Öregedő eloszlások tulajdonságai

Szakdolgozat

Írta: Hermán Dániel

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Móri Tamás

egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Móri Tamásnak, hogy igényeim szerint mindig időt szakított rám, hogy tanácsaival mindig a jó irányba terelte munkámat, és hogy segített a dolgozat helyesírási és fogalmazásbeli pontatlanságait kiküszöbölni. Továbbá köszönöm családomnak, akik támogatják egyetemi pályafutásomat mind lelki, mind anyagi értelemben. Nem utolsó sorban pedig barátaimnak, szaktársaimnak a bíztatásukért és szobatársamnak, Gombár Tamásnak, akivel egymást ösztönözve közösen küzdöttük le ezt az időszakot.

Budapest, 2011. június 6.

Hermán Dániel

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezető

Megbízhatóság, mint fogalom, az élet megannyi területén előkerül. Valójában egy gyűjtőfogalom, amelyet a használhatóság és az azt befolyásoló tényezők, azaz a hibamentesség, a karbantarthatóság és a karbantartás-ellátás leírására használnak. De mi is az a matematikai megbízhatóságelmélet? Általában elmondható, hogy matematikai modellek és módszerek segítségével oldja meg a probléma előrejelzését, becslését vagy optimalizálja a túlélés valószínűségét, átlagos életettartamot. Vagy még általánosabban, élettartam-eloszlása egy komponensnek vagy rendszernek. További probléma amit a megbízhatóságelmélet magába foglal, például annak valószínűségnek a meghatározása, hogy a rendszer megfelelően működik, vagy egy megadott, vagy egy tetszőlegesen kiválasztott pillanatban, vagy az idővel arányosan. A megbízhatóságelmélet a valószínűségszámítás eszközeit használja, alapjait és fontosabb eredményeit először Barlow és Proschan foglalta össze 1965-ben [1]. Munkásságuk a mai napig megállja a helyét. A gyakorlatban az ipar és orvoslás területén van fontos szerepe, pl. ipari rendszerek, klinikai vizsgálatok során alkalmazzák. Ezen terület nagysága miatt a dolgozatban csupán a témakör néhány alapfogalmával és eredményeivel ismerkedünk meg. Részletesebben az öregedő tulajdonság definiálásával foglalkozunk, a 4. fejezetben pedig ennek hasznosságát megmutatva becsléseket vezetünk le az átlagos várható élettartamra a felújítási folyamatokban. A szakdolgozat gondolatmenetét leginkább Móri Tamás [4] jegyzete határozza meg.

2. fejezet

Öregedő eloszlások osztályai

Ebben a fejezetben bevezetjük a használt jelöléseket, megadjuk a definíciókat, áttekintjük a legfontosabb eloszlásokat, majd meghatározzuk az osztályokat és megnézzük a gyakorlatban is fontos szerepet játszó tulajdonságaikat.

Az élettartam-adatok matematikai szempontból nemnegatív valószínűségi változók. Jelöljük ezeket T-vel. T mutathatja a meghibásodásig (vagy halálig) eltelt időt egy elektronikus vagy mechanikai rendszerben (vagy egy élő szervezetben), de más értelmezésben is elképzelhető, például diszkrét esetben. A T valószínűségi változó eloszlásfüggvénye szokásos alakban felírva: $F(t) = P(T < t)$. Mivel tudjuk, hogy nem vehet fel negatív értékeket, ezért $F(t) = 0$, ha $t \leq 0$. A hagyományos eloszlásfüggvény helyett általában a megbízhatósági vagy más néven a *túlélésfüggvényt* használjuk,

$$\overline{F}(t) = P(T > t) = 1 - F(t). \tag{2.1}$$

Abszolút folytonos esetben a sűrűségfüggvény $f(t)$. A valószínűségi változó várható értékét jelöljük $E(T)$-vel, μ_r pedig legyen az r-edik momentum.

2.1. Hazárdráta

Jelentse $R(t) = -\log \overline{F}(t)$ a *hazárdfüggvény*t. Ha F abszolút folytonos, akkor a hazárdfüggvénye is az, és m.m. t-re $R'(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$, ahol $f(t) = F'(t)$ a sűrűségfüggvény. Ezt a továbbiakban $r(t)$-vel fogjuk jelölni és *hazárdrátának* vagy meghibásodási tényezőnek nevezzük. Ennek fizikai jelentése megértéséhez legyen A_1 az az esemény, hogy a komponens hibamentesen működik a $[t, t+\delta)$ szakaszban, A_2 pedig jelentse azt, hogy az adott összetevő hibamentesen működött az előző $[0, t)$ részen. A $[t, t+\delta)$ intervallumban történő működés valószínűsége, mint feltételes valószínűség, az alábbi módon számítható ki:

$$P(t, t+\delta) = P(A_1|A_2) = \frac{\overline{F}(t+\delta)}{\overline{F}(t)} = \frac{1 - F(t+\delta)}{\overline{F}(t)}$$

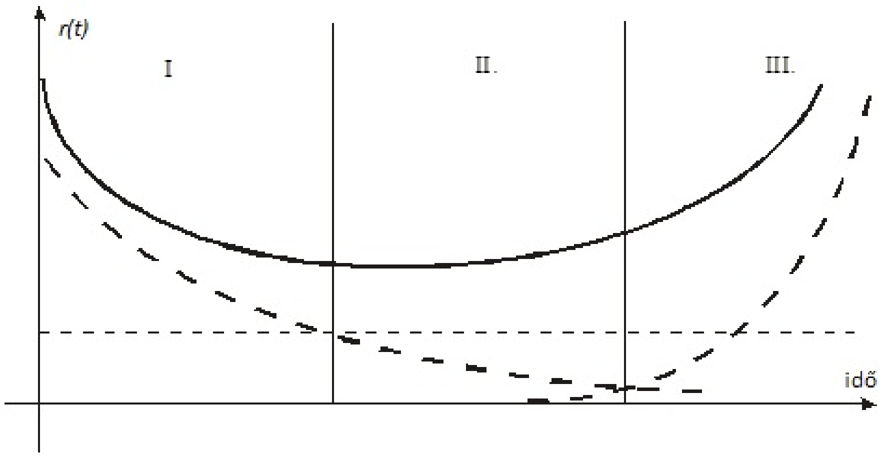
A $[t, t+\delta)$ intervallumon előforduló meghibásodás valószínűsége pedig, feltéve, hogy a komponens a $[0, t)$ részen működött:

$$1 - P(t, t+\delta) = \frac{F(t+\delta) - F(t)}{\overline{F}(t)}$$

Ha δ-val közelítünk 0-hoz, akkor a hazárdráta értelmezése a következő összefüggés szerint lehetséges:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{F(t+\delta)}{\delta \overline{F}(t)} = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} = r(t).$$

Tehát a hazárdráta lényegében annak a valószínűségét adja meg minden t időpillanatban, hogy a t időpontig hibamentesen működő komponens a következő időegység alatt meghibásodik.



1. ábra. *A hazárdráta[5]*

- I.: Korai meghibásodások
  - emberi hibák
  - nem megfelelő gyártási eljárás
- II.: Véletlen meghibásodások
  - megmagyarázhatatlan hibaokok
  - magas terhelés, igénybevétel
- III.: Elhasználódás
  - nem megfelelő karbantartás
  - öregedés miatti fáradás, kopás

Az $r(t)$ függvény az *1. ábrán* látható módon lehet monoton csökkenő, állandó, vagy monoton növekvő.

2.1. Állítás. *Legyen T_1 és T_2 független, r_1 és r_2 hazárdrátával. Ekkor:*

1. $\min\{T_1, T_2\}$ *hazárdrátája* $r_1 + r_2$,
2. $P(\min\{T_1, T_2\} = T_1 | \min\{T_1, T_2\} = t) = \frac{r_1(t)}{r_1(t)+r_2(t)}$

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a [4]-es jegyzetben.

2.2. Eloszlástípusok

A szakirodalomban nagyon sok féle eloszlást használnak élettartam-adatok modellezésére. A szakdolgozatnak nem célja egy átfogó tanulmányt adni, csupán a gyakorlatban sűrűn előfordulóak szerepelnek. Azokat az alapvető tulajdonságaikat mutatjuk be röviden, amelyek kapcsolódnak a megbízhatóságelmélethez.

(a) ***Exponenciális eloszlás***

Széles körben alkalmazzák a különféle statisztikai eljárásokban.

$$\overline{F}(t) = e^{-\lambda t}, \qquad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad \lambda > 0, t \geq 0, \qquad E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

Az exponenciális eloszlás akkor fordul elő a természetben, amikor egy homogén Poisson folyamatban leírja az érkezések közötti időt. A történések (pontok) gyakoriságát λ írja le. Erre

$$\overline{F}(x|t) = \overline{F}(x), \qquad \forall x, t \geq 0$$

ami azt jelenti, hogy a túlélés valószínűsége egy adott pillanatban független az egyed jelenlegi korától. Olyan összetevő tulajdonságát írja le, amely nem öregszik az idő múlásával, tehát a hazárdrátája konstans, $r(t) = \lambda$ – ez az ún. „*örökifjú*” tulajdonság.

(b) ***Gamma-eloszlás***

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}, \qquad E(T) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

ahol $\Gamma(\alpha)$ a gamma-függvényt jelöli és α, λ pozitív paraméterek. Speciálisan $\alpha = 1$-re visszakapjuk a λ paraméterű exponenciális eloszlást, pozitív egész α esetén pedig az *Erlang*-eloszlást, valamint ha $\alpha = \frac{\nu}{2}$, ahol ν pozitív egész, továbbá $\lambda = \frac{1}{2}$, akkor T-t ν szabadsági fokú χ^2-eloszlásúnak nevezzük. Meg lehet mutatni, hogy

$$\frac{1}{r(t)} = \int_0^\infty \left(1 + \frac{u}{t}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du.$$

Ebből következik, hogy $\frac{1}{r(t)}$ nő $0 < \alpha \leq 1$ intervallumon és csökken $\alpha \geq 1$-en, tehát $r(t)$ növekedő $\alpha \geq 1$-re és csökkenő $0 < \alpha \leq 1$ esetén. Továbbá

$$\mu_r = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^r \Gamma(\alpha)}.$$

(c) ***Weibull-eloszlás***

$$f(t) = \alpha\lambda(\lambda t)^\alpha e^{-(\lambda t)^\alpha}, \qquad \alpha, \lambda > 0, \qquad E(T) = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)$$

A Weibull-eloszlást egy svéd fizikus, Waloddi Weibull után nevezték el, aki 1939-ben használta ezt az eloszlást, anyagok szakítószilárdságának a leírására. 1951-ben már számos más alkalmazásban is szerepelt. Érdekes tulajdonsága, hogy a minimális mintaelemnek (független, azonos eloszlású valószínűségi változóknak) ez az egyik lehetséges határeloszlása. Erre

$$r(t) = \alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}, \qquad \mu_r = \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right)}{\lambda^r}.$$

(d) ***Lognormális eloszlás***

A lognormális eloszlást néha antilognormálisnak is szokták nevezni. Ez az alternatív elnevezés némi logika alapja, hogy T nem egy normális eloszlás logaritmusa, hanem egy exponenciális függvénye a változónak. Más szóval, ha $\log T$ egy normális eloszlás, akkor T egy lognormális eloszlás. Azonban a lognormális kifejezés a gyakrabban használt, így mi is ezt részesítjük előnyben.

$$F(t) = \Phi\left(\frac{\log t - \alpha}{\sigma}\right), \qquad f(t) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\log t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \sigma \geq 0\, t \geq 0,$$

ahol Φ definiálja a standard normális eloszlásfüggvényt, α paraméterrel. A modell érzékeny a kis meghibásodási időkre.

$$r(t) = \frac{\frac{1}{t\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\log at)^2}{2\sigma^2}}}{1 - \Phi\left(\frac{\log(at)}{\sigma}\right)}, \qquad a = e^{-\alpha}, \qquad \mu_r = \exp\left(r\alpha + \frac{r^2\sigma^2}{2}\right).$$

(e) ***Log-logisztikus eloszlás***

A log-logisztikus eloszlással a túlélésanalízisben olyan élettartamokat modelleznek, ahol kezdetben növekszik, majd csökken a hazárdráta, például a daganatos halálozásoknál. Egyszerűbb alakja miatt előnyben részesítik a lognormális eloszlással szemben.

$$\overline{F}(t) = \frac{1}{1 + (\lambda t)^\alpha}, \qquad f(t) = \frac{\alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}}{[1 + (\lambda t)^\alpha]^2}, \qquad t > 0,\ \lambda > 0,\ \alpha > 0$$

$$r(t) = \frac{\alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}}{1 + (\lambda t)^\alpha}, \qquad \mu_r = \frac{1}{\alpha\lambda} B\left(\frac{r}{\alpha}, 1 - \frac{r}{\alpha}\right),$$

ahol B a Béta-függvény. Megfelelő átparaméterezéssel megegyezik a Pareto-eloszlással.

(f) ***Inverz Gauss-eloszlás***

A név félrevezető lehet, az ”inverz” szó ugyanis csak annyit jelent, hogy amíg a Gauss-eloszlás leírja a Brown-mozgás helyzetét egy adott időpontban, addig az inverz Gauss az idő függvényében írja le egy adott pozitív szint elérését.

$$f(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\mu^2 t}(t-\mu)^2\right), \qquad \lambda > 0,\, t \geq 0, \qquad E(T) = \mu$$

Ha λ tart végtelenhez, akkor az inverz Gauss-eloszlás a normális (Gauss) eloszláshoz tart. Számos tulajdonságuk meg is egyezik. A hazárdráta képlete túl komplikált, ezért nem szerepeltetjük.

2.3. Osztályok

Az öregedés egy alkatrésznek vagy valamilyen más fizikai vagy biológia rendszernek mechanikus folyamata. Az a jelenséget értjük alatta, amikor egy régebbi rendszer hátralevő ideje rövidebb, néhány esetben sztochasztikus értelemben, mint egy újabb, fiatalabb egyednek. Sok kritériumot definiáltak már a szakirodalomban (l. Bryson és Siddiqui [9]). A koncepció szerint csökkenő (fiatalodó) és növekvő (öregedő) hazárdrátájú, egy dimenziós eloszlások nagyon hasznosak a megbízhatóságelmélet számára. Ez a tulajdonsága definiálja az IFR és DFR osztályokat, amelyeket már alaposan áttanulmányozták. Más osztályok, mint pl. az "átlagosan növekvő meghibásodási tényező" $IFRA$, "jobb az új a használtnál" NBU és "várhatóan jobb az új a használtnál" NBUE iránt is nagy az érdeklődés. Az öregedő osztály definiálhatjuk: a hazárdráta ($r(t)$), a feltételes túlélési függvény $\left(\overline{F}(t|s) = \frac{\overline{F}(t+s)}{\overline{F}(t)}\right)$ vagy az átlagos hátralevő élettartam,

$$\mu(t) = E(T - t|T > t) = \int_t^\infty \frac{\overline{F}(s)}{\overline{F}(t)} ds, \qquad \mu_F = \mu(0) = E(T)$$

segítségével, de más módokon is. Ez a három fogalom valószínűségi információt nyújt a hátralevő élettartamról, így ezen szempontok alapján osztályok is kialakíthatóak. Az alábbiakban öt ilyen osztályt vezetünk be (valójában tizet, mert mindegyik osztálynak létezik fiatalodó párja), ezeket az angol elnevezéseik kezdőbetűivel jelölik.

2.1. Definíció (IFR). *(**I**ncreasing **F**ailure **R**ate)*
$F \in IFR(DFR)$, ha $\forall s > 0$-ra $t \to \frac{\overline{F}(t+s)}{\overline{F}(t)}$ monoton csökkenő (növő) $0 \leq t$, $F(t) < 1$ esetén.

2.2. Definíció (IFRA). *(**I**ncreasing **F**ailure **R**ate **A**varage)*
$F \in IFRA(DFRA)$, ha $\overline{F}(t)^{\frac{1}{t}}$ monoton csökkenő (növő) függvénye t-nek.

2.3. Definíció (NBU). *(**N**ew **B**etter than **U**sed)*
$F \in NBU(NWU)$, ha $\forall t, s > 0$ esetén $\overline{F}(t+s) \leq (\geq) \overline{F}(t)\overline{F}(s)$.

2.4. Definíció (NBUE). *(**N**ew **B**etter than **U**sed in **E**xpectation)*
$F \in NBUE(NWUE)$, ha $\mu_F < \infty$ és $\mu(t) \leq (\geq) \mu_F$, $\forall t \geq 0$-ra.

2.5. Definíció (HNBUE). *(**H**armonic **N**ew **B**etter than **U**sed in **E**xpectation)*
$F \in HNBUE(HNWUE)$, ha $\mu_F < \infty$ és

$$\int_s^\infty \overline{F}(t)dt \leq (\geq) \mu_F e^{-\frac{s}{\mu_F}}, \qquad \forall s \geq 0.$$

2.4. Tulajdonságok

A következő tartalmazási reláció áll fenn az osztályok között.

2.2. Állítás. *IFR* $\subset$ *IFRA* $\subset$ *NBU* $\subset$ *NBUE* $\subset$ *HNBUE*

Bizonyítás.[7] Tudjuk, hogy az $IFR \subset IFRA \subset NBU \subset NBUE$ láncrészlet régóta ismert (Barlow és Proschan, 1981). A teljesség kedvéért a bizonyítás rövid vázlata a következő:

(i) $F \in IFR$, ha $R(t)$ (hazárdfüggvény) konvex, és $F \in IFRA$, ha $R(t)$ csillag-formájú függvény (azaz, ha $R(\lambda t) \leq -\lambda R(t)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ és $t \geq 0$ esetén). Mivel az R konvex függvény csillag-formájú és $R(0) = 0$ miatt $IFR \Rightarrow IFRA$. $\square$

(ii)

$$\begin{aligned}
F \in IFRA &\Longrightarrow \frac{1}{t}R(t) \qquad \text{növekvő} \\
&\Longleftrightarrow \overline{F}(t)^{\frac{1}{t}} \qquad \text{csökkenő} \\
&\Longleftrightarrow \overline{F}(t+s)^{\frac{1}{t+s}} \leq \overline{F}(t)^{\frac{1}{t}} \leq \overline{F}(s)^{\frac{1}{s}} \qquad \text{feltéve, hogy} \quad t > s \\
&\Longrightarrow \overline{F}(t+s)^{\frac{t+s}{t+s}} \leq \overline{F}(t)^{\frac{t+s}{t}} \\
&\Longrightarrow \overline{F}(t+s) \leq \overline{F}(t)\overline{F}(t)^{\frac{s}{t}} \leq \overline{F}(t)\overline{F}(s)^{\frac{s}{s}} = \overline{F}(t)\overline{F}(s) \\
&\Longleftrightarrow F \in NBU. \qquad \square
\end{aligned}$$

(iii) $F \in NBU \Leftrightarrow \frac{\overline{F}(t+s)}{\overline{F}(t)} \leq \overline{F}(s)$. Integráljuk mindkét oldalt s szerint:

$$\frac{1}{\overline{F}(t)} \int_0^\infty \overline{F}(t+s)ds \leq \int_0^\infty \overline{F}(s)ds,$$

ebből következik, hogy $\mu(t) \leq \mu_F$, tehát $F \in NBUE$. $\square$

(iv) Legyen $F \in NBUE$. Ekkor definíció szerint $\mu(t) \leq \mu_F$ minden $t \geq 0$-ra, tehát teljesül, hogy $\frac{1}{\mu(t)} \geq \frac{1}{\mu_F}$. Innen $\int_0^t \mu(s)ds \geq \frac{t}{\mu_F}$ vagy

$$\frac{1}{\frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{\mu(s)}ds} \leq \mu_F$$

a baloldal pont a harmonikus közepe az átlagos várható élettartamnak, amiből következik, hogy $F \in HNBUE$. $\square$

Az osztályok fontos jellemzője, hogy megőrzik-e az adott tulajdonságaikat, azaz zártak-e a konvolúcióképzésre (független valószínűségi változók összegére), illetve az alább bevezetett két műveletre: koherenciára és keverésre. Zártnak mondunk egy osztályt egy műveletre, ha elvégzése után ugyanazt az osztály tulajdonságot elégíti ki az eloszlás, mint előtte, különben pedig nem zártnak. Ezeket a (2.1) tételben egy táblázatban összefoglaljuk. A bizonyítások[7] sok esetben nem túl bonyolultak, de hosszadalmas lenne a levezetéseket részletezni.

Koherens rendszer

A hagyományos megbízhatóságelméletben, mind a rendszer, mind a komponensek kétféle állapotot vehetnek fel: működnek vagy nem. Léteznek több állapotú (ún. *multistate*) rendszerek, amelyeknek összetevői számára megengedett, hogy hibamentesen működő, részben működő, részben nem működő vagy működésképtelen állapotban legyenek. A dolgozat csak a hagyományos esetet részletezi.

- x_i: az i-edik komponenst állapotának indikátora: $x_i = 1$, ha az alkatrész hibamentesen működik, 0 egyébként.

- $\mathbf{x}$: n-dimenziós vektor reprezentálja az összes komponens állapotát $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- $\phi(\mathbf{x})$: a rendszer állapotát jelöli, más néven struktúrafüggvény
  $\phi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

- $(j_i, \mathbf{x})$: Az $\mathbf{x}$ vektorban az i-edik arugmentum értékét j-vel helyettesítjük ($j = 0, 1,\ i = 1, \ldots, n$).

Egy komponens *nem lényeges*, ha nem befolyásolja a szerkezet működését. A struktúrafüggvényből leolvasható, hogy az adott komponens lényeges-e egy adott rendszerben. A *rendszert koherens*nek nevezzük, ha: (1) a struktúrafüggvény monoton növekvő mindegyik argumentumában; (2) nem tartalmaz lényegtelen alkatrészt. Képlettel:

2.6. Definíció. *Egy n komponensű bináris rendszer koherens, ha struktúrafüggvényére teljesül*

1. *$\phi(\boldsymbol{x})$ minden változójában nem csökkenő;*

2. *létezik olyan $\boldsymbol{x}$ vektor, hogy $0 = \phi(0_i, \boldsymbol{x}) < \phi(1_i, \boldsymbol{x}) = 1$;*

Példák egyszerű rendszerekre:
soros kapcsolás: $\phi(x) = \min\{x_1, \ldots, x_n\} = \prod x_i$
párhuzamos kapcsolás: $\phi(x) = \max\{x_1, \ldots, x_n\} = 1 - \prod(1 - x_i)$

Keverés[6]

Tekintsük a következő példát. Tegyük fel, hogy egy dobozban különböző minőségű (hosszú, közepes és rövid élettartamú) égők vannak, majd a dobozból véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Feladatuk, hogy próbáljunk következtetni az égő minőségére. Az égő élettartamának eloszlása a mennyiségi arányokal súlyozott átlaga (keveréke) az egyes típusok élettartam-eloszlásainak. Ilyen keverékek adódnak heterogén populációkból, egy tipikus eset, amikor egy népesség két szubpopulációból áll (továbbiakban összetevői a keveréknek). k ($k \geq 2$) darab sűrűségfüggvényből álló keverék sűrűségfüggvénye (minden f_i p_i súllyal, azaz valószínűséggel szerepel):

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} p_i f_i(t), \qquad \text{ahol} \quad t \geq 0,\ 0 \leq p_i \leq 1 \text{ és } \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Ugyanígy a túlélésfüggvényre és hazárdrátára:

$$\overline{F}(t) = \sum_{i=1}^{k} p_i \overline{F}_i(t)$$

$$r(t) = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i f_i(t)}{\sum_{i=1}^{k} p_i \overline{F}_i(t)}$$

2.1. Tétel. *Összefoglalás az osztályok megőrzési tulajdonságairól:*

Osztály	***Konvolúció***	***Koherens rendszer***	***Keverés***
IFR	*zárt*	*nem zárt*	*nem zárt*
IFRA	*zárt*	*zárt*	*nem zárt*
NBU	*zárt*	*zárt*	*nem zárt*
NBUE	*zárt*	*nem zárt*	*nem zárt*
HNBUE	*zárt*	*nem zárt*	*nem zárt*
DFR	*nem zárt*	*nem zárt*	*nem zárt*
DFRA	*nem zárt*	*nem zárt*	*nem zárt*
NWU	*nem zárt*	*nem zárt*	*zárt*
NWUE	*nem zárt*	*nem zárt*	*zárt*
HNWUE	*nem zárt*	*nem zárt*	*nem zárt*

3. fejezet

A momentumok vizsgálata

Az elmúlt években egyre inkább megnőtt az érdeklődés az osztályok momentum tulajdonságai iránt. Nagy jelentőségű feladat, hogy statisztikai minta alapján döntsünk olyan hipotézisekről, hogy egy eloszlás egy adott osztályba tartozik-e. Ehhez segítségül szolgálnak az osztályok momentumegyenlőtlenségei. Sajnos néhány ezek közül elég bonyolult formulával rendelkezik, így a továbbiakban csak olyanok szerepelnek, amelyek érdekesek lehetnek az olvasó számára.

3.1. Tétel. *[8] Legyen F folytonos eloszlásfüggvény, μ_F és μ_r az eloszlás várható értéke és r-edik momentuma.*

(i) *Legyen $F \in IFR$ ekkor $\forall r_1, \dots, r_k \geq 0$ és $k \geq 0$ egészekre teljesül, hogy*

$$2^{C(\underline{r};k)} \prod_{i=1}^{k} (r_i + 1)! \nu_{\sum_{i=1}^{k} r_i + k} \geq \left(\sum_{i=1}^{k} r_i + k \right)! \prod_{i=1}^{k} \mu_{r_i+1},$$

ahol $C(\underline{r}; k) = \frac{(k+2)(k-1)}{2} + \sum_{i=1}^{k} i r_i - r_k$, $\nu_s = E[\min(T_1, T_2)]^s$ és T_1, T_2 független, F eloszlású valószínűségi változók.

(ii) *Legyen $F \in IFRA$ és Γ pedig jelentse a $\mathcal{G}$amma-függvényt, ekkor*

$$\mu_r \leq \Gamma(r+1)\mu_F^r, \qquad 0 \leq r \leq 1,$$

$$\mu_r \geq \Gamma(r+1)\mu_F^r, \qquad 1 < r \leq \infty.$$

Ezek a korlátok élesek.

(iii) *Legyen $F \in NBU$ és $k \geq 2$, továbbá $r_1, \ldots, r_k \geq 0$ egészek, ekkor*

$$\left(\sum_{i=1}^{k} r_i + k\right)! \prod_{i=1}^{k} \mu_{r_i+1} \geq \prod_{i=1}^{k} (r_i+1)! \left(\sum_{i=1}^{k} r_i + k\right) \mu_F.$$

(iv) *Ha $F \in NBUE$, akkor $\forall r \geq 0$ egészre*

$$\mu_{r+1}\mu_F \geq \frac{\mu_{r+2}}{r+2}.$$

(v) *Legyen $F \in HNBUE$, akkor $\forall r \geq 0$ egészre*

$$\mu_F^{r+2} \geq \frac{\mu_{r+2}}{(r+2)!}.$$

Bizonyítás.

(i) Első lépésben megmutatjuk, hogy $F \in IFR$ akkor és csak akkor, ha $\forall t_1, \ldots, t_k \geq 0$ esetén

$$\overline{F}^2\left(\frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{4} + \cdots + \frac{t_{k-1}}{2^{k-1}} + \frac{t_k}{2^{k-1}}\right) \geq \prod_{i=1}^{k} \overline{F}(t_i).$$

Ha $F \in IFR$ akkor $R(t)$ konvex. Ezért $-\log \overline{F}\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leq -\frac{1}{2}\log \overline{F}(t_1) -$

$\frac{1}{2}\log\overline{F}(t_2)$, vagyis $\overline{F}^2\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \geq \overline{F}(t_1)\overline{F}(t_2)$. Hasonlóan

$$\overline{F}^2\left(\frac{t_1}{2}+\frac{t_2+t_3}{4}\right) \geq \overline{F}(t_1)\overline{F}\left(\frac{t_2+t_3}{2}\right) \geq$$

$$\geq \overline{F}\left(\frac{t_2+t_3}{2}\right) \geq \overline{F}(t_1)\overline{F}(t_2)\overline{F}(t_3).$$

Az eredmény indukcióval kapható. Ezért nemnegatív egészekre $r_1,\ldots,r_k$ és $k\geq 2$-re,

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty t_1^{r_1}\cdots t_k^{r_k}\,\overline{F}^2\left(\frac{t_1}{2}+\frac{t_2}{4}+\cdots+\frac{t_{k-1}}{2^{k-1}}+\frac{t_k}{2^{k-1}}\right)dt_1\cdots dt_k \geq$$
$$\geq \prod_{i=1}^{k}\int_0^\infty t_i^{r_i}\overline{F}(t_i)dt_i \tag{3.1}$$

$$\text{Itt}\ \int_0^\infty t^r\overline{F}(t)dt = E\int_0^\infty t^r I(T>t)dt = \frac{1}{r+1}E(T^{r+1}) = \frac{\mu_{r+1}}{r+1}.$$

Ezért a (3.1) egyenletőtlenség jobb oldalán $\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu_{r_i+1}}{r_i+1}$ áll. A következőben megnézzük (3.1) baloldalát. Legyen $u_1=\frac{t_1}{2}+\frac{t_2}{4}+\cdots+\frac{t_{k-1}}{2^{k-1}}+\frac{t_k}{2^{k-1}}$, $u_2=\frac{t_2}{4}+\cdots+\frac{t_{k-1}}{2^{k-1}}+\frac{t_k}{2^{k-1}}$, $u_{k-1}=\frac{t_{k-1}}{2^{k-1}}+\frac{t_k}{2^{k-1}}$, $u_k=\frac{t_k}{2^{k-1}}$. Így $t_1=2(u_1-u_2)$, $t_2=2^2(u_2-u_3)$, $\ldots$, $t_{k-1}=2^{k-1}(u_{k-1}-u_k)$ és $t_k=2^{k-1}u_k$. Nézzük a Jacobi transzformációt:

$$|J| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 2^2 & -2^2 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & -2^{k-1} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 2^{k-1} \end{vmatrix} = 2^{(\sum_{i=1}^{k-1} i)+k-1} \to 2^{\frac{(k+2)(k-1)}{2}}.$$

Így, ha bevezetjük a $C(\underline{r};k) = \frac{(k+2)(k-1)}{2} + \sum_{i=1}^{k} ir_i - r_k$ jelölést, akkor (3.1) bal oldala

$$2^{C(\underline{r};k)} \int_0^\infty \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_{k-2}} \left(\int_0^{u_{k-1}} u_k^{r_k} (u_{k-1} - u_k)^{r_{k-1}} du_k \right) (u_{k-2} - u_{k-1})^{r_{k-2}} du_{k-1}$$

$$\dots (u_1 - u_2)_1^r \overline{F}^2(u_1) du_1 =$$

$$= 2^{C(\underline{r};k)} B(r_k + 1, r_{k-1} + 1) B(r_k + r_{k-1} + 2, r_{k-2} + 1) \cdots$$

$$\cdots B\left(\sum_{i=1}^{k} (r_i + 1) - 1, r_1 + 1 \right) \int_0^\infty u_1 \left(\sum_{i=1}^{k} r_i + k - 1 \right) \overline{F}^2(u_1) du_1 =$$

$$= \frac{2^{C(\underline{r};k)} \prod_{i=1}^{k} r_i!}{\left(\sum_{i=1}^{k} r_i + k \right)!} \nu_{\sum r_i + k}$$

Mivel $\int_0^\infty u^s \overline{F}^2(u) du = \frac{\nu_{s+1}}{s+1}$, az eredmény következik. $\square$

3.1. Következmény. $r_i = 0$, $i = 1, \dots, k$ *választással* $\forall k \geq 2$*-re,*

$$2^{\frac{(k+2)(k-1)}{2}} \nu_k \geq k! \mu^k$$

3.2. Következmény. *Legyen* $k = 2$ *és* $r_1 = r_2 = r$*, akkor azt kapjuk, hogy*

$$\nu_{2r+2} \geq \binom{2r+2}{r+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{2r+2} \mu_{r+1}^2.$$

(ii) $F \in IFRA$, ez ekvivalens azzal, hogy R csillag-formájú függvény, ami úgy is átfogalmazható, hogy ha G egy tetszőleges exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye, akkor $\overline{F}$ legfeljebb egyszer metszi át $\overline{G}$-t. Ha $\overline{G}(t) = e^{-t\left(\frac{\Gamma(s+1)}{\mu_s}\right)^{\frac{1}{s}}}$ *akkor,*

$$\int_0^\infty t^s dG(t) = \int_0^\infty t^s \left(\frac{\Gamma(s+1)}{\mu_s} \right)^{\frac{1}{s}} e^{t\left(\frac{\Gamma(s+1)}{\mu_s}\right)^{\frac{1}{s}}} dt = \mu_s = \int_s^\infty t^s dF(t),$$

így $\overline{F}$ pontosan egyszer metszi $\overline{G}$-t. Az is belátható, hogy

$$\int_0^\infty \psi(t)t^{s-1}\overline{F}(t)dt \le \int_0^\infty \psi(t)t^{s-1}\overline{G}(t)dt, \qquad s>0 \tag{3.2}$$

ha ψ monoton növő. Most tegyük fel, hogy $0<r<s$, ezt követve az r-edik momentum

$$\mu_r = r\int_0^\infty t^{r-1}\overline{F}(t)dt = r\int_0^\infty t^{r-1}e^{-t\left(\frac{\Gamma(s+1)}{\mu_s}\right)^{\frac{1}{s}}}dt,$$

azaz

$$\int_0^\infty t^{r-1}\overline{F}(t)dt = \int_0^\infty t^{r-1}e^{-t\left(\frac{\Gamma(s+1)}{\mu_s}\right)^{\frac{1}{s}}}dt$$

Legyen $\psi(t)=t^{s-r}$ és alkalmazzuk (3.2)-t, ebből kapjuk, hogy

$$\frac{\mu_s}{\Gamma(s+1)} = \frac{1}{\Gamma(s+1)}\int_0^\infty st^{s-1}\overline{F}(t)dt \le$$

$$\le \int_0^\infty \frac{st^{s-1}}{\Gamma(s+1)}e^{-t\left(\frac{\Gamma(s+1)}{\mu_s}\right)^{\frac{1}{s}}}dt = \left(\frac{\mu_r}{\Gamma(r+1)}\right)^{\frac{s}{r}}$$

amiből

$$\left(\frac{\mu_r}{\Gamma(r+1)}\right)^{\frac{1}{r}} \ge \left(\frac{\mu_s}{\Gamma(s+1)}\right)^{\frac{1}{s}}, \qquad 0<r<s.$$

Ha $s=1$, akkor azt kapjuk, hogy $\mu_r = \Gamma(r+1) \ge \mu_F^r$, $0<r<1$-re. Az egyenlőtlenségek fordítva állnak $1<r<\infty$-re. $\square$

(iii) $F \in NBU$, esetén indukcióval $\overline{F}(t_1+\cdots+t_k) \le \overline{F}(t_1)\cdots\overline{F}(t_k)$. Ezért

$$\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty t_1^{r_1}\cdots t_k^{r_k}\overline{F}(t_1+\cdots+t_k)dt_1\ldots dt_k \le \prod_{i=1}^k\int_0^\infty t_i^{r_i}\overline{F}(t_i)dt_i \tag{3.3}$$

Itt a jobb oldal megegyezik $\prod_{i=1}^k \frac{\mu_{r_i+1}}{r_i+1}$-val. Most a bal oldal átalakításával foglalkozunk: legyen $u_1=t_1+\cdots+t_k$, $u_2=t_2+\cdots+t_k$, $\ldots$,

$u_k = t_k$. A transzformáció Jacobi determinánsa 1. Így (3.3) bal oldala

$$\int_0^\infty \int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_{k-2}} \int_0^{u_{k-1}} \overline{F}(u_1)(u_1-u_2)^{r_1} \cdots (u_{k-1}-u_k)^{r_{k-1}} u_k^{r_k} du_k \cdots du_1 =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^k r_i!}{\left(\sum_{i=1}^k r_i + k - 1\right)!} \frac{1}{\sum_{i=1}^k r_i + k} \mu_{\sum r_i + k}.$$

Az eredmény ebből következik. $\square$

3.3. Következmény. *Ha $r_i = 0$, $\forall i$-re, akkor azt kapjuk, hogy $\forall k \geq 2$ esetén $\mu_F^k \geq \frac{\mu_k}{k!}$.*

(iv) Mivel $F \in NBUE$, ezért $\overline{w}(t) \leq \mu_F \overline{F}$, ahol $\overline{w}(t) = \int_t^\infty \overline{F}(u)du = E(T-t)I(T>t)$. Tehát $\forall r \geq 0$ egészre

$$\mu_F \int_0^\infty t^r \overline{F}(t)dt \geq \int_0^\infty t^r \overline{w}(t)dt.$$

A bal oldal megint csak egyenlő $\frac{\mu_F \mu_{r+1}}{r+1}$-gyel. A jobb oldal pedig

$$E\int_0^\infty t^r (T-t)I(T>t)dt = E\Big[T\int_0^T t^r dt - \int_0^T t^{r+1}dt\Big] =$$

$$= E(T^{r+2})\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) = \frac{\mu_{r+2}}{(r+1)(r+2)}. \qquad \square$$

Ebben az esetben is teljesül $r = 0$ választással, hogy ha $r = 0$, akkor ${\mu_F}^2 \geq \frac{\mu_2}{2}$.

(v) Ha $F \in HNBUE$, akkor $\overline{w}(t) \leq \mu_F e^{-\frac{t}{\mu_F}}$ és ezért

$$\mu \int_0^\infty t^r e^{-\frac{t}{\mu_F}} dt \geq \int_0^\infty t^r \overline{w}(t)dt.$$

Bal oldal: $\frac{\mu_{r+2}}{(r+1)(r+2)}$, jobb oldal: $\mu_F^r(r!)$. $\square$

4. fejezet

Felújítási folyamat

A fejezetben néhány lineáris becslést adunk a felújítási függvényre és a varianciafüggvényre, kihasználva, hogy F öregedő eloszlású (Marshall [10]). Általában lehetetlen analítikus kifejezéseket találni a felújítási függvényre és a varianciafüggvényre, ezért a korlátoknak létezése önmagában is nagy jelentőségű.

Legyen $\{T_n\}_{n=1,2,\ldots}$ független, nemnegatív élettartamok sorozata, azonos F eloszlással. Tegyük fel, hogy F-nek pozitív a várható értéke, ($F(0) < 1$) és véges a szórása, $\sigma^2 = \mathcal{D}^2(T_1)$. Legyen $S_0 = 0$ és $S_n = T_1 + \cdots + T_n$, továbbá

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}, \qquad t \geq 0,$$

a felújítások száma a t időpontig. Az $\{N(t),\, t \geq 0\}$ szotchasztikus folyamat *felújítási függvénye*,

$$M(t) = E(N(t)).$$

Az első felújítási idő hossza szerint véve a teljes várható érték tételét a következő összefüggést kapjuk:

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x), \qquad t \geq 0. \tag{4.1}$$

$M(t)$ aszimptotikus viselkedése:

$$\lim_{t\to\infty}\left(M(t) - \frac{t}{\mu_F}\right) = \frac{\sigma^2 - \mu_F^2}{2\mu_F^2}.$$

A (4.1) felújítási egyenletben, legyen F abszolút folytonos eloszlású. $M_1(t)$-t önkényesen választva legyen:

$$M_{k+1}(t) = F(t) + \int_0^t M_k(t-x)dF(x), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

Xie [12] bebizonyította, hogy minden t-re, amelyre $F(t) < 1$, $M_k(t)$ pontonként konvergál $M(t)$-hez ha $k \to \infty$. Továbbá ha $M_1(t) \leq M_2(t)$ minden $t \leq T$ esetén, akkor a konvergencia monoton,

$$M_1(t) \leq \cdots \leq M_k(t) \leq M_{k+1}(t) \leq \cdots \leq M(t). \tag{4.3}$$

Az $\{N(t),\, t \geq 0\}$ felújítási folyamatnak variancia függvénye

$$V(t) = E(N^2(t)) - M^2(t) = M(t)(1 - M(t)) + 2M * M(t), \qquad t \geq 0,$$

ahol $M * M(t) = \int_0^t M(t-x)dM(x)$. Meg lehet mutatni, hogy a varianciafüggvény eleget tesz a következő integrálegyenletnek:

$$V(t) = M(t) + M * F(t) - M^2(t) + M^2 * F(t) + \int_0^t V(t-x)dF(x), \qquad t \geq 0.$$

A varianciafüggvény aszimptotikája:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{V(t)}{t}=\frac{\sigma^2}{\mu_F^3},\qquad \sigma^2<\infty$$

4.1. Korlátok a felújítási és varianciafüggvényre

Felújítási függvény

A felújtási egyenletből könnyen kihozható, hogy

$$F(t)\le M(t)\le\frac{F(t)}{\overline{F}},\qquad t\ge 0$$

Marshall [10] eredménye egy lineáris korlát:

$$\lambda t+b_1\le M(t)\le \lambda t+b_u,\qquad t\ge 0,\tag{4.4}$$

ahol $\lambda=\frac{1}{\mu_F}$,

$$b_1=\inf_{t\ge 0}\frac{F(t)-F_e(t)}{\overline{F}(t)},$$

$$b_u=\sup_{t\ge 0}\frac{F(t)-F_e(t)}{\overline{F}},$$

és $F_e(t)=\dfrac{1}{\mu_F}\displaystyle\int_0^t\overline{F}(x)dx,$ az ún. egyensúlyi eloszlás.

Barlow és Proschan [2] megmutatta, hogy ha F-nek létezik sűrűségfüggvénye és $\alpha\le r(t)\le\beta$, $(\alpha\le 0,\ \beta\ge 0)$, akkor

$$\lambda t-\frac{\lambda}{\beta}-1\le M(t)\le\lambda t+\frac{\lambda}{\alpha}-1.$$

Varianciafüggvény

Adunk egy lineáris korlátot $at + b$ alakban a varianciafüggvényre.

4.1. Tétel. **(i)** *Legyen* $a \geq \frac{1}{\mu}$ *és* $b \leq 0$ *konstans. Tegyük fel, hogy*

$$\int_t^{\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(t)} dx \leq \frac{1+a}{b}, \qquad \forall t \geq 0\text{-ra, továbbá}$$

$M(t)$ szuperadditív, azaz $M(t+s) \geq M(t)+M(s)$, akkor $V(t) \leq at+b$.

(ii) *Legyen* $a \leq \frac{1}{\mu}$ *és* $b \leq 0$ *konstans. Tegyük fel, hogy*

$$\int_t^{\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(t)} dx \geq \frac{1+a}{b}, \qquad \forall t \geq 0\text{-ra, továbbá}$$

$M(t)$ szubadditív, azaz $M(t+s) \leq M(t)+M(s)$, akkor $V(t) \geq at+b$.

Bizonyítás.

(i) Legyen $M_1(t) = at + b$ a (4.1) egyenletben.

$$\begin{aligned} M_2(t) &= F(t) + \int_0^t M_1(t-x) dF(x) \\ &= F(t) + \int_0^t (at - ax + b) dF(x) \\ &= F(t) + aF(t) + bF(t) - a \int_0^t x dF(x) \\ &= F(t) + bF(t) + a \int_0^t F(x) dx. \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $\displaystyle\int_0^t F(x)dx = \int_t^{\infty} F(x)dx + t - \mu, \qquad \int_t^{\infty} \overline{F} dx \leq \frac{1+b}{a} \overline{F}(t)$

és $a\mu \geq 1$, ebből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} M_2(t) &= F(t) + bF(t) + a\int_t^\infty \overline{F}(x)dx + at - a\mu \\ &\leq F(t) + bF(t) + (1+b)\overline{F}(t) + at - 1 \\ &= at + b = M_1(t) \end{aligned}$$

Így az következik (4.3)-ből, hogy $M(t) \leq at + b$. Továbbá, mivel $M(t)$ szuperadditív (szubadditív) $\Rightarrow V(t) \leq (\geq) M(t)$. $\square$

(ii) Az egyenlőtlenségjeleket megfordítva kapjuk az állítást az előzőből.

Megjegyezzük, hogy ha $F \in NBU$(NWU) akkor $M(t)$ szuperadditív (szubadditív) (Barlow és Proschan [3]).

4.1. Következmény. *$a = \frac{1}{\mu}$ és $b = 0$ választással*

$$F \in NBU\,(NWU) \;\Rightarrow\; V(t) \leq (\geq)\frac{t}{\mu}.$$

Megjegyzés. Használjuk fel, hogy [3] szerint

$$F \in NBUE\,(NWUE) \Rightarrow E(N^k(t)) \leq (\geq) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^k (\frac{t}{\mu})^s}{s!} e^{-\frac{t}{\mu}}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

ami $k = 2$ választással $E(N^2(t)) \leq (\geq) \frac{t}{\mu} + \frac{t^2}{\mu^2}$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$F \in NBUE\,(NWUE) \Rightarrow V(t) \leq (\geq) \frac{t}{\mu} + \frac{t^2}{\mu^2} - M^2(t).$$

Irodalomjegyzék

[1] R.E. Barlow and F. Proschan: *Mathematical Theory of Reliability*, Siam, 1965

[2] R.E. Barlow and F. Proschan: *Comparison of Replacement Policies, and Renewal Theory Implications*, Ann. Math. Statist., 35 (1964)

[3] R.E. Barlow and F. Proschan: *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York (1975)

[4] Móri Tamás: *Élettartam-adatok elemzése*, Typotex, Budapest, 2011

[5] Kövesi János és Erdei János: *Kockázat és megbízhatóság - oktatási segédanyag*, BME-GTK Ipari Menedzsment és Vállalkozásgazdaságtan Tanszék, 2004

[6] Hoang Pham: *Handbook of Reliability Engineering*, Springer, 2003

[7] Chin-Diew Lai and Min Xie: *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*, Springer, 2006

[8] Ibrahim A. Ahmad: *Moments inequalities of aging families of distributions with hypotheses testing applications*, Journal of Statistical Planning and Inference 92(121-132), (2001)

[9] Bryson and Siddiqui: *Some criteria for aging*, Journal of the American Statistical Association 64(1472-1483), (1969)

[10] K.T. Marshall: *Linear bounds on the Renewal function*, Siam J. Appl. Math 24(2), (1973)

[11] H. Aydogdu and F. Öztürk: *Some Bounds for the Variance Function in Renewal Processes*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series 47(85-96), (1998)

[12] Min Xie: *Some Results on the Renewal Equations*, Commun. Statist. Theory Meth. 18(3), (1989)