PARADOXONOK A VÁLASZTÁSI RENDSZEREKBEN

Szakdolgozat

Írta: Kárpáti László

Matematika Bsc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: Fullér Róbert,

Egyetemi docens
Operációkutatás Tanszék
Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Természettudományi kar

Egyetemi tanár
Alkalmazott Matematikai Intezet
Óbudai Egyetem
Neumann Janos Informatikai Kar

2012

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS

Szakdolgozatom abból az alapvető kérdésből indul ki, hogy hogyan lehet egyéni véleményekből igazságosan - vagy éppen, hogy manipulatív módszerrel, igazságtalanul - kifejezni a közösség akaratát. Ha pontosabban akarom megfogalmazni, akkor pedig inkább az igazságos szavazási rendszer lehetetlenségéről szól.

A témában (a társadalmi választások elmélete) Arrow (Kenneth Arrow, 1921-) az amerikai matematikus-közgazdász tette le az alapkövet az 1950-es években az Arrow-féle lehetetlenségi törvénnyel melyet azóta többen is általánosítottak (pl.: List-Pettit), és amiért meg is kapta 1972-ben a közgazdasági Nóbel-díjat. A tétel lényegében azt mondja ki - mint, ahogy azt majd részletesebben is látni fogjuk - hogy kettőnél több alternatíva és három vagy több döntéshozó esetén nincs olyan többségi véleményaggregálási technika, ami a minimális etikai követelményeknek eleget tenne (igazságosság, méltányosság, racionalitás).

A dolgozat első részében (2. fejezet) bevezetjük a téma tárgyalásához szükséges jelöléseket és deficiníciókat, majd kimondjuk és bebizonyítjuk (3. fejezet) May-tételét, mely rámutat arra, hogy az egyik legegyszerűbb, a sima többségi elven működő szavazás módszere, milyen pontosan ki tudja elégíteni az igazságosság feltételeit, de csak bizonyos körülmények között!

Utána bemutatjuk a Condorcet választási rendszereket és rámutatunk azok alapvető hiányosságára, hogy nem mindig adnak győztest, majd ehhez a választási rendszerhez viszonyítva megnézünk még néhány más metódust is.

Ezután rátérünk a már említett Arrow tételre, amit bizonyítunk, egy egyszerű geometriai szemléletű gondolatmenettel. Majd megmutatjuk ennek a tételnek egy mutatós következményét az Ostrogorsky paradoxont.

A következő fejezetben pedig bemutatjuk a Gibbard–Satterthwaite tételt ami azt mondja ki, hogy egy választási rendszer vagy manipulálható, vagy nem lehet diktátormentes. Ennek egy speciális esetét bizonyítjuk is, amikor csak két választó van.

Végül pedig megnézzük Sen paradoxonát (más néven a liberális paradoxont), ami azt mondja ki, hogy nem minden esetben összeegyeztethetőek az egyének "szabadságjogai" a kollektív döntésekkel.

2. DEFINÍCIÓK, JELÖLÉSEK, KERETRENDSZER

Egy választási rendszerben vannak indivíduumok és jelöltek. Az indivíduumok egy rendezést állítanak fel maguknak a jelöltek között és feltételezzük, hogy ez alapján adja le szavazatát. Az indivíduumok szavazatait egy véleményösszegző függvény leképezi szintén egy rendezésbe, vagy egy jelöltre attól függően, hogy szociális jóléti vagy szociális választófüggvényről beszélünk. Ennek a függvénynek kell(ene) tükröznie a kollektív akaratot. A fejezetben ezekre a fogalmakra kezdünk el keretrendszert építeni.

Definíciók és állítások:

- Jelölje X a választási lehetőségek halmazát, $\mid X \mid= n$ pedig a halmaz számosságát.
  Ha más megkötést nem teszünk akkor feltesszük, hogy$\mid X \mid\geq 2$.
- Ha $Z \subset X$, akkor $X\backslash$A jelölje Z komplementerét az X-ben.
- Legyen $\succeq$binér reláció az X-en.
  Ha $x, y \in X$ és $x \succeq y$, akkor azt, mondjuk, hogy x *gyengén preferált* y-hoz képest.
  Ha $x \succeq y$ fennál, de nem teljesül $y \succeq x$, akkor ezt $x \succ y$-al jelöljük és azt mondjuk, hogy x *erősen preferált* y-hoz képest.
- Ha teljesül $x \succeq y$ és $y \succeq x$ is, akkor ezt $x \sim y$ jelöljük és azt, mondjuk, hogy x indifferens y-ra.

- $(X, \succeq)$ részbenrendezés X-en, ha:
  - a $\succeq$ reláció *reflex*ív, azaz $\forall x \in X$-re $x \succeq x$.
  - a $\succeq$ reláció *tranzitív,* azaz ha $\forall x, y, z \in X$, $x \succeq y$ és $y \succeq z$ esetén fennál $x \succeq z$.
  - a $\succeq$ reláció *antiszimmetrikus*, azaz ha $\forall x, y \in X$, $x \succeq y$ és $y \succeq z$, akkor következik, hogy $x = y$.
- Az $(X, \succeq)$ párost teljesnek nevezzük, ha $\forall x, y \in X$ -re fennáll az $x \succeq y$ vagy $y \succeq x$.

- Egy teljes és tranzitív relációt *rendezésnek* nevezünk.
- Egy binér reláció lineáris rendezés, ha teljes, tranzitív és antiszimmetrikus.
  Jelölje $L(X)$ a lineáris rendezések családját X-on.

  ÁllÍtás: Ha $\mid Y \mid = n$, akkor $L(Y)$ elemszáma megegyezik az $\{1, 2, ..., n\}$halmaz elemeinek a különböző permutációnak a számával, ami éppen $1*2*...*(n-1)*n = n!$
- Az $\succeq$ reláció inverzét jelölje $\succeq^{-1}$ ahol $x \succeq^{-1} y$ akkor és csak akkor ha $y \succeq x$.
  ÁllÍtás: Az $\succeq^{-1}$
  - antiszimmetrikus, vagy
  - teljes, vagy
  - tranzitív, vagy
  - lineáris $\Longleftrightarrow$ha $\succeq$ is az.
- Legyen $Y \subset X$, $\succeq$ pedig binér reláció X-en, ekkor $\succeq$ megszorítását Y-ra jelölje $\succeq_{|Y}$, ahol
  $x \succeq_{|y} y \Longleftrightarrow$,ha $x \succeq y$ ahol $x, y \in Y$
- Azt, mondjuk, hogy az $(X, \succeq)$ tartalmaz kört, ha $\exists x_1, x_2, ..., x_i \in X$, hogy:
  $x_1 \succ x_2 \succ .... \succ x_i \succ x_1$ (ezt $i+1$ hosszúságú körnek nevezzük)
- $x \in X$-et az $(X, \succeq)$, *legjobb*, vagy *legerősebb elemének* nevezzük, ha $\forall y \in X$-re: $x \succ y$ fennáll. Jelölése $(X, \succeq)^{MAX}$*, vagy* R^{MAX} *vagy* p_i^{MAX}.
- $x \in X$-et az $(X, \succeq)$ legrosszabb, vagy *leggyengébb elemének* nevezzük, ha $\forall y \in X$-re: $y \succeq x$ fennáll.

Megjegyzés:

- Az, hogy egy X tartalmaz-e kört a későbbiekben kiemelten fontos szerepet fog játszani, hiszen ha például
  $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$és $x_1 \succ x_2 \succ .... \succ x_n \succ x_1$, akkor nincsen X-nek legjobb eleme.
- Szép példa kört tartalmazó $(X, \succeq)$ párosra a kő-papír-olló nevű játék ahol:
  $X = \{\textit{kő}, \textit{papír}, \textit{olló}\}$ és a rendezés pedig: *kő* $\succ$ *olló* $\succ$ *papír* $\succ$ *kő*

- Általánosan, a tranzitivitás szükséges,de nem elégséges feltétele annak, hogy létezzen legjobb elem.

Jelölések:

- Jelölje N az egyének halmazát akikek megfeletetünk a $1, 2, ..., n$ elemeinek ($n \geq 2$).
- Ha minden $i \in N$ egyén meghatároz egy $p_i \in L(X)$ rendezést X-en, akkor $p^n := (p_1, p_2, ..., p_3) \in L(X)^N$
- Választási tereknek hívjuk, az X felett meghatározott lináris rendezeket és a (P, X) párossal jelöljük őket.
  Jelölése:$(P, X) \subseteq L(X)^N$, ha pedig $(P, X) \equiv L(X)^N$, akkor P-ét teljes választási térnek hívjuk (mindenki szabadon szavazhat).
- Jelölés ha $Y \subset X$, akkor $P(Y)$ alatt azt a választási teret értjük, amiben a lináris rendezéseket megszorítottuk Y-ra.

Definíció: Egy $p \in (P, X)$ elemet *profilnak* hívunk és p_i $i \in N$ jelöli az i. indivíduumnak a *preferecia rendezését* p-ben.

Jelölés:

- Ha egy $p \in (P, X)$ profilban a p_i preferencia sorrendjében x gyengén preferál y-hoz képest, azt $x \succeq_i y$-al jelöljük, vagy ha nem egyértelmű, hogy melyik profil szerinti véleményéről van szó i-nek, akkor $x \succeq_i^p y$-vel, vagy $p_i(x) \succeq p_i(y)$-al jelöljük
- Hasonlóan értelmezhetőek az $x \backsim_i^p y$ és az $x \succ_i^p y$ jelölések is.
- Ha $Y \subset X$, akkor $p_{|Y}$ jelölje a megszorítását a p profilnak Y-ra.

Definíció: Ha $S \subset (P, X)$ részhalmaz ekkor jelöjön $p \in S$ egy olyan profilt ahol $p(i) \in S$ $\forall i \in N$-re.

Definíció [4 pp. 39]: :

- *Szociális jóléti függvénynek* nevezzük a $f : (P, X) \to L(X)$ függvényeket. Azaz egy olyan összegző függvényt ami egy $(p_1, p_2, ..., p_N) := p \in (P, X) \subseteq L(X)^N$ profilhoz hozzárendel egy lineáris $L(X)$ rendezést.
- Ha $f(p)$tranzitív minden $p \in (P, X)$ esetén, akkor *tranzitív értékűnek* nevezzük.
- Ha egy $p \in (P, X)$ profilra $f(p)$ által megadott rendezésben$x$ gyengén preferál y-hoz képest, azt $x \succeq_{f(p)} y$-al jelöljük. Itt is hasonló módon értelmezhetőek az$x \backsim_{f(p)} y$ és az $x \succ_{f(p)} y$ jelölések.

Definíció [4 pp. 41]:

- Egy adott (P, X) választási téren az $\{x, y, z\} \subseteq X$ alternatíváknak *szabad hármasnak* nevezzük, ha
$$(P, \{x, y, z\}) = L(\{x, y, z\})^N$$
- Azt mondjuk, hogy a P választási tér rendelkezik a *szabad hármas tulajdonsággal*, ha $| X | \geq 3$ és $\forall x, y, z \in X$-re az $\{x, y, z\}$ szabad hármas.
- Azt mondjuk, hogy a P választási tér rendelkezik a *lánc tulajdonsággal*, ha $| X | \geq 3$ és minden rendezett $(x, y), (w, z)$ párra $(x, y, z, w \in X)$ létezik egy $k \in \mathbb{N}$ és $v_{1,}, v_2, ..., v_k$ sorozat, hogy a $\{x, y, v_1\}, \{y, v_1, v_2\}, \{v_1, v_2, v_3\}, ..., \{v_k, w, z\}$ hármasok mind szabadok.

Megjegyzés [4 pp. 41]: Az, hogy P-re teljesül a lánc tulajdonság gyengébb feltétel annál, mintha a szabad hármas tulajdonság teljesülne. Például, legyen $| X |> 3$ és legyen R egy rögzített rendezés az $X \setminus \{a\}$ halmazon. A P tartomány tartalmazza az összes p profilt, ahol $\forall i \in N$-re $p(i) := R$ vagy $p(i) := R^{-1}$. Továbbá az a pozociója legyen szabad az $r(i)$-kben, kivéve, hogy nem lehet indifferens egy másik elemre. Ekkor P nem szabad hármas tulajdonságú, de teljesül rá a lánc tulajdonság, hiszen$(x, y), (w, z)$ párra az $\{x, y, a\}, \{y, a, w\}, \{a, w, z\}$hármasok szabadok.

3. MAY TÉTELE

A legegyszerűbb szavazási eljárások egyike az, amikor:

- mindenki egyszerre szavaz
- névtelenül szavaznak(azaz mindenkinek a szavazata ugyanannyit ér)
- két alternatíva közül kell választani (például, hogy megépítsenek-e egy hidat, vagy a két elnökjelölt közül ki legyen a megválasztott)

Kenneth May megmutatta, hogy olyan szociális jóléti függvény, ami a fenti feltételeket kielégíti csak egy van, és ez az egyszerű többségi választási függvény. A későbbiekben majd látni fogjuk Arrow tételénél, hogy ez a szociális jóléti függvény nagyon sérülékeny, például már akkor sem működik jól, ha több mint két alternatíva közül választhatnak az indivíduumok.

Ebben a fejezetben ha külön nem kötünk ki mást, akkor feltesszük, hogy az alternatívák száma kettő, azaz $\mid X \mid= 2$. Ebből adódóan használjuk az $f(p) = x$ jelölést, ha $f(p)$ által meghatározott rendezésben $x \succ y$ teljesül, (ez nyilván a két elem feletti rendezést egyértelműen meghatározza).

Definíciók [2 pp. 39]: Egy $f : P \longrightarrow L(X)$ szavazatösszegző függvényt

- univerzálisnak (U) nevezünk, ha az értelmezési tartománya teljes választási tér, azaz, ha $P = L(X)^N$. Tehát az univerzális szavazatösszegző függvény minden lehetséges választási lehetőségre fel kell mutatnia egy kollektív döntést.
- *anonímnak* (A) nevezünk, ha: $\forall p \in P$-re és az indivíduumok minden $\Phi : N \longrightarrow N$ permutációjára (Φ önmagára bijektív leképezés) teljesül, hogy

$$f(p(1), p(2), ..., p(n)) \quad = f(p(\Phi(1)), p(\Phi(n)), ..., p(\Phi(n)))$$

- *semlegesnek* (N) nevezünk, ha $X = \{a, b\}$ és $\forall p \in P$ profil esetén a $\widetilde{p}(i) := \neg p(i)$ ellentett profilra: $f(p) = x \Longleftrightarrow f(\widetilde{p}) = \neg x$ teljesül, ahol $x \in X$ esetén jelölje $\neg x := \begin{cases} a & , x = b \\ b & , x = a \end{cases}$

- pozitív eltolódónak (P) nevezzük, ha mondjuk $f(p(1), p(2), ..., p(n)) = a$ esetén $\forall p' - re$ ahol $p'(i) = \begin{cases} a & , p(i) = a \\ a \vee b & , p(i) = b \end{cases}$:

$$f(p') = a$$

Jelölés: Jelölje $N(x \succeq_p y)$ azoknak az i-knek a számát a $p \in P$ profilban ahol $x \succeq_i y$ tejesül.

Definíciók [2 pp. 39] (Többségi elven működő szavazatösszegző függvények):

- Egy f szavazatösszegző függvény az *egyszerű többségi elven* működik, ha $\forall p \in P$-re:

$$f(p) = x \Longleftrightarrow N(x \succeq_p y) \geq N(y \succeq_p x)$$

- Egy f szavazatösszegző függvény az *abszolút többségi elven* működik, ha $\forall p \in P$-re:

$$f(p) = x \Longleftrightarrow N(x \succeq_p y) \geq \frac{\mid N \mid}{2}$$

Tétel (May 1952) [2 pp. 40-41]:

Egy $f : P \longrightarrow L(X)$ szavazatösszegző függvény akkor és csak akkor tudja kielégíteni mind az

- univerzalitás (U)
- anonimítás (A)
- semlegesség (N)
- és a pozitív eltolódás (P)

feltételeit, ha az az egyszerű többségi elven működik.

Hogy May eredeti bizonyításának a gondolatmenetén végigmehessünk szükségünk van még néhány definíció és jelölés bevezetésére

Jelölés:

- $\forall i \in N$-re és $\forall p \in (P, X)$-re legyen rendre $d_i^p = +1, 0, -1$, ha a $p(i)$-hez tartozó $R_i \in L(X)$ rendezédben $x \succ y$, $x \sim y$, $y \succ x$.
- Hasonlóan jelölje $D^p := g(d_1^p, d_2^p, ..., d_n^p)$, ahol g szavazatösszegző függvény is$+1, 0, -1$ értékeket vesz fel aszerint, hogy az $f(p)$ által meghatározott R rendezésben $x \succ y$, $x \sim y$, $y \succ x$ teljesül-e.

Bizonyítás:

Először vegyük észre, hogy a $g(d_1^p, d_2^p, ..., d_n^p)$ értéke $\forall p$ esetén nem függ d_i^p sorrendjétől és a $d_i^p = 0$ elemek számától sem, csak az $N(xR^py)$és $N(yR^px)$ számoktól (hiszen $N(x \sim y) = |N| - N(x > y) - N(y > x)$). Tehát, az anonimitásból következik, hogy $g(d_1^p, d_2^p, ..., d_n^p)$ értéke csak $N(xR^py)$ és $N(yR^px)$-től függ.

Másodszor belátjuk, hogy ha $N(xR^py) = N(yR^px)$, akkor $D^p = 0$. Tegyük fel indirekt, hogy $D^p = g(d_1^p, d_2^p, ..., d_n^p) := 1$, ekkor tudjuk a semlegességből, hogy $g(-d_1^p, -d_2^p, ..., -d_n^p) = -g(d_1^p, d_2^p, ..., d_n^p) = -1$. De az első lépésből és $N(xR^py) = N(yR^px)$ feltételből tudjuk hogy:

$$g(-d_1^p, -d_2^p, ..., -d_n^p) = g(d_1^p, d_2^p, ..., d_n^p).$$

Hasonlóan látható, -1 esetre is az ellentmondás, azaz $N(xR^py) = N(yR^px)$ esetén $D^p = 0$.

Harmadszor belátjuk, hogy $N(xR^py) > N(yR^px)$ esetén $D^p = g(d_1^p, d_2^p, ..., d_n^p) = 1$. Tegyük fel, hogy $N(xR^py) = N(yR^px) + m$, ahol $0 < m \leq |N| - N(yR^px)$. Először tekintsük az $m = 1$ esetet, amikor $N(xR^py) = N(yR^px) + 1$. Ekkor, $\exists k : d_k = 1$. Tekintsük, most a $(d_1^{p'}, d_2^{p'}, ..., d_n^{p'})$ profilt, ahol $d_i^{p'} = d_i^p \forall i \neq k$ esetén és $d_k^{p'} := 0$. Ekkor az új profilra $N(xR^{p'}y) = N(yR^{p'}x)$, ekkor az előző részből tudjuk, hogy $g(d_1^{p'}, d_2^{p'}, ..., d_n^{p'}) = 0$. Innen a pozitív eltolódásból tudjuk, hogy $g(d_1^p, d_2^p, ..., d_n^p) = 1$

Végül pedig nézzük a következő indukciót: tegyük fel, hogy $N(xR^py) = N(yR^px) + m$ -ből következik, hogy $g(d_1, ..., d_n) = 1$. Azt fogjuk bizonyítani, hogy $N(xR^py) = N(yR^px) + (m+1)$ -ből is következik, hogy $g(d_1, ..., d_n) = 1$. Ezért tegyük fel, hogy $N(xR^py) = N(yR^px) + (m+1)$. Ekkor ezért megint $\exists k$, hogy $d_k^p = 1$ a $(d_1^p, .., d_n^p)$

profilban. Legyen ismét a $(d_1^{p'}, d_2^{p'}, ..., d_n^{p'})$ profil, olyan ahol $d_i^{p'} = d_i^p \forall i \neq k$ és $d_k^{p'} = 0$. A p profilban $N(xR^p y) = N(yR^p x) + m$. Az indukciós feltevésből következik a p' profilra, hogy $g(d_1^{p'}, d_2^{p'}, ..., d_n^{p'}) = 1$. Így a pozitív eltolódásból következik, hogy $g(d_1^p, d_2^p, ..., d_n^p) = 1$. Tehát a feltételek kikényszerítik a többségi szavazási eljárás.

4. Condorcet paradoxon

Az előző fejezetben May tételénél láthattuk, hogy az egyszerű többségi elven működő demokrácia igazságosnak tűnik, ha csak két opció közül kell választanunk. Mi a helyzet azonban akkor, ha a szavazók több alternatíva között dönthetnek? Az egy ilyen lehetséges választási rendszer a Condorcet (Condorcet egy matematikával, statisztikával, és szociológiával foglalkozó franciaországi tudós volt, a 18. század második felében) féle szavazatösszegző függvény. **[1 pp. 85-90]**

4.1 A Condorcet választás

Definíció: A Condorcet-módszer azoknak a választási rendszereknek a gyűjtőneve, amelyek eleget tesznek a Condorcet-kritériumnak.

Definíció: Condorcet-kritériumnak nevezzük, azt ha egy választási rendszerben a Condorcet-nyertes, lesz a választás győztese.

Definíció: Condorcet-nyertes az a jelölt, amelyik legelőrébb szerepel abban a rendezési relációban, amelyiket úgy kaptunk választók individuális (nem felétlenül teljes)preferencia rendezéséből, hogy minden $x \succeq y$ relációról többségi szavazással döntöttünk.

Definíció: A Condorcet vesztes eljárások azoknak a választási rendszereknek a gyűjtőneve, amelyekben nincs olyan profil, ahol a Condorcet vesztes nyer.

Példa: Az alábbi egyszerű példa, bemutatja, hogyan működik a gyakorlatban a Condorcet szavazatösszegzés.

Vegyük azt az esetet, amikor 5 jelölt (A,B,C,D,E) indul egy választáson, 1 pozícióért. A választók az alábbi voksokat adták le:

Szavazatok száma	Preferencia sorrend
31 darab	A$\succ$E$\succ$C$\succ$D$\succ$B
30 darab	B$\succ$A$\succ$E
29 darab	C$\succ$D$\succ$B
10 darab	D$\succ$A$\succ$E

Innen az összes lehetséges párbarendezést megvizsgálva az alábbi nyerési mutatók jönnek ki:

Párosítás	Eredmény	Győztes
A vs. B	41:59	B
A vs. C	71:29	A
A vs. D	61:39	A
A vs. E	71:0	A
B vs. C	30:60	C

Párosítás	Eredmény	Győztes
B vs. D	30:70	D
B vs. E	59:41	B
C vs. D	60:10	C
C vs. E	29:71	E
D vs. E	39:61	E

Azaz a Condorcet győzelmek és vereségek száma:

Jelölt	Győzelmek	Vereségek	Győzelmek - Vereségek
A	3	1	2
B	2	2	0
C	2	2	0
D	1	3	-2
E	2	2	0

A fenti táblázat ulolsó oszlopában szereplő számok (Győzelmek - Vereségek) a jeltöltekhez tartozó Condorcet szám. Mivel az A jelöltnek a legmagasabb ez az értéke, ezért ő a Condorcet győztese ennek a választásnak.

4.2 A Condorcet paradoxon és valószínűsége

A fenti példában láttuk, hogy a Condorcet eljárás rendkívül egyszerűen alkalmazható több alternatíva esetén és első ránézésre igazságosnak is tűnik, azonban jobban megvizsgálva hamar kiderül, hogy van egy súlyos hiányossága: mégpedig, hogy nincs mindig Condorcet győztes! **[1 pp. 85-90]**

Nézzük az alábbi egyszerű példát, ahol három alternatíva (A,B,C) közül választ három választó (x,y,z). Tekintsük az alábbi rendezéseket:

$$\mathrm{A} \succ_1^p \mathrm{B} \succ_1^p \mathrm{C}$$

$$\mathrm{B} \succ_2^p \mathrm{C} \succ_2^p \mathrm{A}$$

$$\mathrm{C} \succ_3^p \mathrm{A} \succ_3^p \mathrm{B}$$

Párosítás	Eredmény	Győztes
A vs. B	2:1	A
A vs. C	1:2	C
B vs. C	2:1	B

Jelölt	Győzelmek	Vereségek	Condorcet szám
A	1	1	0
B	1	1	0
C	1	1	0

Látható, hogy a tranzitivitás sérült a szavazatösszegző függvénynél (A $\succeq_f$ B $\succeq_f$ C $\succeq_f$ A), mivel mindenkinek a Condorcet száma 0 lett. Így az eredeti eljárással nem adható ilyen helyzetben győztes. Guilbaud azt kutatta, hogy mekkora a 'döntésképtelem társadalom' létrejöttének a valószínűsége a Condorcet választási modellben. Tekintsünk ebből egy esetet:

Legyen 6 választó N=$\{1,..,6\}$ és ismét 3 alternatíva (A,B,C) közül választanak. Ekkor ezek közül a preferencia rendezések között kell dönteniük:

$$\text{A} \succ_1 \text{B} \succ_1 \text{C}$$

$$\text{B} \succ_2 \text{C} \succ_2 \text{A}$$

$$\text{C} \succ_3 \text{A} \succ_3 \text{B}$$

-

$$\text{C} \succ_4 \text{B} \succ_4 \text{A}$$

$$\text{A} \succ_5 \text{C} \succ_5 \text{B}$$

$$\text{C} \succ_6 \text{A} \succ_6 \text{C}$$

Azt, hogy hogy az 1,2,3-as választók rendre az $\succ_i$, $\succ_j$, $\succ_k$ preferencia relációkat választják jelöljük így: (i,j,k)

Tekintsük az első három rendezést. Láttuk, hogy ha a teljes választási profil az (1,2,3) preferencia relációkból áll, akkor sérül a szavazatösszegző függvény tranzitivitása, azaz nem lesz Condorcet győztes. Triviális, hogy ez akkor is teljesül ha a profil az (1,3,2), vagy (2,1,3), (2,3,1), (3,2,1), vagy pedig (3,2,1).

A második 3 rendezésben is analóg mód ugyan így 6 olyan rendezést találunk, ahol nem találunk Condorcet győztest és könnyen be is látható, hogy ezeken kívül nincs is ennél a 12-nél több olyan profil, ami ezt a helyzetet előállítaná.

Összesen a három választó a három jelölttel 216 ($6 * 6 * 6$) különböző lehetséges választási profilt állít elő. Tehát annak a valószínűsége, hogy nem lesz Condorcet győztes már egy ilyen kis létszámú választást tekintve is [1 pp. 90]:

$$\frac{12}{216} = 0,0555$$

A valószínűség kérdését csak említés szintjén engedi a szakdolgozat kerete vizsgálni, de azt mindenképp fontos megjegyezni, hogy ha növeljük a választók és a választható alternatívák számát, úgy nőni fog annak a valószínűsége is, hogy nem lesz a választásnak Condorcet győztese.

4.3 Más választási eljárások a Condorcet-kritértium fényében

Vizsgáljuk meg az alábbi választási függvények erősségeit és gyengeségeit, miközben a már megismert Condorcet eljáráshoz is hasonlítsuk őket. Először látni fogunk egy Condorcet-vesztes eljárást a Pluralitásos szavazást, majd egy olyan szavazatösszegző függvényt, amely se nem Condorcet-nyertes se nem Condorcet-győztes típusú, és végül megmutatjuk a Kemény-Young módszert, ami Condorcet-nyertes típusú. A fejezetben azok a jelöltek, akikek nem jelöl egy választó, azok ugyanazon - az utolsó - helyen szerepelnek a rendezésben.

4.3.1 Pluralitásos szavazás

Ez a leginkább elterjedtebb és az egyik legegyszerűbb szavazási eljárás, de olyan gyengeségei vannak, melyek komoly korlátokat szabnak. [4 pp. 103-116]

A Pluralitásos szavazás az egyéni preferencia rendezések legelső helyét vizsgálja csak. Összeszámolja, hogy ezeken a helyeken hányszor szerepelnek a jelöltek, és akit a legtöbbször tettek az első helyre az nyeri a választást. Már a 18. században felfedezték a legnagyobb gyengeségét, hogy nemcsak, hogy nem felel meg a Condorcet kritériumnak, de van hogy egyenesen a Condorcet választás vesztesét hozza ki győztesnek. Azaz nem teljesíti a Condorcet vesztes kritériumot sem.

Példa: Most 3 jelölt (A,B,C) közül válasszon 10 szavazó az alábbiak szerint:

Szavazatok száma	Preferencia sorrend
4 darab	A≻B≻C
3 darab	B≻C≻A
3 darab	C≻B≻A

Párosítás	Eredmény	Győztes
A vs. B	4:6	B
A vs. C	4:6	C
B vs. C	7:3	B

Ekkor a Pluralitásos szavazás győztese az A, aki mint látható egyértelműen egyben a Condorcet választás vesztese is.

4.3.2 Borda szavazás

A Borda szavazás a pontozásos szavazások között annak ellenére a legelterjedtebb, hogy számos hátránnyal rendelkezik (például a manipulálhatósággal). [9 pp. 31]

Ha n jelölt van, akkor a választó annak aki a preferencia rendezésében az első helyen szerepel n-1 pontot ad, annak aki a második helyen n-2 pontot, egészen a rendezésben az utolsó helyen szereplő jelöltig, aki 0 pontot kap.

Példa: Legyen 4 jelölt (A,B,C,D) és 7 szavazónk. Tegyük fel, hogy a szavazatok az alábbiak szerint alakultak:

Szavazatok száma	Preferencia sorrend
3 darab	D≻C≻B≻A
2 darab	A≻D≻C≻B
2 darab	B≻A≻D≻C

Ekkor a Borda számok az alábbi szerint alakulnak:

Jelölt	3	2	1	0	Borda pont
A	2	2	0	3	10
B	2	0	3	2	9
C	0	3	2	2	8
D	3	2	2	0	15

Tehát D jelöltnek lett a legnagyobb a Borda száma, így a választást ő nyerte. A teljes eredménye a Borda szavazatösszegző eljárásnak: D>A>B>C.

A Borda szavazás egyik legnagyobb gyengesége, hogy ha egy jelölt visszalép, azzal tudja manipulálni az eredeti sorrendet, mert mint ahogy látni fogjuk nem csupán annyi történik, hogy a szavazatösszegző függvény által kapott rendezésből töröljük a jelöltet és a többiek relatív viszonya változatlan marad. Az előző példánkból, ha kihagyjuk a D jelöltet, akkor így alakul a szavazás:

Szavazatok száma	Preferencia sorrend
3 darab	C⪰B⪰A
2 darab	A⪰C⪰B
2 darab	B⪰A⪰C

Ekkor a Borda számok az alábbi szerint alakulnak:

Jelölt	3	2	1	0	Borda pont
A	0	2	2	3	6
B	0	2	3	2	7
C	0	3	1	0	8

Azaz, most C jelölt győzött, pedig akkor amikor D jelölt is indult a választáson, de a választók az eredeti preferencia rendezésük alapján adták le a szavazatukat, akkor az utolsó helyen végzett. Az új szavazás (Borda)végeredménye tehát a következő lett: C>B>A.

Egy másik fontos probléma a Borda szavazással, hogy bár teljesíti a Condorcet vesztes kritériumot, mégsem Condorcet eljárás. Azaz a jelölt aki Condorcet vesztes biztosan nem lesz győztes, de nem mindig a Condorcet győztes nyer.

4.3.4 Kemény–Young maximum likelihood eljárás

Ez a szavazási eljárás is megengedi a választóknak, hogy a választáskor akár egynél több jelöltet jelöljenek meg, azokat sorrendbe állítva. Itt sem kötelező teljes sorrendet állítani. **[4 pp. 43-49]**

A Kemény-Young eljárás az egyének preferencia rendezését összeveti az összes lehetséges permutációjával a jelölteknek. Ezek a párok között pedig megállapít egy távolságot, aszerint, hogy hány azonos rendezési párjuk van. Annál a rendezésnél ahol ez a távolság (un. Kemény-index) a legnagyobb (legyen K) azt válasszuk ki. Az első olyan szavazó akinek a távolsága K volt, az lesz a Kemény győztes.

Példa: Legyen három jelöltünk X={A,B,C}, és három szavazónk N={1,2,3}. A választók egyéni preferencia rendezéseik legyenek az alábbiak [4]:

$$C \succ_1 A \succ_1 B,\ B \succ_2 C \succ_2 A,\ A \succ_3 C \succ_3 B$$

Mivel 3 jelölt van, ezért ezeknek összesen 6 kölönböző permutációjuk van. Tehát összesen 6*3=18 összehasonlítást kell végeznünk a távolságok "lemérésére":

	C⪰A⪰B	B⪰C⪰A	A⪰C⪰B
A⪰B	1	0	1
A⪰C	0	0	1
B⪰C	0	1	0
A⪰B⪰C től mért távolságok: 4			

	C⪰A⪰B	B⪰C⪰A	A⪰C⪰B
A⪰B	1	0	1
A⪰C	0	0	0
C⪰B	1	0	1
A⪰C⪰B től mért távolságok: 5			

	C⪰A⪰B	B⪰C⪰A	A⪰C⪰B
B⪰A	0	1	0
A⪰C	0	0	1
B⪰C	0	1	0
B⪰A⪰C től mért távolságok: 3			

	C⪰A⪰B	B⪰C⪰A	A⪰C⪰B
A⪰B	0	1	0
C⪰A	1	1	0
B⪰C	0	1	0
B⪰C⪰A től mért távolságok: 4			

	C⪰A⪰B	B⪰C⪰A	A⪰C⪰B
A⪰B	1	0	1
C⪰A	1	1	0
C⪰B	1	0	1
C⪰A⪰B től mért távolságok: 6			

	C⪰A⪰B	B⪰C⪰A	A⪰C⪰B
A⪰B	0	1	0
A⪰C	1	1	0
C⪰B	1	0	1
C⪰B⪰A től mért távolságok: 5			

Azaz a C>A>B rendezés van legközelebb a szavazók véleményéhez, ezért a Kemény győztes a C jelölt.

Ez az eljárás nemcsak, hogy a Condorcet vesztes kritériumnak felel meg, de ez maga is Condorcet választás, azaz ha van Condorcet győztes akkor mindig azt nyeri a választást. Viszont az eljárás kiküszöböli azt, hogy a tranzitivitás sérüljön.

Most pedig gondoljuk kicsit precízebben végig, hogy a "távolság" és "közelség" jelzők használat teljesen jogos, hiszen a Kemény-távolság valójában egy metrikus teret definiál az alternatívák rendezésének terén.

Legyen $\Re$ a halmaza az összes R bináris relációknak X-en. R, R', R", részhalmazai a rendezett pároknak az X x X -en. Tekintsük a következő függvényt d:$\Re^2 \to \mathbb{R}_+$ ahol: d(R,R')=|(R-R')$\bigcup$(R'-R)|. Ekkor d egy metrikát definiál X-en, hiszen:

1. d(R,R') $\geq$0
2. d(R,R') = 0 $\Longleftrightarrow$ha R=R'
3. d(R,R') = d(R',R)
4. d(R,R") $\leq$ d(R,R')+d(R',R")

feltételek teljesülnek.

5. Arrow tétele

Amikor a választási eljárások egyik legfontosabb kérdése, hogy társadalmilag mit tekinthetünk igazságos és demokratikus szavazásnak. Ennek többféle megközelítése is lehet, tekintsük most a következőket:

(1) a szavazók szavazhassanak bármely jelöltre szabadon

(2) a végeredmény független legyen az irreleváns alterenatívákra

(3) hogy ha minden választó előnyben részesíti az egyik jelöltet egy másikkal szemben, akkor az első nyerjen

(4) legyen a rendszer diktátormentes, azaz ne legyen olyan szavazó, akinek a szavazata minden más egyén akaratától függetlenül érvényesül a választás végeredményét tekintve.

Ebben a fejezetben kimondjuk és bizonyítjuk Arrow tételét, mely rámutatott, hogy sajnos nem lehet olyan választási modellt kreálni, ami mind a négy fenti feltételnek eleget tudna tenni.

5.1 Arrow-féle lehetetlenségi tétel

Először vegyük át mik is az elvárásaink a szavazatösszegző függvényünktől **[9 pp. 26-30]**:

1. Univerzális értelmezési tartomány: A preferencia-összesít függvénynek az összes lehetséges bemenetre tudnia kell eredményt szolgáltatni: értelmezési tartománya az összes rendezett n-es, amelynek tagjai az alternatívákon értelmezett rendezések. Ez a korábban már bevezetett teljes választási térrel ekvivalens, azaz:

$$(P, X) \equiv L(X)^N$$

2. Gyenge Pareto elv (P): Ez a feltétel azt mondja ki, hogy ha minden választó egyhangúan jobban preferálja y-t mint x-et, akkor az összesített véleményben is az y előnyben részesül x-el szemben azaz:

$$\forall p \in (P, X)\text{-re, ha } \forall i \in N \text{ esetén ha teljesül } p_i(y) \succ p_i(x) \text{, akkor}$$
$$f(p) = R \in L(X)\text{-ben } yRx\text{-nek teljesülnie kell.}$$

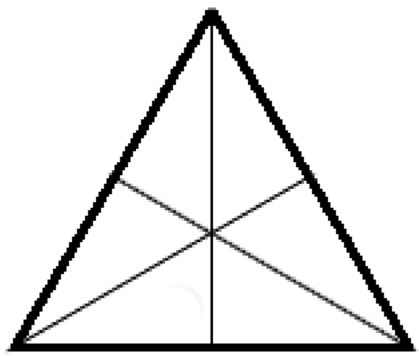
3. Bináris függetlenség (BI): Ez a feltétel azt fejezi ki, hogy az x,y alternatívapáros rendezése a kollektív rendezés szerint csak az egyének x-re és y-ra vonatkozó preferenciáitól függ.

4. Diktátor-mentesség: Ez a kitétel azt a meggyőződésünket formalizálja, hogy az igazságos döntések nem diktatórikusak, azaz nem létezik egy olyan személy, hogy a preferencia-összegzés mindig az ő véleményét adja eredményül, tekintet nélkül a többiek preferenciáira.

$$\nexists i \in N, \text{ hogy } \forall p \in (X,P)\text{-re } f(p) = p_i^{MAX}$$

Tétel (Arrow): Tegyük fel, hogy több mint kettő alternatíva közül választhatnak a szavazók, azaz |X|>2. Ekkor nem létezik olyan szavazatösszegző függvény , amely teljesítené az univerzalitást, a gyenge Pareto elvet, a bináris függetlenséget és a diktátor mentességet úgy, hogy minden lehetséges preferencia prfilhoz olyan relációt rendel, amely rendezés.**[9 pp. 26-30]**

Bizonyítás: Bár számtalan bizonyítása van a tételnek, mégis van közöttük egy olyan ami kitűnik a többitől, hiszen ez egy geometriai szemléletű bizonyítás. Tekintsünk egy szabályos háromszöget. A csúcsai legyenek a jelöltek (A,B,C). Húzzuk be mind a három csúcsból a felezőmerőlegeseket, ezzel a háromszöget 6 részre osztva:

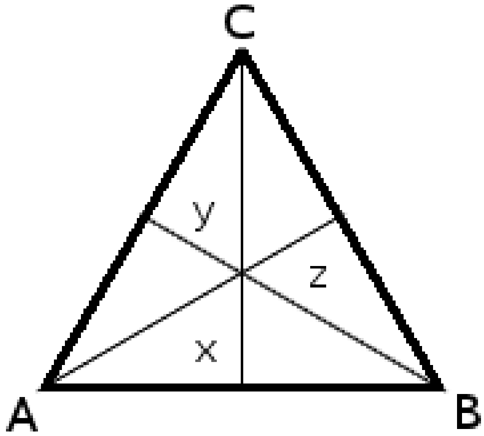


Ez a 6 egyenlő területü rész egyértelműen megfeleltethető a jelöltek közti összes lehetséges permutációnak, azaz a rendezéseknek úgy, hogy ha vesszük egy pontját a háromszögnek, akkor azt megfeleltetjük egy választó szavazatának. A preferencia rendezést a csúcsoktól való távolság határozza meg, úgy, hogy legelöl az a jelölt szerpeljen akivel a megfeletetett csúcs a legközelebb van a választott ponttól és így tovább növekvő sorrendben. Azaz az egyérteműség kevéért a felosztott kis háromszögetből vett pontok éppek az alábbi rendezésnek felenek meg:

$x \in T_1$	A≻B≻C
$x \in T_2$	B≻A≻C
$x \in T_3$	B≻C≻A
$x \in T_4$	C≻B≻A
$x \in T_5$	C≻A≻B
$x \in T_6$	A≻C≻B

Ahol a T_1 az AB oldalra eső bal oldali háromszög, a továbbiak pedig az óramuató járásával megyező irányban haladva.

Legyen a szavazók száma $n \in \mathbb{N}$, n>2. Továbbá tegyük fel, hogy az összes szavazó a T_1, a T_3, vagy a T_5 háromszögeknek megfeleltetett preferencia sorrendekből választott, azaz $x, y, z \in \mathbb{N}$ számok rendre jelöljék, hogy hány szavazat esett a T_1, a T_3, és a T_5 háromszögekbe:



Ekkor nyilván teljesülnie kell, hogy x+y+z=n.

Legyen C azon profilok halmaza, amelyek kielégítik az $x + y + z = n$ egyenletet, továbbá legyen $S \subseteq C$ az a részhalmaz amelyből a szavazatösszegző függvényünk az A≻B≻C rendezést generálja. Ha x=n feltétel teljesülne, akkor a gyenge Pareto tulajdonságból következne, hogy a rangsor a várt A≻B≻C lenne azaz ez a profil biztosan benne lenne az S halmazban. Ha viszont egy profilra teljesül az y+z=n egyenlet, akkor az biztosan nem lesz S eleme, hiszen szintén a gyenge Pareto tulajdonságból fennállna a szavazatösszegző által generált eredményre a C≻B rendezés.

Legyen p az a profil ahol a $x = min\{x \in \mathbb{N} : p \in S\}$. Tehát $f(p_1, ..., p_n) = (A \succ B \succ C)$. Tegyük fel, hogy $p_i \in p$ preferencia sorrendje T_1 beli (mint azt láttuk kell ilyen i-nek léteznie). Konstruáljuk meg a következő p'profil az alábbiak szerint: $p_j^{,} := p_j$ j={1,i-2,i-1,i+1,i+2..,n} és $d_i^{p'} \neq d_i^p$. Belátjuk, hogy ekkor az i. szavazó egy diktátor.

Vegyük először azt az esetet amikor p_i rendezése a T_3 -be esik. Az így keletkezett p^3 profilra ha teljesülne a $f(p_1^3, ..., p_n^3) = (A \succ B \succ C)$, akkor ellentmondásra jutnánk a p profilra nézve az x minim feltevése miatt. A bináris függetlenség miatt $f(p_1^3, ..., p_n^3) = (C \succ A \succ B)$ vagy $p(p_1^{,}, ..., p_n^{,}) = (A \succ C \succ B)$.

Tekintsük most azt az esetet amikor p_i rendezése a T_5 -be esik. Az így keletkezett profil legyen p^5. Ekkor szintén a bináris függetlenségnek köszönhetően a generált végeredményben teljesülni fog B>C rendezés. Az előzőekhez hasonlóan a $f(p_1^5, ..., p_n^5) = (A \succ B \succ C)$, itt sem teljesülhet ezért kizárásos alapon a $f(p_1^5, ..., p_n^5) = (B \succ A \succ C)$ -nak kell teljesülnie. Hasonlóan látható, hogy ha a az eddigi jelölésünket használva a $p_4^{,}$ profilt tekintjük, akkor ott a $f(p_1^4, ..., p_n^4) = (B \succ A \succ C)$ eredményt kell kapnunk a szavazatösszegző függvényünkkel. A bináris függetlenség miatt a B,C relatív viszonyának egyeznie kell a p^3 és a p^4 profilokban. Ezzel kizártuk, a $g(p_1^3, ..., p_n^3) = (A > C > B)$ eshetőséget, hiszen ez ellentmondás lenne.

Tehát tudjuk, hogy $f(p_1, ..., p_n) = (A \succ B \succ C)$-et és $f(p_1^3, ..., p_n^3) = (C \succ A \succ B)$-at. Innen egyszerűen adódik, hogy a többi profilra való elmozdulás estén is a szavazatösszegző végereménye azonos azokkal amit a $T_1, ..., T_6$ háromszögek meghatároznak. Idáig csak a T_1-es típusú szavazó preferenciáit változtattuk, a többiekét nem. Most gondoljuk meg, hogy mi történik akkor, amikor egy szavazó az óramutatóval ellenkezően lépked az egyes területekre.

Ha egy választó az óramutató járásával egyezően lépekd, akkor a páros preferenciái közül mindig egy változik meg. Ha például az 1-es személy $T_6 - ra$ mozdul akkor a rendezésében csak {A,B} viszonya változik.

A válaszott T_1-es típusú személyt hívjuk ezentúl kvázi-diktátornak fogjuk hívni. Jelöljük $p^j\{1 \longrightarrow 6\}$-tal azt, hogy az eredeti prfilban az T_1-es típusú szavazó és néhány másik T_1-es típusuból T_6-os lesz. Ekkor így keletkezik a p^j profil. Ekkor a bináris függetlenség feltételt alkalmazva azt kapjuk hogy $f(p^j 1 \longrightarrow 6) = A \succ C \succ B$. Ebből analóg mód megkapjuk az összes többi $f(p^j 1 \longrightarrow 6)$-ot, így láthatjuk, hogy ezen j=1,3,4,6-ra a szociális rangsor egyezik a kvázidiktátoréval. Látható, hogy az új szavazó megint helyet cserélhet, mondjuk az T_5-re. Az hogy a kvázi diktátor egyben diktátor is az kell csak észrevenni, hogy hagyhatjuk a maradék szavazókat változtatni. **[9 pp. 26-30]**

5.2 Osztrogorszky paradoxon

Az Osztrogorszky paradoxon egy érdekes hiányosságára hívja fel a figyelmet a szavazófüggvény egy osztályával kapcsolatosan, mégpedig arra, hogy nem mindig az nyer egy választást, akivel a szavazók a leginkább egyetértenek. Osztrogorsky paradoxona tulajdonképpen Arrow tételének az egyenes következménye. Nézzünk rá egy példát:

Legyen 5 választónk $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, és 2 jelöltünk $X = \{x, y\}$ és legyen három témakörünk $T = \{A, B, C\}$. Az egyének az alapján döntenek, hogy hány témakörben értenek a jelöltekkel egyet. A leadott szavazataikat többségi szavazási eljárással összegezzük.

	A	B	C	$\sum$
1.	x	y	x	x
2.	x	y	x	x
3.	y	x	x	x
4.	y	y	y	y
5.	y	y	y	y
$\sum$	y	y	x	?

Ebben a példában jól látható, hogy társadalom a témaköröket tekintve leginkább az y-jelölt álláspontjával ért egyet (2:1 arányban), azonban hiába, mert a fenti szavazási rendszerben mégis az x jelölt nyer.

6. A Gibbard-Satterthwaite tétel

A Gibbard-Satterthwaite tétel az Arrow-tétel következménye. Sajnos azt, mondja ki, hogy ha elvárjuk egy szavazatösszegző függvénytől, hogy igazságos legyen, akkor azzal mindenképp számolnunk kell, hogy egyben manipulálható is lesz. Azaz a szavazók egy csoportja ha nem a valós preferenciáit adják le szavazatukat, hanem "taktikázva" azt a számukra kedvezőbb végeredményért cserébe meghazudtolva sikereket érhetnek el.[11 pp. 307-315]

6.1 Szociális választási függvény és kritériumai

Arrow tételénél az egyének szavazatait (a profilt) megpróbáltuk "igazságos" módon egy szociális jóléti függvénnyel egy teljes és tranzitív rendezésbe képezni. Arrow tétele kimondta, hogy ez nem lehetséges. Talán túl magasra tettük a lécet? Nézzük meg, hogy mi lenne akkor, ha a szavazatösszegző függvényünk nem $L(X)$-be képezne, hanem X-be, azaz csak egy győztest adna ki a jelöltek közül. [11]

Definíció: Az $f : (P, X) \to X$ függvényeket szociális választási függvényeknek nevezzük (röviden jelöljök SCF-nek a "Social Chouse Funcion"-ből)

Definíció: Egy $f \in SCF$ nem triviális szociális választási függvény ha $\exists p, q \in (P, X)$ úgy, hogy és $f(p) \neq f(q)$

Nézzük meg, hogy az Arrow tételnél alkalmazott négy megkötés hogy viszonyul az SCF-ekhez:

A teljes értelmezési tartományt és a diktátormentességet ugyan úgy értelmezhetjük ahogy eddig. A gyenge Peatro-elvet is tudjuk értelmezni ezeken a függvényeken és majd látni fogjuk, hogy minden SCF-függvényre teljesül is. A bináris függetlenséget pedig teljesen hagyjuk el, hiszen a függvény értékkészlete nem egy rendezést ad, ezért nem tudunk beszélni x és y viszonyáról benne.

Szeretnénk olyan választási függvényt találni, ami a hétköznapi értelemben véve vett igazságérzetünket is kielégíti. Ezért logikusnak tűnik megvizsgálni a manipulálhatóság fogalmát. Jó lenne ha a választáskor nem fordulhatna elő olyan helyzet, hogy valamely egyénnek, vagy egyének egy csoportjának jobban megérje az eredeti, igazi preferenciarendezését módosítani annak érdekben, hogy számára kedvezőbb végeredmény szülessen, ezzel manipulálva a szavazást. Bodránál láttunk már példát arra, hogy egy jelölt a visszalépésével, hogyan tudja befolyásolni a szavazás kimenetelét, de most nézzünk egy példát arra, mit tudnak a szavazók csinálni hamis preferenciasorrendet leadva voksoláskor:

Defináljuk az $f \in SCF$-et az alábbi táblázattal, ahol X=$\{x, y, z\}$ és $N = \{1, 2\}$. Oldalt láthatjuk az 1-es választó lehetőségeit, a fejlécben pedig a 2-esét. Középen pedig a függvény kiértékelését.

$1\backslash2$	xyz	xzy	yxz	yzx	zxy	zyx
xyz	x	x	x	x	x	x
xzy	x	x	y	z	z	z
yxz	z	z	z	z	z	z
yzx	z	z	z	z	z	z
zxy	y	y	y	y	y	y
zyx	y	y	y	y	y	y

Tegyük fel, hogy a második választónak az igazi preferenciarendezése yzx, de észreveszi, hogy ha megváltoztatja azt yxz-re, akkor abban az esetben, ha az 1-es voksoló xyz-ét választja, akkor sikerült manipulálnia a választást. De tegyük fel, hogy ezt észreveszi az első választó is ezért ő sem az eredeti szavazatát adja le, hanem az xyz-re szavaz, ezzel végérvényesen eldöntve a választást. Ekkor azt mondjuk, hogy f nemcsak manipulálható, de **ellenlépéssel is manipulálható**.

Vegyük észre, hogy ha a táblázat második oszlopa megegyezne az elsővel, akkor nem lenne manipulálható a választás, de diktatórikus lenne, hiszen mindig az első választó akarata érvényesülne. Ha pedig csupa x, vagy y szerepelne a kiértékelésekben, akkor a választás triviális lenne.

6.2 A Gibbard-Satterthwaite-féle lehetetlenségi tétel

A kérdést, hogy létezik-e olyan SCF függvény, amely kielégíti az "igazságosság felételeit Gibbard-Satterthwaite tétele adja meg, ami tulajdonképpen Arrow-tételéből következik (Allan Gibbard and Mark Allen Satterthwaite, 1970). A fejezetben rendezés alatt végig erős rendezést értünk.[12]

A tétel kimondása előtt nézzünk meg két lemmát. Az első lemma azt mondja ki, hogy egy nem manipulálható SCF függvény irreleváns azokra a preferenciaváltoztatásokra, amiket úgy kapunk, hogy a győztessel páronként vizsgálva a többi jelöltet nem történik változás

Lemma (monotonitás): Tegyük fel, hogy $f \in SCF$ nem manipulálható függvény, $p \in (P, X)$ és $f(p) = a$. Ekkor minden $q \in (P, S)$ esetén $f(q) = a$ teljesül, ha fenn áll $\forall x \in X$-re és $i \in N$-re az alábbi összefüggés[12]:

$$q_i(a) \succeq q_i(x) \text{ ha } p_i(a) \succeq p_i(x)$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a p és q profilban az i-edik indivíduumok ugyan úgy szavaznak az első szavazót kivéve, azaz $p_i = q_i$, ha $i > 1$. Tegyük fel továbbá, hogy $f(p_1, q_1) = b$. A mainpulálatlanság feltevése miatt $p_1(a) \succeq p_1(b)$ és ebből következik, hogy $q_1(a) \succeq q_1(b)$. A nem manipulhatóságból következik még, hogy $q_1(b) \succeq q_1(a)$. Mivel erős rendezésről beszélünk, ebből következik, hogy $a = b$. Innen már teljes indukcióval ($n = 2....|N|$) adódik az állítás.■

A második lemma azt mondja, ki hogy a (gyenge) Pareto-elv teljesül minden SCF-re:

Lemma: Tegyük fel, hogy $f \in SCF$ nem manipulálható. Ekkor $\forall p \in (P, X) - re$, ahol teljesül, $\forall i \in N$-re, hogy xR_iy $x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow f(p) \neq y$.[12]

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy egy a feltételeket teljesítő $p \in (P, X)$-re, teljesül $f(p) = y$ és $f(q) = x$, $q \in (P, X)$. Tekintsük a $p^{,} \in (P, X)$ preferencia profilt, ahol $\forall i \in N$-re:

$$p^{,}_i(x) > p^{,}_i(y) > p^{,}_i(z) \text{ és} p^{,}_i(x) = p_i(x) \forall z \in X - \{x, y\} \text{ esetén}$$

Ekkor $y = f(p) = f(p^{'})$ és $x = f(q) = f(p^{,})$ ami ellentmondás, hisz $f(p) \neq b$■

Tétel (Gibbard-Satterthwaite): Minden olyan $f \in SCF$ amiben legalább 3 jelölt van ($|X| \geq 3$) teljesíti az univerzalitást és a manipulálhatatlanságot, az szükségszerűen diktatórikus.[12]

Megjegyzés: Mivel az eredeti bizonyítás részletes tárgyalására nincs mód, ebben a dolgozatban csak az $|N| = 2$ esetre bizonyítjuk a tételt. Nézzünk meg egy példát, hogy lássuk a gondolatmenetet ami mentén a bizonyítás halad:

Példa[12]**:** Legyen két választó N={1,2} és három jelölt X={a,b,c}. Hogy lássuk a tétel bizonyítását először keressünk egy diktátort. Ehhez csináljunk egy olyan preferenciaprofil ($p \in (P, X)$), ahol mindkét indivíduum az 'a' és a 'b' jelöltet c elé helyezi, de más-más a legerősebb elem a rendezésben.

$$p = \begin{matrix} a & b \\ b & a \\ c & c \end{matrix} \qquad p' = \begin{matrix} a & b \\ b & c \\ c & a \end{matrix}$$

Ekkor a Pareto-elv teljesülése miatt (második lemma) egészen biztos, hogy nem nyerhet a c jelölt.

Tekintsük azt az esetet amikor p profilt úgy módosítjuk, hogy a második indivíduum az a jelöltet az utolsó helyre rangsorolja ($p' \in (P, X)$). A győztes ilyenkor szintén a lesz:

A Pareto-elv miatt ugyanis f(p')= a vagy f(p')= b, de utóbbi nem lehet a nem manipulhatóság miatt.

Ekkor adott egy preferencia profil ahol az első individum rendezésében a legerősebb "a" másodikban a leggyengébb elem. A monotonitás lemmájából adódóan, minden profilban ahol ez a feltétel teljesül ott "a" lesz a győztes. Tehát az első választó itt egy diktátor.

Most bizonyítsuk be, hogy minden $N = |2|$ és tetszőleges alternatíva esetén létezik egy diktátor.

Bizonyítás:

Legyen $|N| = 2$, azaz $N = \{1, 2\}$, $p \in (P, X) = L(X)^2$ és $a, b \in X$, $a \neq b$ úgy hogy

$$p_1(a) \succeq p_1(b) \succeq p_1(x) \text{ és } p_2(b) \succeq p_2(a) \succeq p_2(x)$$

minden $x \in X - \{a, b\}$-ra. Ekkor $f(p) = f(p_{1,}p_2) = a$ vagy $f(p) = b$ a gyenge Pareto-elv teljesülése révén.

Tegyük fel, hogy $f(p) = a$.

Most legyen $q_2 \in L(X)$ olyan, hogy:

$$q_2(b) \succ q_2(x) \succ q_2(a)$$

minden $x \in X - \{a, b\}$-ra. Ekkor $f(p_1, q_2) = a$ vagy $f(p_1, q_2) = b$ szintén a Paretro-elv miatt, de utóbbit kizárhatjuk a manipulálhatatlanság miatt $f(p_1, q_2) \neq b$.

A monotonitásból (első lemma) most következik, hogy $f(p^{,}) = a\, \forall p \in L(X)^2$ esetén, ahol az "a" a legerősebb elem a $p_1^{,}$ rendezésében.

Nyilván az (a, b) helyett minden párra az X-ből így viselkedik a rendszer ezzel két $X_i \in X$ $i = 1, 2$ részhalmazt kapva, ahol X_i tartalmazza azokat az x alternatívákat ahol az f mindig x-et ad eredményül ha az i. indivíduum x-et teszi meg rendezése legersőebb elemének.

Legyen $A_3 = A - (A_1 \cup A_2)$. Nyílvánvalóan $|A| \leq 1$. Mivel $|X| \geq 3$, vagy az A_1vagy az A_2 üres halmaz. Tegyük fel, hogy $a \in A_1$, ekkor $A_3 = \varnothing$. Ebből pedig következik, hogy $A_3 = \varnothing$, mert: tegyük fel, hogy $c \in A_3$és legyen $r \in L(X)^2$ úgy hogy

$$r_1(c) > r_1(a) > r_1(x) \text{ és } r_2(a) > r_2(c) > r_2(x)$$

minden $x \in X - \{a, c\}$-ra. Az előzmények miatt, $c \in A_1$ vagy $a \in A_2$ ami ellentmodás. Ezért $A_1 = A$ és $i = 1$ egy diktátor.

Ha a feltevés pedig $a \in A_2$ lett volna, akkor i=2 lenne a diktátor ■[12]

6.3 Szavazás napirend manipulációval

A manipulálhatóságnak vannak az előzőektől teljesen különböző formái is. Ilyen például a napirdend manipuláció. Tegyük fel, egy csoportnak (mondjuk a parlament tagjainak) több döntést is meg kell hozniuk, azokról egy adott sorrendben szavazva és az állítások között legyen logikai kapcsolat is. Tegyük fel továbbá, hogy a pártok racionálisan döntenek, azaz nem szavaznak a logikai feltételeknek ellentmondva. Ekkor ha valamelyik párt kezében van a lehetőség a szavazás sorrendjének döntéséről, az komoly előnyhöz juttathatja [6]. Tekintsük a következő példát [6]:

Legyen három párt, akik döntenek a kérdésekről N={1,2,3} és döntsenek öt kérdésről X=$\{x_1, x_2, x_3, y, x_1 \bigwedge x_2 \bigwedge x_3 \longrightarrow y\}$. Egy konkrét helyezetet tekíntve legyenek például a kérdések:

x_1:	több pénzt kell költeni az okatásra
x_2:	több pénzt kell költeni az egészségüre
x_3:	több pénzt kell elkülőnítani a hadi kiadásokra
y:	adóemelés szükséges
$x_1 \bigwedge x_2 \bigwedge x_3 \longrightarrow y$:	ha x_1, x_2, x_3 megszavazott, akkor adóemelés kell

A pártok álláspontját kérdésekben a következő táblázat mutatja:

	x_1	x_2	x_3	y	$x_1 \bigwedge x_2 \bigwedge x_3 \longrightarrow y$
1 párt	igen	igen	nem	nem	igen
2 párt	igen	nem	igen	nem	igen
3 párt	nem	igen	igen	nem	igen

Azaz mindhárom párt pontosan 2 területre szánna több pénzt és adót egyikük sem akar emelni, de abban mind egyetértenek, hogy ha mindhárom területre plusz forrást tennének elérhetővé, akkor adót is kéne emelni. Tegyük fel, hogy a 2. párt - vagy egy vele egy állásponton lévő személy - döntheti el, hogy milyen sorrendben szavazzanak a kérdésekről, és valahonnan megsejti, hogy a többi párt hogyan fog szavazni (például az előzetesen tett nyilatkozatokból) az adott kérdésekben. Ekkor ennek a személynek lehetősége nyílik a szavazás manipulálásra, az alábbi szavazási sorrend felállításával:

$$1\text{: } y; \quad 2\text{: } x_1 \bigwedge x_2 \bigwedge x_3 \longrightarrow y; \quad 3\text{: } x_1; \quad 4\text{: } x_3; \quad 5\text{: } x_2$$

Az első négy témában mindenki az előzetes terveknek megfelelően voksolt (a szavazatokat sima többségi eljárással összegeztük és mindhárom pártnak ugyanannyi képviselője szavazott):

$$\text{y: nem}; \quad x_1 \bigwedge x_2 \bigwedge x_3 \longrightarrow y\text{: igen} \quad x_1\text{:igen}; \quad x_3 \text{ :igen};$$

Ekkor a pártok az utolsó kérdésre - x_2-re - kénytelenek a saját elképeléseiknek ellentétesen szavazni, hiszen különben el kellene ismerniük, hogy adóemelést akartak, és inkonzisztens lenne a szavazásuk. Tehát a 2. párt akarata teljesült a napirend módosításával.[6]

7. Sen paradoxon

A Sen-paradoxont (más néven a liberális paradoxon) 1970-ben Amartya Sen (1933-) indiai közgazdász fogalmazta meg, az Arrow-tételhez kapcsolódóan és később ennek köszönhetően is megkapta a közgazdasági Nobel-díjat. Sen azon helyzetek vizsgálatával foglalkozott, amikor a személyeknek vannak bizonyos értelembe vett szabaságjogaik és kell hozniuk egy kollektív döntést úgy, hogy az egyhangúsági elv teljesüljön, azaz, ha a közösség minden tagja egyet ért egy döntésben, akkor a kollektív döntésnek is követnie kell ezt. Sen paradoxona arról szól, hogy vannak olyan eshetőségek, amikor ez az egyhangúsági elv nem egyeztethető össze a személyes, vagy kollektív szabadságjogokkal. Tekintsünk híres példát a paradoxonra[12]:

Nézzünk egy két fős közösséget, akik arról akarnak döntést hozni, hogy elolvassák-e a "Lady Chatterley szeretője" című könyvet. A közösség egyik tagja legyen Lewd (L) és a másik pedig Prude (P).

l: Lewd olvassa a könyvet
p: p olvassa a könyvet
$l \longrightarrow p$: ha Lewd elolvassa a könyvet akkor Prude is el akarja olvasni

L szeretné a könyvet olvasni, de P-nek a könyv az erkölcsei ellen való, ezért ő visszakozna ettől. P viszont fél, hogy hogy ha L elolvassa a könyvet akkor az ha megrontja L erkölcseit akkor nem fog tudni rajta segíteni, ha nem tudja, hogy mi annak a tartalma, ezért úgy dönt, hogy ha L olvassa a könyvet, akkor ő is fogja. És mivel L úgy gondolja, hogy a könyv hasznos, ezért szeretné ha P is elolvasná. Tehát mindketten egyetértenek abban, hogy a döntés arról, hogy elolvassák-e a könyvet az ő egyéni, szuverén döntésük, de abban is egyetértenek, hogy ha L elolvassa a könyvet, akkor ez P-nek is kötelessége lenne.

	l	p	$l \longrightarrow p$
Lewd döntése	igen	(igen)	igen
Prude döntése	(nem)	nem	igen
Kollektív döntés:	igen	nem	igen

Jól leolvasható a fenti táblázatból az ellentmondás, miszerint az egyéni döntések szabadságát figyelembe véve meghnozni a kollektív döntést végül ellentétbe került azzal, amit szintén mindketten helyesnek találtak volna ($l \longrightarrow p$).

Hivatkozások

[1] Donald G. Saari: DECISIONS AND ELECTIONS Explaining the Unexpected, University of California, Irvine (2001) : 21-27, 42, 56-59

[2] Wulf Gaertner: A Primer in Social Choice Theory Revised Edition (2009): 19-20, 37-43, 57-59, 75-80

[3] K. J. Arrow: Arrow-Social Choice and Individual Values, Yale University (1963)

[4] K. J. Arrow, A. K. Sen, Kotaro Suzumura: Handbook of Social Choice and Welfare.VOL1 (2002)

[5] ALAN D. TAYLOR: Social Choice and the Mathematics of Manipulation, Union College (2005)

[6] Csáji Balázs Csanád, Rédei Miklós: A racionális demokratikus véleményösszegzés korlátairól (2011)

[7] Gabriella Pigozzi: Two aggregation paradoxes in social decision making: the Ostrogorski paradox and the discursive dilemma

[8] Csáji Balázs Csanád: A VÉLEMÉNYÖSSZEGZÉS PROBLÉMÁI, A racionális kollektív döntéshozás korlátairól szakdolgozat (2006).

[9] Kiss Csaba: Döntési Módszerek, Diplomamunka (2010).

[10] Ismeretlen Szerző: Társadalmi döntések elmélete.

[11] ALLAN M. FELDMAN and ROBERTO SERRANO: WELFARE ECONOMICS AND SOCIAL CHOICE THEORY, 2ND EDITION, Brown University (2006)