Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Hidrodinamikai Problémák

BSc Szakdolgozat

Gilányi Gergely Tamás

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Sigray István

Műszaki Gazdasági Tanár

ELTE Analízis Tanszék

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

Bevezető 5

1. Stacionárius Áramlások 6

1.1. Ideális folyadékok áramlása 7
1.2. Cirkuláció és a fluxus 9
1.3. Áramvonal 11
1.4. Nyomás 11
1.5. Felhajtóerő 14
1.6. Hasonló áramlások 16

2. Instacionárius áramlások 18

2.1. Kontinuitási Tétel 18
2.2. A jellemzők lokális és konvektív megváltozása 19
2.3. Euler-Egyenlet 20
2.3.1. Gyorsulás 20
2.3.2. Euler-Egyenlet 21
2.4. Bernoulli-Egyenlet 23

3. Az *Aramvonal* program 24

3.1. A feladat definiálása 24
3.2. Elemzés 25
3.3. Input paraméterek 25
3.4. Implementáció 26
3.5. Absztrakt Program 27
3.6. Tesztelés 29

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek Sigray Istvánnak, aki érdekes ötleteivel, szakmai tanácsaival, és kérdéseimre adott kielégítő válaszaival elősegítette ennek a dolgozatnak a létrejöttét. Szeretnék még köszönetet mondani évfolyamtársaimnak a sok ötletért, jegyzetért, és az egész éves bíztatásért. Emellett szeretnék köszönetet mondani Brian Coxnak, aki érdekes előadásaival felkeltette az érdeklődésemet a Fizika több érdekes ágazata iránt.

Bevezető

A szakdolgozatomban hidrodinamikai feladatokkal, kérdésekkel, és problémákkal fogok foglalkozni. A hidrodinamika egy alapvető fontosságú ága a fizikának, mivel ez a tudományág hozzásegít minket ahhoz, hogy megértsük a természet számos érdekes jelenségét. A hidrodinamika érdemben kapcsolja össze az eddig tanult fizikai jelenségeket a matematikai ismereteinkkel. Felmerülhet a kérdés az olvasóban, hogy mivel is foglalkozik maga a hidrodinamika? Legegyszerűbben úgy lehetne megfogalmazni, hogy a folyadékok mozgásának és egyéb tulajdonságainak a leírásával foglalkozik. Ha picit bővebben szeretnénk a kérdésre a választ megfogalmazni, akkor mindenképp meg kell még említenünk azt, hogy a folyadékáramlások modellezése mellett a levezetett tételeknek, törvényeknek a gyakorlati felhasználásával is foglalkozik a hidrodinamika. Jogos kérdése lehet az olvasónak, hogy milyen gyakorlati felhasználásai lehetnek a hidrodinamikának? Milyen való életbeli haszna lehet ennek az érdekes tudományágnak? Az egyik legismertebb felhasználása ennek (amiről szerintem már mindenki hallott) az a repülés. Emellett számos felhasználása van még például az orvostudományban (véráramlási modellek megalkotásában), a gyógyszerészetben folyadékkromatográf készülékek működése is elengedhetetlen lenne a hidrodinamika nélkül, és persze nem lehet elfeledkezni a mérnöki felhasználhatóságáról sem.
A dolgozatomban két fajta áramlástani modellel fogunk megismerkedni

- A *Stacionárius síkáramlási modell*, ahol az áramlás tényezői nem függnek az időtől, és az áramlás síkban történik

- Az *Instacionárius térbeli áramlási modellel*, ahol az áramlás tényezői függnek az időtől, emellett az áramlás a térben megy végbe.

Miután megismerkedtünk ezzel a két modellel a harmadik fejezetben a *Stacionárius áramlások* egy nagyon fontos tulajdonságának (az áramvonalnak) grafikus ábrázolására készített programommal (és annak dokumentációjával) fognak megismerkedni.

1. fejezet

Stacionárius Áramlások

Ebben a fejezetben stacionárius síkáramlásokról fogunk levezetni állításokat, fizikai tulajdonságokat, érdekes jelenségeket. Felmerül az emberben a kérdés, hogy mit is jelent az, hogy egy áramlás sikáramlás, vagy hogy egy áramlás stacionárius? Erre a két kérdésre az alábbi két definíció egyszerű választ tud adni:

1.0.1. Definíció. *Egy áramlás síkáramlás, ha létezik az áramláshoz egy olyan sík, amire a merőleges sebességkomponens értéke* 0*, és ezzel a síkkal párhuzamos síkokban az áramlás képe azonos.*

Azaz $v_z = 0$ és $\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$.

Stacionárius áramlásban a jellemzők nem függenek az időtől, így a sebességterét a $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ alakú vektortér írja le, azaz a sebességvektorok az áramlási tér minden egyes (x_0, y_0) pontjában adott koordináta-rendszerből nézve időben nem változnak. Formálisan:
Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy tartomány.

1.0.2. Definíció. *Egy áramlás Stacionárius, ha minden $(x, y) \in D$ pont sebességvektora független az időponttól. Ekkor létezik $(u(x, y), v(x, y)) : D \to \mathbb{R}^2$ vektortér, amely minden ponthoz a sebességvektort rendeli hozzá.*

1.1. Ideális folyadékok áramlása

Jelentős különbség van a cseppfolyós és légnemű közegek között viszont, ha áramlástani feladatok megoldása szempontjából tekintjük ezeket a közegeket, akkor jelentős hasonlóságot tapasztalunk. Ezért vezettük be a folyadék gyűjtőfogalmat, amely segít nekünk különböző halmazállapotú folyadékokra egyaránt érvényes áramlástani összefüggések meghatározásában. A valóságos folyadékok áramlásának modellezésére bevezetjük az ideális folyadék fogalmát, amelynek legfontosabb tulajdonságai a következők:

1. homogén
2. Súrlódásmentes
3. Összenyomhatatlan

1.1.1. Definíció. *Egy áramlás ideális, ha stacionárius, örvénymentes, forrás-nyelő mentes.*

1.1.2. Definíció. *Egy áramlás forrás-nyelő mentes, ha tetszőleges görbék által határolt résztartományán az egységnyi idő alatt be és ki áramló folyadék egyenlege 0.*

Legyen $(x_0, y_0) \in D$ és $h > 0$ olyan, melyekre $[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h] \subset D$. Tegyük fel, hogy $u, v \in C^1(D)$ és, hogy $h \to 0 + 0$ és a folyadékáramlás iránya az pozitív.

Ekkor a négyzet függőleges oldalain kiáramló folyadék mennyisége:

$$\int_{-h}^{h} u(x_0 + h, y_0 + t)dt - \int_{-h}^{h} u(x_0 - h, y_0 + t)dt = \int_{-h}^{h} u(x_0 + h, y_0 + t) - u(x_0 - h, y_0 + t)dt =$$

$$= 2h(u(x_0 + h, y_0 + t_1) - u(x_0 - h, y_0 + t_1)) = 4h^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + t_2, y_0 + t_1),$$

$$t_1, t_2 \in (-h, h).$$

A négyzet vízszintes oldalain kiáramló folyadék mennyisége:

$$\int_{-h}^{h} v(x_0 + t, y_0 + h)dt - \int_{-h}^{h} v(x_0 + t, y_0 - h)dt = \int_{-h}^{h} v(x_0 + t, y_0 + h) - v(x_0 + t, y_0 - h)dt =$$

$$= 2h(v(x_0 + t_3, y_0 + h) - v(x_0 + t_3, y_0 - h)) = 4h^2 \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + t_3, y_0 + t_4),$$

$$t_3, t_4 \in (-h, h).$$

1.1.1. Megjegyzés. *Az egyenlőségnél felhasználtuk a Lagrange-féle középérték tételt.*

Mivel az egységnyi idő alatt be és ki áramló folyadék egyenlege nulla, ezért a következő összefüggés igaz:

$$0 = 4h^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + t_2, y_0 + t_1) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + t_3, y_0 + t_4) \right).$$

Ami ekvivalens azzal, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + t_2, y_0 + t_1) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + t_3, y_0 + t_4),$$

ekkor, ha $h \to 0 + 0$ akkor:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Ami az első Cauchy-Riemann egyenletre emlékeztet minket.

1.1.3. Definíció. *Egy áramlás örvénymentes, ha a görbék által határolt résztartományain az összcirkuláció* 0.

A cirkuláció mértéke a vízszintes oldalakon a következő:

$$\int_{-h}^{h} -u(x_0+t, y_0+h)dt + \int_{-h}^{h} u(x_0+t, y_0-h)dt = \int_{-h}^{h} -u(x_0+t, y_0+h) + u(x_0+t, y_0-h)dt =$$

$$= 2h(-u(x_0 + t_3, y_0 + h) + u(x_0 + t_3, y_0 - h)) = -4h^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + t_1, y_0 + t_2)$$

$$t_1, t_2 \in (-h, h).$$

A cirkuláció mértéke a függőleges oldalakon a következő:

$$\int_{-h}^{h} v(x_0 + h, y_0 + t)dt - \int_{-h}^{h} v(x_0 - h, y_0 + t)dt = \int_{-h}^{h} v(x_0 + h, y_0 + t) - v(x_0 - h, y_0 + t)dt =$$

$$= 2h(v(x_0 + h, y_0 + t_3) - v(x_0 + h, y_0 + t_3)) = 4h^2 \frac{\partial v}{\partial x}(x_0 + t_4, y_0 + t_3),$$

$$t_3, t_4 \in (-h, h).$$

Az összcirkuláció 0, akkor:

$$0 = 4h^2\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0+t_1, y_0+t_2) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0+t_4, y_0+t_3)\right),$$

ami akkor és csak akkor igaz, ha

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0+t_1, y_0+t_2) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0+t_4, y_0+t_3),$$

$h \to 0+0$ esetén

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Ez pedig a második Cauchy-Riemann egyenletetre emlékeztet minket.

Precízen legyen

$$f(z) := f(x+iy) = u(x,y) - i \cdot v(x,y).$$

1.1.1. Következmény. *Erre az f-re teljesülnek a Cauchy-Riemann egyenletek.*

1.1.1. Állítás. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ tartomány. Legyen D egy ideális folyadékáramlás, amelyet az $(u(x,y), v(x,y))$ vektormező ír le. Ekkor $f(z)$ holomorf (reguláris) D-n.*

1.2. Cirkuláció és a fluxus

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy tartomány, legyen D-n egy olyan ideális áramlás, amelyet $f(x+iy) = u(x,y) - iv(x,y))$ ír le.

1.2.1. Definíció. *Legyen $\gamma : [a,b] \to D$ rektifikálható görbe. Egy áramlás fluxusa(γ-n) alatt azt értjük, hogy egységnyi idő alatt mennyi folyadék áramlik γ egyik bal partjáról a jobb partjára.*

Legyen dz egy infinitezimális (parányi) íve γ-nak, ekkor $-i \cdot dz$ egy ugyanilyen hosszú, de rá merőleges vektor. Ekkor a szakaszon áthaladó fluxus $-idz$ és $f(z)$ skaláris szorzata, azaz

$$(f, -idz) = (u - iv, dy - idx) = u \cdot dy - v \cdot dx = u \cdot dy - v \cdot dx = \Im f dz.$$

A teljes fluxus tehát a γ-n megegyezik

$$\int_\gamma u \cdot dy - v \cdot dx = \Im \int_\gamma f(z) dz.$$

1.2.2. Definíció. *A cikuláció alatt fizikailag azt értjük, hogy γ-t az áramlás mennyire szeretné negatív irányba forgatni.*

A fluxushoz hasonlóan levezethető a γ infinitezimális ívének a cirkulációja is:

$$(f, dz) = (u - iv, dx + idy) = u \cdot dx + v \cdot dy = \Re f dz.$$

Innen a teljes γ menti cirkulációt a következő integrál adja meg

$$\int_\gamma u \cdot dx + v \cdot dy = \Re \int_\gamma f(z)dz.$$

1.2.1. Állítás. *Ha f holomorf D tartományon, akkor $u(x, y) = \Re f(x + iy)$ és $v(x, y) = -\Im f(x + iy)$ módon definiált vektormezőhöz ideális folyadékáramlás tartozik.*

Bizonyítás: A *Cauchy-alaptétel* szerint, ha f holomorf egy γ zárt görbe belsejében és γ-n, akkor

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Forrás-nyelő mentesség miatt $int\gamma$-ban mindig ugyanannyi folyadéknak kell lennie, tehát a fluxusnak egyenlőnek kell lennie a 0-val.

$$\Im \int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Az örvénymentesség miatt a cirkulációnak γ mentén nullának kell lennie, ami ugyan csak következik a Cauchy-alaptételből, mivel

$$\Re \int_\gamma f(z) = 0.$$

□

1.3. Áramvonal

1.3.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, (u, v) olyan vektormező, amelyik az ideális áramláshoz tartozik. Azt mondjuk, hogy $\gamma : [a, b] \to D$ görbe áramvonal, ha γ sima és*

$$\gamma'(t) = (u(\gamma(t)), v(\gamma(t))).$$

Az áramvonal olyan sima görbe, amelynek bármilyen kis darabján a fluxus 0. Legyenγ^* γ-nak egy kis darabja ($\gamma^* : [a, b] \to D$), akkor a fluxus a γ^* mentén

$$\Im \int\limits_{\gamma^*} f(z)dz = \Im(F(\gamma^*(b)) - F(\gamma^*(a))),$$

ha f-ek F primitív függvénye γ^* egy környezetében.
F létezik, ha γ^*-nak elég kicsi az átmérője. Ekkor az áramvonal egyenlete:

$$\Im F(z) = const.$$

1.4. Nyomás

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, ekkor minden $z_0 \in D$-beli folyadékrészecskére nyomás hat, melynek iránya merőleges az objektum síkjára.(jele $p(z)$)
$z_0 = x_0 + i \cdot y_0 = (x_0, y_0)$ és $h > 0$ olyan, melyekre $[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h] \subset D$.
Ekkor a négyzetre ható erőt a következő egyenletek írják le:
A bal függőleges oldalra ható erő:

$$\int\limits_{-h}^{h} p(x_0 - h, y_0 + t)dt.$$

A jobb függőleges oldalra ható erő

$$-\int\limits_{-h}^{h} p(x_0 + h, y_0 + t)dt.$$

A kettő összege:

$$\int\limits_{-h}^{h} p(x_0 - h, y_0 + t) - p(x_0 + h, y_0 + t)dt =$$

$$= 2h \cdot (p(x_0 - h, y_0 + t_1) - p(x_0 + h, y_0 + t_1)) = 4h^2 \cdot (-\frac{\partial p}{\partial x}(x_0 + t_2, y_0 + t_1)),$$

$$t_1, t_2 \in (-h, h).$$

A alsó vízszintes oldalra ható erő:

$$\int_{-h}^{h} p(x_0 + t, y_0 - h)dt.$$

A felső vízszintes oldalra ható erő:

$$-\int_{-h}^{h} p(x_0 + t, y_0 + h)dt.$$

A kettő összege:

$$\int_{-h}^{h} p(x_0 + t, y_0 - h) - p(x_0 + t, y_0 + h)dt =$$

$$= 2h \cdot (p(x_0 + t_3, y_0 - h) - p(x_0 + t_3, y_0 + h)) = 4h^2 \cdot (-\frac{\partial p}{\partial y}(x_0 + t_3, y_0 + t_4)),$$

$$t_4, t_3 \in (-h, h).$$

Egy testre ható erő a más testekkel való kölcsönhatás mértékére jellemző fizikai mennyiség.

1.4.1. Definíció. *Az erő vektormennyiség, amire igaz az* $F = \frac{\partial I}{\partial t}$*, ahol a* $\frac{\partial I}{\partial t}$ *alatt az impulzusváltozás gyorsaságát értjük.*

A jelölések miket fel fogunk használni a következők:

- F: az erő
- m: a tömeg
- a: a gyorsulás
- ρ: a sűrűség
- I: impulzus
- V: térfogat

Newton második törvénye szerint, ha feltesszük, hogy a tömeg állandó, akkor az erő képlete:

$$F = \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial (m \cdot v)}{\partial t} = m \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = m \cdot a,$$

ahol a tömeg képlete logikusan:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot 4h^2.$$

Kis átrendezéssel az alábbi egyenletet nyerhető a gyorsulásra:

$$a(x,y) = \frac{F}{m} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(-\frac{\partial p}{\partial x}(x_0 + t_2, y_0 + t_1), -\frac{\partial p}{\partial y}(x_0 + t_3, y_0 + t_4) \right).$$

Ha $h \to 0$, akkor $t_1, t_2, t_3, t_4 \to 0$ Ekkor (x_0, y_0)-ban a gyorsulás

$$a(x_0, y_0) = \frac{1}{\rho} \cdot \left(-\frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial p}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Legyen $\gamma(t)$ áramvonal, melyre $\gamma(0) = (x_0, y_0)$
Ekkor az áramvonal definíciója szerint:

$$\gamma'(t) = (u(\gamma(t)), v(\gamma(t)))$$

$$\gamma''(t) = (u'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), v'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t))$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$x'(t) = u(x(t), y(t))$$

$$y'(t) = v(x(t), y(t))$$

$$\gamma'(t) = (u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t)))$$

$$\gamma''(0) : \gamma(0) = (x_0, y_0)\text{-beli gyorsulás.}$$

$$\gamma''(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t), \frac{\partial v}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial v}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right) =$$

$$= \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t)), u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x(t), y(t)) + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x(t), y(t)) \right).$$

A Cauchy Riemann egyenletek ($\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$) miatt ez egyenlő a következővel:

$$\gamma''(t) = \left(\left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)(x(t), y(t), \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)(x(t), y(t) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial x} \right) (x(t), y(t), \left(\frac{\partial u^2}{\partial y} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right) (x(t), y(t) \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial |f|^2}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial |f|^2}{\partial y}(x(t), y(t)) \right).$$

Az egyenlőség igaz, mivel $(u^2 + v^2)(x(t), y(t)) = |f|^2(x(t), y(t))$. Ebből következik, hogy az (x_0, y_0) pontbeli gyorsulás:

$$a(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial |f|^2}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial |f|^2}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Ami egyenlő az $\frac{F}{m}$ segítségével kiszámolt egyenlettel.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial |f|^2}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial |f|^2}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = \frac{1}{\rho} \cdot \left(-\frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial p}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Ebből átrendezéssel a következik, hogy

$$-\frac{\rho}{2} \cdot \frac{\partial |f|^2}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

. és

$$-\frac{\rho}{2} \cdot \frac{\partial |f|^2}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Amiből egy integrálás után pont a *Bernoulli törvényét* kapjuk:

$$p(z) = -\frac{\rho}{2} \cdot |f|^2(z) + c.$$

1.5. Felhajtóerő

A felhajtóerő áramló közegbe helyezett testre ható erőnek az a komponense, ami merőleges az áramlás irányára. Azért nevezzük felhajtóerőnek, mert levegőnél nehezebb testek (például repülőgépek) felemelkedését és levegőben maradását a felhajtó erő tervszerű kihasználásával érhetik el.

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, amiben egy ideális folyadékáramlás zajlik, melyre

- Létezik egy $R > 0$ $\{z : |z| > R\} \subset D$.
- Ehhez a D-hez $f : D \to C$ tartozik.
- $\lim_{z \to \infty} f(z)$ létezik és véges.

Legyen $\gamma : [a,b] \to D$ rektifikálható, pozitív irányítású egyszerű zárt görbe, ami áramvonal. Ekkor a felhajtó erőre igaz, hogy:

$$F = i \cdot \int_\gamma p(z)dz = i \cdot \int_\gamma \frac{-\rho}{2} \cdot |f|^2(z)dz = \frac{-\rho \cdot i}{2} \cdot \int_\gamma |f|^2(z)dz.$$

Mivel γ áramvonal, ezért paraméterezhetjük a $\gamma'(t) = (u(\gamma(t)), v(\gamma(t))) = f(\gamma(t))$

$$\int_\gamma |f|^2(z)dz = \int_a^b |f|^2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \overline{f(\gamma(t))} \cdot \overline{f(\gamma(t))}dt =$$

$$\overline{\int_a^b \overline{f(\gamma(t))} \cdot f(\gamma(t)^2 dt} = \overline{\int_a^b f(\gamma(t))^2 \cdot \gamma'(t)dt} = \overline{\int_\gamma f(z)^2 dz}.$$

Ebből következik, hogy

$$F = \frac{-\rho \cdot i}{2} \cdot \overline{\int_\gamma f(z)^2 dz}$$

$$\int_\gamma f(z)^2 dz = \int_{|z|=R+\epsilon} f(z)^2 dz.$$

Mivel f reguláris $|z| > R$-en ezért f Laurent-sorba fejthető $|z| > R$-en.

$$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_n \cdot z^n.$$

$$g(z) = f(\frac{1}{z}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_n \cdot z^{-n}.$$

$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to\infty} f(z)$ létezik és véges, ekkor g-nek megszüntethető szingularitása van 0-ban, ami ekvivalens azzal, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$-re $a_n = 0$.

$$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{0} a_n \cdot z^n.$$

$$f^2(z) = \sum_{i=-\infty}^{0} b_n \cdot z^n.$$

Innen a $b_{-1} = 2 \cdot a_0 \cdot a_1$. A reziduum tétel szerint ekkor az integrál értéke:

$$\int_{|z|=R+\epsilon} f(z)^2 dz = 2 \cdot \pi \cdot b_{-1} = 4 \cdot \pi \cdot a_0 \cdot a_{-1}.$$

Ebből azonnal adódik az

$$F = \frac{-\rho \cdot i}{2} \cdot \overline{4\pi i \cdot a_0 \cdot a_{-1}} = \frac{-\rho \cdot i}{2} \cdot -4\pi i \cdot \overline{a_0} \cdot \overline{a_{-1}} = -\rho \cdot i \cdot \overline{a_0} \cdot 2\pi i \cdot \overline{a_{-1}}.$$

Innen

$$2\pi i = \int\limits_{|z|=R+\epsilon} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz,$$

ami pont megegyezik (definíció szerint) a cirkuláció és a fluxus összegével a γ áramvonal mentén. Viszont a fluxus ($\Im \int\limits_{\gamma} f(z)dz$) nulla, mivel γ áramvonal. Tehát $\overline{2\pi i a_{-1}} = 2\pi i a_{-1} =$ cirkulációval. Emellett $f(z)$ Laurent-sora miatt

$$a_0 = \lim_{z \to \infty} f(z).$$

$$\overline{a_0} = \lim_{z \to \infty} \overline{f(z)} = \lim_{z \to \infty}(u(z) - iv(z)) = \text{sebességgel}(\infty\text{-ben}).$$

Ebből következik, hogy $F = -i\rho \cdot \text{sebesség} \cdot \text{cirkuláció}$.

1.5.1. Következmény. *γ-ra a sebességre merőleges erő hat, ezt nevezzük felhajtóerőnek.*

1.6. Hasonló áramlások

1.6.1. Definíció. *Legyen $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ tartomány, $\varphi : D_1 \to D_2$ konform bijekció. Legyen D_2-n olyan áramlás, amelyet az $f : D_2 \to \mathbb{C}$ reguláris függvény ír le. Ekkor azt mondjuk, hogy a D_1-ben levő áramlás hasonló a D_2-belihez (φ szerint), ha őt az $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ írja le.*

1.6.1. Tétel. *Legyen $z_0, \omega_0 \in \mathbb{C}$, $\varphi : B(z_0, \epsilon) \to \mathbb{C}$ konform és $\varphi(z_0) = \omega_0$. Legyen $D_1 = \dot{B}(z_0, \epsilon)$, $D_2 = \varphi(\dot{B}(z_0, \epsilon))$. Tegyük fel, hogy D_1-ben és D_2-ben hasonló áramlás zajlik, amelyet egy $g : D_1 \to \mathbb{C}$ és $f : D_2 \to \mathbb{C}$ reguláris függvények írnak le. Ekkor, ha g-nek z_0-ban k-adrendű pólusa van, akkor f-nek a ω_0-ban szintén k-adrendű pólusa van. Ezenkívül a $k = res\,[g(z)]_{z=z_0} = [f(\omega)]_{\omega=\omega_0}$ is igaz.*

Bizonyítás: Mivel hasonló áramlásról van szó, ezért $g = f \circ \varphi \cdot \varphi'$. Innen

$$Res\,[g(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{|z-z_0|=\epsilon} g(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{|z-z_0|=\epsilon} (f \circ \varphi)(z) \cdot \varphi'(z)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{|z-z_0|=\epsilon} f(\omega)d\omega = Res\,[f(\omega)]_{\omega=\omega_0}.$$

Innen már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy f pólusának a rendje ω_0-ban k. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$k = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{|z-z_0|=\delta} \frac{g'(z)}{g(z)} dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{|z-z_0|=\delta} \frac{(f' \circ \varphi(z)) \cdot (\varphi')^2(z) + f \circ \varphi(z) \cdot \varphi''(z)}{f \circ \varphi(z) \cdot \varphi'(z)} dz =$$

Innen az integrálösszeg második tagja hasonló módon zérus, mint az előző bizonyításnál, tehát az integrál

$$= -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{|z-z_0|=\delta} \frac{(f' \circ \varphi(z)) \cdot \varphi'(z)}{f \circ \varphi(z)} dz = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\varphi(|z-z_0|=\delta)} \frac{f'(\omega)}{f(\omega)} d\omega = k.$$

Ami éppen azt jelenti, hogy f pólusának a rendje ω_0-ban k. $\square$

2. fejezet

Instacionárius áramlások

Ebben a fejezetben az instacionárius térbeli áramlások sajátosságaiba fogunk bepillantást nyerni. Le fogunk vezetni érdekes fizikai jelenségeket (törvényeket), amik felhasználása nagyon sokat segít más tudományágak hatékony működésében például az orvostudományban, a gyógyszerészeti kutatásokban és még sok hasonló számottevő tudományágban.
Mit is jelent az, hogy egy áramlás instacionárius? Erre a következő definíció nyújthat nekünk kielégítő választ!

2.0.2. Definíció. *Egy áramlás instacionárius(időfüggő), ha a jellemzői, úgymint a sebesség, a nyomás és a sűrűség függ az időtől is.*

Egy instacionárius (időfüggő) áramlás sebességterét az alábbi

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}, t)$$

alakú vektortér írja le.

2.1. Kontinuitási Tétel

A kontinuitási tétel azt a fizikai alapelvet fejezi ki, miszerint a tömeg nem keletkezhet és nem is tűnhet el. Tekintsünk egy áramló közegben lévő rögzített zárt A felületet, amelyen a folyadék átáramlik.
Első lépésként írjuk fel mennyivel több folyadék áramlik ki, mint be ezen az A felületen:

$$\int_A \rho \underline{v} dA.$$

Emellett nyilvánvaló, hogy a többletkiáramlás csak a térfogatban levő folyadékmennyiség rovására, azaz a sűrűség csökkenése mellett mehet végbe. Az A felület által határolt V térfogatban levő folyadék változását a következő integrál adja meg:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Mivel a dA felületi normális kifelé mutat ezért, ha az első integrál értéke pozitív(azaz fogy a folyadékmennyiség a V térfogatból), akkor a második integrálnak negatívnak kell lennie mégpedig úgy, hogy a két integrál összege zérus legyen. Ekkor a Gauss-Osztrogradszkij-tétel segítségével alakítsuk át térfogati integrállá az első integrált, és tegyük egyenlővé a második integrál ellentettjével:

$$\int_A \rho \underline{v} dA = \int_V div(\rho \underline{v}) dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Ez a folytonossági tétel integrál alakja.
Kis átrendezés után (figyelembe véve, hogy ugyanarra a V térfogatra végezzük el az integrálást) a következő igaz:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{v}) \right) dV = 0.$$

Ez az integrál csak akkor lehet zérus minden V térfogat esetén, ha maga az integrandus nulla. Ebből következik a folytonossági tétel differenciált alakja:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{v}) = 0.$$

Ebből az egyenletből a második tag felbontható a szorzat deriválási szabálya szerint:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot grad(\rho) + \rho \cdot div(\underline{v}) = 0.$$

2.2. A jellemzők lokális és konvektív megváltozása

Tekintsünk egy folyadékrészt az áramlásból. Legyen a folyadékrész áramlási sebessége v. Jellemezze egy P pontban az áramlási sebességet a $\underline{v}$ vektor, és a sűrűség hely szerinti változását pedig $grad(\rho)$ vektor.
A kérdés, hogy dt idő elteltével hogyan változik az áramló folyadékrész sűrűsége!
A $d\rho$ sűrűségdifferencia két okra vezethető vissza:

I Mivel a sűrűség függ az időtől, ezért a sűrűség a P pontban a sűrűségváltozás dt idő alatt $d\rho_l = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$.

II Az áramló folyadékrészecske az áramló közeggel együtt dt idő alatt $ds = \underline{v}dt$ utat tesz meg (mivel $\underline{v} = \frac{ds}{dt}$), és egy olyan P_1 pontba jut, ahol a sűrűségváltozás pontosan $d\rho_k = grad(\rho)ds = grad(\rho) \cdot dt$.

$d\rho_l$-nek csak akkor van szerepe, ha instacionárius áramlásról van szó. Ez a sűrűségváltozás akkor is végbemenne, ha a közeg nem áramolna, mivel csak a nyomás időbeni változásáról van szó. Ezért ezt a dp_l-et a sűrűség lokális megváltozásának nevezzük.
A $d\rho_k$ sűrűség változás oka a térfogat elmozdulása, eláramlása egy olyan pontba, ahol a sűrűség eltérő, ezért a $d\rho_k$-t a sűrűség konvektív megváltozásának nevezzük.
Tehát a folyadékrész sűrűségének dt időtartam alatti teljes megváltozása:

$$dp = d\rho_l + d\rho_k = d\rho_l = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + grad(\rho) \cdot \underline{v}dt.$$

Ebből következik dt-vel osztás után a következő egyenlet:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial d\rho}{\partial dt} + \underline{v} \cdot grad(\rho).$$

Ebből következik tehát, hogy a kontinuitási tétel első két tagja megegyezik $\frac{dp}{dt}$-vel, ami a folyadékrész sűrűségének az idő szerinti teljes megváltozását fejezi ki.

2.3. Euler-Egyenlet

2.3.1. Gyorsulás

Egy folyadékrész gyorsulása felírható az előző fejezethez hasonlóan. Egy (v_x, v_y, v_z) skalártérrel leírható jellemző dt időre való megváltozását leírhatjuk a lokális és konvektív megváltozás összegének segítségével:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial dv}{\partial dt} + \underline{v} \cdot grad(v) = \frac{\partial dv}{\partial dt} + D\underline{v},$$

ahol D a derivált tenzort jelenti.
Ezen meggondolás alapján a folyadékrész gyorsulása két részből áll:

I a $\frac{\partial dv}{\partial dt}$ lokális gyorsulásból.

II a $D\underline{v}$ konvektív gyorsulásból.

A lokális gyorsulás akkor nem zérus, ha az áramlás instacionárius, azaz a sebességtér függ a t időtől is. A konvektív gyorsulás akkor létezik, ha a folyadéktér sebességének nagysága és az iránya az áramlás irányában változik.
Bontsuk fel a D derivált tenzort:

$$D = D' + (D - D').$$

Ebből a konvektív gyorsulás a következő:

$$a_k = D\underline{v} = D'\underline{v} + (D\underline{v} - D'\underline{v}).$$

Innen $D'\underline{v}$ pontosan

$$D'\underline{v} = grad(\frac{v^2}{2}).$$

Emellett $(D - D')\underline{v}$:

$$(D - D')\underline{v} = rot(\underline{v}) \times \underline{v} = -\underline{v} \times rot(\underline{v}).$$

Innen ha behelyettesítünk a folyadékrész gyorsulása:

$$a = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + grad(\frac{v^2}{2}) - \underline{v} \times rot(\underline{v}).$$

2.3.2. Euler-Egyenlet

A folyadékrészecskék mozgására (mint egyik előző fejezetben megállapítottuk) erő hat. A folyadékrészecskékre általában két fajta erő hat, a súlyerő és a folyadékrész felületén ható erő. Ha a közeg súrlódásmentes, akkor a felületre csak a merőleges nyomásból származó erő hat.
Vegyünk egy dA alapterületű $|ds|$ hosszúságú csövet, amelynek tengelye párhuzamos a $grad(p)$ vektorral. Legyen az alapon levő nyomás p a cső végén levő nyomás $p+dp$. Ekkor a csőre ható nyomásból származó erőt a következő egyenlet írja le:

$$dF_p = -dA \cdot dp \cdot \frac{ds}{|ds|}.$$

Ez ellentétes f a ds "tengely" vektorral.
Mivel $grad(p)$ és ds azonos irányú, és emellett $dp = grad(p) \cdot ds$ ezért $dp = |grad(p)| \cdot |ds|$.
Innen ρ sűrűséggel való szorzás és osztás után:

$$dF_p = -\frac{1}{\rho} \cdot |grad(p)| \cdot |ds| \cdot \rho \cdot dA \frac{ds}{|ds|}.$$

Miután $p \cdot |ds| \cdot dA = dm$ és $|grad(p)| \cdot \frac{ds}{|ds|} = grad(p)$ Ezért, ha mindkét oldalt leosztjuk dm-el, akkor pontosan az egységnyi tömegre ható nyomóerőt kapjuk meg:

$$\frac{dF_p}{dm} = -\frac{1}{\rho} \cdot grad(p).$$

Az egységnyi tömegre ható erőt az erőtér $\underline{g}$ vektorral fejezhetjük ki.

$$\frac{dF_g}{dm} = \underline{g}.$$

Innen következik Newton második törvénye szerint, hogy:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \cdot grad(p).$$

Ezt az összefüggést nevezzük *Euler-egyenletnek.*(természetesen a súrlódási erő elhanyagolása mellett)

2.3.1. Megjegyzés. *A* hidrosztatika alapegyenletét *az Euler-egyenletből kapjuk úgy, hogy mivel a hidrosztatikai feladatoknál a folyadékunk az nem gyorsul, így az Euler egyenlet bal oldala zérus. A hidrostatikai feladatoknál az Euler-egyenlet még a valóságos(súrlódásos) folyadékok esetén is pontos értéket ad, mivel hirdosztatika a folyadékok nyugvó állapotát feltételezi, így nem léphetnek fel csúsztató feszültségek.*
A hidrosztatika alapegyenlete a következő (kis átrendezés után):

$$grad(p) = \underline{g} \cdot \rho.$$

Ha az előző fejezetben levezetett egyenletet felhasználjuk, akkor az Euler egyenlet egy vektoriális alakját kapjuk

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + grad\left(\frac{v^2}{2}\right) - \underline{v} \times rot(\underline{v}) = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \cdot grad(p).$$

Ha feltesszük, hogy a sűrűség a nyomás függvénye akkor $\rho = \rho(p)$. Mivel $grad(p)$ a nyomás hely szerinti változását jelenti(p és p_0 között), ezért a láncszabály alkalmazásával:

$$-\frac{1}{\rho(p)} \cdot grad(p) = -grad \cdot \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} dp.$$

2.4. Bernoulli-Egyenlet

Előző fejezetben levezettük az Euler-egyenletet, ami kapcsolatot teremt a folyadék-gyorsulás és a folyadékrészecskékre ható erő között. Gyakorlatban az Euler-egyenlet megoldásának egy igen hatékony módja a

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + grad\left(\frac{v^2}{2}\right) - \underline{v} \times rot(\underline{v}) = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \cdot grad(p)$$

egyenlet tagjainak az áramlási tér két pontját összekötő vonal menti integrálása. Ez az alábbi módon néz ki:

$$\int_a^b \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} ds + \int_a^b grad\left(\frac{v^2}{2}\right) ds - \int_a^b \underline{v} \times rot(\underline{v}) = \int_a^b \underline{g} ds - \int_a^b \frac{1}{\rho} \cdot grad(p) ds.$$

Ezt az egyenletet nevezik az általános *Bernoulli-egyenletnek.* Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek teljesülése esetén hozható az egyenlet egyszerűbb alakra!

- ha az áramlás stacionárius, akkor az integrálás első tagja 0, mivel $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$.
- a második integrál egyszerűen hozható kellemesebb alakra a gradiens definíciója szerint:
$$\int_a^b grad\left(\frac{v^2}{2}\right) ds = \frac{v^2(b) - v^2(a)}{2}.$$
- a harmadik integrál kiszámolása nehézséget okozhatna nekünk, ezért ha Bernoulli egyenlettel szeretnénk számolni általában törekszünk a zérussá tételére ami a következő esetekben következik be:
  - ha $\underline{v} = 0$.
  - ha $rot(\underline{v}) = 0$ azaz az áramlás örvénymentes.
  - ha áramvonalon integrálunk.
- ha ρ állandó, akkor $-\frac{p(b)-p(a)}{\rho}$. Ha a sűrűség függ a nyomástól is, akkor az utolsó integrál meg az előző fejezet végén található összefüggés szerint átírható
$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} dp$$
alakra.

3. fejezet

Az *Aramvonal* program

Ebben a fejezetben egy általam készített programról fogok írni. Ezt a programot a *Matlab* programozási nyelvben írtam. A *Matlab* a *The MathWorks* által kifejlesztett programrendszer, ami elsősorban numerikus számolásokra, függvények ábrázolására lett kifejlesztve.

3.1. A feladat definiálása

Az *Aramvonal* program célja egy függvény áramvonalának a lehető legvalósághűbb ábrázolása beleértve, hogy az áramvonalunk folytonos legyen és a program által kiszámolt és ábrázolt pontok relative (elhanyagolható különbséggel) a valóságos helyükön legyenek. Ehhez a program felhasznál egy *Fuggveny* nevezetű segédprogramot, amibe a felhasználónak megkell adnia egy f függvényt, aminek az áramvonalát ki szeretné rajzoltatni, emellett meg kell adnia a felhasználónak ennek a függvénynek a primitív függvényét, és az $\Im F(z)$ deriváltját.
Az áramvonal egyenlete a következő:

$$\Im F(z) = c.$$

$F(z)$ az $f(z)$ függvény primitív függvénye, a c az egy konstans érték.
Az $F(z) = d + c \cdot i$ egyenlet megoldására *Newton-módszert* használ a program. Megoldásnak tekintünk olyan z-t, melyre $|\Im F(z) - c| < 0.2$.

3.2. Elemzés

- A program során lehetőségünk van megadni egy téglalap tartományt egy 2×2 es mátrix segítségével, egy c konstans értéket, és egy h random tömb hosszt.
- A téglalap tartományból véletlenszerű komplex számokat generálunk (h darabot), ezeket oszlopvektor adatszerkezetben tároljuk a további felhasználás érdekében.
- Egy ciklus segítségével az alprogramot többször is alkalmazva megkonstruálunk egy S oszlopvektort, amibe az alprogram által kiszámolt *jó* pontok kerülnek.
- A meglévő pontok segítségével konstruálunk még az implicit egyenletet kielégítő pontokat iteráció segítségével. Ezeket a pontokat hozzávesszük a meglévő S oszlopvektorunkhoz.
- A végső S komplex oszlopvektorunkat a tagok valós részük és képzetes részük segítsévével kirajzoljuk.

3.3. Input paraméterek

A program futtatásához az alábbi bemenő adatokra van szükségünk az *Aramvonal* programhoz:

- C - 2×2-es mátrix, aminek elemei a téglalaptartomány csúcspontjait jelentik.
- c - valós szám, ami az implicit egyenletben levő c konstans értéke.
- h - a véletlen komplex oszlopvektorunk hossza.

További bemenő adatokra van szükségünk az alprogramhoz, amit a sablon alprogram megfelelő részeinek az átírásával adhatunk meg.

- Az $F(z)$ helyére a $f(z)$ függvény(keresett függvény áramvonalának) a primitív függvényét kell beírni.
- Az $(\Im F(z))'$ helyére az $F(z)$ primitív függvényünk képzetes részének a deriváltját kell beírni.

3.4. Implementáció

A főprogram feladata:

- Az input paraméterek ellenőrzése.
- Véletlenszerű h hosszú oszlopvektor generálása az input tartományból.
- A téglalaptartomány hosszabb oldalának a meghatározása.
- Iterációs lépés amelyben meghívjuk a *fuggveny.m* alprogramot.
- Egy másik iterációs lépés amiben a meglevő pontokhoz *jó* pontokat adunk hozzá.
- Az áramvonal kirajzolása beépített *plot alprogram* segítségével.
- Outputként a talált pontok kiírása.

Az alprogram feladata:

- Megvizsgálni, hogy a random komplex tömb elemei kielégítik-e az adott komplex egyenletet.
- Ha nem elégítik ki, akkor Newton-módszer alkalmazásával $\Im F(z) - c = 0$ gyökeit keressük meg.
- Ellenőrző lépés: ha megfelelő a talált gyök, akkor elmentjük egy sorvektorban.

3.5. Absztrakt Program

$aramvonal(C, c, h)$

$S, L, J := empty$

$k := random(h, 1), l := random(h, 1)$

$K = k + i \cdot l$

$t := max(|C(1,1)| + |C(1,2)|, |C(2,1)| + |C(2,2)|)$

$S := fuggveny(K, c, t)$

$[m, n] := Size(S)$

j=1 to 10000

$n < 5000$

$k := random(h, 1), l := random(h, 1)$ $K = k + i * l$ $S = [S, fuggveny(K, c, t)]$	$SKIP$

$[m, n] = size(S)$

$J := S$

h:=1 to 200

i:=1 to n

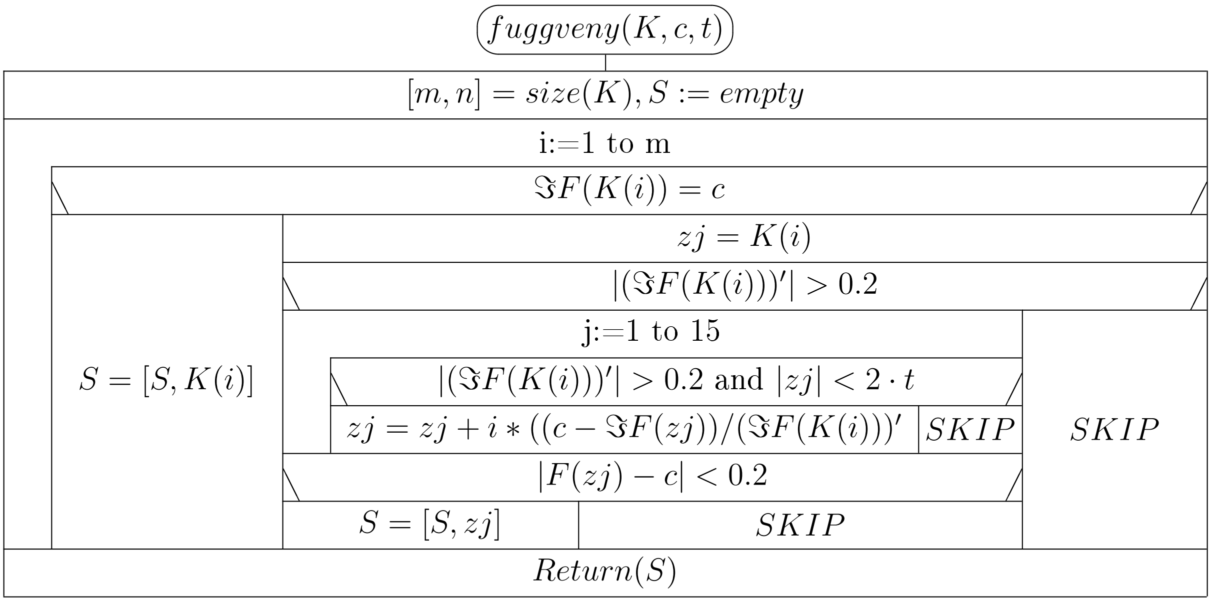
$L(i) := J(i) + \overline{J(i)}/|J(i)|$

$S := [S, L]$

$J := L$

$plot(\Re(S), \Im(S))$

$return(S)$


$fuggveny(K, c, t)$
$[m, n] = size(K), S := empty$
i:=1 to m
$\Im F(K(i)) = c$
$S = [S, K(i)]$
$zj = K(i)$
$|(\Im F(K(i)))'| > 0.2$
j:=1 to 15
$|(\Im F(K(i)))'| > 0.2$ and $|zj| < 2 \cdot t$
$zj = zj + i * ((c - \Im F(zj))/(\Im F(K(i)))'$
$SKIP$
$SKIP$
$|F(zj) - c| < 0.2$
$S = [S, zj]$
$SKIP$
$Return(S)$

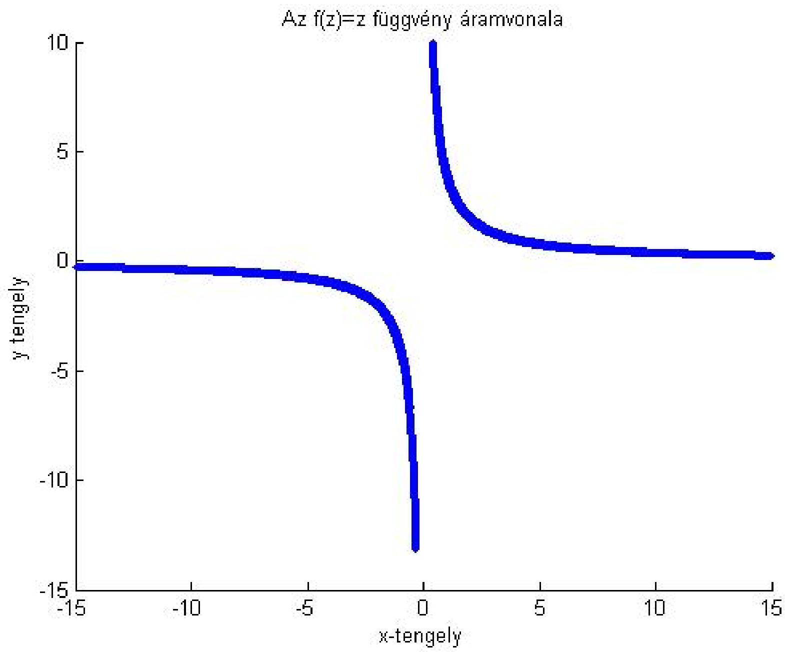
3.6. Tesztelés

- Üres inputra.
- Betű inputra.
- Nem megfelelő dimenziójú téglalap inputra.
- Többdimenziós h, vagy c inputra.

Hibás inputon a program hibaüzenetet ír ki jelezve, hogy melyik inputtal voltak problémák.
A programot teszteltem az $f(z) = z$ függvényre az alábbi inputtal:

- C=[-5,5;-5,5].
- c=4.
- h=1000.

Ezekre a bemenő paraméterekre a következő áramvonalat rajzolta ki a program:

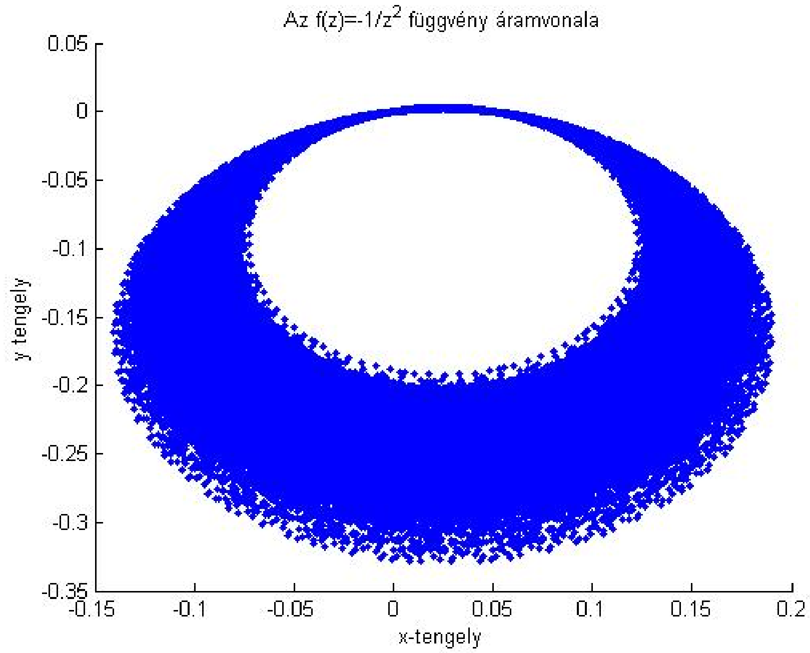


3.1. ábra. $f(z) = z$ függvény áramvonala

A programot emellett teszteltem az $f(z) = \frac{-1}{z^2}$ függvényre is az alábbi inputtal:

- C=[-5,5;-5,5].
- c=4.
- h=1000.

Itt a következő áramvonalat rajzolta ki a program:



3.2. ábra. $f(z) = \frac{-1}{z^2}$ függvény áramvonala

Irodalomjegyzék

[1] Halász Gábor, *Kis Hidrodinamika*

[2] Lajos Tamás, *Az Áramlástan Alapjai*

[3] Sigray István, *Komplex függvénytan előadás jegyzet*

[4] Dr. Író Béla, *Hő- és Áramlástan*

[5] Wikipédia, *www.wikipedia.org/wiki/Fluid_mechanics*

[6] L.M. Milne Thomson, *Theorical Aerodinamics*