ADAPTÍV VÉGESELEM-MÓDSZEREK 2-DIMENZIÓBAN

Szakdolgozat

Írta: Csirik Mihály

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Horváth Tamás

tudományos segédmunkatárs

Alkalmazott Analízis Tanszék

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MMXII

Ez az oldal szándékosan üres.

Ancsinak

Ez az oldal szándékosan üres.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Horváth Tamásnak, hogy figyelemmel kísérte és felülvigyázta e munkát. Köszönettel tartozom hozzátartozóimnak, hogy lehetőségeikhez mérten nyugodt munkakörülményeket biztosítanak szakmai előrehaladásom segítése érdekében.

Ez a munka nem jöhetett volna létre az Interneten fellelhető anyagok nélkül, amely egy részéhez az ELTE jóvoltából tudtam hozzáférni.

A dolgozatot LaTeX-hel szedtem ki, a MagyarLaTeX, memoir, hyperref, AMS-LaTeX, *&c, &c, &c* csomagok felhasználásával. Az ábrákat az Inkscape GPL licenszű vektorgrafikus programmal szerkesztettem.

Ez az oldal szándékosan üres.

Tartalomjegyzék

Előszó

A végeselem-módszereket általában alacsony dimenziós feladatokra alkalmazzák ($n \leq 4$), ezek közül az egydimenziós eset szinte kizárólag oktatási célokat szolgál. Az egzotikus négydimenziós esettől eltekintve főként három-, kevesebb részben kétdimenziós problémákat oldanak meg a végeselem-módszerrel.

Egy modern, geometriát gyakran használó elmélettől manapság elvárják, hogy koordinátafüggetlen módon legyen exponálva, már az egyetemi tananyag is inkább ezt a nézőpontot propagálja. Az interpoláció és a kvadratúra hagyományosan kivétel ezalól, ott a klasszikus eredmények egy dimenzióra vonatkoznak, és a XIX. századi analízis egy esztétikai csúcsát alkotják. Azonban tény, hogy a hagyományos végeselem-diszkretizáció elméleti alapjai között van a Szoboljev-terek polinomiális approximációelmélete és a többdimenziós Lagrange-interpoláció elmélete, így ezeket viszonylag részletesen bemutatom egy-egy függelék erejéig.

A dolgozat írása során arra törekedtem, hogy lehetőleg a szépen és egyszerűen kezelhető témákat érintsem – elvégre az elliptikus peremértékfeladatoknál egyszerűbben és szebben kezelhető, gyakorlatban is előforduló probléma nemigen van ezen a területen. Reményeim szerint a dolgozat a hozzáértőknek is tud érdekességekkel szolgálni.

Ez az oldal szándékosan üres.

1 A Poisson peremérték-feladat

1.1. Modellfeladat

Modellfeladatként tekintsük a

$$\left.\begin{aligned} -\triangle u &\equiv f \quad (\Omega\text{-n}) \\ u|_{\mathcal{D}} &= 0 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega\setminus\mathcal{D}} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Poisson peremérték-feladatot egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz-tartományon, ahol $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\mathrm{cl}\,\Omega)$ (a *klasszikus megoldás*: a differenciálegyenlet pontonként érvényes) és $f \in L^2(\Omega)$.

- A $\mathcal{D}$ zárt, $\sigma(D) > 0$[1] halmazon előírt feltételt *Dirichlet-peremfeltételnek* nevezik.
- A $\partial\Omega\setminus\mathcal{D}$ komplementeren megadott, az u normális irányú deriváltjának eltűnését *Neumann-peremfeltételnek*, amelyet a $\mathcal{D} = \emptyset$ esetben a *tiszta* jelzővel illetnek.

A szokásos módon feladatot homogén peremfeltételekkel adjuk meg, az inhomogén esettel később foglalkozunk.

Feltételezzük, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Lipschitz-tartomány*: korlátos és nyílt, valamint minden $x \in \partial\Omega$ ponthoz létezik $r > 0$ és

$$b_x \,:\, B(x,r) \longrightarrow B(0,1)$$

függvény úgy, hogy

- b_x bijekció,
- b_x és b_x^{-1} egyaránt Lipschitz-folytonosak,
- $b_x(\partial\Omega \cap B(x,r)) = B(0,1) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$, és
- $b_x(\Omega \cap B(x,r)) = B(0,1) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)$.

1.2. A H^1 Szoboljev-tér. Gyenge alak

A végeselem módszer *gyenge alakkal* értelmezett peremérték-feladatokkal foglalkozik, ahogyan sok más numerikus PDE-megoldó módszer is (az elméletről nem is beszélve!), ezért az (1.1)

[1] A szokásos módon λ jelöli az n-dimenziós, σ pedig a $(n-1)$-dimenziós Lebesgue-mértéket.

klasszikus megfogalmazást át kell alakítanunk. A gyenge alakra való generalizáció esetünkben triviális, a peremfeltételek helyes értelmezéséhez azonban a Szoboljev-terek elméletéből ismert trace-operátort kell alkalmaznunk.

Legyen $u \in H^2(\Omega)$ ($\subset H^1(\Omega)$), és a jól ismert módon szorozzuk meg az (1.1) egyenletet (immár disztribúció értelemben véve) egy tetszőleges $v \in H^1(\Omega)$, $\mathcal{D} \subset \partial\Omega$-n eltűnő függvénnyel – régiesen *tesztfüggvénnyel* –, és integráljunk az Ω tartományon:

$$\int_\Omega (-\triangle u) v \, d\lambda = \int_\Omega f v \, d\lambda.$$

Alkalmazzuk a Green-tétel H^1-analogonját [12, p. 248], [4, p. 130] a bal oldali integrálra,

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma + \int_\Omega (\nabla u, \nabla v) \, d\lambda = \int_\Omega f v \, d\lambda, \tag{1.2}$$

ahol a bal oldali peremintegrál eltűnik, egyrészt $\mathcal{D}$-n v választása miatt, másrészt $\partial\Omega \setminus \mathcal{D}$-n a $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ Neumann-peremfeltétel miatt, és máris kapjuk a gyenge alakot:

$$\int_\Omega (\nabla u, \nabla v) \, d\lambda = \int_\Omega f v \, d\lambda. \tag{1.3}$$

Felidézzük a *klasszikus Szoboljev-tér* fogalmát:

$$H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ : \ \forall |\alpha| \leq s \text{ multiindexre } D^\alpha u \in L^2(\Omega)\},$$

ellátva az

$$(u, v)_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq s} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

belső szorzattal Hibert-tér, amelyre $H^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Fontos továbbá megjegyezni, hogy $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $H^s(\Omega)$-ban, ez a tény igen gyakran használt eszköz a végeselem-módszerek elméletében.

Visszatérve az (1.3) gyenge alakhoz; szokás bevezetni a bal oldali integrálra az

$$a(u, v) := a(u, v; \Omega) := \int_\Omega (\nabla u, \nabla v) \, d\lambda, \tag{1.4}$$

valamint a bal oldalira az

$$F(v) := (f, v)_{L^2(\Omega)}$$

jelölést. Az világos, hogy $a(\cdot, \cdot; \Omega)$ szimmetrikus bilineáris forma, $F \in H^1(\Omega)'$ folytonos lineáris funkcionál. Természetesen az $a(u, v) = F(v)$ funkcionálegyenlet megoldhatóságának kérdése a következő fő feladat, előtte azonban nem árt tisztázni egy delikát kérdést.

Az iménti gondolatmenetben mélyen hallgattunk arról a kellemetlen tényről, hogy attól még, hogy egy λ-nullmértékű halmazon (az egyszerűség kedvéért $\mathcal{D} = \partial\Omega$ a szakasz végéig) előírjuk v eltűnését, az változatlan marad – az L^p terekkel analóg okok miatt.

A nehézség persze áthidalható [12, pp. 79–], de itt nem fogjuk részletesen tárgyalni. Azt jegyezzük meg mindössze [1], hogy meg lehet konstruálni egy

$$\mathrm{Tr} \,:\, H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$$

lineáris operátort amelyre $\mathrm{Tr}\, v = v\big|_{\partial\Omega}$ teljesül, valamint van olyan $C > 0$ konstans, amellyel

$$\|\,\mathrm{Tr}\, v\,;\, L^2(\partial\Omega)\| \le C\,\|v\,;\, H^1(\Omega)\| \quad (\forall v \in H^1(\Omega)). \tag{1.5}$$

Mivel $\mathrm{cl}_{H^1(\Omega)}\, C^1(\mathrm{cl}\,\Omega) = H^1(\Omega)$, adott $v \in H^1(\Omega)$ elemhez létezik $(v_n) \subset C^1(\mathrm{cl}\,\Omega)$, amelyre $\|v_n - v\,;\, H^1(\Omega)\| \longrightarrow 0$. Az iménti egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$\|\,\mathrm{Tr}\, v - \mathrm{Tr}\, v_n\,;\, L^2(\partial\Omega)\| \longrightarrow 0$$

is fennáll, ezért a

$$v\big|_{\partial\Omega} := \lim(\mathrm{Tr}\, v_n)$$

definícióban a limesz legalábbis létezik és egyenlő $\mathrm{Tr}\, v$-vel; sőt, az is belátható, hogy $v\big|_{\partial\Omega}$ nem függ a (v_n) sorozat partikuláris választásától.

Kevert peremfeltételek

Amennyiben Dirichlet-, és Neumann-peremfeltételek is egyaránt jelen vannak, azaz $\mathcal{D} \neq \emptyset$ és $\sigma(\mathcal{D}) > 0$, akkor az

$$X_0 := \left\{\, v \in H^1(\Omega) \;:\; v\big|_{\mathcal{D}} = 0 \right\} \tag{1.6}$$

függvénytérben „variáljuk” a tesztfüggvényeket. Az előzőek tükrében, ha $u \in H^2(\Omega)$ megoldja az (1.1) feladatot, akkor

$$u \in X_0, \text{ és } \forall v \in X_0 \text{ esetén } a(u,v) = F(v), \tag{1.7}$$

és $f \in L^2(\Omega)$. Megmutatjuk, hogy egy gyenge megoldás klasszikus is [4, p. 131].

(1.2.1) Tétel. *Legyen $f \in L^2(\Omega)$ és tegyük fel, hogy $u \in H^2(\Omega)$ kielégíti az* (1.7) *feltételt. Ekkor u megoldása az* (1.1) *feladatnak.*

Bizonyítás. Legyen $v \in C_0^\infty(\Omega) \subset X_0$, ekkor

$$\int_\Omega (f + \triangle u) v \, d\lambda = F(v) - \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, d\lambda = 0,$$

ismét a Green-tétel miatt, de ezúttal a peremintegrál eltűnésének oka $\mathrm{supp}\, v \subset \Omega$. Tekintettel arra, hogy $\mathrm{cl}_{L^2(\Omega)}\, C_0^\infty(\Omega) = L^2(\Omega)$, a differenciálegyenletet $L^2(\Omega)$ $(\supset H^2(\Omega))$ értelemben u kielégíti.

Világos, hogy a Dirichlet-peremfeltétel teljesül, elvégre $u \in X$. A Neumann-peremfeltétel ellenőrzéséhez használjuk fel az iménti eredményt:

$$\begin{aligned}
\forall v \in X \ : \ 0 &= F(v) - a(u,v) \\
&= \int_\Omega f v \, d\lambda - \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, d\lambda \\
&= \int_\Omega (-\triangle u) v \,\lambda - \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, d\lambda \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma && \text{(Green-tétel)} \\
&= \int_{\partial\Omega \setminus \mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma && (v \in X_0)
\end{aligned}$$

Be kell látnunk, hogy $v\big|_{\partial\Omega\setminus\mathcal{D}}$ tetszőleges lehet, ahogyan v végigfut X-en, ekkor következni fog, hogy $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega\setminus\mathcal{D}} \equiv 0$. Válasszunk egy $x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{D}$ pontot, ekkor Ω Lipschitz-tulajdonsága miatt található $r > 0$, és $b_x \ : \ B(0,1) \longrightarrow B(x,r)$ lipeomorfizmus, amelyre

$$\begin{aligned}
b_x\big(B(0,1) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big) &= B(x,r) \cap (\partial\Omega \setminus \mathcal{D}) =: U, \\
b_x\big(B(0,1) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)\big) &= B(x,r) \cap \Omega.
\end{aligned}$$

E két relációból következik, hogy van olyan $\varepsilon > 0$, amely csak Ω-tól függ, és

$$V := b_x\big(B(0,1) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\varepsilon))\big) \subset \Omega.$$

Tekintettel arra, hogy b_x Lipschitz, abszolút folytonos is, ezért az integrál áttranszformálható:

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma = \int_{B(0,1)\cap\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} \circ b_x(y,0)\Big)\, v\big(b_x(y,0)\big)\, |\det b_x'(y,0)|\, \sigma(dy),$$

ahol $|\det b_x'(\,\cdot\,,0)| \in L^\infty(B(0,1) \cap \mathbb{R}^{n-1})$ és λ-m.m. pozitív. Legyen $w \in C_0^\infty(B(0,1) \cap \mathbb{R}^{n-1})$ tetszőleges. Belátjuk, hogy egy *sima* v függvényt alkalmasan megválaszthatjuk a V halmazon úgy, hogy $v\big|_U \equiv w$ teljesüljön. Legyen ehhez

$$\forall (y,t) \in V \ : \ v\big(b_x(y,t)\big) := (1 - t/\varepsilon) w(y) \chi_V(y,t),$$

ahol χ_V a V karakterisztikus függvénye. Ekkor v sima lesz, $\lim_{t\to 0+} v\big(b_x(\,\cdot\,,t)\big) = w(\,\cdot\,)$, és

$$0 = \int_{\partial\Omega\setminus\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma = \int_{B(0,1)\cap\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} \circ b_x(y,0)\Big)\, w(y)\, |\det b_x'(y,0)|\, \sigma(dy),$$

minden $w \in C_0^\infty(B(0,1) \cap \mathbb{R}^{n-1})$ sima függvényre, alkalmazzuk a du Bois-Reymond lemmát, kapjuk, hogy $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_U \equiv 0$. Mivel $x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{D}$ tetszőleges volt, készen vagyunk. □

Tiszta Neumann-peremfeltételek

A $\mathcal{D} = \emptyset$ esetet külön kell tárgyalnunk. Most feltesszük tehát, hogy

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} \equiv 0.$$

Világos, hogy ha u megoldja az (1.1) feladatot, akkor $u + \text{const}$ is, valamint f-re ismét kapunk egy extra feltételt a Green-tétel felhasználásával:

$$\int_\Omega f \, d\lambda = \int_\Omega (-\triangle u) \, d\lambda = 0 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = 0.$$

Vezzessük be az $\cdot_\Omega \in L^1(\Omega)'$ folytonos lineáris funkcionált:

$$f_\Omega := \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega f \, d\lambda.$$

A tiszta Neumann esetben az

$$X_1 := \left\{ v \in H^1(\Omega) \; : \; v_\Omega = 0 \right\} \tag{1.8}$$

teret futják végig a tesztfüggvények. Ismét elmondható, hogy ha $u \in H^2(\Omega)$ megoldása az (1.1) feladatnak $\mathcal{D} = \emptyset$ mellett, akkor érvényes (1.7):

$$u \in X_1, \text{ és } \; \forall v \in X_1 \; \text{ esetén } \; a(u, v) = F(v), \tag{1.9}$$

és $f \in L^2(\Omega)$, $f_\Omega = 0$.

Az (1.2.1) tétellel analóg állítás érvényes, azonban az előzőek értelmében módosítanunk kell az (1.1) differenciálegyenlet jobb oldalát, hogy arra $f_\Omega = 0$ teljesüljön [4, p. 133].

(1.2.2) Tétel. *Legyen $f \in L^2(\Omega)$ és tegyük fel, hogy $u \in H^2(\Omega)$ kielégíti az (1.7) feltételt az (1.8) variációs térrel. Ekkor u megoldása az (1.1) feladatnak $\mathcal{D} = \emptyset$ és $f - f_\Omega$ jobb oldal mellett.*

Bizonyítás. Nyilván az (1.7) feladatban szereplő F funkcionál nem változik, ha abba f helyett az $(f - f_\Omega)$ függvényt írjuk. Ezzel az $f_\Omega = 0$ esetre redukáltuk a problémát. Világos, hogy bármely $v \in C_0^\infty(\Omega) \cap \ker \cdot_\Omega$ esetén

$$\int_\Omega (-\triangle u - f) v \, d\lambda = 0.$$

Az integrandushoz hozzáadva a $(\triangle u)_\Omega$ számot, értéke nem változik, valamint

$$\mathrm{cl}_{L^2(\Omega)} \left(C_0^\infty(\Omega) \cap \ker \cdot_\Omega \right) = L^2(\Omega) \cap \ker \cdot_\Omega,$$

miatt kapjuk, hogy

$$-\triangle u = f - (\triangle u)_\Omega$$

fennáll $L^2(\Omega)$ értelemben. Követve az (1.2.1) tétel bizonyítását:

$$\begin{aligned} 0 &= F(v) - a(u,v) \\ &= \int_\Omega (-\triangle u - (\triangle u)_\Omega) v \, d\lambda - a(u,v) \\ &= \int_\Omega (-\triangle u) v \, d\lambda - \int_\Omega (\nabla u, \nabla v) \, d\lambda && (v \in X) \\ &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma && \text{(Green-tétel).} \end{aligned}$$

Legyen $w \in H^1(\Omega)$ tetszőleges, és $v := w - w_\Omega g$, ahol $g \in C_0^\infty(\Omega) \cap \ker \cdot_\Omega$, ekkor $v_\Omega = 0$ továbbra is fennáll. De $v\big|_{\partial\Omega}$ tetszőleges lehet, miközben az integrál értéke nem változik; a du Bois-Reymond lemma alapján nyerjük, hogy $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Most már meghatározhatjuk az $(\triangle u)_\Omega$ konstans értékét:

$$(\triangle u)_\Omega = \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega \triangle u \, d\lambda = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = 0 \qquad \square$$

Inhomogén peremfeltételek kezelése

Az (1.1) feladatban előírt homogén peremfeltételek az iménti eredmények elérését könnyítették meg. Természetesen semmi akadálya annak [4, pp. 137-138][18, pp. 20-22], hogy tetszőleges $g \in C^1(\Omega) \cap C^0(\operatorname{cl}\Omega)$, $h \in L^2(\partial\Omega \setminus \mathcal{D})$ függvényeket írjunk elő, így az inhomogén feladat:

$$-\triangle u \equiv f \quad (\Omega\text{-n}) \tag{1.10}$$

$$u|_{\mathcal{D}} = g \tag{1.11}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega\setminus\mathcal{D}} = h \tag{1.12}$$

Feltehető, hogy g eltűnik a $\partial\Omega \setminus \mathcal{D}$ halmazon – még ha a C^1-folytonosság miatt az egész Ω-n nem is tűnik el. Az (1.3) variációs feladat megfelelő alakja ekkor a következő: $u \in X_0$, amelyre

$$\forall v \in X_0 \ \text{ esetén } \ a(u,v) = F(v) - a(g,v) + \int_{\partial\Omega\setminus\mathcal{D}} h v \, d\sigma. \tag{1.13}$$

Egyfelelől, ha $u + g \in H^1(\Omega)$ megoldja az (1.10) feladatot, akkor (1.13) is teljesül, elvégre bármely $v \in X_0$ esetén

$$\begin{aligned}0 &= \int_\Omega \big(-\triangle(u+g) - f\big) v\, d\lambda \\ &= \int_\Omega (-\triangle u) v\, d\lambda + \int_\Omega (-\triangle g) v\, d\lambda - \int_\Omega f v\, d\lambda \\ &= -\int_{\partial\Omega\setminus\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\, d\sigma + a(u,v) - \int_{\partial\Omega\setminus\mathcal{D}} \frac{\partial g}{\partial \nu} v\, d\sigma + a(g,v) - F(v) \\ &= -\int_{\partial\Omega\setminus\mathcal{D}} h v\, d\sigma + a(u,v) + a(g,v) - F(v).\end{aligned}$$

Másfelől, ha u megoldja az (1.13) feladatot, akkor $v \in X_0$ tesztfüggvényt úgy megválasztva, hogy eltűnjön $\partial\Omega$ tetszőleges környezetén kívül, kapjuk a Neumann peremfeltételt

$$\int_{\partial\Omega\setminus\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\, d\sigma - \int_{\partial\Omega\setminus\mathcal{D}} h v\, d\sigma = 0,$$

elvégre alkalmazható a du Bois-Reymond lemma. Innentől az (1.2.1) tétel bizonyításához hasonló módon járhatunk el.

1.3. Koercitivitás. Lax–Milgram lemma

Most rátérünk az $a(\cdot\,,\cdot)$ bilineáris forma vizsgálatára. Elemi funkcionálanalízisbeli eredmények felhasználásával ki fog derülni, hogy az (1.7) (és (1.9)) feladatnak egyértelműen létezik megoldása. A felhasznált eredmények természetesen tetszőleges Hilbert-térben érvényesek, mi azonban mindenhova $H^1(\Omega)$-t írunk.

A szimmetrikus, pozitív szemidefinit bilineáris formákra érvényes[2] Schwarz-egyenlőtlenség felhasználásával következik az $a(\cdot\,,\cdot)$ korlátossága:

$$\begin{aligned}\forall x, y \in H^1(\Omega)\ :\ |a(x,y)|^2 &\le a(x,x)a(y,y) = \int_\Omega \|\nabla x\|^2\, d\lambda \int_\Omega \|\nabla y\|^2\, d\lambda \\ &\le \|x\,;\, H^1(\Omega)\|^2 \|y\,;\, H^1(\Omega)\|^2.\end{aligned}$$

Emlékeztetünk, hogy ha A *koercív* operátor, azaz ha $\exists \alpha > 0$ úgy, hogy

$$\forall x \in H^1(\Omega)\ :\ |\,(Ax, x)_{H^1(\Omega)}\,| \ge \alpha \|x\,;\, H^1(\Omega)\|^2,$$

akkor A injektív. Szimmetrikus *bilineáris forma* koercitivitása az (1.3.2) állítással értelmezhető, azaz $|a(x,x)| \ge \alpha\|x\,;\, H^1(\Omega)\|^2\ \forall x \in H^1(\Omega)$. Megmutatjuk, hogy (1.4) ilyen tulajdonságú.

[2]Nem kell feltenni a pozitív definitséget – $H^1(\Omega)$-n nem is teljesül. Azonban X_0-on igen.

(1.3.1) Állítás. *Tegyük fel, hogy az Ω Lipschitz-tartomány előáll véges sok, gömbre nézve csillag-tartomány uniójaként. Ekkor az*

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, d\lambda$$

bilineáris forma $H^1(\Omega)$-koercív az X_0 és X_1 tereken egyaránt.

Bizonyítás. Először is legyen $v \in X_0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|v\,;\, L^2(\Omega)\| &\le \|v - v_\Omega\,;\, L^2(\Omega)\| + \|v_\Omega\,;\, L^2(\Omega)\| \\
&\le C|v\,;\, H^1(\Omega)| + \frac{\sqrt{\lambda(\Omega)}}{\sigma(\mathcal{D})}\Big|\int_{\mathcal{D}} v_\Omega\, d\sigma\Big| && \text{((A.2.3) miatt)} \\
&\le C|v\,;\, H^1(\Omega)| + \frac{\sqrt{\lambda(\Omega)}}{\sigma(\mathcal{D})}\Big(\Big|\int_{\mathcal{D}} v\, d\sigma\Big| + \Big|\int_{\mathcal{D}} v - v_\Omega\, d\sigma\Big|\Big) \\
&\le C|v\,;\, H^1(\Omega)| + \frac{\sqrt{\lambda(\Omega)}}{\sigma(\mathcal{D})}\Big|\int_{\mathcal{D}} v - v_\Omega\, d\sigma\Big| && (v \in X_0) \\
&\le C|v\,;\, H^1(\Omega)| + \frac{\sqrt{\lambda(\Omega)}}{\sqrt{\sigma(\mathcal{D})}}\|v - v_\Omega\,;\, L^2(\partial\Omega)\| && \text{(Schwarz)} \\
&\le C|v\,;\, H^1(\Omega)| + \frac{\sqrt{\lambda(\Omega)}}{\sqrt{\sigma(\mathcal{D})}}C'\|v - v_\Omega\,;\, H^1(\Omega)\| && \text{((1.5) miatt)} \\
&\le C|v\,;\, H^1(\Omega)| + \frac{\sqrt{\lambda(\Omega)}}{\sqrt{\sigma(\mathcal{D})}}C''|v\,;\, H^1(\Omega)| && \text{((A.2.3) miatt)} \\
&\le \alpha|v\,;\, H^1(\Omega)| \\
&= \alpha\sqrt{a(v,v)}.
\end{aligned}$$

Most pedig tekintsük a tiszta Neumann esetet, azaz legyen most $v \in X_1$. Az (A.2.3) Friedrich-egyenlőtlenség alkalmazható, és $v_\Omega = 0$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$\|v\,;\, H^1(\Omega)\|^2 \le C|v\,;\, H^1(\Omega)|^2 = Ca(v,v) \qquad \square$$

Mivel $H^1(\Omega)$ Hilbert-tér, érvényes a következő reprezentációs tétel $a(\cdot,\cdot)$-ra [13, p. 93].

(1.3.2) Állítás. *Az $a(\cdot,\cdot)$ szimmetrikus, korlátos bilineáris formának egyértelműen létezik önad-jungált $A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega))$*[3] *Riesz-reprezentánsa , azaz*

$$\forall x, y \in H^1(\Omega) \;\; \textit{esetén} \;\; a(x,y) = (Ax, y)_{H^1(\Omega)}\,.$$

Ez utóbbi, a „szokásos” Riesz reprezentációs tétel, illetve az A reprezentáns injektivitásának felhasználásával kapható a következő alaptétel, amely számos általánosítás kiindulópontja.

[3] $\mathcal{L}(H^1(\Omega))$ jelöli a $\mathrm{Hom}(H^1(\Omega))$-beli *korlátos* operátorok halmazát.

(1.3.3) Lax–Milgram-lemma. *Legyen* $a(\cdot\,,\,\cdot)$ *szimmetrikus,* C*-korlátos,* α*-koercív bilineáris forma,* $F \in H^1(\Omega)'$ *folytonos lineáris funkcionál. Ekkor egyértelműen létezik* $u \in H^1(\Omega)$ *úgy, hogy*

$$\forall v \in H^1(\Omega) \;\; \textit{esetén} \;\; a(u,v) = F(v).$$

Továbbá, az u *megoldás* $(H^1(\Omega)', H^1(\Omega))$*-folyonosan függ az* F *inputtól:*

$$\|u\,;\,H^1(\Omega)\| \le \frac{1}{\alpha}\|F\,;\,H^1(\Omega)'\|.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség magyarázata az

$$\alpha\|u\,;\,H^1(\Omega)\|^2 \le a(u,u) = F(u) \le \|F\,;\,H^1(\Omega)'\|\|u\,;\,H^1(\Omega)\|.$$

egyenlőtlenséglánc.

Mivel elméleti szempontból oly fontosak az ilyen típusú tételek, megemlítjük még az I. Babuška-tól származó variánst, amely az aszimetrikus esetre derít fény. Egy $B\,:\,X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineáris forma gyengén koercív, ha $\exists\alpha_1, \alpha_2 > 0$ úgy, hogy

$$\sup\{|B(x,y)|\;:\;\|y\,;\,Y\| = 1\} \ge \alpha_1\|x\,;\,X\|,$$
$$\sup\{|B(x,y)|\;:\;\|x\,;\,X\| = 1\} \ge \alpha_2\|y\,;\,Y\|.$$

(1.3.4) Babuška–Lax–Milgram-tétel. *Legyen* X *és* Y *Hilbert-tér,* $B\,:\,X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *folytonos, gyengén koercív bilineáris forma, valamint* $F \in Y'$ *folytonos lineáris funkcionál. Ekkor egyértelműen létezik* $x \in X$*, amelyre*

$$\forall y \in Y \;\; \textit{esetén} \;\; a(x,y) = F(y).$$

1.4. A Dirichlet-elv

Talán érdemes megemlíteni egy rövid kitérő erejéig az analízis egy klasszikus, igen nagy hatású problémáját, amelyet Riemann *Dirichlet-elvnek* nevezett:

(1.4.1) Dirichlet-elv. *Az* u *függvény pontosan akkor megoldása az*

$$\left.\begin{aligned} \triangle u &\equiv 0 \;\; (\Omega\text{-}n) \\ u|_{\partial\Omega} &= g \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

peremérték-feladatnak, ha u *minimalizálja az* $\int_\Omega \|\nabla u\|^2$ *funkcionált.*

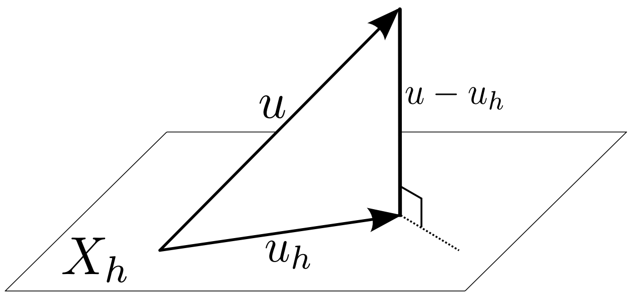
Az állítás megfogalmazásában szándékosan nem tüntettünk fel függvénytereket: a korabeli matematikusok hallgatólagosan $u \in C^2(\Omega)$ feltételezéssel éltek. Az sem világos, hogy egyátalán van-e minimalizáló u minden g-hez.

Ez a feladat olyan emberek érdeklődését keltette fel, mint Weierstrass, Lebesgue és Hilbert – a korrekt megoldás *nagyon* nem triviális, lásd Courant klasszikus művét [7]. Hála fáradozásaiknak, a kortárs matematikus igen gazdag eszköztárral rendelkezik a Dirichlet-feladat tanulmányozásához. A parciális differenciálegyenlet elméletének fejlődése során kiderült az is, hogy lényegében ez az egyetlen nemtriviális feladat, amely mostani szemmel nézve viszonylag egyszerűen kezelhető.

2 A végeselem-diszkretizáció

Ebben a fejezetben röviden áttekintjük a keretet, amelyben a végeselem-módszereket vizsgálni szokás. Fejlődése során nagyfokú általánosításon ment keresztül az eljárás, tehát mondhatjuk azt, hogy – hasonlóan sok egyéb numerikus sémához – amiről valójában szó van, az egy algoritmusséma algoritmusok készítésére. Az ilyesfajta automatizálási kérdéseket itt mellőzzük, ahogyan a mostanában egyre nagyobb teret hódító, differenciálformákat és algebrai topológiát alkalmazó tárgyalásmódot is (lásd pl. [2][3]).

2.1. Galerkin-módszerek



2.1. ábra. Egy Galerkin-típusú módszer hibája a-ortogonális az approximáló altérre.

Egy végeselem-diszkretizáció a következő, Galerkin-módszernek nevezett általános elven alapszik. Az előző fejezet szerint modellfeladat gyenge alakját egy $a(\cdot,\cdot)$ folytonos, koercív bilineáris forma, egy F folytonos lineáris funkcionál, valamint egy X függvénytér (lásd (1.6)) határozza meg:

$$\text{létezik } u \in X, \text{ amelyre } \forall v \in X \text{ esetén } a(u,v) = F(v). \tag{2.1}$$

Az X térben fekvő u megoldást alkalmas $X_h \leq X$ véges dimenziós altérben approximáljuk, azaz most a feladat

$$\text{létezik } u_h \in X_h, \text{ amelyre } \forall v_h \in X_h \text{ esetén } a(u_h,v_h) = F(v_h). \tag{2.2}$$

A két egyenletet kivonva egymásból (és figyelembe véve, hogy $X_h \leq X$), kapjuk a *Galerkin-ortogonalitási relációt* (lásd 2.1 ábra):

$$\forall v_h \in X_h \ : \ a(u - u_h, v_h) = 0, \tag{2.3}$$

amely jelentősége attól a nyilvánvaló ténytől eltekintve, hogy u_h az u a-ortogonális projekciója az X_h altérre, a következő lemmában áll [4, p. 64].

(2.1.1) Céa lemma. *Fennáll az* $\|u - u_h\,;\,X\| \le \frac{C}{\alpha} \min\{\|u - v\,;\,X\| \,:\, v_h \in X_h\}$ *reláció, ahol* C *és* α *rendre az* $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *folytonossági és coercitivitási konstansai.*

Bizonyítás. Az $u \in X$ megoldás Galerkin-approximánsa legyen $u_h \in X_h$, ekkor tetszőleges $v_h \in X_h$ esetén

$$\begin{aligned}
\alpha\|u - u_h\,;\,X\|^2 &\le a(u - u_h, u - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) && \text{((2.3) miatt)} \\
&= C\,\|u - u_h\,;\,X\|\,\|u - v_h\,;\,X\|,
\end{aligned}$$

valamint X_h véges dimenziós, ezért zárt X-ben, így az infimum felvétetik:

$$\|u - u_h\,;\,X\| \le \frac{C}{\alpha}\inf\{\|u - v_h\,;\,X\| \,:\, v_h \in X_h\} = \frac{C}{\alpha}\min\{\|u - v_h\,;\,X\| \,:\, v_h \in X_h\} \qquad \square$$

A Céa lemma állítását szokás *kvázi-optimalitásnak* nevezni: az approximáció hibája arányos a lehető legkisebb hibával, amit az X_h approximáló térrel el lehet érni.

Gyakorlati szempontból a módszer az absztrakt gyenge alakot a (2.2) (véges) lineáris egyenletrendszer megoldására redukálja, amely megoldhatóságát esetünkben a Lax–Milgram-lemma garantálja. Megjegyezzük továbbá, hogy míg a (2.2) egyenletrendszer definitsége és szimmetriája a gyenge alakon múlik; kondícionáltsága és ritkasági mintázata az X_h approximáló altér bázisának partikuláris megválasztásán. Tehát a Galerkin-típusú módszerek megadása lényegében ennek a bázisnak a konstrukcióját jelenti.

2.2. A végeselem-tér konstrukciója I.

Mérnöki szempontból a végeselem-módszer ereje abban rejlik, hogy praktikusan tetszőleges alakú tartományokon előírt peremértékfeladatokon alkalmazható. A véges differencia módszer esetén a rácsméret határozza meg a geometriai felbontóképességet, és bár a két módszer igen hasonló lineáris egyenletrendszert produkál (ritka, szimmetrikus pozitív definit), a végeselem-módszert inkább bonyolult geometriájú feladatoknál részesítik előnyben.

Az X függvényteret approximáló X_h véges dimenziós vektortér konstrukciója tehát az Ω Lipschitz-tartomány egy geometriai felbontásán alapszik. Mi csak szimpliciális felbontásokkal foglalkozunk (2-dimenzióban trianguláció), de más geometriai primitíveket, sőt egyszerre több típusú primitívet is szokás alkalmazni. Feltételezzük továbbá, hogy $\partial\Omega$ töröttvonalak véges uniója (ekkor Ω triviálisan Lipschitz), trianguláció így mindenesetre létezik és így nem kell törődünk a peremfeltételek rácsra való interpolációjának meglepően bonyolult kérdésével, amelyet egyébként az előző fejezetben is elkerültünk.

Jelöljük Ω egy diszjunkt, 2-szimpliciális kimerítését $\mathcal{T}_h$-val (ezt nevezzük *rácsnak*). Most explicite föltüntetjük az $a(\cdot\,,\,\cdot)$ bilineáris forma integrálási tartományát (v.ö. (1.4)), így $a(\cdot\,,\,\cdot\,;\Omega)$ a $\mathcal{T}_h$ rácson felbomlik

$$a(u,v;\Omega)=\sum_{T\in\mathcal{T}_h}a(u,v;T) \tag{2.4}$$

alakba. Természetes kívánalom, hogy az X_h-ban olyan $\{w_T \ : \ T\in\mathcal{T}_h\}$ bázist választunk, amelyekre $\operatorname{supp} w_T$ lehetőleg nem sokkal nagyobb, mint T, ekkor ugyanis $u,v\in X_h$ esetén az $a(u,v;\Omega)$ kiszámításakor kevés nemnulla tag van a (2.4) egyenletben szereplő összegzésben. Ezzel az $\{w_T\}$ globális bázisfüggvényektől egyfajta *lokalitást* követeltünk meg, ami a módszer minden válfajára jellemző. Ezt röviden úgy is mondhatjuk, hogy $\{w_T\}$ *majdnem* a-ortogonális rendszer.

2.3. Általános végeselemek. Interpoláció

Ebben a szakaszban ellátjuk egy sajátos struktúrával $\mathcal{T}_h$ elemeit, és rögtön hozzátesszük, hogy a szokásos definíció nem szorítkozik a szimplexek esetére – bár kétségkívül ez a leggyakrabban használt alakzat.

(2.3.1) Definíció. A (T,Π,Σ) hármas egy n-dimenziós *szimpliciális végeselem*, vö. [10, p. 19] és [4, p. 69], amennyiben

1. T egy (zárt) n-szimplex,
2. Π egy $T\longrightarrow\mathbb{R}$ függvényekből álló vektortér, és
3. $\Sigma\subset\Pi^*$ véges bázis ($n_\sigma:=\dim\Sigma$) (*lokális csomóponti változók*).

A Σ bázisban tipikusan olyan lináris funkcionálok vannak, amelyek például kiértékelnek a T egy pontjában, vagy integrálközepet számítanak T egy részhalmazán.

(2.3.2) Megjegyzés. A definíció egyenes következménye, hogy $\dim\Pi=n_\sigma$, továbbá megadható egy $\{\pi_1,\dots,\pi_{n_\sigma}\}\subset\Pi$ duális bázisa (*lokális alakfüggvények*) a $\{\sigma_1,\dots,\sigma_{n_\sigma}\}:=\Sigma$ bázisnak, amelyre $\sigma_k(\pi_\ell)=\delta_{k\ell}$, ahol $\delta_{k\ell}$ a Kronecker-szimbólum. A későbbiekben elvárjuk, hogy a

$\{\sigma_k\}$ funkcionálok értelmezve legyenek egy Π-nél bővebb, $X(T)$ függvénytéren is; ez nem jelent különösebb megszorítást. Ekkor tehát $\Sigma \subset X(T)^*$, persze itt már Σ nem biztos, hogy bázist alkot. A kényelem kedvéért a Π halmazban szereplő függvényeket triviálisan kiterjesztjük az egész Ω tartományra (konstans zérus $\Omega \setminus T$-n).

(2.3.3) Példa. (*Lagrange-elem*) Az előzőek alapján adunk egy példát végeselemre. Legyen $T \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, $n_\sigma \geq 2$,

$$\{z_1, \dots, z_{n_\sigma}\} \subset T$$

különböző pontokból álló halmaz, és $\sigma_k := \delta_{z_k}$, ahol δ_x a δ-disztribúció. Az 1-dimenziós esetben rögtön adódnak a lokális alakfüggvények: legyen $\Pi := \mathcal{P}_{n_\sigma+1}$, ekkor a Lagrange-interpoláció bázispolinomjai éppen megfelelnek a célnak. A Lagrange-interpoláció tetszőleges dimenzióban kivitelezhető (bár ekkor nem választhatóak meg akárhogyan a $\{z_k\}$ csomópontok!), ezt a nem teljesen közismert tényt a B függelékben exponáljuk. A Lagrange-elemre később visszatérünk.

A referenciaelem

A végeselemeket leíró képletek kezelhetetlenné válását elkerülendő, a következő hasznos trükköt alkalmazzák. Tudjuk, hogy az $a(\cdot, \cdot; T)$ bilineáris forma kezelhetően viselkedik egy másik $\hat{T}$ szimplexre való *affin* áttéréskor. Legyen ugyanis $\alpha : T \longrightarrow \widetilde{T}$ affin bijekció:

$$\alpha(x) := Ax + b \quad (A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n), b \in \mathbb{R}^n), \tag{2.5}$$

és térjünk át a T, ún. *referencia* szimplexre, és a rajta definiált u, v függvényeken való integrálásra:

$$\begin{aligned}
a(\tilde{u}, \tilde{v}; \hat{T}) &= a(\tilde{u}, \tilde{v}; \alpha(T)) \\
&= \int_{\alpha(T)} (\nabla\tilde{u}, \nabla\tilde{v})\, d\lambda \\
&= \int_T (\nabla\tilde{u} \circ \alpha, \nabla\tilde{v} \circ \alpha) |\det(\alpha')|\, d\lambda && \text{(integráltranszformációs formula)} \\
&= \int_T \big((\nabla u)\, (\alpha')^{-1}, (\nabla v)\, (\alpha')^{-1}\big) |\det(\alpha')|\, d\lambda && \text{((2.6) miatt)} \\
&= |\det(A)| \int_T (A^{-\top}\nabla u, A^{-\top}\nabla v)\, d\lambda, && \text{((2.5) miatt)}
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $u = \tilde{u} \circ \alpha$ és így $\nabla u = (\nabla\tilde{u} \circ \alpha)\alpha'$, tehát

$$(\nabla u)(\alpha')^{-1} = \nabla\tilde{u} \circ \alpha. \tag{2.6}$$

Aprólékos számolással megmutatható [11, p. 192], hogy lényegesen gyorsabb, ha az egyenletrendszer felépítésekor referenciaelem segítségével dolgozunk. Továbbá, az $a(\cdot, \cdot, T)$ integrál kiszámítása gyorsítható, ha egy előfeldolgozási lépésben eltároljuk az

$$\int_T \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \pi_\ell}{\partial x_j}\, dx$$

mennyiségeket minden $1 \le i, j \le n$ és $1 \le k, \ell \le n_\sigma$ esetén [18, p. 133].

(2.3.4) Példa. Speciálisan 2-dimenzióban a T referenciaháromszögnek a $\big((0,0)^\top, (1,0)^\top, (0,1)^\top\big)$ csúcslistájút szokás választani, ugyanis ekkor a T' tetszőleges, $\big((x_1, y_1)^\top, (x_2, y_2)^\top, (x_3, y_3)^\top\big)$ csúcslistájúba átvihető az $\alpha(x) = Ax + b$ affin transzformációval, ahol

$$A = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - x_1 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \qquad b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

A lokális interpolációs operátor

Egy (T, Π, Σ) végeselem alkalmas arra, hogy egy X térbeli f függvényt *interpoláljon* a T-n a következő értelemben.

(2.3.5) Definíció. Legyen $E := (T, \Pi, \Sigma)$ végeselem, valamint $X(T) \supset \Pi$ egy T alaphalmazú függvénytér, amelyre $\Sigma \subset X(T)^*$. Azt az $\mathcal{I}_E \in \mathrm{Hom}(X(T), \Pi)$ leképezést, amelyet az

$$\mathcal{I}_E := \sum_{k=1}^{n_\sigma} \sigma_k \otimes \pi_k \tag{2.8}$$

utasítással definiálunk, *lokális interpolációs operátornak* nevezzük.

(2.3.6) Megjegyzés. Rögtön látszik a definícióból, hogy $\mathcal{I}_E$ pontonként fixen hagyja Π-t (speciálisan projekció), elvégre ha $p = \sum_k p_k \pi_k$, akkor

$$\mathcal{I}_E p = \sum_\ell \sigma_\ell(p) \pi_\ell = \sum_{k,\ell} p_k \delta_{k\ell} \pi_\ell = \sum_k p_k \pi_k = p.$$

Másfelől – ahogyan az elvárható egy interpolációs operátortól –, a $\{\sigma_\ell\}$ csomóponti változók helyettesítési értékeit változatlanul hagyja, ugyanis bármely $1 \le \ell \le n_\sigma$ és $f \in X(T)$ esetén

$$\sigma_\ell\big(\mathcal{I}_E f\big) = \sum_{k=1}^{n_\sigma} \sigma_k(f) \sigma_\ell(\pi_k) = \sigma_\ell(f).$$

Szeretnénk a referenciaelem *affin transzformáltjaiként* előállítani a $\mathcal{T}_h$ rács összes elemét, így felmerül a kérdés, hogy ilyenkor hogyan változnak a $\{\sigma_k\}$ csomóponti változók, jelen esetben a kiértékelési pontok? Általánosabban megfogalmazva, hogyan transzformálódnak egy adott tartományon értelmezett függvények egy másikra, valamint mi a szabály a duális fogalomra (lineáris funkcionálok)?

Legyen $E = (T, \Pi, \Sigma)$ és $\widehat{E} = (\widehat{T}, \widehat{\Pi}, \widehat{\Sigma})$, $X(T)$ és $X(\widehat{T})$ a hozzájuk tartozó függvényterek. Az áttérés geometriai aspektusával már foglalkoztunk, ezt esetünkben egy olyan α affin bijekció írja le, amelyre $\alpha(T) = \widehat{T}$. A funkcionális rész pedig legyen egy $\xi : X(T) \longrightarrow X(\widehat{T})$ lineáris bijekció. Most persze $\xi(f) := f \circ \alpha^{-1}$, de a definíció általánosabb végeselemekre is alkalmazható, amikor *nem* affin transzformációval „példányosítjuk" a referenciaelemet.

Visszatérve az $\widehat{E}$ elem konstrukciójához [6, pp. 97–100], legyen

$$\widehat{\Pi} := \{\xi \circ \pi \ : \ \pi \in \Pi\}, \tag{2.9}$$

ez legalábbis értelmes, mivel $\Pi \subset X(T)$. Másrészt legyen

$$\widehat{\Sigma} := \{\sigma \circ \xi^{-1} \ : \ \sigma \in \Sigma\}, \tag{2.10}$$

amely szintén értelmes, elvégre $\Sigma \subset X(T)^*$. Azt állítjuk, hogy $\widehat{E}$ végeselem. Ehhez legyen $\widehat{\Pi} = \{\widehat{\pi}_\ell\}$ és $\widehat{\Sigma} = \{\widehat{\sigma}_k\}$, ekkor

$$\widehat{\sigma}_k(\widehat{\pi}_\ell) = \sigma_k(\xi^{-1} \circ \xi \circ \pi_\ell) = \sigma_k(\pi_\ell) = \delta_{k\ell},$$

azaz teljesül a 2.3.1 definíció 3. pontja. Sőt, az is igaz, hogy

$$\begin{aligned}
\xi \circ \mathcal{I}_E \circ \xi^{-1} &= \xi \circ \sum_{k=1}^{n_\sigma} (\sigma_k \circ \xi^{-1}) \otimes \pi_k \\
&= \sum_{k=1}^{n_\sigma} (\sigma_k \circ \xi^{-1}) \otimes (\xi \circ \pi_k) \qquad\qquad (\xi \text{ lineáris és } \Pi\text{-n hat}) \\
&= \sum_{k=1}^{n_\sigma} \widehat{\sigma}_k \otimes \widehat{\pi}_k \\
&= \mathcal{I}_{\widehat{E}}.
\end{aligned}$$

Az iménti megfontolást a következő kommutatív diagrammal szokás összefoglalni [10, p. 40].

$$\begin{array}{ccc}
X(T) & \xrightarrow{\ \xi\ } & X(\widehat{T}) \\
{\scriptstyle \mathcal{I}_E}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{I}_{\widehat{E}}} \\
\Pi & \xrightarrow[\ \xi\ ]{} & \widehat{\Pi}
\end{array}$$

(2.3.7) Példa. A konkrét affin esetben az $\mathcal{I}_{\widehat{E}} f$ interpoláns

$$\forall x \in \widehat{T} \ : \ \big(\mathcal{I}_{\widehat{E}} f\big)(x) = \sum_{k=1}^{n_\sigma} \sigma_k\big(f(Ax+b)\big)\pi_k\big(A^{-1}(x-b)\big) \qquad ((2.7) \text{ miatt})$$

alakú lesz.

A lokális interpolációs operátor hibája

Most megvizsgáljuk, hogy az általánosság ezen fokán mit lehet mondani az $\mathcal{I}_E$ operátor hibájáról (vö. [4, p. 105]). Bár konkrét példát itt nem adunk rá, ha az E végeselem definíciójában a σ_k csomóponti változók legfeljebb r-edrendű deriválást tartalmaznak, azt tömöröen a $\Sigma \subset C^r(T)'$ tartalmazással tudjuk kifejezni. (A Lagrange esetben tehát $\Sigma \subset C^0(T)'$.) Érvényes a következő egyszerű észrevétel, amely fő tanulsága az, hogy az T-től függő

$$\|\mathcal{I}_E\,;\,C^r(T) \to W^{s,p}(T)\|$$

operátornormát kezelnünk kell tudni, ha globális hibabecslést akarunk.[1]

(2.3.8) Állítás. *Tegyük fel, hogy az $E = (T, \Pi, \Sigma)$ végeselemre $\Pi \subset W^{s,+\infty}(T)$ és $\Sigma \subset C^r(T)'$ teljesül. Ekkor az $\mathcal{I}_E$ lokális interpolációs operátor $(C^r(T), W^{s,p}(T))$-folytonos minden $1 \le p \le +\infty$ esetén.*

Bizonyítás. Mivel $W^{r,+\infty}(T) \subset W^{r,p}(T)$, minden $u \in C^r(T)$ esetén fennáll

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I}_E u\,;\,W^{s,p}(T)\| &\le \sum_{k=1}^{n_\sigma} |\sigma_k(u)|\,\|\pi_k\,;\,W^{s,p}(T)\| \\ &\le \sum_{k=1}^{n_\sigma} \|\sigma_k\,;\,C^r(T)'\|\,\|u\,;\,C^r(T)\|\,\|\pi_k\,;\,W^{s,p}(T)\| \\ &\le \mathrm{const}\cdot\|u\,;\,C^r(T)\|\end{aligned}$$

□

(2.3.9) Megjegyzés. A bizonyítások egyszerűsítése végett a következő technikát alkalmazzák. Legyen Ω tetszőleges (Lipschitz-) tartomány, $d := \mathrm{diam}(\Omega)$ és $\Omega^1 := \{x/d \;:\; x \in \Omega\}$, ekkor persze $\mathrm{diam}(\Omega^1) = 1$. Illetve, ha $f \in W^{r,p}(\Omega)$, akkor $f \circ (d\,\mathrm{id}_{\Omega^1}) \in W^{r,p}(\Omega^1)$, így

$$\begin{aligned}|f\,;\,W^{r,p}(\Omega^1)| &= \Big[\sum_{|\alpha|=r} \int_{\Omega^1} |D^\alpha f|^p\,d\lambda\Big]^{1/p} \\ &= \Big[\sum_{|\alpha|=r} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^p \circ (x/d)\,d^{-n}\,\lambda(dx)\Big]^{1/p},\end{aligned}$$

viszont

$$D^\alpha(f \circ (x/d)) = (D^\alpha f) \circ (x/d) d^{-|\alpha|},$$

így

$$\Big[\sum_{|\alpha|=r} \int_{\Omega} |D^\alpha(f \circ (x/d))|^p d^{p|\alpha|} d^{-n}\,\lambda(dx)\Big]^{1/p} = d^{r-n/p}|f\,;\,W^{r,p}(\Omega)|.$$

[1] A jelölések egyszerűsítése végett egyszerűen $W^{s,p}(T)$-t írunk a helyes $W^{s,p}(\mathrm{int}\,T)$ helyett, elvégre T zárt.

Összefoglalva, a gyakran előforduló $\operatorname{diam}(\Omega)$ mennyiséget elhagyhatjuk a bizonyításokból, ha az Ω^1 tartományon dolgozunk, és ezután az

$$|f\,;\,W^{r,p}(\Omega^1)| = \operatorname{diam}(\Omega)^{r-n/p}|f\,;\,W^{r,p}(\Omega)| \tag{2.11}$$

átskálázással visszatérünk az Ω tartományra.

Az elemenkénti (más szóval lokális) hibabecslések kiindulópontja a következő tétel [4, p. 105].

(2.3.10) Tétel. *Legyen* $E = (T, \Sigma, \Pi)$ *olyan végeselem, amely csillagtartomány egy gömbre nézve,* $\mathcal{P}_n^{s-1} \subset \Pi \subset W^{s,\infty}(T)$ *és* $\Sigma \subset C^r(T)'$*. Ekkor, ha*

$$\begin{cases} s - r - n/p > 0, & \text{ha } 1 < p < +\infty \\ s - r - n \geq 0, & \text{ha } p = 1, \end{cases}$$

akkor minden $0 \leq t \leq s$ *és* $\forall v \in W^{s,p}(T)$ *esetén*

$$|v - \mathcal{I}_E v\,;\,W^{t,p}(T)| \leq C_{s,n,K,\|\mathcal{I};C^r\to W^{s,p}\|}(\operatorname{diam} T)^{s-t}|v\,;\,W^{s,p}(T)|, \tag{2.12}$$

illetve, ha $0 \leq t \leq r$*, akkor*

$$|v - \mathcal{I}_E v\,;\,W^{t,\infty}(T)| \leq C_{s,n,K,\|\mathcal{I};C^r\to W^{s,p}\|}(\operatorname{diam} T)^{s-t-n/p}|v\,;\,W^{s,p}(T)|. \tag{2.13}$$

Bizonyítás. A (2.11) reláció szellemében tételezzük fel, hogy $\operatorname{diam}(T) = 1$. Legyen $B \subset T$ nyílt gömb, és $\mathcal{Q}^s v$ a B-n átlagolt Taylor-polinom (lásd (A.2)). Ekkor

$$\begin{aligned}
&\|v - \mathcal{I}_E v\,;\,W^{s,p}\| \leq \|v - \mathcal{Q}^s v\,;\,W^{s,p}\| + \|\mathcal{Q}^s v - \mathcal{I}_E v\,;\,W^{s,p}\| \\
&\leq \|v - \mathcal{Q}^s v\,;\,W^{s,p}\| + \|\mathcal{I}_E(\mathcal{Q}^s v - v)\,;\,W^{s,p}\| && (\mathcal{I}_E^2 = \mathcal{I}_E, \operatorname{Im}\mathcal{I}_E = \mathcal{P}_n^{<s}) \\
&\leq \|v - \mathcal{Q}^s v\,;\,W^{s,p}\| + \|\mathcal{I}_E\,;\,C^r \to W^{s,p}\|\|\mathcal{Q}^s v - v\,;\,C^r\| && \text{((2.3.8) miatt)} \\
&\leq \big(1 + C_{s,n,T}\|\mathcal{I}_E\|\big)\|v - \mathcal{Q}^s v\,;\,W^{s,p}\| && \text{((A.2.4) Szoboljev-lemma)} \\
&\leq \big(1 + C_{s,n,T}\|\mathcal{I}_E\|\big)C'_{s,n,T}|v\,;\,W^{s,p}| && \text{((A.2.2) Bramble–Hilbert).}
\end{aligned}$$

A $p = \infty$ eset a Szoboljev-lemma ismételt alkalmazásával kapható az iméntiből:

$$|v - \mathcal{I}_E v\,;\,W^{r,\infty}(T)| \leq C_{s,n,K}\|v - \mathcal{I}_E v\,;\,W^{s,p}(K)\| \leq C_{s,n,K,\|\mathcal{I};C^r\to W^{s,p}\|}|v\,;\,W^{s,p}(T)|$$

□

A (2.3.7) példára nézve világos, hogy tetszőleges $T \in \mathcal{T}_h$ esetén

$$\|\mathcal{I}_E\,;\,C^r(T) \to W^{s,p}(T)\| \leq C_{\mathrm{ref}}\, g(A)$$

érvényes, ahol C_{ref} a referenciaelemen meghatározható konstans, és $g \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^{n\times n})'$ és A az affin transzformációban szereplő $n \times n$-es mátrix. Ennek indoklásához gondoljunk a Cramer-szabályra, amelyből világos a mátrixinverz folytonossága. A globális hibabecsléssel a következőkben foglalkozunk.

2.4. A végeselem-tér konstrukciója II.

Ebben a szakaszban befejezzük az X_h approximáló tér konstrukcióját. Mivel $H^1(\Omega)$-ban keressük a megoldást, a lokális interpolánsokat úgy kell „összehangolni”, hogy X_h garantáltan $H^1(\Omega)$ altere legyen.

A globális interpolációs operátor

(2.4.1) Definíció. Legyen $\mathcal{I}_h \in \mathrm{Hom}(L^1(\Omega))$ olyan leképezés [10, p. 41], amelyre

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} \mathcal{I}_h &= \left\{ f \in L^1(\Omega) \ : \ \forall T \in \mathcal{T}_h \ f\big|_T \in X(T) \right\}, \\ \operatorname{im} \mathcal{I}_h &= \left\{ \pi \in L^1(\Omega) \ : \ \forall T \in \mathcal{T}_h \ \pi\big|_T \in \Pi_T \right\}, \text{ és} \\ \mathcal{I}_h &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{k=1}^{n_\sigma} (\sigma_{T,k} \circ \big|_T) \otimes \pi_{T,k}, \end{aligned}$$

ahol Π_T, $\sigma_{T,k}$ és $\pi_{T,k}$ rendre a T-nek megfelelő végeselem interpolációs függvénytere, lokális csomóponti változói, valamint lokális alakfüggvényei. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{I}_h$ a $\mathcal{T}_h$ rácshoz tartozó *globális interpolációs operátor*.

(2.4.2) Megjegyzés. Az $\mathcal{I}_h$ operátor örökli a lokális $\mathcal{I}_E$ tulajdonságait, például szintén pontonként fixen hagyja képterének, az $\operatorname{im} \mathcal{I}_h$ altérnek az elemeit. A jelenlegi feltételek mellett előfordulhat, hogy egy $F = T_1 \cap T_2$ lapon egy $\mathcal{I}_h f$ interpoláns nem függvény – egyszerre több értéket vesz fel. Azonban F n-dimenziós Lebesgue-mértéke nulla, ezért ez nem okoz problémát, sőt a következőkben bevezetett konformitási feltétel miatt az F halmazon éppen $\mathcal{I}_{T_1} f \equiv \mathcal{I}_{T_2} f$ fog teljesülni.

(2.4.3) Definíció. Azt mondjuk, hogy egy Y (véges dimenziós) approximáló tér Z*-konform*, ha $Y \subset Z$.

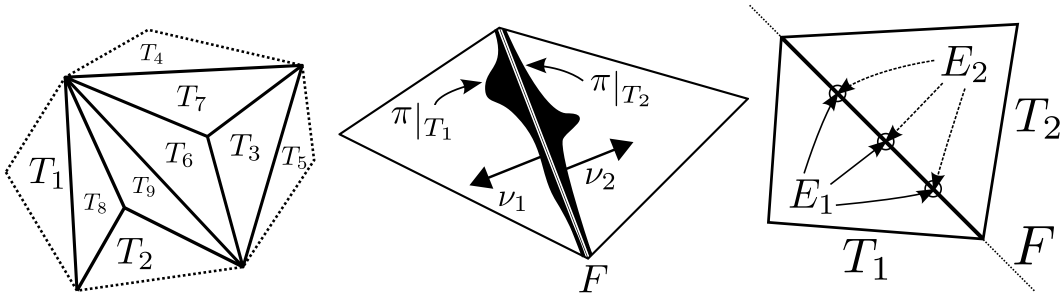
H^1-konform approximáció

Szűkítsük le az $\operatorname{im} \mathcal{I}_h$ teret egy további feltétellel. Legyen

$$X_h := \left\{ \pi \in \operatorname{im} \mathcal{I}_h \ : \ \forall F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}} \ \ [\![\pi]\!]_F = 0 \right\}, \tag{2.14}$$

ahol $\mathcal{F}_h^{\text{int}}$ jelöli $\mathcal{T}_h$ belső lapjait (2.2a ábra), valamint ha $F = T_1 \cap T_2$, és ν_1, illetve ν_2 jelöli T_1 illetve T_2 megfelelő lapjaihoz tartozó normálvektorokat, akkor

$$[\![\pi]\!]_F := \pi\big|_{T_1} \nu_1 + \pi\big|_{T_2} \nu_2 \tag{2.15}$$



(a) (b) (c)

2.2. ábra

a π *ugrása* F-en (2.2b ábra). Az X_h approximáló tér elemei tehát *ugrásmentesek*, a következő tétel szerint X_h H^1-konform [6, p. 62].

(2.4.4) Tétel. *Tegyük fel, hogy minden $T \in \mathcal{T}_h$ esetén $X(T) = H^1(T)$. Ekkor $X_h \subset H^1(\Omega)$.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $\pi \in X_h$ elemet, mivel $X_h \subset C^0(\operatorname{cl}\Omega) \subset L^2(\Omega)$, azt kell csak megmutatnunk, hogy $D_k\pi \in L^2(\Omega)$ $(k = 1, \ldots, n)$. A deriválás disztribúció értelemben értendő, azaz olyan $\rho_k \in L^2(\Omega)$ elemet keresünk, amelyre[2]

$$D_k T_\pi(\varphi) = T_{\rho_k}(\varphi) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), 1 \le k \le n),$$

azaz,

$$\int_\Omega \pi\, D_k\varphi\, d\lambda = -\int_\Omega \rho_k\, \varphi\, d\lambda \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), 1 \le k \le n)$$

teljesül. Mivel rendelkezünk Ω egy $\mathcal{T}_h$ diszjunkt felbontásával, és az egyes $T \in \mathcal{T}_h$ halmazokon ismert $D_k(\pi\big|_T)$, válasszuk ezt a „szakaszonként” definiált függvényt ρ_k-nak! Ekkor azt mondhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \rho_k\, \varphi\, d\lambda &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T D_k(\pi\big|_T)\, \varphi\, d\lambda \\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left[\int_{\partial T} \pi\big|_T\, \varphi\, (\nu_T, e_k)\, d\sigma - \int_T \pi\big|_T\, D_k\varphi\, d\lambda \right] && \text{(parciális integrálás)} \\
&= \sum_{F\in\mathcal{F}_h^{\text{int}}} \int_F \varphi\, ([\![\pi]\!]_F, e_k)\, d\sigma - \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \pi\big|_T\, D_k\varphi\, d\lambda && \text{((2.15) miatt)} \\
&= -\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \pi\big|_T\, D_k\varphi\, d\lambda && (\pi \in X_h) \\
&= -\int_\Omega \pi\, D_k\varphi\, d\lambda,
\end{aligned}$$

[2] T_f jelöli az $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ által generált reguláris disztribúciót: $T_f(\varphi) = \int_\Omega \varphi f\, d\lambda$.

ahol σ az $(n-1)$-dimenziós Lebesgue-mérték és $\{ e_k \in \mathbb{R}^n \ : \ 1 \le k \le n\}$ a standard bázis. $\square$

A H^1-konform szimpliciális Lagrange-elem

Először is be akarjuk látni, hogy ha megfelelően illeszkednek a Lagrange-típusú elemek, akkor ugrásmentes lesz a π interpoláns: $\pi \in X_h$. Az illeszkedés alatt persze azt értjük, hogy belső lapokon a szomszédos elemek által meghatározott lokális $\mathcal{I}_E$ interpolációs operátor megegyezik. Feltételezünk néhány egyszerűsítő körülményt [10, p. 47].

(F1) Az E referenciaelem lapjain azonos számú csomópont van.

(F2) Az $E = (T, \Pi, \Sigma)$ referenciaelem egy F lapját tekintve $E_F = (F, \Pi\big|_F, \Sigma_F)$ *végeselem*, ahol a Σ_F halmaz Σ azon elemeiből áll, amelyek F-en értékelnek ki.

(F3) Tetszőleges $F' \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{int}}$, $F' = T_1 \cap T_2$ $(T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h)$ esetén a T_1 és T_2 elemeknek megfelelő csomópontokat át lehet úgy számozni, hogy azok megegyezzenek, jelölje ezek halmazát $Z(F')$ minden $F' \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{int}}$ esetén.

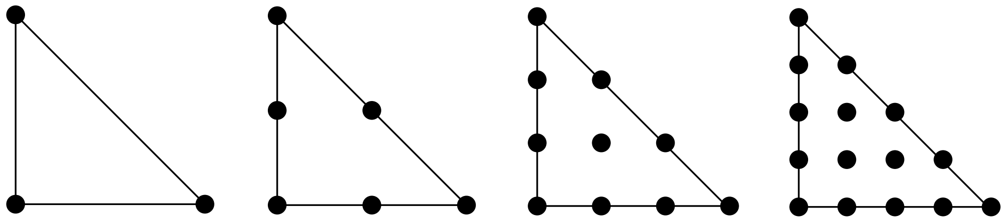
Ekkor érvényes a következő [10, pp. 47-48].

(2.4.5) Állítás. *Tegyük fel, hogy (F1)-(F3) teljesül. Legyen $\pi \in \operatorname{im} \mathcal{I}_h$, ekkor $\pi \in X_h$ pontosan akkor áll fenn, ha*

$$\forall F' \in \mathcal{F}_h^{int},\ F' = T_1 \cap T_2\ (T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h)\ \forall z_k \in Z(F')\ :\ \pi\big|_{T_1}(z_k) = \pi\big|_{T_2}(z_k). \tag{2.16}$$

Bizonyítás. A feltétel szükségessége az ugrás (2.15) definíciójából adódik. A megfordításhoz legyen $\pi_i = \pi\big|_{T_i}$, valamint $\alpha_i \ : \ T \longrightarrow T_i$ a megfelelő affin transzformációk $(i = 1, 2)$ és $F' \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{int}}$ tetszőleges lap. Az (F3) feltételre alapozva definiáljuk a referenciaelemen a $\zeta_k := \alpha_1^{-1}(z_k) = \alpha_1^{-1}(z_k)$ csomópontokat minden $z_k \in Z(F')$ esetén. Szintén a T referenciaelemen vezessük be a $\widetilde{\pi}_i\big|_F := \pi_i \circ \alpha_i\big|_F$ függvényeket. A (2.16) feltételből kapjuk, hogy $\widetilde{\pi}_1(\zeta_k) = \widetilde{\pi}_2(\zeta_k)$ minden ζ_k esetén. Így $\widetilde{\pi}_1\big|_F = \widetilde{\pi}_2\big|_F$, elvégre (F2) miatt F végeselem, a $\widetilde{\pi}_i\big|_F$ függvényeket egyértelműen meghatározzák a ζ_k pontbeli helyettesítési értékeik. Kapjuk, hogy $\pi_1\big|_{F'} = \pi_2\big|_{F'}$. $\square$

Most rátérünk $E_{\mathrm{Lagr}} := (T, \Pi_{\mathrm{Lagr}}, \Sigma_{\mathrm{Lagr}})$ *2-szimpliciális Lagrange-elem* konstrukciójára a T referenciaelemen. Legyen adott $d \ge 1$ egész (az elem *foka*), $\{z_k\} := \mathfrak{B}(2, d) \subset T$, azaz a csomópontok legyenek a megfelelő principális rács pontjai (lásd (B.7) egyenlet, 2.3 ábra), valamint legyen $\Sigma_{\mathrm{Lagr}} := \{\delta_{z_k}\}$, és $\Pi_{\mathrm{Lagr}} := \mathcal{P}_2^d$. A B függelék tükrében (lásd (B.1.7) tétel), megállapíthatjuk, hogy E_{Lagr} végeselem, és eleget tesz az (F1)-(F3) feltételeknek – a (2.4.5) állításból kapjuk, hogy a szimpliciális Lagrange-elem által generált approximáló tér H^1-konform.



2.3. ábra. 2-szimpliciális Lagrange-elem a $k = 1, 2, 3, 4$ esetekben, $\bullet$ jelöli a kiértékelést.

2.5. A globális interpolációs operátor hibája

A konstrukció lezárásaként megmutatjuk, hogy az (A.2.2) Bramble–Hilbert-lemmával hogyan lehet becsülni az $\mathcal{I}_h$ globális interpolációs operátor hibáját. Elötte azonban megmagyarázzuk a $\mathcal{T}_h$ szimpliciális rács jelölésében szereplő h index jelentését.

(2.5.1) Definíció. Legyen Ω tetszőleges tartomány, $\{\mathcal{T}_h \;:\; 0 < h \le 1\}$ szimpliciális felbontások egy családja, amelyre $\max\{\mathrm{diam}(T) \;:\; T \in \mathcal{T}_h\} \le h\,\mathrm{diam}(\Omega)$ teljesül. Egy adott $T \in \mathcal{T}_h$ szimplexhez jelölje $B_T \subset T$ azt a legnagyobb gömböt, amelyre nézve csillagtartomány T. Azt mondjuk, hogy $\{\mathcal{T}_h\}$ *reguláris*, ha létezik $\varrho > 0$ úgy, hogy minden $0 < h \le 1$ és $T \in \mathcal{T}_h$ esetén $\mathrm{diam}(B_T) \ge \varrho\,\mathrm{diam}(T)$ teljesül.

A lokális becslések felhasználásával belátható a következő [4, p. 108].

(2.5.2) Állítás. *Legyen* $\{\mathcal{T}_h \;:\; 0 < h \le 1\}$ *reguláris rácssorozat, amely egy* (T, Π, Σ) *referencia-elem affin transzformáltjainak példányaiból áll, és kielégíti a* (2.3.10) *állítás feltételeit alkalmas* r, s, p *számokkal. Ekkor* $0 \le t \le s$ *és* $v \in W^{s,p}(\Omega)$ *esetén*

$$\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|v - \mathcal{I}_h v\,;\,W^{t,p}(T)\|^p\Big)^{1/p} \le C_{ref,n,s,p,\rho} h^{s-t} |v\,;\,W^{s,p}(\Omega)|,$$

illetve $p = \infty$ *esetén, ha* $0 \le t \le r$

$$\max_{T\in\mathcal{T}_h} \|v - \mathcal{I}_h v\,;\,W^{t,\infty}(T)\| \le C_{ref,n,s,\rho} h^{s-t-n/p} |v\,;\,W^{s,p}(\Omega)|.$$

Ez az eredmény már elég a kitűzött modellfeladat kezeléséhez.

2.6. A Poisson-feladat végeselem-diszkretizációja

Ebben a befejező szakaszban a kiépített elméletet az első fejezetben tárgyalt peremértékfeladatra alkalmazzuk. Feltételezzük, hogy kevert peremfeltételek esetén minden elem legfeljebb egyfajta peremfeltételre vonatkozó előírást tartalmaznak. Tegyük fel továbbá, hogy a végeselem-approximáció *rendje* r, azaz

$$\|u - \mathcal{I}_h u\,;\; H^1(\Omega)\| \le Ch^r |u\,;\; H^{r+1}(\Omega)|,$$

valamint, ha $\Sigma \subset C^k(T)$ érvényes a referenciaelemre, akkor legyen $\mathcal{I}_h(X \cap C^k(\Omega)) \subset X_h$, ahol X a peremfeltételek szerinti X_0, illetve X_1. A H^1-konformitás miatt alkalmazható a Céa lemma, és kapjuk, hogy egyértelműen létezik $u_h \in X_h$ úgy, hogy $a(u_h, v) = F(v)$ $(\forall v \in X_h)$, amelyre

$$\|u - u_h\,;\; H^1(\Omega)\| \le Ch^r |u\,;\; H^1(\Omega)|.$$

Itt nem bizonyítjuk, de belátható az is, hogy

$$\|u - u_h\,;\; L^2(\Omega)\| \le Ch^{r+1} |u\,;\; H^{r+1}(\Omega)|.$$

3 Adaptivitás

Megmutattuk, hogy $h \longrightarrow 0$ esetén a Poisson-peremértékfeladatot megoldja a felvázolt végeselem-diszkretizációs eljárás. Mérnöki ill. felhasználói szempontból a konvergencia ténye pusztán filozófiai jelentőségű, a konvergencia optimalitása viszont kulcskérdés. A gyakorlati problémák jellemzően több méretskálán történő számolást igényelnek, ezek kezelésére a ’70-es évek óta adaptív módszereket alkalmaznak.

Egy adaptív algoritmus a X_h teret (és a $\mathcal{T}_h$ rácsot) egy előzetes kalkuláció (ún. *a posteriori* hibabecslés) alapján úgy módosítja, hogy az garantáltan csökkentse a hibát az előző approximációhoz képest. Az eljárást iterálva azt kívánjuk, hogy a rács finomodásával a lokális hiba egyenletesen oszlik el.

Az adaptivitás egyébként egy általános, numerikus analízisben széleskörben alkalmazott elv. Egy „univerzális” kvadratúrarutin bizonyosan adaptív módon közelít, de alkalmazzák a véges differencia-módszer esetében is, ahol szintén lenyűgöző eredményeket produkál.

3.1. A reziduális

Egy *a posteriori* hibabecslési séma során egy módosított feladatot oldunk meg az $e_h := u - u_h$ függvényre, amely kvalitatív információkat szolgáltat a hibáról. Fontos, hogy egy *a posteriori* séma gyors legyen – legalábbis gyorsabb mintha a szimulációt egyenletesen finomított rácson futtatnánk le. Persze, ha az e_h hibát pontosan ismernénk, akkor azt hozzáadva a közelítéshez az u megoldást kapnánk.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mint az előző fejezetben, $\mathcal{T}_h$ egy szimpliciális rács Ω-n, X_h pedig a szimplexeken „szakaszonként” $\mathcal{P}_n^d$-beli polinomok $H^1(\Omega)$-konform approximációs tere, és szorítkozzunk a kevert peremfeltételek esetére. Tegyük fel továbbá, hogy f szakaszonként C^0.

(3.1.1) Állítás. *Legyen $u_h \in X_h$ az előző fejezet szerint nyert approximáns. Ekkor az e_h hibára*

$$\forall v \in X \ : \ a(e_h, v) = R(v), \tag{3.1}$$

ahol az R reziduális *funkcionál*

$$\forall v \in X \ : \ R(v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f + \triangle u_h) v \, d\lambda + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F ([\![\nabla u_h]\!]_F, \nu_F) v \, d\sigma \tag{3.2}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
a(e_h, v) &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \big(\nabla(u-u_h), \nabla v\big)\, d\lambda \\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T f v\, d\lambda - \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \big(\nabla u_h, \nabla v\big)\, d\lambda && (u \text{ megoldás}) \\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T (f + \triangle u_h) v\, d\lambda - \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\nabla u_h\big|_T, \nu_{\partial T}) v\, d\sigma && (\text{Green-tétel}) \\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T (f + \triangle u_h) v\, d\lambda + \sum_{F\in\mathcal{F}_h} \int_F ([\![\nabla u_h]\!]_F, \nu_F) v\, d\sigma,
\end{aligned}$$

ahol $\mathcal{F}_h$ jelöli $\mathcal{T}_h$ összes lapját, illetve

$$[\![\nabla u_h]\!]_F(s) := \lim_{\varepsilon\to 0} \Big((\nabla u_h)(s + \varepsilon\nu_F) - (\nabla u_h)(s - \varepsilon\nu_F) \Big)$$ □

Emlékeztetünk, hogy u_h ugrásmentes volt, ∇u_h általában nem az, és az előzőek szerint az R reziduálisban lényeges szerepet kap. Nevezzük (3.2) jobb oldalának első tagját *abszolút folytonos résznek* (jelben R_{ac}), illetve második tagját *ugrórésznek* (jelben R_{jmp}). Felhívjuk a figyelmet arra, hogy $e_h \in H^1(\Omega)$ általában *nem* folytonos[1] – az iménti állításban szereplő variációs feladat kezelésére az előző fejezetben megkonstruált interpolációs operátorok nem alkalmasak.

A (2.3) Galerkin-ortogonalitási relációból kapjuk, hogy $\ker R = X_h$.

3.2. Lokális hibabecslők

Tételezzük fel, hogy az $\mathcal{I}_h$ globális interpolánsra érvényes

$$\begin{aligned}
\forall T \in \mathcal{T}_h &: \|v - \mathcal{I}_h v\,;\, L^2(T)\| \le \gamma_0 \lambda(T)^{1/n} |v\,;\, H^1(N(T))| \\
\forall F \in \mathcal{F}_h &: \|v - \mathcal{I}_h v\,;\, L^2(F)\| \le \gamma_1 \sigma(F)^{1/2(n-1)} |v\,;\, H^1(N(F))|,
\end{aligned}$$

ahol $N(T) \subset \mathcal{T}_h$ a T szimplex környezete a rácsban, és $N(F) \subset \mathcal{T}_h$ az F lap környezete. Ebben az esetben megmutatható [4, p. 247], hogy az

$$\mathcal{E}_F(u_h)^2 := \sigma(F)^{1/(n-1)} \|(\nu_F, [\![\nabla u_h]\!]_F)\,;\, L^2(F)\|^2 + \sum_{T\in N(F)} \lambda(T)^{2/n} \|f + \triangle u_h\,;\, L^2(T)\|^2 \tag{3.3}$$

lokális hibabecslőre érvényes

$$|R(v)| \le \gamma \Big(\sum_{F\in\mathcal{F}} \mathcal{E}_F(u_h)^2 \Big)^{1/2} |v\,;\, H^1(\Omega)|,$$

[1] Egy dimenzióban folytonosak H^1 elemei, kettőben már nem: tekintsük a $\log|\log r|$ függvényt $B(0, 1/e)$-n.

ahol γ csak az interpoláció hibájától függ. Kissé hosszadalmas számolással megmutatható, hogy az $|e_h\,;\,H^1(\Omega)|$ globális hibát valóban jól megbecsüli az $\mathcal{E}_F(u_h)^2$ mennyiség, teljesül ugyanis a

$$c\Big(\sum_{F\in\mathcal{F}}\mathcal{E}_F(u_h)^2\Big)^{1/2}\le |e_h\,;\,H^1(\Omega)|\le\gamma\Big(\sum_{F\in\mathcal{F}}\mathcal{E}_F(u_h)^2\Big)^{1/2}$$

egyenlőtlenséglánc, ahol c csak d-től függ.

3.3. A Mekchay–Nochetto algoritmus

A most bemutatott $\mathcal{E}_F(u_h)^2$ hibabecslő alkalmas arra, hogy egy adaptív algoritmust irányítson [14, 4]. Az eljárás általánosabb elliptikus feladatokra is használható, ahol az $a(\cdot\,,\,\cdot)$ bilineáris forma nem szimmetrikus. Kezdetben adott egy $\mathcal{T}_1$ rács, illetve egy u_0 közelítő megoldás. Az algoritmus generál egy reguláris, egymásba skatulyázott $\{\mathcal{T}_k\}$ rácssorozatot úgy, hogy $\mathcal{T}_{k+1}$ a $\mathcal{T}_k$ egy finomítása, illetve létezik olyan $\gamma_1>0$ konstans, amelyre

$$\forall T\in\mathcal{T}_k, \forall T'\in\mathcal{T}_{k+1}\ (T'\subset T)\ :\ \gamma_1\,\mathrm{diam}(T)\le\mathrm{diam}(T'). \tag{3.4}$$

Az algoritmus lépései a következők:

MEGOLDÁS $\longrightarrow$ HIBABECSLÉS $\longrightarrow$ JELÖLÉS $\longrightarrow$ FINOMÍTÁS.

- A MEGOLDÁS fázisban egy u_k közelítő megoldást nyerünk Galerkin-approximációval u_{k-1} alapján a $\mathcal{T}_k$ rácson.
- A kapott közelítés alapján a HIBABECSLÉS során minden $F\in\mathcal{F}_k^{\mathrm{int}}$ lapra meghatározzuk az $\mathcal{E}_F(u_j)$, illetve minden $T\in\mathcal{T}_k$ szimplexre az

  $$\mathrm{osc}_k(T)=\mathrm{diam}(T)\|R_{\mathrm{ac},k}-Q^kR_{\mathrm{ac},k}\,;\,L^2(T)\| \tag{3.5}$$

  mennyiségeket, ahol Q^k az L^2-merőleges vetítés a $\mathcal{T}_k$-n szakaszonként $\mathcal{P}_n^{k-1}$-beli függvények vektorterére.
- A JELÖLÉS abból áll, hogy kiválasztunk egy $\widehat{\mathcal{F}}_k^{\mathrm{int}}\subset\mathcal{F}_k^{\mathrm{int}}$ halmazt, amelyre

  $$\theta_1^2\sum_{F\in\mathcal{F}_k^{\mathrm{int}}}\mathcal{E}_F(u_k)^2\le\sum_{F\in\widehat{\mathcal{F}}_k^{\mathrm{int}}}\mathcal{E}_F(u_k)^2,$$

  illetve egy $\widehat{\mathcal{T}}_k\subset\mathcal{T}_k$ halmazt, amelyre

  $$\theta_2^2\sum_{T\in\mathcal{T}_k}\mathrm{osc}_k(T)^2\le\sum_{T\in\widehat{\mathcal{T}}_k}\mathrm{osc}_k(T)^2.$$

- A FINOMÍTÁS lépésben a meghatározzuk a $\mathcal{T}_{k+1}$ rácsot a $\mathcal{T}_k$ finomításával úgy, hogy a következők teljesüljenek.

    1. A $\mathcal{T}_{k+1}$ ráccsal továbbra is reguláris a $\{\mathcal{T}_k\}$ sorozat.
    2. Az összes $\widehat{\mathcal{F}}_k^{\text{int}}$-beli lap tartalmaz $\mathcal{T}_{k+1}$-ban felvett csúcsot a belsejében.
    3. Ha $F \in \widehat{\mathcal{F}}_k^{\text{int}}$ lapja egy $T \in \mathcal{T}_k$ szimplexnek, akkor T tartalmaz $\mathcal{T}_{k+1}$-ben felvett csúcsot a belsejében és T finomítására fennáll (3.4).
    4. Minden $T \in \widehat{\mathcal{T}}_k$ szimplex $\mathcal{T}_{k+1}$-beli szimplexekre történő felbontására fennáll, hogy létezik $\gamma < 1$ úgy, hogy

$$\forall T' \in \mathcal{T}_{k+1}\ (T' \subset T)\ :\ \operatorname{diam}(T') \le \gamma \operatorname{diam}(T).$$

Legyen

$$|||v|||_T^2 := \int_T \|\nabla v\|^2 \, d\lambda, \text{ ill. } |||v|||^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} |||v|||_T^2$$

az ún. *energia-félnorma*. Ekkor érvényes a következő.

(3.3.1) Tétel. *Legyen $\{u_k\}$ a Mekchay–Nochetto algoritmus által készített megoldássorozat. Ekkor létezik $0 < \theta < 1$ és $\gamma > 0$ úgy, hogy*

$$|||u - u_{k+1}||| + \gamma \sum_{T \in \mathcal{T}_{k+1}} \operatorname{osc}_{k+1}(T)^2 \le \theta\Big(|||u - u_k|||^2 + \gamma \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \operatorname{osc}_k(T)^2 \Big),$$

ahol θ és γ csak a $\{\mathcal{T}_k\}$ regularitási konstansától, illetve a γ_1, γ_2, θ_1 és θ_2 konstansoktól függ.

A tétel bizonyítását itt nem közöljük, megtalálható a szakasz elején idézett munkákban.

A Polinomiális approximációelmélet Szoboljev-terekben

Jelen függelékben bemutatunk néhány eredményt, amelyek alapvető fontosságúak a végeselem-módszerek approximációtételeinek bizonyításához. A szakasz R. G. Durán [9] munkáját követi, amely a Hardy–Littlewood egyenlőtlenséget alkalmazza Calderón nyomán. Eltérő tárgyalásmód található T. Dupont és L. R. Scott [8] dolgozatában (v.ö. [4]), amely Riesz-potenciálokra vonatkozó egyenlőtlenségeket használ fel.

A.1. Átlagolt Taylor-polinomok

Elemi analízisből ismert, hogy egy $u \in C^{r-1}(\mathbb{R}^n)$ függvény $x \in \mathbb{R}^n$ pontbeli r-edrendű Taylor-polinomja

$$(\mathcal{T}_x^r u)(\cdot) = \sum_{|\alpha|<r} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!}(\cdot - x)^\alpha. \tag{A.1}$$

amelyből világos, hogy a $\mathcal{T}_x^r$ lineáris leképezés egy $C^{r-1} \longrightarrow \mathcal{P}_n^{<r}$ projekció. Legyen $x_1 \in \Omega$, $x_2 \in B$ tetszőleges pontok, ekkor feltételezésünk szerint $(1-t)x_2 + tx_1 \in \Omega$, bármely $t \in [0,1]$ esetén. Tegyük fel, hogy $u \in C^r(\Omega)$, és alkalmazzuk

$$f(t) = u((1-t)x_1 + tx_2) \quad (t \in [0,1])$$

függvényre az integrál-maradéktagos Taylor-formulát a 0 könyezetében:

$$f(0+h) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}h^k + \int_0^h \frac{f^{(r)}(t)}{(r-1)!}(h-t)^{r-1}\,dt,$$

ha $h > 0$. Vegyük észre, hogy $h = 1$ esetén éppen

$$\begin{aligned} f(1) = u(x_2) &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{f^{(r)}(t)}{(r-1)!}(1-t)^{r-1}\,dt \\ &= \sum_{|\alpha|<r} \frac{D^\alpha u(x_2)}{\alpha!}(x_2 - x_1)^\alpha \\ &\quad + r\int_0^1 \sum_{|\alpha|=r} \frac{D^\alpha u((1-t)x_1 + tx_2)}{\alpha!}(x_2 - x_1)^\alpha (1-t)^{r-1}\,dt \\ &= (\mathcal{T}_{x_1}^r u)(x_2) + r\sum_{|\alpha|=r} \frac{(x_2-x_1)^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 D^\alpha u((1-t)x_1 + tx_2)(1-t)^{r-1}\,dt. \end{aligned}$$

Legyen most $u \in W^{r-1,p}(\Omega)$, $B \subset \mathbb{R}^n$ nyílt gömb és definiáljuk a $\mathcal{Q}^r$ *átlagolt Taylor-polinomot* a következőképpen. Átlagoljuk ki B-n a $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ gyenge derivált miatt esetlegesen pontonként nem létező $x \mapsto \mathcal{T}_x^r u$ függvényt:

$$\mathcal{Q}^r u := \frac{1}{\lambda(B)} \int_B (\mathcal{T}_x^r u)\, \lambda(dx). \tag{A.2}$$

Megállapíthatjuk, hogy $D^\alpha u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ miatt az integrál értelmes, valamint

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Q}^r u)(y) &= \frac{1}{\lambda(B)} \int_B \sum_{|\alpha|<r} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!} (y-x)^\alpha \, \lambda(dx) \\
&= \frac{1}{\lambda(B)} \int_B \sum_{|\alpha|<r} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!} \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{\alpha_i} \, \lambda(dx) \\
&= \frac{1}{\lambda(B)} \int_B \sum_{|\alpha|<r} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!} \prod_{i=1}^n \Big(\sum_{\beta_i+\gamma_i=\alpha_i} (-1)^{\gamma_i} \frac{\alpha_i!}{\beta_i!\gamma_i!} x_i^{\beta_i} y_i^{\gamma_i} \Big) \, \lambda(dx) \\
&= \frac{1}{\lambda(B)} \int_B \sum_{|\alpha|<r} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!} \Big(\sum_{\beta+\gamma=\alpha} A_{\beta,\gamma} x^\beta y^\gamma \Big) \, \lambda(dx) \\
&= \sum_{|\alpha|<r} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} A_{\beta,\gamma} y^\gamma \frac{1}{\lambda(B)} \int_B D^\alpha u(x) x^\beta \, \lambda(dx)
\end{aligned}$$

alkalmas $A_{\beta,\gamma}$ konstansokkal, amiből látszik, hogy $\operatorname{im} \mathcal{Q}^r = \mathcal{P}_n^{<r}$ továbbra is fennáll, valamint $\mathcal{Q}^r$ projekció a $\mathcal{P}_n^{<r}$ altérre. A későbbiekre való tekintettel megjegyezzük, hogy korlátos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon $\mathcal{Q}^r$ egy $(L^1, W^{r,\infty})$-folytonos lineáris leképezés:

$$\| \mathcal{Q}^r u \,;\, W^{r,\infty}(\Omega) \| \le C_{r,\Omega} \| u \,;\, L^1(\Omega) \|. \tag{A.3}$$

Az iménti számolások szerint az átlagolt Taylor-polinom maradéktagja:

$$(\mathcal{R}_{x_1}^r u)(x_1) := u(x_1) - \mathcal{Q}^r u(x_1) \tag{A.4}$$

$$= \frac{1}{\lambda(B)} \int_B \Big(u(x_1) - (\mathcal{T}_{x_2}^r u)(x_1) \Big) \, \lambda(dx_2) \tag{A.5}$$

$$= \frac{1}{\lambda(B)} \int_B r \sum_{|\alpha|=r} \frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 D^\alpha u((1-t)x_1 + t x_2)(1-t)^{r-1} \, dt \lambda(dx_2). \tag{A.6}$$

Az $\mathcal{Q}^r$ operátor a következő reláció szerint kommutál a deriválással; ez igen hasznos tulajdonság (lásd [19]).

(A.1.1) Állítás. $D^\delta \mathcal{Q}^r = \mathcal{Q}^{r-|\delta|} D^\delta$

Bizonyítás. Indukcióval: ha $|\delta| = 0$, akkor nincs mit bizonyítani. Legyen $|\xi| = 1$, így $D^\xi = \partial_k$. Ezért

$$(\partial_k \mathcal{Q}^r u)(y) = \frac{1}{\lambda(B)} \int_B \sum_{|\alpha|<r} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!} \partial_k \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{\alpha_i} \, \lambda(dx)$$
$$= \frac{1}{\lambda(B)} \int_B \sum_{\substack{|\alpha|<r \\ 0<\alpha_k}} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!} \alpha_k (y_k - x_k)^{\alpha_k - 1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (y_i - x_i)^{\alpha_i} \, \lambda(dx),$$

amely, ha bevezetjük az $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k - 1, \ldots, \alpha_n)$ jelölést,

$$\frac{1}{\lambda(B)} \int_B \sum_{|\alpha'|<r-1} \frac{\partial_k D^{\alpha'} u(x)}{\alpha'!} \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{\alpha'_i} \, \lambda(dx)$$
$$= (\mathcal{Q}^{r-1} \partial_k u)(y).$$

Tegyük fel, hogy $|\delta| = n$ esetén már beláttuk a relációt, legyen $|\delta'| = n + 1$, és $D^\xi D^\delta = D^{\delta'}$, $|\xi| = 1$. Ekkor

$$D^{\delta'} \mathcal{Q}^r = D^\xi D^\delta \mathcal{Q}^r = D^\xi \mathcal{Q}^{r-|\delta|} D^\delta = \mathcal{Q}^{r-|\delta|-1} D^\xi D^\delta = \mathcal{Q}^{r-|\delta'|} D^{\delta'} \qquad \square$$

A.2. A Bramble–Hilbert-lemma

Legyen $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq q > 1$, $y \in \partial B(0, 1)$, ekkor

$$M_y f(x) := \sup \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(x + ty)| \, dt \ : \ h > 0 \right\}$$

az f függvény *y irányhoz tartozó Hardy–Littlewood maximálfüggvénye*. Integráljuk ki az $y \mapsto M_y f$ függvényt $\partial B(0, 1)$-en:

$$Mf(x) := \left(\int_{\partial B(0,1)} (M_y f(x))^q \, \sigma(dy), \right)^{1/q}.$$

Erre érvényes a következő

(A.2.1) Állítás. $\|Mf \ ; \ L^p\| \leq C_p \|f \ ; \ L^p\|$.

Bizonyítás. Az $M_y f(x)$ függvényre érvényes az $(L^p(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))$-folytonosság, azaz

$$\|M_y f(\cdot) \ ; \ L^p(\mathbb{R}^n)\|^p \leq C_p^p \|f \ ; \ L^p(\mathbb{R}^n)\|^p,$$

ahol C_p az egydimenziós Hardy–Littlewood maximálfüggvény folytonossági konstansa. Ekkor mondhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \,\lambda(dx) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big[\int_{\partial B(0,1)} (M_y f(x))^q \,\sigma(dy) \Big]^{p/q} \lambda(dx) \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(\partial B(0,1))^{1-p/q} \Big[\int_{\partial B(0,1)} (M_y f(x))^p \,\sigma(dy) \Big] \lambda(dx) \qquad \text{(Hölder)} \\
&\le \sigma(\partial B(0,1))^{1-p/q} \int_{\partial B(0,1)} \Big[\int_{\mathbb{R}^n} (M_y f(x))^p \,\lambda(dx) \Big] \sigma(dy) \quad \text{(Fubini-tétel)} \\
&\le \sigma(\partial B(0,1))^{1-p/q} C_p^p \| f \,;\, L^p(\mathbb{R}^n)\|^p \int_{\partial B(0,1)} \sigma(dy), \\
&= \sigma(\partial B(0,1))^{2-p/q} C_p^p \| f \,;\, L^p(\mathbb{R}^n)\|^p
\end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy az (L^p, L^p)-folytonosság minden $y \in \partial B(0,1)$ esetén egyenletesen teljesül. □

(A.2.2) Bramble–Hilbert-lemma. *Legyen* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *korlátos, nyílt halmaz, amely egy* $B \subset \Omega$, $\lambda(B) > 0$ *részhalmaz minden pontjára nézve csillagtartomány. Legyen továbbá* $p \ge q > 1$, $r > s \ge 0$, *ekkor* $\exists C_{r,n,\Omega} > 0$ *konstans úgy, hogy*

$$\forall u \in W^{r,p} \;:\; |u - \mathcal{Q}^r u \,;\, W^{s,q}(\Omega)| \le C_{r,n,\Omega} \lambda(B)^{-1/p} \operatorname{diam}(\Omega)^{r-s+n/q} |u \,;\, W^{r,p}(\Omega)|.$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $u \in W^{r,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$. Az (A.1.1) felcserélhetőségi relációt felhasználva,

$$\begin{aligned}
|u - \mathcal{Q}^r u \,;\, W^{s,q}| &= \Big(\sum_{|\alpha|=s} \| D^\alpha (u - \mathcal{Q}^r u) \,;\, L^p \|^q \Big)^{1/q} \\
&\le \sum_{|\alpha|=s} \| D^\alpha (u - \mathcal{Q}^r u) \,;\, L^q \| \qquad \text{(multinomiális tétel)} \\
&= \sum_{|\alpha|=s} \| D^\alpha u - \mathcal{Q}^{r-s}(D^\alpha u)) \,;\, L^q \|
\end{aligned}$$

Legyen $x_1 \in B$ és $x_2 \in \Omega$. Adott $|\alpha| = s$ esetén a fenti összeg egy tagja a következőképpen írható:

$$\begin{aligned}
\| D^\alpha u - \mathcal{Q}^{r-s}(D^\alpha u) \,;\, L^q \| &= \Big\| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B (D^\alpha u - \mathcal{T}_{x_1}^{r-s}(D^\alpha u))(\cdot)\, \lambda(dx_1) \,;\, L^q \Big\| \\
&\le \frac{1}{\lambda(B)} \int_B \big\| (D^\alpha u - \mathcal{T}_{x_1}^{r-s}(D^\alpha u))(\cdot) \,;\, L^q \big\| \,\lambda(dx_1) \quad \text{(Minkowski)}
\end{aligned}$$

Az (A.6) felhasználásával az integrandus q-adik hatványa

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big|(r-s)\sum_{|\beta|=r-s}\frac{(x_2-x_1)^\beta}{\beta!}\int_0^1 (D^\beta D^\alpha u)(x_1+t(x_2-x_1))\,(1-t)^{r-s-1}\,dt\Big|^q\,\lambda(dx_2)\\
&\le \int_\Omega (r-s)^q\,\mathrm{diam}(\Omega)^{(r-s)q}\left|\sum_{|\beta|=r-s}\frac{1}{\beta!}\int_0^1 D^\beta D^\alpha u(x_1+t(x_2-x_1))\,dt\right|^q\lambda(dx_2)\\
&\le \int_\Omega (r-s)^q\,\mathrm{diam}(\Omega)^{(r-s)q}\left[\int_0^1\Big|\sum_{|\beta|=r-s}\frac{1}{\beta!}D^\beta D^\alpha u(x_1+t(x_2-x_1))\Big|\,dt\right]^q\lambda(dx_2),
\end{aligned}$$

amelyet a $\rho = t/\|x_2-x_1\|$ helyettesítéssel átalakíthatunk:

$$\begin{aligned}
&(r-s)^q\,\mathrm{diam}(\Omega)^{(r-s)q}\\
&\quad\times\int_\Omega\left[\frac{1}{\|x_2-x_1\|}\int_0^{\|x_2-x_1\|}\left|\sum_{|\beta|=r-s}\frac{1}{\beta!}D^\beta D^\alpha u\left(x_1+\rho\frac{x_2-x_1}{\|x_2-x_1\|}\right)\right|\lambda(d\rho)\right]^q\lambda(dx_2).
\end{aligned}$$

Legyen $y := (x_2-x_1)/\|x_2-x_1\|$, és

$$f := \chi_\Omega\sum_{|\beta|=r-s}\frac{1}{\beta!}D^\beta D^\alpha u,$$

ahol χ_Ω az Ω tartomány karakteriszikus függvénye. Az y irány menti Hardy–Littlewood maximálfüggvény felhasználásával az előző integrál felülről becsülhető az

$$\int_\Omega (M_y f(x_1))^q\,\lambda(dx_2)$$

mennyiséggel. Az $M_y f(x_1)$ függvény csak az x_2 irányától függ – ezt a szimmetriát kihasználhatjuk azzal, ha gömbfelületeken integrálunk

$$\begin{aligned}
&\big\|(D^\alpha u-\mathcal{T}_{x_1}^{r-s}(D^\alpha u))(\cdot)\,;\,L^q\big\|\\
&\quad\le (r-s)\,\mathrm{diam}(\Omega)^{r-s}\Big(\int_0^{\mathrm{diam}(\Omega)}\int_{\partial B(0,\tau)}(M_y f(x_1))^q\,\sigma(dy)\,\tau^{n-1}d\tau\Big)^{1/q}\\
&\quad= (r-s)\,\mathrm{diam}(\Omega)^{r-s}\Big(\frac{\mathrm{diam}(\Omega)^n}{n}\Big)^{1/q}\Big(\int_{\partial B(0,1)}(M_y f(x_1))^q\,\sigma(dy)\Big)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
&\|D^\alpha u-\mathcal{Q}^{r-s}(D^\alpha u)\,;\,L^q\|\\
&\le (r-s)\,\mathrm{diam}(\Omega)^{r-s+n/q}n^{-1/q}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B\Big(\int_{\partial B(0,1)}(M_y f(x_1))^q\,\sigma(dy)\Big)^{1/q}\lambda(dx_1)\\
&\le (r-s)\,\mathrm{diam}(\Omega)^{r-s+n/q}n^{-1/q}\lambda(B)^{-1/p}\Big(\int_B\Big(\int_{\partial B(0,1)}(M_y f(x_1))^q\,\sigma(dy)\Big)^{1/q}\lambda(dx_1)\Big)^{1/p}\\
&\le (r-s)\,\mathrm{diam}(\Omega)^{r-s+n/q}n^{-1/q}\lambda(B)^{-1/p}\sigma(\partial B(0,1))^{1/q}C_p\|f\,;\,L^p\|,
\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk az (A.2.1) állítást. Az f függvény L^p-normája tartalmazza a kívánt $W^{r,p}$-félnorma egy részét, ugyanis

$$\|f\,;\,L^p\| = \Big\| \sum_{|\beta|=r-s} \frac{1}{\beta!} D^\beta D^\alpha u\,;\,L^p \Big\| \le \sum_{|\beta|=r-s} \frac{1}{\beta!} \|D^\beta D^\alpha u\,;\,L^p\|$$
$$\le \Big(\sum_{|\beta|=r-s} \frac{1}{(\beta!)^{1-1/p}} \Big)^{\frac{p}{p-1}} \Big(\sum_{|\beta|=r-s} \|D^\beta D^\alpha u\,;\,L^p\|^p \Big)^{1/p}, \quad \text{(Hölder-egyenlőtlenség)}$$

a bizonyítás kész, ha felösszegezzük az előbbit az $|\alpha| = s$ halmazon:

$$|u - \mathcal{Q}^r u\,;\,W^{s,q}| \le \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha u - \mathcal{Q}^{r-s}(D^\alpha u)\,;\,L^q\|$$
$$\le (r-s)\,\mathrm{diam}(\Omega)^{r-s+n/q} n^{-1/q} \lambda(B)^{-1/p} \sigma(\partial B(0,1))^{1/q} C_p \Big(\sum_{|\beta|=r-s} \frac{1}{(\beta!)^{1-1/p}} \Big)^{\frac{p}{p-1}}$$
$$\times \Big(\sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha u\,;\,L^p\|^p \Big)^{1/p}$$
$$= C\lambda(B)^{-1/p}\,\mathrm{diam}(\Omega)^{r-s+n/q} |u\,;\,W^{r,p}(\Omega)| \qquad \square$$

Ennek egyszerű következménye az alábbi állítás.

(A.2.3) Friedrich-egyenlőtlenség. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt halmaz, amely egy $B \subset \Omega$, $\lambda(B) > 0$ részhalmaz minden pontjára nézve csillagtartomány. Ekkor minden $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esetén fennáll*

$$\|u - u_\Omega\,;\,W^{1,p}(\Omega)\| \le C_{n,\Omega} |u\,;\,W^{1,p}(\Omega)|, \text{ ahol } u_\Omega = \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega f\,d\lambda.$$

Bizonyítás. Legyen $f \in L^p(\Omega)$, ekkor

$$\|f_\Omega\,;\,L^p(\Omega)\|^p = \frac{1}{\lambda(\Omega)^p} \int_\Omega \Big| \int_\Omega f\,d\lambda \Big|^p d\lambda = \frac{1}{\lambda(\Omega)^{p-1}} \Big| \int_\Omega f\,d\lambda \Big|^p$$
$$\le \frac{1}{\lambda(\Omega)^{p-1}} \|f\,;\,L^p(\Omega)\|^p \lambda(\Omega)^{(1-1/p)p} = \|f\,;\,L^p(\Omega)\|^p.$$

Tehát háromszög-egyenlőtlenséggel $\|u - u_\Omega\,;\,L^p(\Omega)\| \le 2\|u - c\,;\,L^p(\Omega)\|$, *minden* $c \in \mathbb{R}$ esetén. Az (A.2.2) Bramble–Hilbert-lemma $r = 1$ esetben a konstans függvénnyel való approximáció hibájára ad felső becsélést, így

$$\|u - u_\Omega\,;\,L^p(\Omega)\| \le 2 \inf_{c\in\mathbb{R}} \|u - c\,;\,L^p(\Omega)\| \le C_{n,\Omega} |u\,;\,W^{1,p}(\Omega)|,$$

elvégre $W^{0,p} = L^p$. Világos, hogy $|u - u_\Omega\,;\,W^{1,p}(\Omega)| = |u\,;\,W^{1,p}(\Omega)|$, ezt hozzáadva mindkét oldalhoz kapjuk a kívánt egyenlőtlenséget. $\square$

(A.2.4) Szoboljev-lemma. *Ha* $u \in W^{r,p}(\Omega)$, *ahol*

$$\begin{cases} r - n/p > 0, & \textit{ha } 1 < p < +\infty \\ r - n \geq 0, & \textit{ha } p = 1 \end{cases}$$

akkor

$$\|u\,;\, L^\infty(\Omega)\| \leq C_{n,r,\Omega}\|u\,;\, W^{r,p}(\Omega)\|.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \|u\,;\, L^\infty(\Omega)\| &\leq \|u - \mathcal{Q}^r u\,;\, L^\infty(\Omega)\| + \|\mathcal{Q}^r u\,;\, L^\infty(\Omega)\| \\ &\leq C_{r,n,\Omega}|u\,;\, W^{r,p}(\Omega)| + C_{r,\Omega}\|u\,;\, L^1(\Omega)\| \qquad \text{(Bramble–Hilbert és (A.3))} \\ &\leq C_{r,n,\Omega}\|u\,;\, W^{r,p}(\Omega)\| \end{aligned}$$

□

B Lagrange-interpoláció szimplexen

Ebben a függelékben összefoglaljuk az n-szimpliciális Lagrange-interpolációs polinomok elméletét, ahogyan azt a [15][16][5] munkákban megjelenítik.

B.1. Polinomiális interpoláció rácson

A többváltozós polinomiális interpoláció általános algebrai (és geometriai) elmélete nem közismert a végeselem irodalomban. A teljesség kedvéért úgy gondoljuk, tanulságos bemutatni az [5] munkában tett általános érvényű megállapításokat is.

(B.1.1) Definíció. Legyen $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ véges ponthalmaz (ún. *rács*). Azt mondjuk, hogy $\mathcal{X}$ *lehetővé tesz legfeljebb d-edfokú (egyértelmű) interpolációt*, ha tetszőleges $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényhez (egyértelműen) létezik olyan $P \in \mathcal{P}_n^d$ polinom, amelyre

$$\forall x \in \mathcal{X} \ : \ P(x) = f(x). \tag{B.1}$$

(B.1.2) Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{X}$ rács *teljes*, ha $|\mathcal{X}| = \dim \mathcal{P}_n^d$.

A következő karakterizáció igen nehezen ellenőrizhető feltételt tartalmaz.

(B.1.3) Állítás. *Az $\mathcal{X}$ rács pontosan akkor tesz lehetővé legfeljebb d-edfokú egyértelmű interpolációt, ha teljes és nem fekszik semmilyen, legfeljebb d-edfokú algebrai felületen.*

Bizonyítás. A jobb érthetőség kedvéért $n = 2$ esetet véve, a (B.1) a következő lineáris egyenletrendszer a P polinom ismeretlen a_{ij} együtthatóira:

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \zeta_1 & \xi_1^2 & \xi_1\zeta_1 & \zeta_1^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \xi_i & \zeta_i & \xi_i^2 & \xi_i\zeta_i & \zeta_i^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\xi_1, \zeta_1) \\ \vdots \\ f(\xi_i, \zeta_i) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Visszatérve az általános esetre, azt mondhatjuk, hogy az egyenletrendszernek pontosan akkor van egyértelmű megoldása, ha a sorok száma $\dim \mathcal{P}_n^d$, és így $|\mathcal{X}| = \dim \mathcal{P}_n^d$ és a magtér triviális. Ez utóbbi feltétel pedig ekivalens azzal, hogy nem található olyan, legfeljebb d-edfokú polinom (más szóval a_{ij} együtthatók), amelyet az $\mathcal{X}$ elemei annulálnának. □

(B.1.4) Állítás. *Ha $\mathfrak{X}$ teljes, és lehetővé tesz legfeljebb d-edfokú interpolációt, akkor egyértelmű.*

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyítása alapján, ha van megoldása az egyenletrendszerek, akkor az egyértelmű is. □

(B.1.5) Tétel. *Ha $\mathfrak{X}$ teljes, és lehetővé tesz legfeljebb d-edfokú interpolációt, akkor érvényes a*

$$P = \sum_{x \in \mathfrak{X}} f(x)\ell_x$$

kifejtés (amely tehát egyértelmű), ahol az a priori *rögzített ℓ_x bázispolinomok pontosan d-edfokúak, érvényes rájuk a δ-tulajdonság:*

$$\forall x \in \mathfrak{X}\ \forall y \in \mathbb{R}^n\ :\ \ell_x(y) = \delta(x-y),\ \ itt\ \ \delta(u) = \begin{cases} 1, & ha \quad u = 0 \\ 0, & ha \quad u \neq 0 \end{cases},$$

valamint semelyik ℓ_x nem tartalmaz p^2 alakú gyöktényezőt, ahol p legalább elsőfokú polinom.

Bizonyítás. A δ-tulajdonság triviális (B.1) fennállása miatt. Indirekt tegyük fel, hogy $\deg \ell_y < d$. Legyen $H \in \mathcal{P}_n^1$ olyan hipersík, amely nem tartalmazza az y pontot, azaz $H(y) \neq 0$. A $G := (H(y))^{-1} H\ell_y \in \mathcal{P}_n^d$ polinom szintén δ-tulajdonságú, amely ellentmond az interpolációs polinom egyértelműségének.

Az utolsó tulajdonság igazolásához tegyük fel indirekt, hogy $\ell_x = p^2 q$, ahol $\deg p \geq 1$. Legyen $\widetilde{\ell_x} := pq$, ekkor a δ-tulajdonságot felhasználva kapjuk bármely $y \in \mathfrak{X}$, $y \neq x$ esetén, hogy

$$\ell_x(y) = p(y)^2 q(y) = p(y)\widetilde{\ell_x}(y) = 0,$$

tehát $\widetilde{\ell_x}(y) = 0$. Másrészt

$$\ell_x(x) = p(x)^2 q(x) = p(x)\widetilde{\ell_x}(x) = 1,$$

ezért az $\widetilde{\ell_x}$ polinom alkalmasan normalizálva ($1/p(x)$-gyel szorozva) szintén δ-tulajdonságú, akárcsak ℓ_x. Azonban $\widetilde{\ell_x} = pq$ kisebb fokszámú, mint $\ell_x = p^2 q$, ugyanis $\deg p \geq 1$ volt; ez pedig ellentmond az interpoláció egyértelműségének: figyeljük meg az $f(y) := \delta(x-y)$ függvény interpolánsát. □

Chung és Yao [5] bevezet egy általuk *geometriai karakterizációnak* nevezett tulajdonságot, amely lényegesen egyszerűbben ellenőrizhető, mint a B.1.3 Állításban szereplő.

(B.1.6) Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{X}$ teljes rács *GC-tulajdonságú*, ha bármely $x \in \mathfrak{X}$ esetén létezik d különböző hipersík, $\{H_{x,\cdot}\}$ úgy, hogy

$$\forall x, y \in \mathfrak{X}\ :\ x \neq y \iff x \in \bigcup_{z \in \mathfrak{X}} H_{y,z}. \tag{B.2}$$

Megjegyezzük, hogy a szokásos módon egyazon szimbólummal jelöljük a hipersíkot meghatározó elsőfokú polinomot, és ez utóbbi polinom 0-hoz tartozó ősképét is. Ez a megfogalmazás kissé pontatlan: valójában csak konstans szorzó erejéig meghatározott a szóban forgó polinom, de ez a többértelműség nem fog gondot okozni, a következő tétel szerint ugyanis az ℓ_x bázispolinomok olyan alakúak, hogy a konstansok kiesnek.

(B.1.7) Tétel. *Ha az $\mathfrak{X}$ GC-tulajdonságú, akkor $\mathfrak{X}$ lehetővé tesz lefejlebb d-edfokú egyértelmű interpolációt és az ℓ_x bázispolinomok előállnak a GC-feltételben szereplő hipersíkok szorzataiként:*

$$\ell_x = \frac{\prod_{y\in\mathfrak{X}} H_{x,y}}{\prod_{y\in\mathfrak{X}} H_{x,y}(x)} \tag{B.3}$$

Megfordítva, ha $\mathfrak{X}$ lehetővé tesz lefejlebb d-edfokú egyértelmű interpolációt és ℓ_x előáll elsőfokú polinomok szorzataként minden $x \in \mathfrak{X}$ esetén, akkor $\mathfrak{X}$ GC-tulajdonságú.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{X}$ GC-tulajdonságú, ekkor legalábbis (B.3) értelmes, mivel $H_{x,\cdot}(x) \neq 0$. Az is látszik, hogy $\ell_x \in \mathcal{P}_n^d$ és $\sum_x f(x)\ell_x$ legfeljebb d-edfokú interpolációs polinom.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy ℓ_x előáll lineáris faktorok szorzataként, ekkor

$$\ell_x = h_{x,1} \cdots h_{x,d},$$

ahol $h_{x,\cdot} \in \mathcal{P}_n^1$, elvégre $\ell_x \in \mathcal{P}_n^d$ a (B.1.5) tétel miatt. A GC-tulajdonságban legyen $H_{x,i}$ a $h_{x,i} = 0$ egyenletű hipersík $k \in \{1,\ldots,d\}$ esetén; először is be kell látnunk, hogy a $H_{x,\cdot}$ hipersíkok páronként különbözőek. Ez a (B.1.5) tétel utolsó kijelentéséből adódik: $H_{x,i} = H_{x,j}$ és $i \neq j$ egyidejű fennállása esetén ugyanis az ℓ_x polinomban lenne négyzetes tényező, nevezetesen $h_{x,i}h_{x,j}$. Könnyen látható, hogy (B.2) is teljesül ℓ_x δ-tulajdonsága miatt. □

B.2. Baricentrikus koordináták

Legyen $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges n-szimplex, *rendezett* csúcslistája $(x_0,\ldots,x_n)$. A

$$\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

függvényt *baricentrikus leképezésnek* nevezzük, és egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont $\lambda(x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ képét *baricentrikus koordinátáknak*, amennyiben

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) = 1, \qquad \text{(egységpartíció)} \tag{B.4}$$

ahol $\lambda(x) = (\lambda_0(x), \lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x))$, valamint

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x)(x - x_k) = 0 \qquad \text{(baricentrikus tulajdonság)} \tag{B.5}$$

tulajdonságok fennállnak.

A iménti, (B.4) és (B.5) relációk $n+1$ lineáris egyenletet szolgáltatnak az $n+1$ ismeretlen λ_k koordinátára, adott $x=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ esetén:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_{01} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{0n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}. \tag{B.6}$$

Az érdektelen degenerált esetet kivéve az egyenletrendszernek egyértelműen létezik megoldása, ezért rögzített Δ szimplex esetén (a csúcsok sorrendje is számít!) a $(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ baricentrikus koordinákkal egyértelműen lehet reprezentálni egy x pontot az n-térben: $\lambda = B^{-1}(1\ x)^{\mathsf{T}}$.

Legyen most $0\le k\le n$ rögzített, a (B.6) egyenletből adódóan létezik $\nu_k\in\mathbb{R}^n$ és $\mu_k\in\mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\lambda_k(x) = (x,\nu_k)+\mu_k,$$

elvégre a $(\mu_k\ \nu_k) := e_k^{\mathsf{T}}B^{-1}$ választás megfelel, ahol $(e_k)_\ell=\delta_{k\ell}$, így λ_k elsőfokú polinom. Ismét a (B.6) egyenletre nézve, az x_k csúcs baricentrikus képe e_k ($\in\mathbb{R}^{n+1}$), így $\lambda_k(x_k)=1$. De a (B.4) tulajdonság miatt $\lambda_\ell(x_k)=0$ kell legyen minden $\ell\ne k$ esetén, ezért megállapíthatjuk, hogy a λ_k baricentrikus koordinátákra érvényes a δ-tulajdonság: $\lambda_\ell(x_k)=\delta_{k\ell}$.

A baricentrikus koordinátákkal egyszerűen el lehet dönteni, hogy egy $x\in\mathbb{R}^n$ pont a zárt Δ szimplexen belül helyezkedik-e el, ezért egy rövid kitérő erejéig megmutatjuk, hogy hogyan. Az következő állítás *mutatis mutandis* érvényes a nyílt esetben is.

(B.2.1) Állítás. $x\in\Delta \iff \lambda(x)\in[0,1]^{n+1}$

Bizonyítás. A szükségességhez Cramer-szabály alkalmazásával jutunk el. Legyen A_i az a mátrix amelyet az A i-edik oszlopának az $(1\ \xi_1\ \cdots\ \xi_n)^{\mathsf{T}}$ vektorra való lecserélésével kapunk. Ekkor

$$\lambda_k(x)=\frac{\det(A_k)}{\det(A)}=\frac{n!\,\mathrm{meas}(\Delta_k)}{n!\,\mathrm{meas}(\Delta)}=\frac{\mathrm{meas}(\Delta_k)}{\mathrm{meas}(\Delta)},$$

ahol most $\mathrm{meas}(\cdot)$ jelöli az n-dimenziós Lebesgue-mértéket, és Δ_k az az n-szimplex, amelyet a Δ-ból kapunk az k-adik csúcs x-re való lecserélésével. Nyilván $x\in\Delta$ pontosan akkor, ha $\Delta_k\subset\Delta$ minden $0\le k\le n$ esetén; a nemtriviális irányhoz ugyanis tegyük fel, hogy $x\in\Delta$, ekkor Δ_k minden csúcsa Δ-ban fekszik, a konvex burok operátor monotonitása és idempotenciája miatt $\Delta_k\subset\Delta$. Ez utóbbiból a mérték monotonitása miatt arra következtethetünk, hogy $\mathrm{meas}(\Delta_k)\le\mathrm{meas}(\Delta)$, elvégre $\mathrm{meas}(\Delta)<+\infty$. Ebből

$$\forall 0\le k\le n\ :\ 0\le\frac{\mathrm{meas}(\Delta_k)}{\mathrm{meas}(\Delta)}\le 1,$$

más szóval

$$\forall 0 \le k \le n \ : \ 0 \le \lambda_k \le 1.$$

A feltétel elégségessége világos, ha visszaemlékszünk a konvex burok definíciójára:

$$\Delta = \mathrm{Hull}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \sum_{0 \le k \le n} \lambda_k x_k \in \mathbb{R}^n \ : \ \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1], \ \sum_{0 \le k \le n} \lambda_k = 1 \right\},$$

és összevetjük a (B.5) tulajdonsággal, kapjuk, hogy $x \in \Delta$. □

B.3. Principális rács

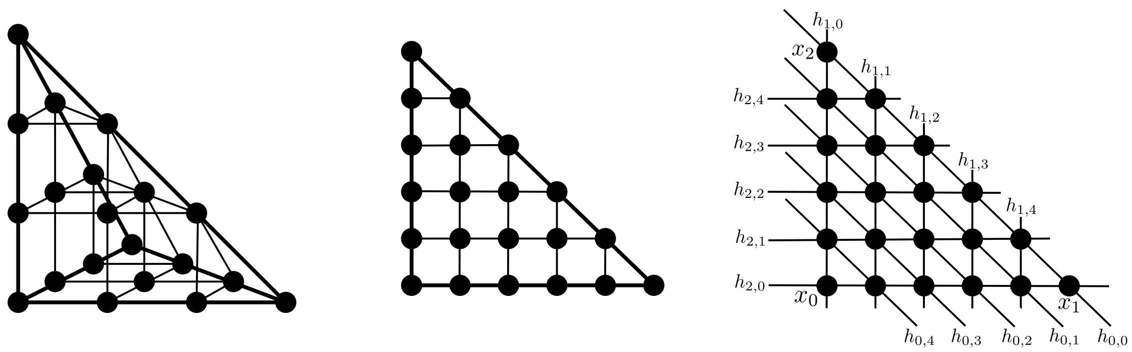
Kezdjük a legfontosabb interpolációra alkalmas rácstípus definíciójával [5], vö. [15].

(B.3.1) Definíció. Adott n és d esetén a $\mathfrak{B}(n,d) \subset \Delta$ véges ponthalmazt *d-edrendű principális rácsnak* nevezzük, ha

$$\mathfrak{B}(n,d) = \left\{ \lambda^{-1}(y) \in \Delta \ : \ y \in \left\{ \frac{0}{d}, \frac{1}{d}, \frac{2}{d}, \ldots, \frac{d}{d} \right\}^{n+1} \right\}. \tag{B.7}$$

Az előzőek szerint a $\lambda^{-1}(y)$ valóban a Δ szimplexbe esik, mivel y a $[0,1]^{n+1}$ kockában felvett rácsból jön. Például a $\widetilde{\Delta}$ standard szimplexen a principális rács (lásd B.1 ábra)

$$\mathfrak{B}(n,d) = \widetilde{\Delta} \cap \left\{ \frac{0}{d}, \frac{1}{d}, \frac{2}{d}, \ldots, \frac{d}{d} \right\}^{n}.$$



B.1. ábra. Principális rácsok: $\mathfrak{B}(3,3)$ és $\mathfrak{B}(2,5)$, valamint a $H_{k,q}$ hipersíkok.

Definiáljuk a GC-tulajdonság ellenőrzése végett a $h_{k,q}$ hipersíkokat, rögzített k esetén legyenek ezek az *„x_k csúccsal szemközt fekfő lappal párhuzamos hipersíkok”*:

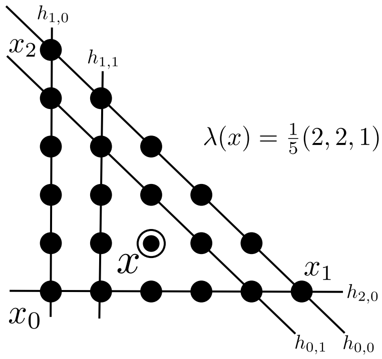
$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\} \ \forall q \in \{0,1,\ldots,d-1\} \ : \ h_{k,q} := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \ : \ \lambda_k(y) - \frac{q}{d} = 0 \right\}.$$

Legyen

$$\mathfrak{h} := \{h_{k,q} \ : \ k \in \{0, 1, \ldots, n\} \ q \in \{0, 1, \ldots, d-1\}\},$$

a bizonyítás során ebből a $\mathfrak{h}$ halmazból fogjuk „összeválogatni” a definícióban szereplő $H_{x,y}$ hipersíkokat.

(B.3.2) Állítás. *A $\mathfrak{B}(n, d)$ principális rács GC-tulajdonságú.*



B.2. ábra. A $H_{x,\cdot}$ hipersíkok meghatározása.

Bizonyítás. Világos, hogy $\mathfrak{B}(n, d)$ teljes, ezt például teljes indukcióval lehet belátni. A $h_{k,q}$ hipersíkok páronként különbözőek, tegyük fel ugyanis indirekt, hogy $p \neq q$ és $k \neq \ell$ esetén $y \in h_{k,q} \cap h_{\ell,p}$. Ekkor $\lambda_k(y) = \frac{q}{d}$ és $\lambda_\ell(y) = \frac{p}{d}$, és ebből $1 = \frac{(n+1)q}{d} = \frac{(n+1)p}{d}$, azaz $1 = q = p$, ami ellentmondás.

Legyen $x, y \in \mathfrak{B}(n, d)$, ekkor hozzájuk tartozó baricentrikus pontok

$$\lambda(x) = \frac{1}{d}(s_0, s_1, \ldots, s_n) \quad s_k \in \{0, 1, \ldots, d\}, \ \sum_k s_k = d$$

$$\lambda(y) = \frac{1}{d}(t_0, t_1, \ldots, t_n) \quad t_k \in \{0, 1, \ldots, d\}, \ \sum_k t_k = d.$$

Minden olyan $p \in \{0, \ldots, n\}$ esetén, amelyre $s_p > 0$ (más szóval, $\lambda_p(x) > 0$), válasszunk ki s_p hipersíkot a $\mathfrak{h}$ családból:

$$\{H_{x,\cdot}\} := \bigcup_{p \in \{0, \ldots, n\}} \{h_{p,q} \ : \ s_p > 0, \ q \in \{0, \ldots, s_p - 1\}\} \subset \mathfrak{h}, \tag{B.8}$$

és mivel $s_0 + \ldots + s_n = d$, így összesen d hipersíkot választottunk ki. Most tegyük fel, hogy $x = y$. Tekintettel arra, hogy $\lambda_p(x) = \frac{1}{d} s_p$, x nem fekszik egyetlen $H_{x,\cdot}$-beli hipersíkban sem, ezzel meghatároztuk a keresett $H_{x,\cdot}$ hipersíkokat, tehát ezekre $x \notin \bigcup_z H_{x,z}$ teljesül (B.2 ábra).

Másrészt legyen $x \neq y$. Ekkor $\lambda(x) \neq \lambda(y)$, tehát létezik $p \in \{0, \ldots, n\}$, amelyre $t_p < s_p$, elvégre érvényes az egységpartíciós tulajdonság. Ebből következik, hogy $y \in h_{p,t_p}$, vagyis az iménti szereposztással $y \in \bigcup_z H_{x,z}$ teljesül. □

Az imént felvázolt elmélet alkalmazásaként határozzuk meg a (B.3) egyenlet szerint az ℓ_x bázispolinomokat. Tekintettel arra, hogy a (B.8) egyenlet átírható a

$$\{H_{x,\cdot}\} = \bigcup_{p\in\{0,\dots,n\}} \left\{\left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \lambda_p(x) - \tfrac{q}{d} = 0\right\} \ : \ \lambda_p(x) > 0, \ q \in \{0,\dots,\lambda_p(x)d - 1\}\right\},$$

alakba, ezzel

$$\forall x \in \mathfrak{B}(n,d) \ : \ \ell_x(y) = \prod_{\substack{0\le p\le n \\ \lambda_p(x)>0}} \prod_{q=0}^{\lambda_p(x)d-1} \frac{\lambda_p(y) - \dfrac{q}{d}}{\lambda_p(x) - \dfrac{q}{d}}. \tag{B.9}$$

(B.3.3) Példa. Kidolgozzuk az $n = 2$, $d = 1$ esetben az interpolációs polinomot a referenciaelemen. Ekkor

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ és így } \begin{pmatrix} \lambda_0(x) \\ \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \xi_1 - \xi_2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\mathfrak{B}(2,1) = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$, a bázisfüggvények

$$\begin{aligned} \ell_{(0,0)}(\zeta_1,\zeta_2) &= 1 - \zeta_1 - \zeta_2, \\ \ell_{(1,0)}(\zeta_1,\zeta_2) &= \zeta_1, \\ \ell_{(0,1)}(\zeta_1,\zeta_2) &= \zeta_2, \end{aligned}$$

ahogyan az várható volt.

Megjegyezzük, hogy a (B.9) polinomokat egy előfeldolgozási lépésben szokás meghatározni a referenciaszimplexen.

Irodalomjegyzék

[1] *Trace operator*, Wikipedia.

[2] D. N. Arnold, R. S. Falk, and R. Winther, *Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications*, Acta Numerica, (2006), pp. 1–155.

[3] ——, *Finite element exterior calculus: From Hodge theory to numerical stability*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 47 (2010), pp. 281–354.

[4] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, 2008.

[5] K. C. Chung and T. H. Yao, *On lattices admitting unique Lagrange interpolations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 14 (1977), pp. 735–743.

[6] P. G. Ciarlet, *Handbook of Numerical analysis – Finite Element Methods (Part 1)*, Elsevier, 1991.

[7] R. Courant, *Dirichlet's principle, conformal mappings, and minimal surfaces*, Interscience Publishers, Inc., 1950.

[8] T. Dupont and R. Scott, *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*, Mathematics of Computation, 34 (1980), pp. 441–463.

[9] R. G. Durán, *On polynomial approximation in Sobolev spaces*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 20 (1983), pp. 985–988.

[10] A. Ern and J.-L. Guermond, *Theory and Practice of Finite Elements*, Springer, 2004.

[11] M. S. Gockenbach, *Understanding and Implementing the Finite Element Method*, SIAM, 2006.

[12] D. D. Haroske and H. Triebel, *Distributions, Sobolev Spaces, Elliptic Equations*, European Mathematical Society, 2008.

[13] J. Karátson, *Numerikus funkcionálanalízis*, ELTE Egyetemi jegyzet.

[14] K. Mekchay and R. H. Nochetto, *Convergence of adaptive finite element methods for general second order linear elliptic PDE*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 43 (2005), pp. 1803–1827.

[15] R. A. Nicolaides, *On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 9 (1973), pp. 435–445.

[16] ——, *On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation II*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 10 (1973), pp. 182–189.

[17] P. Simon and F. Weisz, *Válogatott fejezetek az analízisből – a szimuláció matematikai alapjai*, ELTE Egyetemi jegyzet.

[18] P. Solin, *Partial Differential Equations and the Finite Element Method*, John Wiley & Sons, Inc., 2006.

[19] R. Verfürth, *A note on polynomial approximation in Sobolev spaces*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 33 (2010), pp. 715–719.