sin\psi)$, ahol $p, \psi \in \mathbb{R}$, és $p > 0$, ez csak úgy teljesülhet, ha $p = r$ és $\psi = \varphi + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

A komplex számoknak ezt a felírását polárkoordinátás reprezentációnak hívjuk. Írjuk fel néhány számnak a polárkoordinátás alakját:

$$\begin{aligned} 1 &= \dot{1}(\cos 0 + i\sin 0), & i &= \dot{1}(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}), \\ -1 &= \dot{1}(\cos\pi + i\sin\pi), & -i &= \dot{1}(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}), \end{aligned}$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i, \quad e^{2\pi i}.$$

Nézzük meg, hogy néz ki polárkoodrinátás alakban egy z komplex szám konjugáltja, és inverze, ha $z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$\overline{z} = |z|e^{-i\varphi} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi), \quad z^{-1} = |z|^{-1}e^{-i\varphi} = |z|^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Most nézzük meg, hogyan szorzunk össze két polárkoordinátás alakban megadott komplex számot, illetve hogy számoljuk ki ezek hányadosát. Legyen a két szám:

$$w = |w|e^{i\psi} = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \quad z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ekkor:

$$wz = |w||z|e^{i(\psi+\varphi)} = |w||z|(\cos(\psi+\varphi) + i\sin(\psi+\varphi)),$$

illetve:

$$\tfrac{w}{z} = \tfrac{|w|}{|z|}e^{i(\psi-\varphi)} = \tfrac{|w|}{|z|}(\cos(\psi-\varphi) + i\sin(\psi-\varphi)).$$

5.2. Moivre-formula

Az előző szakasz elején feltettük a kérdést, mi hasznát vehetjük a trigonometrikus alakban felírt komplex számoknak. Ez a látszólag bonyolult bevezetés roppant egyszerűvé teszi számunkra a komplex számoknak a hatványozását, és az ezekből történő n-edik gyökvonást.

A $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$, minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra. Vagy másképpen $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$.

5.2. Tétel. *Minden $z \in \mathbb{C}$ komplex számra, ahol $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}^\times$, $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, minden $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén.*

Ezt az összefüggést Abraham de Moivre (1667–1754) francia matematikus után, *Moivre-formulának* nevezzük. Ő eredetileg a következő összefüggést adta meg:

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\cos n\varphi - i\sin n\varphi}, \quad n > 0.$$

Ebből a képletből könnyedén megkaphatunk néhány trigonometrikus azonosságot, például a kétszeres vagy a háromszoros szögeket:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

5.3. Egységgyökök

A matematikában n-edik (komplex) egységgyökök azok a (komplex) számok, amelyek n-edik hatványa 1. Ez a polárkoordinátás alakban felírt komplex számoknak egyik legfontosabb alkalmazása.

5.3. Lemma. *Legyen $n \geq 1$ természetes szám. Ekkor pontosan n különböző z komplex szám létezik, amire teljesül, hogy $z^n = 1$, nevezetesen:*

$$\zeta_k := e^{\frac{2\pi ik}{n}}, \quad k = 0{,}1, \ldots, n-1.$$

Legyen $\zeta := \zeta_1$, ekkor $\zeta_k = \zeta^k$.

Bizonyítás. A $\zeta_k = \zeta^k$ egyenlet és a ${\zeta_k}^n$ egyenletek könnyedén kijönnek a Moivre-formulából. Az exponenciális függvény tulajdonságából:

$$\zeta_k {\zeta_l}^{-1} = e^{\frac{2\pi i}{n}(k-l)},$$

tehát $\zeta_k = \zeta_l$ akkor és csak akkor, ha $\frac{1}{n}(k-l) \in \mathbb{Z}$, de $-n < k-l < n$, azaz $k = l$, vagy más szavakkal $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ különbözőek egymástól. Ha $z = |z|e^{i\varphi}$, akkor $z^n = 1$ csak akkor teljesülhet, ha $|z| = 1$ és $e^{in\varphi} = 1$, vagyis $\varphi = \frac{2\pi k}{n}$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Mivel $0 \leq \varphi < 2\pi$, ebből következik, hogy $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, így $z = \zeta_k$. Tehát nincs több komplex szám, $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$-en, kivül, ami teljesíti a $z^n = 1$ egyenletet. □

Ezt az n darab $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ számot az n-edik egységgyököknek hívjuk. Geometriailag egy szabályos n szög csúcsait jelölik a komplex síkon. Az n-edik egységgyököt primitív n-edik egységgyöknek nevezzük,amennyiben teljesül rá, hogy n-edik hatványa 1, de semmilyen kisebb kitevős hatványa nem az. Az n-edik egységgyökök száma n, míg a primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$. Például az egyik 5. egységgyök:

$$\zeta = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}.$$

Az iménti lemmát általánosítva a következő összefüggést kapjuk:

$$\xi := \sqrt[n]{|c|}e^{\frac{i\varphi}{n}}, \quad \text{ahol } c = |c|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^\times,$$

ahol $\sqrt[n]{|c|}$ jelöli $|c|$-nek a pozitív n-edik valós gyökét. Ebből kapjuk a következő tételt:

5.4. Tétel. *Az n-edik egységgyökök egyértelműen léteznek, hiszen minden $c = |c|e^{i\varphi} \in \in \mathbb{C}^\times$ komplex számnak pontosan n különböző komplex n-edik gyöke van, ahol $n \in \in \mathbb{N}, n > 1$ nevezetesen ezek $\xi, \xi\zeta, \xi\zeta^2, \dots, \xi\zeta^{n-1}$, ahol $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{n}}$.*

Ha ξ így n-edik egységgyök, akkor:

$$1 + \xi + \xi^2 + \dots + \xi^{n-1} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad n \quad \text{páratlan} \\ 0, & \text{ha} \quad n \quad \text{páros.} \end{cases}$$

A komplex egységgyökök annak az egységkörbe írt szabályos n-szögnek a csúcsaiban vannak, amelynek egyik csúcsa az 1. Így a ${\xi_n}^k = x_k + iy_k$ egységgyök valós és képzetes része ennek a csúcsnak a koordinátái, vagyis $k = 1,2,\dots,n-1$-re

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{n} \quad \text{és} \quad y_k = \sin\frac{2\pi k}{n}.$$

5.3.1. Körosztási polinomok

A körosztási polinomok speciális polinomok, amelyeknek a gyökei pontosan az n-edik primitív egységgyökök. Először ismerkedjünk meg a jó kitevő fogalmával, és azzal hogy mit értünk egy komplex szám rendjén.

5.5. Definíció. *Az n egész szám jó kitevője a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.*

Mivel a $k - l$ és az $l - k$ is jó kitevő, ezért mindig létezik pozitív kitevő. Legyen d a legkisebb ilyen pozitív kitevő. Ekkor osszuk le $k-l$-et maradékosan d-vel. $k-l = dq+r$, ahol nyílvánvalóan $0 \leq r < d$. Ekkor:

$$1 = z^{k-l} = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r.$$

Tehát az r is jókitevő lesz, de d a legkisebb ilyen jó kitevő, ezért $r = 0$, ami azt jelenti hogy $d \mid k - l$, azaz ha $z^k = z^l$, akkor $d \mid k - l$.
Ennek az állításnak a megfordítása is igaz, azaz ha $d \mid k - l$, akkor z^{k-l} $z^d = 1$-nek hatványa, azaz $z^{k-l} = 1$, vagyis $z^k = z^l$. Ez szavakban megfogalmazva annyit jelent, hogy z két hatványa akkor és csak akkor egyenlő, ha a kitevőik különbsége d-nek egész számú többszöröse. Tehát z hatványai d szerint periodikusak. Így z-nek pontosan d darab különböző hatványa van. Ezt a d számot z rendjének hívjuk.

5.6. Definíció. *Egy z komplex szám különböző (egész kitevős) hatványainak a számát a z rendjének nevezzük és $o(z)$-vel jelöljük. Ez a szám vagy pozitív egész, vagy a ∞ szimbólum.*

Most már rátérhetünk a körosztási polinom definiálására. Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n jelöli az n-edik körosztási polinomot, aminek a gyökei pontosan az n-edik primitív egységgyökök. Képletben:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n-edik egységgyök, vagyis az összes olyan szám melynek rendje n.

5.7. Lemma. *Ha $n \geq 1$ egész szám, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.*

Bizonyítás. Legyen $\vartheta = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$. Ekkor ϑ primitív n-edik egységgyök, ezért hatványai az n-edik egységgyököket adják meg. Ezek, mint tudjuk, éppen az $x^n - 1$ polinom gyökei, tehát:

$$x^n - 1 = (x - \vartheta)(x - \vartheta^2) \dots (x - \vartheta^n).$$

Csoportosítsuk a megfelelő egységgyökök rendjei szerint a gyöktényezőket. Jelölje f_d a d-ed rendű egyszéggyökökhöz tartozó gyöktényezők szorzatát. Így

$$x^n - 1 = \prod_d f_d(x).$$

Ekkor elég belátnunk, hogy n osztói pontosan azok a d számok lesznek, amelyekre teljesül: $f_d = \Phi_d$.

Ha egy d számra teljesül, hogy $d = o(\vartheta^m)$ valamely egész m-re, akkor $(\vartheta^m)^n = (\vartheta^n)^m = 1^m = 1$ miatt n jó kitevője ϑ^m-nek, tehát $d \mid n$. Tehát az előforduló d számok tényleg csak n osztói lehetnek. Tegyük fel, hogy $d \mid n$, ekkor Φ_d gyöktényezős felbontásában az összes d-ed rendű komplex szám szerepel, f_d felbonátásában pedig az olyan d-ed rendű komplex számok, amik egyben n-edik egységgyökök is. Vegyük észre, ezek ugyanazok a számok, azaz minden d-edik egységgyök egyben n-edik egységgyök is. Hiszen ha egy ψ számra teljesül, hogy $d = o(\psi) \mid n$, akkor $\psi^n = 1$, ezért ψ n-edik egységgyök. Tehát beláttuk, hogy $f_d = \Phi_d$. □

5.8. Következmény. *Ha $n \geq 1$ természetes szám, akkor Φ_n körosztási polinom egész együtthatós.*

6. fejezet

Alkalmazások

6.1. Komplex függvénytan

Rengeteg alkalmazása ismert a komplex számoknak a matematikában, és a matematikától távol álló tudományokban egyaránt. Az egyik ilyen a komplex analízis, vagy más szóval komplex függvénytan, amely a komplex változós komplex értékű függvényekkel foglalkozik.

Sok témát felsorolhatnék, például a Cauchy-Riemann egyenleteket, analitikus-, holomorf- és meromorf függvényeket, a komplex logaritmust vagy hatványsorokat, - a teljesség igénye nélkül- de mi most a kibővített komplex síkkal és a komplex változós függvényekkel majd azok differenciálhatóságával foglalkozunk.

6.1.1. A kibővített komplex sík

Ebben a szakaszban a végtelen távoli pont fogalmát értelmezzük. Kezdjük néhány jelöléssel és egy lemmával:
$B(\alpha, r) = \{z : z \in \mathbb{C}, |z - \alpha| < r\}$,
$\overline{B}(\alpha, r) = \{z : z \in \mathbb{C}, |z - \alpha| < r\}$,
$\dot{B}(\alpha, r) = B(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$.

6.1. Lemma. *Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, az $f(z) = \frac{z}{1+|z|}$ leképezés. Ekkor f homeomorfizmust létesít $\mathbb{C}$ és $B(0,1)$ között.*

Bizonyítás. Az f definiciója alapján: $|f(z)| = \dfrac{|z|}{1+|z|} < 1$, f tehát $\mathbb{C}$-t a $B(0,1)$-be képezi. Ha $f(z) = f(w)$, akkor $|f(z)| = |f(w)|$ és így:
$\dfrac{|z|}{1+|z|} = \dfrac{|w|}{1+|w|}$, amiből $|z| = |w|$ egyszerűen következik. Így tehát $\dfrac{z}{1+|z|} = \dfrac{w}{1+|w|}$,

vagyis $z = w$, amivel azt igazoltuk, hogy f kölcsönösen egyértelmű leképezés. Adott $\alpha \in$ $\in B(0,1)$ esetén legyen $z = \dfrac{\alpha}{1-|\alpha|}$. Ekkor könnyen belátható, hogy $f(z) = \alpha$, azaz f a $\mathbb{C}$-t a $B(0,1)$ körlapra képezi le. Ha most $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $lim_{n\to\infty} z_n = z$, akkor felhasználva, hogy $||z_n - |z|| \leq |z_n - z|$, $lim_{n\to\infty} z_n = z$ adódik. Ezért: $lim_{n\to\infty} z_n = \dfrac{z_n}{1+|z_n|} = \dfrac{z}{1+|z|}$. Az f tehát folytonos is. Mivel $f^{-1}(z) = \dfrac{z}{1-|z|}(z \in B(0,1))$, ugyanezzel az okoskodással azt is beláthatjuk, hogy f^{-1} is folytonos, és így már teljes a bizonyítás. $\square$

A komplex sík nem kompakt metrikus tér, hiszen nem korlátos. Az imént láttuk, hogy $\mathbb{C}$ homeomorf a $B(0,1)$körlappal. Azt is tujduk, hogy a $\overline{B}(0,1)$ kompakt metrikus tér, hiszen korlátos és zárt. Ez adhatja az ötletet ahhoz, hogy megpróbálhatnánk a $\mathbb{C}$-t is további pontok hozzávételével úgy kibővíteni, hogy eredményül egy kompakt metrikus teret kapjunk, akárcsak a körlap esetében. Gondoljunk a valós számok halmazára, amit a szokásos módon két végtelen távoli ponttal, a $+\infty$-nel és a $-\infty$-nel bővítettünk ki. Azonban céljainknak sokkal jobban megfelel, ha $\mathbb{C}$-t csupán egyetlen végtelen távoli ponttal bővítjük ki, amit végtelen távoli pontnak, vagy csak egyszerűen végtelennek fogunk hívni.

Először megadunk egy $\mathbb{C}$-vel homeomorf teret. Legyen S annak az $\mathbb{R}^3$-ban fekvő zárt gömbnek a határa, aminek a középpontja a $(0,0\frac{1}{2})$ pont és a sugara $\frac{1}{2}$, azaz
$S = \{(r,s,t) : r,s,t \in \mathbb{R}, r^2 + s^2 + (t - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$. Kössük össze a $(0,0,1)$ pontot, az "északi sarkot" az $(a,b,0)$ ponttal. Az összekötő egyenest az $\{\lambda a, \lambda b, 1-\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ halmaz jellemzi. Ez az egyenes még egy további pontban metszi a S gömbfelületet, és ennek a metszéspontnak a koordinátái:
$\left(\dfrac{a}{1+a^2+b^2}, \dfrac{b}{1+a^2+b^2}, \dfrac{a^2+b^2}{1+a^2+b^2}\right)$.
Jelölje h azt a leképezést, amely az (a,b) számpárnak az imént felírt metszéspontot felelteti meg. Ekkor h kölcsönösen egyértelmű leképezés $\mathbb{R}^2$ és $S \setminus \{(0,0,1)\}$ kipontozott gömbfelület között. Az alábbi lemmát, nem bizonyítjuk.

6.2. Lemma. *A most definiált h leképezés homeomorfizmus.*

Mi úgy akarjuk a komplex számok halmazát egy új ponttal kibővíteni, hogy ez a pont megfeleljen a $(0,0,1)$ "északi sarknak". Ennek a pontnak a jelölésére bármely szimbólum alkalmas, azzal az egy kikötéssel, hogy ez nem jelölhet komplex számot. Erre a célra általában a ∞ szimbólumot használjuk, azzal a megállapodással, hogy ∞ nem komplex szám. Legyen most:
$\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, és definiáljuk a $g : \mathbb{C}^\infty \to S$ leképezést így:

$$\begin{cases} g(z) &= h(z) \qquad (z \in \mathbb{C}) \\ g(\infty) &= (0,0,1). \end{cases}$$

Világos, hogy g kölcsönösen egyértelműen képezi le a $\mathbb{C}^\infty$ halmazt S-re. Definiáljuk most a d^* függvényt $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty$-en a $d^*(z,w) = d(g(z), g(w)), \quad (z, w \in \mathbb{C}^\infty)$ képlettel, ahol d az S tér közönséges metrikáját jelöli. A d^* metrikát, ***húr-metrikának*** hívjuk $\mathbb{C}^\infty$-en, és $(\mathbb{C}^\infty, d^*)$ a ***kibővített*** (vagy zárt) ***komplex sík***. A kiterjesztett komplex sík természetesen izometrikus (S, d)-vel. Ezt az utóbbi metrikus teret *Riemann-gömbnek* nevezzük.

6.1.2. Komplex értékű függvények

A komplex függvénytanban definiálunk komplex értékű függvényeket is, a következő módon. Legyen (E, d) metrikus tér, és legyen f az E-n definiált komplex értékű függvény, azaz $f : E \to \mathbb{C}$. Ekkor f-hez egyértelműen tartozik két valós függvény, u és v, amiket a következő módon definiálunk:
$u(z) =$Re$f(z) \quad (z \in E)$.
$v(z) =$Im$f(z) \quad (z \in E)$.
Vagy egyszerűbben, $u =$Ref és $v =$Imf, azaz $f = u + iv$. Abban az esetben, amikor E nem üres részhalmaz $\mathbb{C}$-ben, gyakran kényelmesebb u-ra és v-re kétváltozós függvényként tekinteni:
$u(x, y) =$Re$f(x + iy) \quad (x + iy \in E)$,
$v(x, y) =$Im$f(x + iy) \quad (x + iy \in E)$.

6.3. Állítás. *Legyen f az (E, d) metrikus téren értelmezett, komplex értékű függvény, azaz $f : E \to \mathbb{C}$. Ez a függvény, akkor és csak akkor folytonos, ha Ref és Imf folytonosak.*

Bizonyítás. Legyen f folytonos , $z \in E, \varepsilon > 0$. Ekkor létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon, z) > 0$,hogy $d(Z, w) < \delta$ esetén $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Mivel:
$|$Re$f(z)-$Re$f(w)| \leq |f(z) - f(w)|$,
ezért a $d(z, w) < \delta$ egyenlőtlenségből $|$Re$f(z)-$Re$f(w)| < \varepsilon$ is következik. Eszerint tehát Ref folytonos a z pontban. Mivel z tetszőleges pont volt E-ben, Ref valóban folytonos. Hasonlóan igazolható, hogy Imf is folytonos.

Tegyük fel most, hogy Ref és Imf is folytonosak. Adott $z \in E$ és $\varepsilon > 0$ esetén $\delta_1 >$ > 0, és $\delta_2 > 0$ megválasztható úgy, hogy:
$|$Re$f(z)-$Re$f(w)| < \frac{1}{2}\varepsilon(d(z, w) < \delta_1)$, $|$Im$f(z)-$Im$f(w)| < \frac{1}{2}\varepsilon(d(z, w) < \delta_2)$
fennálljon.Mivel $|f(z) - f(w)| \leq |$Re$f(z)-$Re$f(w)| + |$Im$f(z)-$Im$f(w)|$,$d(z, w) < \delta =$ $=$min(δ_1, δ_2)-ből, $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ is következik, azaz f folytonos a z pontban, de ez tetszőleges hely volt E-ben, így f folytonos. $\square$

6.1.3. Differenciálható komplex változós függvények

Legyen ismét az E nem üres részhalmaz $\mathbb{C}$-ben, és tegyük fel hogy $\alpha \in E$, és $\Delta(\alpha, r) \subset E$, alkalmas $r > 0$ érték mellett. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható az α pontban, ha létezik egy olyan $\gamma \in \mathbb{C}$ komplex szám, amelyre teljesül a következő feltétel:

bármely $\varepsilon > 0$-hoz található δ úgy, hogy $0 < \delta < r$ és
$|\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} - \gamma| < \varepsilon \quad (h \in \Delta'(0,\delta))$.
A szokásos jelöléssel $f'(\alpha)$-t írunk és ezt differenciálhányadosnak, vagy deriváltnak nevezzük. Azaz:

$$f'(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}.$$

6.2. Néhány fizikai alkalmazás

Igen sok területen alkalmazzák manapság a komplex számokat, például az elektronikában a váltakozó áramú áramkörök törvényszerűségeit komplex számokkal írják le, de használják őket a relativitáselméletben és a kvantummechanikában is. És ami a legérdekesebb, a komplex számok segítségével gyönyörű ábrák, úgynevezett fraktálok rajzolhatóak.

6.2.1. A komplex időfüggvény

A szinuszos időfüggvények megadásához két adat szükséges, az amplitudó, és a kezdőfázis. A mennyiségenként két adat síkbeli vektoros megadással lehetséges, amire a komplex számok matematikai eszközkészlete a legalkalmasabb.
Az általános szinuszos időfüggvény:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi).$$

Képezzünk komplex időfüggvényt az amplitúdó és a szinusz argumentumában lévő teljes kifejezés, mint fázisszög felhasználásával, így megkapjuk a komplex időfüggvényt:

$$\overline{u(t)} = \hat{U} \cdot e^{i(\omega\cdot t+\varphi)}.$$

Az imént megkapott komplex időfüggvényből visszatérhetünk a valós esetre a következő módon:

$$\begin{gathered}\overline{u(t)} = \hat{U} \cdot e^{i(\omega\cdot t+\varphi)} = \hat{U} \cdot (\cos(\omega\cdot t+\varphi) + i\sin(\omega\cdot t+\varphi)) = \hat{U}\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi) + \\ + i\cdot\hat{U}\sin(\omega\cdot t+\varphi) \\ u(t) = \text{Im}\,\overline{u(t)}.\end{gathered}$$

Azaz, a valós időfüggvény a komplex képzetes része.

6.2.2. A komplex amplitudó

A feszültség és az áramidőfüggvény komplex leírásával arra törekedtek, hogy megkönnyítsék a velük történő számításokat. Ehhez a komplex időfüggvény még nem megfelelő, ezért alakítsuk tovább a kifejezésünket:

$$\overline{u(t)} = \hat{U} \cdot e^{i(\omega \cdot t + \varphi)} = \hat{U} \cdot e^{i\omega} \cdot e^{i\varphi \cdot t} = \overline{\hat{U}} \cdot e^{i\varphi \cdot t}.$$

Az $\overline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot e^{i\varphi}$ kifejezést komplex amplitúdónak nevezzük. Ez nem tartalmazza az időfüggő részt. Ebből származik az amplitudó elnevezés, de a valós amplitudó mellett a fázisszöget is megtaláljuk benne. Ezen tulajdonság miatt a szinuszos időfüggvényű hálózatok tárgyalása jelentősen leegyszerűsödik a komplex amplitudó alkalmazásával.
Kirchhoff törvényei érvényesek komplex amplitúdókkal is.

A csomóponti törvény: $\sum_{j=1}^{n} \overline{\hat{I}_j} = 0.$

A hurok törvény: $\sum_{i=1}^{m} \overline{\hat{U}_i} = 0.$

6.2.3. Néhány szó a Mandelbrot-halmazról

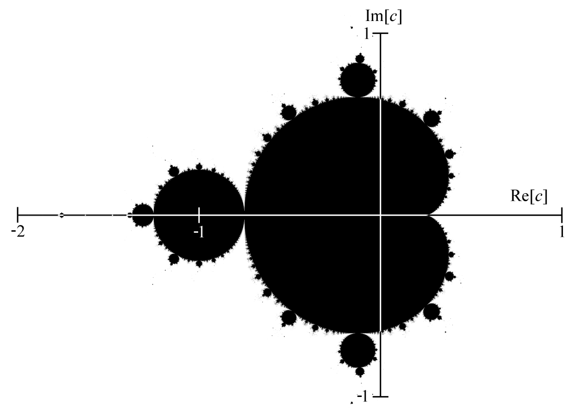
A fraktálok, úgynevezett "önhasonló", végtelenül komplex matematikai alakzatok, melyekben legalább egy felismerhető, azaz matematikai eszközökkel leírható ismétlődés tapasztalható. Ezt az elnevezést Benoit Mandelbrot adta a latin *fractus*, vagyis (törés) szó alapján, ami az ilyen alakzatok törtszámú dimenziójára utal.

Az önhasonlóság azt jelenti, hogy a fraktál egy kisebb része felnagyítva, ugyanolyan struktúrát mutat, mint egy nagyobb rész. Ezzel a tulajdonsággal a természetben is találkozhatunk, gondoljunk csak például a karfiol virágzatára, egy levél erezetére vagy akár egy hópehelyre. A fraktál szóval, az önhasonló alakzatok közül azokra utalunk, melyeket valamilyen matematikai formulával meg lehet adni.

Vegyük a következő komplex tagú sorozatot, és vizsgáljuk meg hogyan viselkedik, ha a c helyére különböző komplex számokat írunk:

$$z_0 = 0, z_n = z_{n-1}^2 + c.$$

Például $c = 1$ esetén a sorozatunk a végtelenbe fog tartani, viszont $c = i$ esetén a sorozatunk korlátos lesz. Most tapogassuk le a komplex számsíkot, oly módon, hogy minden számra ellenőrizzük, hogy a vizsgált sorozatunk korlátos-e. Amennyiben igen, ezt egy fekete ponttal jelöljük meg a komplex számsíkon. Ekkor a következő ábra fog keletkezni, amit felfedezője után, Mandelbrot-halmaznak neveztek el.



6.1. ábra. MANDELBROT-HALMAZ

Ha kinagyítjuk a képet és folyamatosan közelítünk felé, azt fogjuk tapasztalni, hogy a halmaz határvonalán bonyolult alakzatok körvonalazódnak ki, amelyek a közelítés hatására sem simulnak ki, sőt épppen ellenkezőleg, egyre összetettebbnek látszanak. Ez a Mandelbrot-halmaz egyik meglepő tulajdonsága: a határvonala végtelenül komplex, akármennyire is nagyítjuk, nem simul ki. Ebből következik egy újabb érdekes tulajdonság, miszerint a halmaz határvonala végtelen, ami meglepő, hiszen a halmaz területe véges.

Irodalomjegyzék

[1] R. REMMERT, H.-D. EBBINGHAUS, H. HERMES, F. HIRZEBRUCH, M. KOECHER, K. MAINZER, J. NEUKIRCH, A. PRESTEL, *Numbers, Chapter 3., Complex Numbers, 55.-96.*, Springer, New York, 1995.

[2] S. W. SMITH, *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, Chapter 30., Complex Numbers*, California Technical Publishing, San Diego, CA 1997.

[3] K. MATTHEWS, *Elementary Linear Algebra, Chapter 5., Complex Numbers*, University of Queensland 2005.
elektronikus jegyzet : http ://www.numbertheory.org/book/cha5.pdf

[4] KISS EMIL, *Bevezetés az Algebrába*, Typotex Kiadó

[5] J. DUNCAN, *Bevezetés a komplex függvénytanba*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

[6] TORDA BÉLA, *Bevezetés az elektronikába*,
elektronikus jegyzet : http ://www.muszeroldal.hu/measurenotes/torda2.pdf

[7] http ://hu.wikipedia.org

[8] http ://en.wikipedia.org