RELÁCIÓRENDSZEREKBŐL ÁLLÓ IDEÁLOK REPREZENTÁCIÓS PROBLÉMÁIRÓL

Szakdolgozat

Írta: Kovács József Viktor

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: Dr. Sági Gábor

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2012

Roland Fraïssé emlékének.

Előszó

Szakdolgozatom témájául a véges relációrendszerekből álló ideálok reprezentációs problémáját választottam. Az ideálok reprezentálhatósága a modellelmélet egy ma is vizsgált fejezete, melynek alapjai Roland Fraïssé 1954-ben publikált munkájában gyökereznek. E témakör ma is számos érdekes és megoldatlan problémát tartalmaz, ezek közül néhányat a dolgozatban is bemutatunk. A szakdolgozat fő célkitűzése Roland Fraïssé eredményének ismertetése, néhány konstrukció és reprezentációs módszer bemutatása, és egy egészen friss, a Christian Delhommé, Maurice Pouzet, Sági Gábor és Norbert Sauer szerzők által 2009-ben publikált eredmény új bizonyításának kidolgozása.

A modellelmélet a matematikai logika és a modern algebra egyfajta fúziója, ezért tanulmányozásához mindenképp szükséges a logika fogalmainak és alapvető tételeinek ismerete. Mind a matematikai logika, mind a modellelmélet alapjainak tanulmányozása során nagy segítségemre volt és nagy hatást gyakorolt rám Csirmaz László nagyszerű *Matematikai Logika* jegyzete (lásd [1]), Wilfrid Hodges kíváló *Model Theory* című műve (lásd [4]) és Sági Gábor rengeteg érdekes problémát és gondolatot bemutató *Válogatott Fejezetek a Modellelméletből és Határterületeiből* című jegyzete (lásd [6]). A matematikai logika, a halmazelmélet és a modellelmélet világát Sági Gábor, az ELTE Természettudományi Karán tartott *Matematika Alapjai* című kurzusa és a *Modellelmélet* című előadása által szerettem meg, amit ezúton is köszönök Neki.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani Édesanyámnak és Nővéremnek kitartásukért és a tőlük kapott rengeteg segítségért. Bízalmuk és támogatásuk a szakdolgozatom elkészítését is nagy mértékben segítette. Köszönet illeti Témavezetőmet, Sági Gábort is, akinek fáradhatatlan munkája és töretlen türelme nélkül e dolgozat nem készülhetett volna el. Nagyon sok bíztatást kaptam tőle, és segítségével rengeteget tanulhattam a matematikáról és a matematikán kívüli világ rejtelmeiről is. Végül, de nem utolsó sorban, köszönetet szeretnék mondani Barátaimnak is folyamatos bíztatásukért és azokért a gondolatokért, melyek többször is nagy hatást gyakoroltak rám.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezető

Ebben a bevezető fejezetben két célt tűztünk ki. Először megnézzük, hogy mely kérdés vezethet a relációrendszerekből álló ideálok vizsgálatához. Megmutatjuk, hogy véges gráfok egy adott osztálya miként reprezentálható egy gráf segítségével. Ezt követően a modellelmélet általunk leggyakrabban használt fogalmait ismertetjük. Ezeket a fogalmakat csak a relációrendszerek körében részletezzük, hiszen a dolgozatban mindvégig ilyen struktúrákkal fogunk foglalkozni. Természetesen itt nem törekedhetünk a teljességre, célunk inkább a később sorra kerülő fejezetek tanulmányozásához használható bevezető készítése.

1.1. Gráfosztályok reprezentációja

Tegyük fel, hogy adott véges gráfok egy nemüres K osztálya (gráf alatt nemüres csúcshalmazzal rendelkező, egyszerű, irányítatlan gráfot értünk). Vajon mikor mondhatjuk, hogy egy G gráf a K gráfosztályt reprezentálja? A mi megközelítésünk a következő természetes módon kínálkozó gondolaton alapszik. A G gráf **reprezentálja** a véges gráfokból álló K gráfosztályt, ha G-nek pontosan olyan véges részgráfjai vannak, melyek izomorfak valamely K-belivel (részgráf alatt feszített részgráfot értünk). Ez szemléletesen tényleg természetes megközelítés, hiszen ha egy ilyen véges gráfokból álló K gráfosztály reprezentálható a G gráffal, akkor a G gráf izomorfia erejéig minden információt tárol a K osztályról. Ezért mi elfogadjuk ezt a megközelítést, és arra keressük a választ, hogy mikor reprezentálható egy ilyen gráfosztály. Azonnal látható, hogy a reprezentálhatóság kérdésénél nem lényeges az az információ, hogy egy adott gráftípusból hány példány található meg a K osztályban, csak az számít, hogy az adott gráf izomorfia erejéig szerepel-e benne. Ezért nem érdemes K minden elemét tárolnunk, csak a benne szereplő elemek izomorfiatípusait. Mivel megszámlálhatóan sok véges gráftípus létezik, így minden ilyen esetben K egy megszámlálható halmazzal azonosítható: $\mathsf{Is}[K] = \{\mathsf{Is}(G) \mid G \in K\}$.

Nyilván nem reprezentálható minden gráfosztály. Például, ha K az összes összefüggő véges gráfból áll, akkor a négy hosszú C_4 kör is eleme. Ha létezne egy K-t reprezentáló G gráf, akkor C_4 izomorfia erejéig megjelenne G-ben, így C_4 bármely részgráfja is. Ekkor viszont C_4 bármely részgráfja eleme lenne K-nak, amiből viszont az következne, hogy a C_4 kör minden részgráfja összefüggő. Ez azonban nem igaz. Általános esetben is hasonló mondható. Ahhoz, hogy egy K gráfosztály reprezentálható legyen szükséges, hogy bármely elemének a részgráfjait is tartalmazza (izomorfia erejéig). Ez az úgynevezett **leszálló tulajdonság**. Vegyük észre még azt is, hogy ha G_1 és G_2 véges gráfok elemei K-nak, akkor izomorfia erejéig megjelennek a K-t reprezentáló G gráfban is. Emiatt G-nek tartalmaznia kell egy olyan G' véges részgráfot, amelyben izomorfia erejéig megtalható G_1 és G_2 is. Ha viszont G reprezentálja K-t, akkor K tartalmaz egy G'-vel izomorf gráfot is. Tehát egy gráfosztály reprezentálhatóságához szükséges az a feltevés is, hogy bármely két K-beli G_1 és G_2 gráftípusnak legyen K-ban **közös felső korlát**ja, azaz olyan véges gráftípus, amelyben izomorfia erejéig G_1 és G_2 is megtalálható.

Később láthatjuk, hogy ez a két feltevés más struktúraosztályok reprezentálhatóságánál sem hagyható el. Ezért csak olyan osztályokat fogunk vizsgálni, melyek rendelkeznek ezzel a két tulajdonsággal. Az ilyen osztályokat (pontosabban a bennük lévő elemek izomorfiatípusaiból képzett halmazokat) ideáloknak fogjuk nevezni. Megmutatjuk, hogy a reprezentálhatóság kérdését más típusú relációrendszerek esetén is elég az ideálok körében vizsgálni. Ehhez szükségünk lesz néhány modellelméleti fogalomra.

1.2. Relációrendszerek

Bevezető fejezetünket a relációrendszerek modellelméleti hátterének rövid összefoglalásával folytatjuk. Mint említettük, itt nem törekszünk a teljességre, feltételezzük, hogy a kedves Olvasó már jártas a matematikai logika és a halmazelmélet alapjaiban. Csirmaz L. [1] jegyzetének segítségével kitűnő képet nyerhetünk a matematikai logika fogalmairól, W. Hodges [4] könyve és Sági G. [6] jegyzete által megismerkedhetünk a modellelmélet izgalmas világával, a halmazelmélet rejtelmeivel pedig Hajnal András és Hamburger Péter híres [3] könyvében találkozhatunk. A dolgozat során leginkább ezeket a monográfiákat vesszük alapul, de a szükséges modellelméleti fogalmakat relációrendszereken röviden értelmezzük.

Már a legelején érdemes megemlítenünk néhány jelölést: $\dot{\cup}$ jelöli majd a diszjunkt unió-képzést és $\mathscr{P}$ a hatványhalmaz-operációt. Ha adott egy $f : X \to Y$ függvény és $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, akkor az f függvény A halmazra vett megszorítását $f_{|A}$ jelöli, az A halmaz képét $f[A]$, a B halmaz ősképét pedig $f^{-1}[B]$. Az A és a B halmazok különbségét $A - B$ jelöli. $\mathbb{N}$ a természetes számok halmazát (beleértve a 0-t is), $\mathbb{N}^+$ pedig a pozitív egész számok halmazát jelöli majd. $\mathbb{N}$-et azonosíthatjuk a legkisebb végtelen számossággal, $\aleph_0$-al, a kontinuum számosságot pedig $\mathfrak{c}$-vel jelöljük. Végül a $\doteq$ jelölést akkor fogjuk használni, ha két matematikai objektum definíció szerint egyenlő (például $\mathscr{P}(X) \doteq \{A \mid A \subseteq X\}$).

Egy gráf két paraméterrel jellemezhető: nemüres csúcshalmazával és élhalmazával. Élhalmazára úgy is tekinthetünk, mint egy, a csúcshalmazán értelmezett kétváltozós relációra. A gráf két csúcsa között pontosan akkor vezet él, ha a két csúcs relációban áll egymással (így ez a reláció a mi esetünkben irreflexív és szimmetrikus). A relációrendszerek a gráfok általánosításai. Minden relációrendszer rendelkezik egy nemüres alaphalmazzal (a gráfok esetében ez a csúcshalmaz), és alaphalmazán adottak bizonyos relációk (a gráfok esetében egy reláció van, ami a gráf élhalmaza által indukált kétváltozós reláció). Érdemes az alaphalmazon megadott relációkat megjelölni egy-egy reláció-szimbólummal. Ez lehetővé teszi számunkra, hogy egy relációrendszert - mint matematikai struktúrát - tanulmányozzunk a matematikai logika és a modellelmélet eszközeivel is.

Relációjelkészlet alatt egy $L = (\mathbf{R}, \mu)$ párt értünk, ahol $\mathbf{R}$ egy **relációjelek**ből álló halmaz, a $\mu : \mathbf{R} \to \mathbb{N}^+$ függvény pedig az **aritásfüggény**, amely az egyes relációjelek aritását adja meg. Úgy képzeljük, hogy egy $\mathsf{R} \in \mathbf{R}$ relációjel egy $\mu(\mathsf{R}) = \mu_\mathsf{R}$-változós relációt jelöl. Egy L **relációjelkészlet** $|L|$ **számossága** pedig a benne lévő relációjelek száma (azaz az $\mathbf{R}$ halmaz számossága). Ha most veszünk egy nemüres A halmazt, az ún. **alaphalmaz**t, akkor A felett interpretálhatjuk az L nyelv jeleit, így kapunk egy $\mathfrak{A} = (A, \mathbf{R}^\mathfrak{A})$ L**-típusú relációrendszert**, vagy röviden L**-struktúrát**. Itt $\mathbf{R}^\mathfrak{A}$ egy indexelt halmaz, nevezetesen $\mathbf{R}^\mathfrak{A} = (\mathsf{R}^\mathfrak{A} \mid \mathsf{R} \in \mathbf{R})$, ami az L nyelv jeleinek A feletti interpretáltjaiból áll. Tehát $\mathbf{R}^\mathfrak{A}$ az A halmazon értelmezett relációk egy rendszere, és bármely $\mathsf{R} \in \mathbf{R}$ esetén $\mathsf{R}^\mathfrak{A}$ egy μ_R-változós reláció az A alaphalmazon, formálisan $\mathsf{R}^\mathfrak{A} \subseteq A^{\mu_\mathsf{R}}$. A struktúrákat általában nagy gót betűkkel ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ stb.), alaphalmazaikat pedig a nekik megfelelő nagy latin betűvel (A, B, C, D stb.) jelöljük. Jegyezzük meg, hogy a struktúra elnevezést mi relációrendszerek szinonímájaként használjuk majd. Általános elsőrendű nyelvek esetén a konstansjeleket és a függvényjeleket is interpretálni kell. Azonban nekünk a relációjelek mellett csak a konstansjelekre lesz szükségünk, és csupán egy relációrendszer elemeinek megjelölése céljából. Ezért a matematikai struktúrák általános értelmezésére nem térünk ki, amikor konstansjeleket is használunk, akkor azok interpretációját is részletezzük.

Tekintsünk egy példát, nézzük meg, hogy a gráfok miként állnak elő relációrendszerként. A **gráfok nyelve** egyetlen E kétváltozós relációjelből áll, és ezt a nyelvtípust L_G jelöli majd. L_G egy **egyszerű bináris jelkészlet**: egyszerű, mert egyetlen jelet tartalmaz, és bináris, mert egyetlen relációjele kétváltozós. Természetesen nem minden L_G-struktúra gráf, de a gráfok leírására ez a nyelv használatos. Formálisan egy $G = (V(G), E(G)) = (V, E)$ L_G-struktúra **gráf** (itt $\mathfrak{A} = G$, $A = V$ és $\mathsf{E}^\mathfrak{A} = E$), ha rajta az E reláció irreflexív és szimmetrikus, ami a matematikai logika eszközeivel így írható:

$$G \models \forall x \, \neg \mathsf{E}(x, x) \quad \text{és} \quad G \models \forall x \forall y \, (\mathsf{E}(x, y) \to \mathsf{E}(y, x)).$$

Úgy képzeljük, hogy az alaphalmaz két $u, v \in V$ pontját pontosan akkor köti össze él (azaz $uv \in E$ pontosan akkor teljesül), ha $G \models \mathsf{E}(x, y)$ $[x = u, y = v]$, azaz ha

G-ben igaz az $\mathsf{E}(x,y)$ formula az $x = u$, illetve $y = v$ kiértékelések mellett, ami pedig pontosan akkor teljesül, ha $(u,v) \in \mathsf{E}^G$. Ez az egyszerű példa is mutatja, hogy a logikában bevezetett szigorú jelölésrendszert célszerű kevésbé szigorú módon alkalmazni. Például azt is írhatjuk, hogy $G \models \mathsf{E}(u,v)$ (nem megfeledkezve arról, hogy u és v nem egy-egy változójelet jelöl, hanem egy-egy változójel kiértékelését G-ben, azaz G egy-egy csúcsát). Persze relációrendszerekre nem csak a gráfok nyújthanak példát, hanem sok más egyéb struktúra is, például a hipergráfok, a részbenrendezett halmazok, a metrikus terek és sok egyébb érdekes struktúra is. A metrikus terekkel a következő fejezetben fogunk foglalkozni.

Rögzítsünk egy L nyelvet (relációjelkészletet), és jelöljük az L-struktúrák osztályát S_L-el. Mint ahogy az előző példa is mutatja, egy L nyelven felírt elsőrendű $\varphi \in \mathsf{Form}(L)$ formula igazsága vizsgálható egy $\mathfrak{A} \in S_L$ relációrendszerben. Ha φ **igaz $\mathfrak{A}$-ban**, azt $\mathfrak{A} \models \varphi$ jelöli. Egy $\mathfrak{A}$ struktúrában igaz mondatok (zárt formulák) halmazát $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ jelöli, ez $\mathfrak{A}$ **teljes elmélete**. Ha adott egy $T \subseteq \mathsf{Form}(L)$ **elmélet**, megnézhetjük, hogy $\mathfrak{A}$ modellje-e T-nek, azaz teljesül-e bármely $\varphi \in T$ formulára, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi$. Ha igen, akkor azt írjuk, hogy $\mathfrak{A} \models T$, és azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ **modellje T-nek**. Egyébként egy T elmélet modelljeinek osztályát $\mathsf{Mod}(T)$ jelöli, és a T **elmélet konzisztens**, ha létezik modellje, azaz ha $\mathsf{Mod}(T) \neq \emptyset$. Ismertnek tekintjük a következő állítást, melyet bátran nevezhetünk az elsőrendű logika alaptételének (ennek bizonyítása megtalálható [1]-ben, [4]-ben és [6]-ban is).

1.2.1. Tétel (Kompaktsági tétel). *Egy elsőrendű elméletnek pontosan akkor van modellje, ha bármely véges része konzisztens.*

Ha már adott egy $\mathfrak{A} \in S_L$ relációrendszer, akkor két egyszerű módszerrel készíthetünk újabbakat is. Ezek közül az első a részstruktúra-képzés. Ha vesszük az $\mathfrak{A}$ relációrendszer A alaphalmazának egy nemüres $X \subseteq A$ részét, megkaphatjuk az $\mathfrak{A}$ relációrendszer X **által generált részstruktúráját**. Ennek alaphalmaza X, relációi pedig $\mathfrak{A}$ relációinak X-re vett megszorításai:

$$\mathfrak{A}_{|X} \doteq (X, \mathbf{R}^{\mathfrak{A}_{|X}}),$$

ahol $\mathbf{R}^{\mathfrak{A}_{|X}} = (\mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \cap X^{\mu_{\mathsf{R}}} \mid \mathsf{R} \in \mathbf{R})$. Eszerint egy $\mathfrak{B}$ **relációrendszer részstruktúrája $\mathfrak{A}$-nak**, ha $B \subseteq A$ és $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_{|B}$. Ezt $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ jelöli majd. Ezen a ponton látható a különbség a relációrendszerek és az általános matematikai struktúrák között. Egy relációrendszer bármely nemüres X részhalmazához van olyan részstruktúra, amelynek alaphalmaza X, míg ez általános matematikai struktúrák esetében nem feltétlenül teljesül (gondoljunk például a csoportokra). Jegyezzük meg azt is, hogy a részstruktúra-fogalom gráfok esetében éppen a feszített részgráf fogalmával esik egybe, ezért is állapodtunk meg abban, hogy részgráf alatt feszített részgráfot értünk.

A struktúra-képzés másik egyszerű módszere a nyelv szűkítése, illetve bővítése által értelmezhető. Adott L nyelv esetén $L' \subseteq L$ alatt azt értjük, hogy az $L' = (\mathbf{R}', \mu')$ relációjelkészlet az L **nyelv reduktuma**, illetve L az L' **nyelv kiterjesztése**, azaz $\mathbf{R}' \subseteq \mathbf{R}$ és $\mu' = \mu_{|\mathbf{R}'}$. Ezek alapján, ha $L' \subseteq L$, akkor vehetjük egy $\mathfrak{A} \in S_L$ **struktúra L'-reduktumát**. Ez az az $\mathfrak{A}_{|L'}$ L'-típusú relációrendszer, melynek alaphalmaza A, és melyben egy $\mathsf{R} \in \mathbf{R}'$ relációjel interpretáltja éppen $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}}$. Tehát $\mathfrak{A}$-ból úgy kapjuk $\mathfrak{A}_{|L'}$-t, hogy $\mathfrak{A}$-ból elfelejtjük az $L - L'$ jeleihez tartozó relációkat. Speciálisan, ha L' véges, akkor **véges reduktum**okról beszélünk. Ha pedig adott egy $\mathfrak{A}' \in S_{L'}$ struktúra, akkor az kiterjeszthető L típusú relációrendszerré úgy, hogy az $L - L'$ relációjeleit interpretáljuk az $\mathfrak{A}'$ struktúra alaphalmaza felett.

A dolgozatban központi szerephez jutnak a beágyazások, így érdemes róluk is szót ejtenünk. Legyen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in S_L$ két relációrendszer és $f : A \to B$ egy leképezés. Az f függvény **$\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{B}$-be ható beágyazás**, ha injektív, és ha az L relációjelkészlet tetszőleges R relációjelére és tetszőleges A-beli $(a_1, \ldots, a_{\mu_{\mathsf{R}}})$ sorozatra igaz, hogy

$$(f(a_1), \ldots, f(a_{\mu_{\mathsf{R}}})) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{B}} \quad \text{pontosan akkor teljesül, ha} \quad (a_1, \ldots, a_{\mu_{\mathsf{R}}}) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}}.$$

Ha f egy beágyazás $\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{B}$-be, azt $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ jelöli. Egy $\mathfrak{A}$ **struktúra beágyazható $\mathfrak{B}$-be**, ha létezik $\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{B}$-be ható beágyazás. Ezt a következőképpen fogjuk jelölni: $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$. Az így kapott $\leqslant$ reláció egy előrendezés az S_L osztály elemein, azaz reflexív: $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{A}$, és tranzitív: $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{C}$ esetén $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{C}$ is teljesül. Valóban, az A halmaz id_A identikus függvénye egy $\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{A}$-ba ható beágyazás (így $\leqslant$ reflexív), továbbá beágyazások megfelelő kompozíciója is beágyazás, azaz ha $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ és $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ beágyazások, akkor $f \circ g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ is beágyazás (tehát $\leqslant$ tranzitív). Egy $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ szürjektív beágyazást **izomorfizmus**nak, és egy $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ izomorfizmust **automorfizmus**nak nevezünk. **Két struktúra izomorf**, ha van közöttük izomorfizmus. Ilyenkor $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ **izomorf struktúrák**, melyet $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ jelöl. Könnyen meggondolható, hogy egy $f : A \to B$ függvény pontosan akkor beágyazás $\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{B}$-be, ha izomorfizmus $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}_{|f[A]}$ között.

Szemléletesen egy struktúra pontosan akkor ágyazható be egy másik struktúrába, ha izomorfia erejéig megjelenik benne. Ezzel visszakaptuk a gráfok esetében gyakran alkalmazott szóhasználatot. Mint ahogyan akkor is említettük, a reprezentálhatóság szempontjából nem lényeges, hogy két izomorf relációrendszer közül melyikkel dolgozunk, ezért érdemes izomorfiatípusokat használni. Ahogyan $\leqslant$ előrendezés az S_L osztályon, úgy $\cong$ egy ekvivalenciareláció rajta. Természetesen S_L nem halmaz, ezért nem faktorizálhatunk a $\cong$ relációval. Viszont a transzfinit rekurzió segítségével belátható, hogy az L-struktúrak osztályán létezik olyan $\mathsf{Is} : S_L \to S_L$ operáció, amelyre igazak az alábbiak:

(1) $\mathfrak{A} \in S_L$ esetén $\mathsf{Is}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{A}$, és

(2) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in S_L$ esetén $\mathsf{Is}(\mathfrak{A}) = \mathsf{Is}(\mathfrak{B})$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Ennek megfelelően egy $\mathfrak{A}$ **struktúra izomorfiatípusa** az $\mathsf{Is}(\mathfrak{A})$ struktúra. Később fel fogjuk használni, hogy ez az Is operáció úgy is definiálható, hogy két nem izomorf relációrendszer izomorfiatípusainak diszjunkt alaphalmaza legyen. Erre a tulajdonságra ritkán lesz szükségünk, amikor felhasználjuk, mindenképp jelezzük majd. Végül egy gyakran használt jelölést érdemes bevezetnünk. Mivel a következő fejezettől kezdve a véges relációrendszerekből álló osztályok reprezentációját vizsgáljuk, érdemes a véges relációrendszerek izomorfiatípusait halmazba sorolni:

$$\Omega_L \doteq \{\mathsf{Is}(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in S_L \text{ és } |\mathfrak{A}| < \aleph_0\}.$$

A fenti képletben $|\mathfrak{A}|$ az $\mathfrak{A}$ **relációrendszer számossága**, amely definíció szerint

$\mathfrak{A}$ alaphalmazának $|A|$ számosságával egyenlő. Érdemes még azt is megemlítenünk, hogy ha a $\leqslant$ relációt csak az Ω_L halmazon tekintjük, akkor egy $(\Omega_L, \leqslant)$ részbenrendezett halmazhoz jutunk, melynek számossága véges L nyelv esetén $\aleph_0$ és $2^{|L|}$ különben. A továbbiakban - a rövidség kedvéért - a részbenrendezett halmazokat **rendezett halmaz**oknak fogjuk nevezni (e szóhasználat mellett a valós számok halmaza a szokásos rendezéssel egy teljesen rendezett halmaz).

Elérkeztünk bevezetőnk végéhez. Megismerkedtünk minden olyan fogalommal, amely nélkülözhetetlen a relációrendszerek ideáljainak vizsgálata során. Persze a későbbi fejezetekben más fogalmakra is szükségünk lesz, de minden esetben tisztázzuk majd azokat. Reméljük, hogy a kedves Olvasó érdekesnek és szellemesnek fogja találni mindazt, ami a fantáziánkat mozgatta.

2. fejezet

Ideálok reprezentálhatósága

Ebben a fejezetben először a véges relációrendszerekből álló ideálok fogalmát tisztázzuk, majd a reprezentáció kérdését fogalmazzuk meg. Megmutatjuk, hogy - a korábbi állításunkkal megegyezően - a reprezentálhatóságot elegendő az ideálok körében vizsgálni. Ezt követően megnézzük, hogy mit mondhatunk tetszőleges L nyelv esetén az Ω_L ideál reprezentálhatóságáról. Ehhez a diagramm-lemmát hívjuk segítségül, amit relációrendszerek esetében be is bizonyítunk. Végül metrikus terek segítségével megadunk egy nemüres nem-reprezentálható ideált. Ez utóbbihoz feltételezzük, hogy az Olvasó számára ismertek a metrikus terekkel kapcsolatos alapfogalmak. A metrikus terekről Komornik Vilmos nagyszerű *Valós Analízis Előadások* című munkájában olvashatunk (lásd [5]).

2.1. Az ideál és a reprezentálhatóság fogalma

Rögzítsünk egy relációjelekből álló $L = (\mathbf{R}, \mu)$ nyelvet, és vizsgáljuk meg a reprezentáció kérdését. Az előző fejezetben említettük, hogy $(\Omega_L, \leqslant)$ egy rendezett halmaz, és a gráfok példáján láthattuk azt is, hogy a reprezentálhatósághoz szükséges a leszálló tulajdonság és a közös felső korlát létezéséről szóló tulajdonság feltevése. A rendezett halmazok elméletében az ilyen tulajdonságú részhalmazokat ideálnak nevezik, mi is ezt a szóhasználatot fogjuk követni. Megmutatjuk, hogy a reprezentálhatóság kérdését az ideálok körében érdemes vizsgálni, ezért elsőként ezt a fogalmat értelmezzük.

2.1.1. Definíció. *Egy $I \subseteq \Omega_L$ halmaz* ***ideál****, ha* ***leszálló****, és ha bármely két elemének van* ***közös felső korlát****ja I-ben, azaz ha teljesül az alábbi két axióma:*

(1) *tetszőleges $\mathfrak{A} \in \Omega_L$ és $\mathfrak{B} \in I$ esetén, ha $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, akkor $\mathfrak{A} \in I$, és*

(2) *tetszőleges $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in I$ esetén van olyan $\mathfrak{C} \in I$, amelyre $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{C}$ és $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{C}$.*

Ω_L ideáljainak családját $\mathscr{I}_L$ jelöli, ha pedig $I \in \mathscr{I}_L$, akkor az I ideál részideáljainak rendszere $\mathscr{I}(I)$.

Azonnal látható, hogy $\emptyset$ és Ω_L egy-egy ideál. Ideált kapunk akkor is, ha egy adott relációrendszer véges részstruktúráinak izomorfiatípusait képezzük. Tekintsük ehhez a következő fogalmat. Egy $\mathfrak{A} \in S_L$ **relációrendszer váza** vagy **szkeletonja** a véges részstruktúráinak halmaza:

$$\mathsf{skel}\,\mathfrak{A} \doteq \{\mathfrak{B} \in S_L \mid \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \text{ és } |\mathfrak{B}| < \aleph_0\}.$$

Általános nyelvtípusok esetén egy struktúra szkeletonját végesen generálható részstruktúráiból készítik el (ld. [4]). Azonban, ha a nyelv csak relációjeleket tartalmaz, akkor a véges részstruktúrák és a végesen generálható részstruktúrák megegyeznek. Tehát a mi esetünkben a struktúrák váza véges struktúrákat tartalmazó halmaz (amely persze soha sem üres). Mivel mi csak izomorfiatípusokkal fogunk dolgozni, így egy relációrendszer szkeletonja helyett a relációrendszer korát érdemes központi fogalomnak tekinteni.

2.1.2. Definíció. *Egy $\mathfrak{A} \in S_L$* ***relációrendszer kora*** *az $\mathfrak{A}$-ba beágyazható Ω_L-beli struktúrák halmaza:*

$$\mathsf{age}\,\mathfrak{A} \doteq \{\mathsf{Is}(\mathfrak{B}) \in \Omega_L \mid \mathfrak{B} \in \mathsf{skel}\,\mathfrak{A}\}.$$

Tehát egy relációrendszer kora azon véges relációrendszerek izomorfiatípusaiból tevődik össze, melyek izomorfia erejéig megjelennek a struktúrában. Definíciónk szerint $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}$ részhalmaza Ω_L-nek, sőt ha veszünk egy olyan $K \subseteq S_L$ struktúraosztályt, amelyben csak véges struktúrák vannak, akkor áttérve elemeinek izomorfiatípusaira, olyan $\mathsf{Is}[K] = \{\mathsf{Is}(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in K\}$ halmaz adódik, amely részhalmaza Ω_L-nek.

2.1.3. Definíció. *Véges relációrendszerekből álló $K \subseteq S_L$* ***struktúraosztály reprezentálható****, ha van olyan L-típusú $\mathfrak{A}$ relációrendszer, amelyre*

$$\mathsf{age}\,\mathfrak{A} \;=\; \mathsf{Is}[K].$$

Tehát egy K struktúraosztály reprezentálható, ha van olyan relációrendszer, amelyben pontosan azok a véges izomorfiatípusok jelennek meg, melyek izomorfia erejéig megtalálhatóak K-ban. Hogy az ideál fogalma miként kapcsolódik a reprezentálhatósághoz, azt a következő állítás mutatja.

2.1.4. Állítás. *Tetszőleges $\mathfrak{A}$ relációrendszer esetén $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}$ egy ideál.*

Bizonyítás: Nézzük először a leszálló tulajdonságot. Ha $\mathfrak{B} \in \mathsf{age}\,\mathfrak{A}$, akkor $\mathfrak{B}$ egy olyan véges relációrendszer, amely beágyazható $\mathfrak{A}$-ba. Ha most $\mathfrak{C} \in \Omega_L$ beágyazható $\mathfrak{B}$-be, akkor $\mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}$, így a $\leqslant$ reláció tranzitivitása miatt $\mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{A}$. Ezért $\mathfrak{C}$ egy olyan véges izomorfiatípus, amely beágyazható $\mathfrak{A}$-ba, azaz definíció szerint $\mathfrak{C} \in \mathsf{age}\,\mathfrak{A}$, tehát $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}$ valóban leszálló.

Most lássuk be, hogy $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}$-ban bármely két elemnek van közös felső korlátja. Ha $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathsf{age}\,\mathfrak{A}$, akkor vegyünk egy-egy beágyazást $\mathfrak{B}$-ből, illetve $\mathfrak{C}$-ből $\mathfrak{A}$-ba, jelölje ezeket f, illetve g. Most $f[B]$ és $g[C]$ képhalmazok uniója véges része $\mathfrak{A}$ alaphalmazának, így $\mathfrak{A}_{|f[B]\cup g[C]} \in \mathsf{skel}\,\mathfrak{A}$. Ekkor ennek a részstruktúrának az izomorfiatípusa $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}$-beli, és ebbe az izomorfiatípusba $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ is beágyazható. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $\mathsf{Is}(\mathfrak{A}_{|f[B]\cup g[C]})$ a $\mathfrak{B}$ és a $\mathfrak{C}$ relációrendszerek közös felső korlátja $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}$-ban. Tehát $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}$ valóban ideál. $\square$

Az előző állítás és a struktúraosztályok reprezentálhatóságának értelmezése alapján elegendő Ω_L ideáljainak reprezentálhatóságát vizsgálni. Valóban, ha a K osztály reprezentálható, akkor létezik olyan $\mathfrak{A}$ struktúra, emelyre $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} = \mathsf{Is}[K]$. De $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}$ egy ideál, így K reprezentálhatóságához szükséges, hogy az $\mathsf{Is}[K]$ halmaz ideál legyen. Ez pontosan akkor teljesül, ha K leszálló, és ha K-ban bármely két elemnek létezik közös felső korlátja. Továbbá, ha adott egy I ideál, akkor mivel minden eleme izomorfiatípus, és mivel bármely $\mathfrak{A}$ relációrendszerre $\mathsf{Is}(\mathsf{Is}(\mathfrak{A})) = \mathsf{Is}(\mathfrak{A})$ (azaz $\mathsf{Is}^2 = \mathsf{Is}$), ezért $\mathsf{Is}[I] = I$. Ennek megfelelően a reprezentálhatóság definíciója ideálok esetében a következő alakot ölti.

2.1.5. Definíció. *Egy $I \in \mathscr{I}_L$* ***ideál reprezentálható****, ha van olyan $\mathfrak{A} \in S_L$ relációrendszer, amelyre*

$$\mathsf{age}\,\mathfrak{A} = I.$$

Jó volna egy könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltételt találni az ideálok reprezentálhatóságához, de legjobb tudásunk szerint ilyen feltétel még nem ismeretes. Vannak azonban részleges eredmények és érdekes konstrukciók, mi ezek közül szeretnénk majd néhányat bemutatni. Az alábbit nyitott kérdésnek tekintjük.

1. Probléma. *Ω_L mely ideáljai reprezentálhatóak és melyek nem?*

Azonnal észrevehetjük, hogy nemüres véges ideál mindig reprezentálható. Ha $I \in \mathscr{I}_L$ nemüres és véges, akkor van legnagyobb eleme, ugyanis I egy nemüres véges rendezett halmaz, ezért biztosan létezik maximális eleme. Azonban I bármely két elemének létezik I-beli közös felső korlátja, ezért I maximális eleme egyben a legnagyobb eleme is. Jelölje ezt $\mathfrak{A} \in I$. I leszálló tulajdonsága miatt $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} \subseteq I$, és ha $\mathfrak{B} \in I$, akkor - mivel $\mathfrak{A}$ az $(I, \leqslant)$ rendezett halmaz legnagyobb eleme, ezért - $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}$, és így $\mathfrak{B} \in \mathsf{age}\,\mathfrak{A}$. Ezeket az állításokat összekapcsolva, azt kapjuk, hogy $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} = I$. Tehát a reprezentálhatóság kérdését végtelen ideálok esetén érdemes vizsgálni, sőt - ahogy azt majd láthatjuk is - egy megszámlálható ideál mindig reprezentálható, ezért leginkább a nem-megszámlálható ideálok reprezentálhatóságának kérdése az érdekes. Befejezésül még a következő tulajdonságot érdemes tisztáznunk.

2.1.6. Állítás. *Ha I végtelen ideál és $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} = I$, akkor $|\mathfrak{A}| \geq |I|$, és létezik olyan $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$, amelyre $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}' = I$ és $|\mathfrak{A}'| = |I|$.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} = I$. Először azt látjuk be, hogy $|\mathfrak{A}| \geq |I|$. Az nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{A}$ nem lehet véges, hiszen egy véges relációrendszer kora véges ideál, tehát $\mathfrak{A}$ alaphalmaza végtelen kell, hogy legyen. Ekkor viszont A véges részhalmazainak száma megegyezik A számosságával, és mivel $\mathsf{skel}\,\mathfrak{A}$ bármely elemének alaphalmaza az A alaphalmaz egy véges része, ezért $\mathfrak{A}$ szkeletonjának számossága is megegyezik $|\mathfrak{A}|$-val. Nyilván $|\mathsf{age}\,\mathfrak{A}| \leq |\mathsf{skel}\,\mathfrak{A}|$, ezért $|I| = |\mathsf{age}\,\mathfrak{A}| \leq |\mathsf{skel}\,\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}|$.

Vegyünk most minden $\mathfrak{B} \in I$ véges relációrendszerhez egy $f_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ beágyazást és $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}_{|\bigcup_{\mathfrak{B}\in I} f_{\mathfrak{B}}[B]}$. Ekkor $\mathfrak{A}'$ részstruktúrája $\mathfrak{A}$-nak, így $\mathfrak{A}'$ kora részideálja I-nek. De a konstrukció miatt bármely $\mathfrak{B} \in I$ beágyazható $\mathfrak{A}'$-be (például $f_{\mathfrak{B}}$ egy beágyazás), ezért $\mathfrak{A}'$ is reprezentálja I-t. Továbbá $|\mathfrak{A}'| = |A'| \leq \sum_{\mathfrak{B}\in I} |B| \leq \sum_{\mathfrak{B}\in I} \aleph_0 = |I| \cdot \aleph_0 = |I|$, hiszen I végtelen számosságú. Azonban $\mathfrak{A}'$ is reprezentálja I-t, ezért számossága nem lehet kisebb $|I|$-nál, következésképp $|\mathfrak{A}'| = |I|$. $\square$

2.2. Ω_L reprezentálhatósága

Következő célunk annak igazolása, hogy tetszőleges L nyelv esetén az Ω_L ideál reprezentálható. Ezt több módon is beláthatjuk, mi a diagramm-lemma segítségével fogunk okoskodni. A diagramm-lemmához szükség lesz a sktruktúra-paraméterezés fogalmára is, ezért elsőként ezt tisztázzuk. A paraméterezés konstrukciója elvégezhető tetszőleges nyelv esetén is, és a diagramm-lemma is igaz marad. Azonban, mi csak relációkkal fogunk dolgozni, ezért a diagramm-lemmát - és így a struktúra-paraméterezést is - csak relációrendszerek körében dolgozzuk ki.

Rögzítsünk egy L relációjelkészletet, és vegyünk egy L-típusú $\mathfrak{A} \in S_L$ relációrendszert. Vegyünk fel az $\mathfrak{A}$ struktúra A alaphalmazának megfelelően új, egymástól és L jeleitől is különböző konstansjeleket, jelöljük ezeket c_a-val ($a \in A$). Így kapunk egy L_A jelkészletet, melynek új elemeit interpretálhatjuk az A halmaz felett úgy, hogy a c_a konstansjelnek az a elemet adjuk értékül. Ha az így kapott L_A-struktúrát $\overline{\mathfrak{A}}$-sal jelöljük, akkor $\overline{\mathfrak{A}}_{|L} = \mathfrak{A}$, és egy $a \in A$ elem esetén a c_a konstansjel interpretáltja $c_a^{\overline{\mathfrak{A}}} = a$. Tehát $\overline{\mathfrak{A}}$ majdnem ugyanaz a struktúra, mint $\mathfrak{A}$, csupán abban különbözik tőle, hogy alaphalmazának minden eleme meg van jelölve egy-egy konstansjellel. $\overline{\mathfrak{A}}$ az $\mathfrak{A}$ **struktúra természetes paraméterezése**. E paraméterezés segítségével a relációrendszerünk már jól körülírható egy elsőrendű elmélettel. Ennek elkészítése előtt idézzük fel, hogy a matematikai logikában mikor neveztünk egy formulát zártnak, atominak, illetve literálnak. Egy φ formula **zárt**, ha nem tartalmaz szabad változót, **atomi** formula, ha nem tartalmaz sem kvantort, sem logikai összekötőjelet, végül egy φ formula **literál**, ha vagy egy atomi formulával, vagy egy atomi formula negáltjával egyenlő. Például az L_A nyelv zárt literáljai $c_a = c_b$, $\neg(c_a = c_b)$, $\mathsf{R}(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, illetve $\neg\mathsf{R}(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ alakúak.

2.2.1. Definíció. *Egy L-típusú $\mathfrak{A}$* ***struktúra diagrammja*** *a következő elmélet:*

$$\mathsf{diag}\,\mathfrak{A} \ \doteq\ \{\varphi \in \mathsf{Form}(L_A) \mid \varphi \text{ zárt literál és } \overline{\mathfrak{A}} \models \varphi\}.$$

Egy struktúrát nem csak saját elemeihez tartozó konstansjelekkel paraméterezhetünk. Ha egy $\mathfrak{A} \in S_L$ relációrendszer $\overline{\mathfrak{A}}$ természetes paraméterezése már elkészült, akkor egy másik $\mathfrak{B} \in S_L$ struktúra elemeit is megjelölhetjük az $\mathfrak{A}$ struktúrához tartozó $(c_a \mid a \in A)$ konstansjelekkel. Például úgy, hogy veszünk egy $f : A \to B$ függvényt, és $\mathfrak{A}$ paramétereit f mentén interpretáljuk $\mathfrak{B}$-ben. Az $a \in A$ elemhez tartozó c_a konstansjelnek $\mathfrak{B}$-ben az $f(a) \in B$ értéket adjuk. Jelölje a $\mathfrak{B}$ relációrendszer íly módon előálló L_A-kiterjesztését $\mathfrak{B}^{(f)}$. Ekkor $\mathfrak{B}^{(f)}$ és $\mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$ viszonya meghatározza az f függvény beágyazási tulajdonságát, ezt mondja ki a következő.

2.2.2. Lemma (Diagramm-lemma relációrendszerekre). *Legyen L tetszőleges relációjelkészlet, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in S_L$ két relációrendszer és $f : A \to B$ egy függvény. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(1) $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$,

(2) $\mathfrak{B}^{(f)} \models \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$.

Következésképp $\mathfrak{A}$ pontosan akkor ágyazható be $\mathfrak{B}$-be, ha $\mathfrak{B}$-nek van olyan, az L_A nyelvre vett $\mathfrak{B}'$ kiterjesztése, amely modellje $\mathfrak{A}$ diagrammjának.

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ egy beágyazás. Vegyük észre, hogy egy adott zárt atomi formula esetén vagy ő, vagy pedig a negáltja eleme $\mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$-nak (és persze csak az egyik). Tetszőleges $a, b \in A$ elemekre $(c_a = c_b) \in \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$ pontosan akkor teljesül, ha $a = b$, ami pedig f injektivitása miatt azzal ekvivalens, hogy $f(a) = f(b)$, ami pedig éppen akkor teljesül, ha $\mathfrak{B}^{(f)} \models (c_a = c_b)$, hiszen $c_a^{\mathfrak{B}^{(f)}} = f(a)$ és $c_b^{\mathfrak{B}^{(f)}} = f(b)$. Tehát $(c_a = c_b) \in \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$ esetén $\mathfrak{B}^{(f)} \models (c_a = c_b)$, és $\neg(c_a = c_b) \in \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$ esetén $\mathfrak{B}^{(f)} \models \neg(c_a = c_b)$. Hasonlóan, $\mathsf{R}(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ pontosan akkor eleme $\mathfrak{A}$ diagrammjának, ha $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}}$. Mivel f beágyazás, így ez pontosan akkor teljesül, ha $(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{B}}$, ami pedig $\mathfrak{B}^{(f)}$ konstrukciója miatt azzal ekvivalens, hogy $\mathfrak{B}^{(f)} \models \mathsf{R}(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$. Tehát $\mathsf{R}(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \in \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$ esetén $\mathfrak{B}^{(f)} \models \mathsf{R}(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, és $\neg\mathsf{R}(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \in \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$ esetén $\mathfrak{B}^{(f)} \models \neg\mathsf{R}(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$. Mindezt összekapcsolva azt kapjuk, hogy ha f egy beágyazás, akkor $\mathfrak{B}^{(f)} \models \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$.

Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{B}^{(f)}$ modellje $\mathfrak{A}$ diagrammjának és mutassuk meg, hogy ekkor f egy beágyazás. Az f függvény injektív, ugyanis ha a, b két különböző eleme A-nak, akkor $\neg(c_a = c_b) \in \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$, így feltevésünk alapján $\mathfrak{B}^{(f)} \models \neg(c_a = c_b)$. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy $f(a) = c_a^{\mathfrak{B}^{(f)}} \neq c_b^{\mathfrak{B}^{(f)}} = f(b)$, tehát f egy-egyértelmű. Most vegyünk egy tetszőleges L-beli R relációjelet és hozzá $a_1, \ldots a_n \in A$ elemeket ($n = \mu_{\mathsf{R}}$). Ekkor azt kapjuk, hogy $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}}$ pontosan akkor igaz, ha $\mathsf{R}(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \in \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$, ami pedig pontosan akkor teljesül, ha $\mathfrak{B}^{(f)} \models \mathsf{R}(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$. Ez utóbbi pedig definíció szerint $(c_{a_1}^{\mathfrak{B}^{(f)}}, \ldots, c_{a_n}^{\mathfrak{B}^{(f)}}) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{B}}$ igazságával egyenértékű, ami viszont éppen azt jelenti, hogy $(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{B}}$, hiszen $f(a_i) = c_{a_i}^{\mathfrak{B}^{(f)}}$ $(i = 1, \ldots, n)$, és $\mathsf{R}^{\mathfrak{B}} = \mathsf{R}^{\mathfrak{B}^{(f)}}$. Tehát az f injektív függvény megtartja az összes reláció igazságát, ezért beágyazza $\mathfrak{A}$-t $\mathfrak{B}$-be.

Végül, ha $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, akkor van egy $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ beágyazás, és az előbb igazoltak szerint a $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B}^{(f)}$ struktúra a $\mathfrak{B}$ relációrendszer olyan kiterjesztése, amely modellje $\mathfrak{A}$ diagrammjának. Megfordítva, ha $\mathfrak{B}$-nek van ilyen $\mathfrak{B}'$ kiterjesztése, akkor tekintsük a következő $f : A \to B$ függvényt: $a \in A$ esetén $f(a) := c_a^{\mathfrak{B}'}$. Könnyen kiolvasható, hogy $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}^{(f)}$, ezért $\mathfrak{B}^{(f)} \models \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$, ami pedig az előbb igazoltak szerint azzal ekvivalens, hogy az f függvény egy beágyazás $\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{B}$-be, ezért $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$. $\square$

2.2.3. Állítás. *Tetszőleges L relációjelkészlet esetén az Ω_L ideál reprezentálható.*

Bizonyítás: Rögzítsük az L nyelvet. A bevezető fejezetben említettük, hogy az $\mathsf{Is} : S_L \to S_L$ izomorfia-operáció úgy is értelmezhető, hogy két nem-izomorf struktúra izomorfiatípusa diszjunkt alaphalmazzal rendelkezzen. Emiatt feltehető, hogy Ω_L elemeihez tartozó alaphalmazok páronként diszjunktak, és ekkor Ω_L relációrendszereihez tartozó diagrammok is páronként diszjunkt elméletek. Bővitsük az L nyelvet az Ω_L-beli relációrendszerek paramétereivel, azaz $L' := L_{(\dot\bigcup_{\mathfrak{A}\in\Omega_L} A)}$. Tekintsük az alábbi elméletet:

$$T \;:=\; \dot\bigcup_{\mathfrak{A}\in\Omega_L} \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}.$$

Azt állítjuk, hogy T-nek van modellje. Ehhez a kompaktsági tétel (1.2.1. Tétel) alapján elég azt megmutatnunk, hogy bármely véges része konzisztens. Ha most vesszük T egy T' véges részét, akkor megadható véges sok $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k \in \Omega_L$ relációrendszer úgy, hogy $T' \subseteq \dot\bigcup_{i=1}^{k} \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}_i$ álljon. Ennek következtében elegendő csak azt igazolnunk, hogy bármely $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k \in \Omega_L$ esetén az $\dot\bigcup_{i=1}^{k} \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}_i$ elméletnek van modellje. Ehhez viszont a diagramm-lemma alapján azt kell belátnunk, hogy bármely $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k \in \Omega_L$ esetén van olyan L-típusú relációrendszer, amelybe az $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ struktúrák mindegyike beágyazható. Ez viszont igaz, hiszen Ω_L egy ideál, amelyben bármely két struktúrának van közös felső korlátja, innen pedig indukcióval adódik, hogy bármely véges (nemüres) részének van felső korlátja. Ezért van olyan $\mathfrak{B} \in \Omega_L$, amelybe $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ mindegyike beágyazható.

Tehát a megadott T elmélet konzisztens, jelölje egy modelljét $\mathfrak{A}' \in S_{L'}$. Ha most $\mathfrak{A}'$ konstansait elfelejtjük, azaz vesszük az $\mathfrak{A}'$ struktúra L-reduktumát, akkor olyan L-típusú $\mathfrak{A}$ relációrendszert kapunk, amelybe a diagramm-lemma alapján minden Ω_L-beli relációrendszer beágyazható, következésképp $\Omega_L \subseteq \mathsf{age}\,\mathfrak{A}$. Továbbá $\mathfrak{A}$ is egy L-típusú relációrendszer, ezért csak olyan véges részstruktúrája lehet, melynek izomorfiatípusa Ω_L-beli, ami pedig azt jelenti, hogy $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} \subseteq \Omega_L$. Mindezek alapján $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} = \Omega_L$. $\square$

A 2.1.6. Állítást felhasználva, azt is megkapjuk, hogy Ω_L mindig reprezentálható $|\Omega_L|$ méretű relációrendszerrel. Speciálisan, ha a nyelv véges, akkor Ω_L megszámlálható, és így reprezentálható megszámlálható relációrendszerrel.

2.3. Példa nem-reprezentálható ideálra

Ebben a szakaszban példát szeretnénk mutatni (nemüres) nem-reprezentálható ideálra. Ezt az ideált véges metrikus terek segítségével fogjuk elkészíteni, ehhez viszont a metrikus tereket el kell, hogy kódoljuk relációrendszerként. Az általunk bemutatott kódoláshoz megszámlálhatóan sok bináris relációjelet fogunk használni úgy, hogy kódolásunk egyértelmű legyen. Természetesen itt egy apróbb akadályba ütközhetünk, hiszen az üres halmaz is egy önálló metrikus tér, azonban mi az üres struktúrákat nem értelmeztük. Viszont nem célunk a metrikus terek topologikus viselkedésének vizsgálata, csupán nem-reprezentálható ideálra szeretnénk példát mutatni, éppen ezért a továbbiakban metrikus tér alatt nemüres metrikus teret értünk, így kiküszöbölve az előbbi akadályt.

Legyen (X, d) egy metrikus tér. Ekkor $d : X^2 \to \mathbb{R}_0^+$ egy kétváltozós nemnegatív valós függvény. Minden $q \in \mathbb{Q}_0^+$ nemnegatív racionális számhoz tartozzon egy kétváltozós R_q relációjel, és tetszőleges $x, y \in X$-re $\mathsf{R}_q(x, y)$ pontosan akkor legyen igaz az X alaphalmazú $\mathfrak{A}_d$ relációrendszerben, ha $q \leq d(x, y)$. Ekkor

$$d(x, y) \; = \; \sup\{q \in \mathbb{Q}_0^+ \mid \mathfrak{A}_d \models \mathsf{R}_q(x, y)\}.$$

Ez az $(X, d) \mapsto \mathfrak{A}_d$ megfeleltetés nyilván egy-egyértelmű, azaz különböző d és d' kétváltozós nemnegatív valós függvények esetén $\mathfrak{A}_d \neq \mathfrak{A}_{d'}$ (persze izomorfak lehetnek). Egy, az ezen a nyelven adott $\mathfrak{A}$ struktúrára azt is mondhatjuk, hogy $\mathfrak{A}$ egy kétváltozós nemnegatív **függvényt leíró relációrendszer**, ha létezik olyan A-n értelmezett kétváltozós nemnegatív d függvény, amelyre $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_d$. Ezek alapján egy (X, d) metrikus tér d metrikáját leíró relációrendszert is metrikus térnek tekinthetünk. Jelölje $L_{\mathbb{M}}$ a kétváltozós R_q alakú relációjelekből álló relációjelkészletet, ahol q befutja a nemnegatív racionális számok halmazát. $L_{\mathbb{M}}$ a **metrikus terek nyelve**, és $|L_{\mathbb{M}}| = \aleph_0$.

2.3.1. Definíció. *Egy $L_{\mathbb{M}}$-típusú $\mathfrak{A}$* ***relációrendszer metrikus tér****, ha van olyan $d : A^2 \to \mathbb{R}_0^+$ függvény, amelyre $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_d$, és amelyre az alábbiak tetszőleges $x, y, z \in A$ esetén teljesülnek:*

(1) $d(x, y) \geq 0$, *és* $d(x, y) = 0$ *pontosan akkor, ha* $x = y$,

(2) $d(x, y) = d(y, x)$, *és*

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

A metrikus tereket általában $\mathcal{M}$-mel, alaphalmazukat pedig X-szel fogjuk jelölni.

Vegyük észre, hogy így a metrikus terekhez tartozó altér fogalma (leszámítva az üres halmazt) egybeesik a részstruktúra fogalmával. Tehát egy metrikus tér szkeletonja véges nemüres altereinek halmaza és fordítva, ha egy $L_{\mathbb{M}}$-típusú struktúra szkeletonjának minden eleme metrikus tér, akkor a struktúra is az. Most már megadhatunk egy metrikus terekből álló nemüres nem-reprezentálható ideált, melyet a következő fogalom segítségével készítünk el. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{M} = (X, d)$ metrikus térben a **távolságok eléggé különbözőek**, ha benne bármely két különböző pont távolsága legalább 1, és ha bárhogyan is vesszük $\mathcal{M}$ három különböző x, y, z pontját, akkor $|d(x, z) - d(y, z)| \geq 1$. Álljon I_{diff} azon véges metrikus terek izomorfiatípusaiból, melyekben a távolságok eléggé különbözőek.

2.3.2. Állítás. *I_{diff} az $\Omega_{L_{\mathbb{M}}}$ egy nemüres ideálja.*

Bizonyítás: I_{diff} nyilván nemüres (az egypontú metrikus tér biztosan eleme), és könnyen látható, hogy a konstrukció miatt leszálló is. Legyen most $\mathcal{M}$ és $\mathcal{M}'$ két különböző eleme I_{diff}-nek. Mivel $\mathcal{M}$ és $\mathcal{M}'$ különböző izomorfiatípusok, így feltehetjük, hogy az X, illetve X' alaphalmazok diszjunktak.

$$1 \leq R := 1 + \max\Big(\max\{d(x, y) \mid x, y \in X\}\ ;\ \max\{d'(x', y') \mid x', y' \in X'\}\Big).$$

Legyen $Y := X \mathbin{\dot\cup} X'$, és adjunk meg egy metrikát Y-on úgy, hogy a kapott $\mathcal{N} =$

(Y, d_Y) metrikus térnek $\mathcal{M}$ és $\mathcal{M}'$ is altere legyen, és $\mathcal{N}$-ben is eléggé különbözőek legyenek a távolságok. d_Y egyezzen meg X-en d-vel, X'-n pedig d'-vel. A többi távolság megadásához rögzítsünk egy $x_0 \in X$ és egy $x'_0 \in X'$ pontot. $x \in X$, illetve $x' \in X'$ esetén

$$d_Y(x, x') \;=\; d_Y(x', x) \;:=\; R + d(x_0, x) + d'(x'_0, x').$$

Nyilván d_Y-ra teljesül a metrikákra vonatkozó első két axióma, és az is nyilvánvaló, hogy $d_Y \geq 1$ (hiszen $R \geq 1$). Legyen most $x, y, z \in Y$ három különböző csúcs, és mutassuk meg, hogy a hozzájuk tartozó távolságok eléggé különbözőek, és kielégítik a háromszög-egyenlőtlenséget. Mindkét állítás igaz, ha $x, y, z \in X$, vagy ha $x, y, z \in X'$, ezért feltehetjük, hogy az egyik pont az egyik metrikus térből, a másik két pont pedig a másik térből származik. Szimmetria okokból feltehető, hogy $x \in X$ és $y, z \in X'$. $a := d_Y(x_0, x)$, $b := d_Y(x'_0, y)$, $c := d_Y(x'_0, z)$ és $d := d_Y(y, z)$. Ekkor $b \leq c + d$, $c \leq b + d$ és $d \leq b + c$ miatt $d_Y(y, z) = d \leq b + c \leq (R + a + b) + (R + a + c) = d_Y(x, y) + d_Y(x, z)$ és $d_Y(x, y) = R + a + b \leq (R + a + c) + d = d_Y(x, z) + d_Y(y, z)$, illetve $d_Y(x, z) = R + a + c \leq (R + a + b) + d = d_Y(x, y) + d_Y(y, z)$. Tehát a háromszög-egyenlőtlenség teljesül.

Már csak azt kell belátnunk, hogy a távolságok eléggé különbözőek. $|d_Y(x, y) - d_Y(x, z)| = |(R+a+b) - (R+a+c)| = |b - c| = |d_{X'}(x'_0, y) - d_{X'}(x'_0, z)| \geq 1$ azonnal adódik. Még azt kell belátnunk, hogy $|(R + a + b) - d| \geq 1$ és $|(R + a + c) - d| \geq 1$. Ismét szimmetria okokból elegendő megmutatnunk, hogy $|(R+a+b) - d| \geq 1$ teljesül. R választása miatt $d \leq b+c \leq b+(R-1) \leq (R+a+b)-1$, ezért $|(R + a + b) - d| = (R + a + b) - d \geq 1$. Tehát $\mathcal{N}$ olyan véges metrikus tér, melyben a távolságok eléggé különbözőek és amelynek $\mathcal{M}$ és $\mathcal{M}'$ is altere. Következésképp $\mathsf{Is}(\mathcal{N})$ az $\mathcal{M}$ és $\mathcal{M}'$ terek egy I_{diff}-beli közös felső korlátja, ezért I_{diff} valóban ideál. □

2.3.3. Állítás. *I_{diff} nem reprezentálható.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy I_{diff} reprezentálható. Mint említettük, egy $L_{\mathbb{M}}$-típusú relációrendszer pontosan akkor metrikus tér, ha bármely véges része is az. Mivel I_{diff} minden eleme metrikus tér, ezért bármely reprezentánsa is az. Tegyük fel, hogy $\mathcal{M} = (X, d)$ és $\mathsf{age}\,\mathcal{M} = I_{\mathsf{diff}}$. Tetszőleges nemnegatív valós r számra I_{diff}-nek eleme az a kétpontú metrikus tér, melyben a két pont távolsága $1 + r$, ezért $|I_{\mathsf{diff}}| \geq \mathfrak{c} > \aleph_0$. Ekkor azonban a 2.1.6. Állítás miatt az I_{diff} ideált reprezentáló $\mathcal{M}$ metrikus tér számossága is legalább $\mathfrak{c}$, tehát az $\mathcal{M}$ tér X alaphalmaza nem megszámlálható.

Rögzítsünk egy $x \in X$ pontot és $H := \{d(x, y) \mid y \in X - \{x\}\}$. Ekkor H bármely két különböző a és b elemére $|a - b| \geq 1$, amiből az is következik, hogy H-ban nincsen Cauchy-sorozat, és $|H| = |X| > \aleph_0$. $H_n := H \cap [-n, n]$ (ahol $[-n, n]$ a 0 középpontú $n \in \mathbb{N}^+$ sugarú kompakt intervallum). Ekkor $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} H_n$ egy megszámlálható unió, így kell, hogy legyen olyan n pozitív egész, amelyre H_n végtelen számosságú. Mivel $H_n \subseteq [-n, n]$ végtelen számosságú, $[-n, n]$ pedig kompakt, ezért H_n-nek kell, hogy legyen torlódási pontja $[-n, n]$-ben, ami lehetetlen, hiszen H_n nem tartalmaz Cauchy-sorozatot. Ez az ellentmondás pedig mutatja, hogy I_{diff} nem lehet reprezentálható. $\square$

Beláttuk tehát, hogy létezik nemüres nem-reprezentálható ideál. Természetesen ez nem minden nyelv esetén igaz, ugyanis látni fogjuk majd, hogy ha a nyelv csak véges sok többváltozós relációjelet tartalmaz, akkor minden ideál reprezentálható, minden más esetben pedig létezik nem-reprezentálható ideál. Ez utóbbit éppen a most elkészített I_{diff} nem-reprezentálható ideál felhasználásával fogjuk igazolni. Végül még azt érdemes megjegyeznünk, hogy egyúttal az is kiderült, hogy egy ideál reprezentálhatóságából nem következik, hogy minden részideálja reprezentálható. Valóban, az előző szakasz eredménye alapján $\Omega_{L_{\mathbb{M}}}$ reprezentálható, de az előbbiek szerint van nemüres nem-reprezentálható részideálja. Az érdeklődő Olvasó a metrikus terekből álló ideálokról további érdekességek után kutathat [2]-ben.

3. fejezet

Kiterjesztési tulajdonság

Ideálok reprezentálhatóságára az egyik legegyszerűbb elégséges feltétel a kiterjesztési tulajdonság. A kiterjesztési tulajdonság fennállása esetén struktúra-láncok limeszeivel reprezentálhatjuk az adott ideált. Ebben a fejezetben ezt a módszert szeretnénk ismertetni. A módszer következményeként azt is megkapjuk, hogy bármely (nemüres) megszámlálható ideál reprezentálható. Ez azt is jelenti, hogy véges L nyelv esetén bármely (nemüres) ideál reprezentálható, hiszen véges L esetén az Ω_L ideál megszámlálható.

3.1. Kiterjesztési tulajdonság

Rögzítsünk egy L relációjelkészletet, és vegyünk egy $I \in \mathscr{I}_L$ (nemüres) ideált. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} \in S_L$ olyan relációrendszer, amelyre $\mathsf{age}\ \mathfrak{A} \subseteq I$. Azt mondjuk, hogy **$\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B} \in I$ relációrendszerrel kiterjeszthető I felett**, ha létezik olyan $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$ L-típusú relációrendszer, amelyre $\mathsf{age}\ \mathfrak{A}' \subseteq I$ és $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}'$.

3.1.1. Definíció. *Az I ideál rendelkezik a **kiterjesztési tulajdonság**gal, röviden I egy **(EP)-ideál** (EP = extension property), ha tetszőleges $\mathfrak{A}$ relációrendszerre $\mathsf{age}\ \mathfrak{A} \subseteq I$ és $|\mathfrak{A}| < |I|$ esetén $\mathfrak{A}$ az I bármely elemével kiterjeszthető I felett.*

Példa lehet (EP)-ideálra az Ω_L ideál, ugyanis $\mathsf{age}\ \mathfrak{A} \subseteq \Omega_L$ és $\mathfrak{B} \in \Omega_L$ esetén feltehetjük, hogy a két struktúra alaphalmaza diszjunkt (különben $\mathfrak{B}$ helyett vehetnénk egy

$\mathfrak{A}$-tól diszjunkt, $\mathfrak{B}$-vel izomorf relációrendszert). Ekkor viszont vehetjük a két relációrendszer $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ összegét, melynek alaphalmaza $A \dot\cup B$, és amelyben egy tetszőleges L-beli R relációjelre $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} = \mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \dot\cup \mathsf{R}^{\mathfrak{B}}$. Ekkor nyilván $\mathsf{age}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \subseteq \Omega_L$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}+\mathfrak{B}$. Mindez persze igaz $|\mathfrak{A}| < |\Omega_L|$ esetén is, ezért Ω_L valóban rendelkezik a kiterjesztési tulajdonsággal. Igazolni fogjuk, hogy egy nemüres (EP)-ideál mindig reprezentálható, amit ha az előző gondolattal összekapcsolunk, a 2.2.3. Állítás egy újabb bizonyítását nyerjük. Az (EP)-ideálok reprezentálhatóságának bizonyításához szükségünk lesz a struktúra-láncok és azok limeszének fogalmára. Legyen ehhez λ egy rendszám és a $\xi < \lambda$ rendszámokra $\mathfrak{A}_\xi \in S_L$.

3.1.2. Definíció. *A λ hosszú $(\mathfrak{A}_\xi) = (\mathfrak{A}_\xi \mid \xi < \lambda)$ sorozat* ***struktúra-lánc****, vagy röviden* ***lánc****, ha bármely $\xi < \eta < \lambda$ rendszámpárra $\mathfrak{A}_\xi \subseteq \mathfrak{A}_\eta$. Az $(\mathfrak{A}_\xi)$* ***lánc limesze*** *pedig az az $\mathfrak{A} \in S_L$ relációrendszer, melynek alaphalmaza a sorozat alaphalmazainak uniója, és egy L-beli R relációjel interpretáltja $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}} = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathsf{R}^{\mathfrak{A}_\xi}$.*

Ha egy lánc minden tagjának kora részideálja I-nek, akkor nyilván a limesz kora is részideálja I-nek, hiszen egy lánc limeszének kora a lánc tagjaihoz tartozó monoton bővülő korok uniója. Ez teszi lehetővé a kiterjesztési tulajdonsággal rendelkező ideálok reprezentálhatóságát.

3.1.3. Tétel. *Bármely nemüres (EP)-ideál reprezentálható.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az I ideál rendelkezik a kiterjesztési tulajdonsággal és $\lambda := |I|$. Ha I véges, akkor biztosan reprezentálható, ezért feltehetjük, hogy I végtelen, azaz $\lambda \geq \aleph_0$. Soroljuk fel az I ideál elemeit egy λ hosszú $(\mathfrak{B}_\xi)$ sorozatban, majd a kiterjesztési tulajdonság felhasználásával készítsünk belőle egy olyan $(\mathfrak{A}_\xi) = (\mathfrak{A}_\xi \mid \xi < \lambda)$ láncot, amelyre az alábbiak teljesülnek tetszőleges $\xi < \lambda$-ra:

(1) $\mathfrak{B}_\xi \leqslant \mathfrak{A}_\xi$,

(2) $\mathsf{age}\ \mathfrak{A}_\xi \subseteq I$, és

(3) $\mathfrak{A}_\xi$ véges, vagy $|\mathfrak{A}_\xi| \leq |\xi|$.

Ha elkészítünk egy ilyen láncot, akkor annak limesze nyilván az I (EP)-ideál egy reprezentációját adja. Valóban, a **(2)** tulajdonság miatt a limesz kora része lesz I-nek, az **(1)** tulajdonság miatt pedig tartalmazni is fogja azt, hiszen ebben az esetben I minden eleme izomorfia erejéig megjelenik a lánc valamelyik tagjában, így a limeszben is. Tehát egy ilyen lánc elkészítése a feladatunk.

Az $\mathfrak{A}_0 := \mathfrak{B}_0$ választással a $\xi = 0$ rendszámra mindhárom tulajdonság teljesül. Ezután, ha valamely $0 < \xi < \lambda$ rendszámnál kisebb η rendszámokra már értelmeztük az $\mathfrak{A}_\eta$ relációrendszereket, mégpedig úgy, hogy azok kielégítsék az **(1)**, **(2)** és **(3)** tulajdonságokat (és láncot alkossanak), akkor a következőképpen készíthetjük el $\mathfrak{A}_\xi$-t. Ha ξ rákövetkező rendszám, mondjuk $\xi = \eta + 1$, akkor $\mathfrak{A}_\xi^0 := \mathfrak{A}_\eta$, ha pedig ξ limeszrendszám, akkor $\mathfrak{A}_\xi^0$ legyen az $(\mathfrak{A}_\eta \mid \eta < \xi)$ részlánc limesze. Mindkét esetben $\mathsf{age}\, \mathfrak{A}_\xi^0 \subseteq I$. Továbbá $\xi = \eta + 1$ esetén $|\mathfrak{A}_\xi^0| = |\mathfrak{A}_\eta|$ miatt $\mathfrak{A}_\xi^0$-ra teljesül a **(3)** tulajdonság, ha pedig ξ limeszrendszám, akkor ez azért lesz igaz, mert ebben az esetben $\aleph_0 \leq |\xi| < \lambda$ és $\eta < \xi$-re $|\mathfrak{A}_\eta| \leq \max(|\eta|, \aleph_0) \leq |\xi|$, ezért pedig $|\mathfrak{A}_\xi^0| \leq |\xi| \cdot |\xi| = |\xi|$ (ha ξ limeszrendszám, akkor $|\xi|$ végtelen számosság, és bármely κ végtelen számosságra $\kappa^2 = \kappa$). Ebből az is kiderül, hogy mindkét esetben $|\mathfrak{A}_\xi^0| < \lambda$ (hiszen $\xi < \lambda$ esetén $|\xi| < \lambda$).

Most I kiterjesztési tulajdonságát kihasználva megadhatunk olyan $\mathfrak{A}_\xi^0 \subseteq \mathfrak{A}_\xi$ struktúrát, amelynek kora részideálja I-nek és amelybe beágyazható az I ideál $\mathfrak{B}_\xi$ eleme. Ha $\mathfrak{A}_\xi$-be beágyazzuk $\mathfrak{B}_\xi$-t, majd $\mathfrak{A}_\xi$-t leszűkítjük $\mathfrak{A}_\xi^0$ és $\mathfrak{B}_\xi$ képének uniójára, akkor még azt is elérhetjük, hogy $\mathfrak{A}_\xi$ véges legyen, vagy $|\mathfrak{A}_\xi| \leq |\xi|$ álljon. Ekkor a kapott $\mathfrak{A}_\xi$ struktúrára is teljesülnek az **(1)**, **(2)** és **(3)** feltételek, ezért e rekurzióval megkonstruált struktúra-sorozat olyan lánc, amelynek bármely tagja kielégíti az **(1)**, **(2)** és **(3)** tulajdonságokat, így a fentebb említettek alapján a kapott lánc limesze reprezentálja I-t. □

3.1.4. Következmény. *Bármely nemüres megszámlálható ideál rendelkezik a kiterjesztési tulajdonsággal, és így reprezentálható is.*

Bizonyítás: Legyen I nemüres megszámlálható ideál, és mutassuk meg, hogy I rendelkezik a kiterjesztési tulajdonsággal. Ha $\mathsf{age}\, \mathfrak{A} \subseteq I$ és $|\mathfrak{A}| < |I|$, akkor $\mathfrak{A}$ véges és $\mathsf{Is}(\mathfrak{A}) \in I$. Ekkor viszont $\mathfrak{A}$ bármely I-beli elemmel kiterjeszthető I felett, hiszen I-ben bármely két elemnek létezik közös felső korlátja. Tehát bármely nemüres megszámlálható ideál (EP)-ideál, így a 3.1.3. Tétel értelmélben reprezentálható is. $\square$

Korábban már láthattuk, hogy bármely (nemüres) véges ideál reprezentálható, most azt is megtudtuk, hogy ez a helyzet megszámlálható ideálok esetében is. Ennek az állításnak azonnali következménye, hogy véges L nyelv esetén Ω_L bármely részideálja rendelkezik a kiterjesztési tulajdonsággal, ezért véges nyelv esetén bármely nemüres ideál reprezentálható. Valóban, ha L véges, akkor az Ω_L ideál megszámlálhatóan végtelen, így bármely részideálja megszámlálható.

3.1.5. Következmény. *Véges L nyelv esetén bármely nemüres ideál (EP)-ideál, így reprezentálható is.*

Tehát a nyelv végessége elégséges feltétel az összes ideál reprezentálhatóságához, de állítjuk, hogy nem szükséges. Az összes ideál reprezentálhatósága a nyelv kvázivégességével lesz ekvivalens, ahogyan azt majd a 6. Fejezetben láthatjuk is.

4. fejezet

Fraïssé limeszek

1954-ben Roland Fraïssé egy izgalmas eredményt publikált, a Fraïssé limeszek módszerét. Megmutatta, hogy tetszőleges megszámlálható nyelv esetén egy végesen generálható struktúrákból álló, amalgamációs tulajdonsággal rendelkező megszámlálható ideál lényegében egyértelműen reprezentálható egy megszámlálható homogén struktúra segítségével. A fejezet fő célja a módszer bemutatása. Persze csak relációrendszerekkel foglalkozunk, így a módszert is csak relációrendszerek körében tárgyaljuk, de az érdeklődő Olvasó megtekintheti általános esetben is, ha fellapozza Hodges [4] könyvét. Azonban, ha csak relációrendszerek körében vizsgáljuk az állítást, akkor a nyelv méretét korlátozó feltétel elhagyható. A Fraïssé limeszek módszeréhez a homogén relációrendszereken és az amalgamációs tulajdonságú ideálokon keresztül juthatunk el, ezért a fejezet első részében ezeket a fogalmakat definiáljuk, majd megvizsgáljuk néhány tulajdonságukat, melyek Fraïssé tételének bizonyítását is megalapozzák. A második részben a Fraïssé tételt ismertetjük, és példát mutatunk egy Fraïssé limeszre is. Belátjuk, hogy a véges gráftípusok ideálja egyértelműen reprezentálható megszámlálhatóan végtelen homogén gráffal. A fejezet utolsó részében a megszámlálhatóan végtelen véletlen gráfok néhány tulajdonságát mutatjuk meg, többek között azt, hogy egy megszámlálhatóan végtelen véletlen gráf majdnem biztosan homogén.

4.1. Homogenitás és az amalgamációs tulajdonság

Az ideálok körében a kiterjesztési tulajdonsághoz hasonlóan létezik egy másik feltétel, amely elégséges lehet egy ideál reprezentálhatóságához. Ez az amalgamációs tulajdonság. Itt azért fogalmazunk óvatosan, mert nagy számosságú ideálok esetében nem tudjuk, hogy ez a tulajdonság valóban elégséges-e egy ideál reprezentálhatóságához. Egyelőre csak annyit ismerünk, hogy legfeljebb $\aleph_1$ számosságú ideálok reprezentálhatóságát biztosítja. Viszont az amalgamációs tulajdonsággal rendelkező, legfeljebb $\aleph_1$ számosságú ideálok körében a reprezentálhatóságnál több is mondható, ahogyan azt majd Fraïssé tétele is mutatja. Mindehhez először rögzítsünk egy L relációjelkészletet és egy $I \in \mathscr{I}_L$ nemüres ideált.

4.1.1. Definíció. *Az I ideál rendelkezik az* ***amalgamációs tulajdonság****gal, vagy röviden* ***(AP)-ideál*** *(AP = amalgamation property), ha bármely $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in I$-re igaz, hogy ha $\mathfrak{A}$ beágyazható $\mathfrak{B}_1$-be és $\mathfrak{B}_2$-be, akkor bármely $f_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ beágyazáspárhoz létezik olyan $\mathfrak{C} \in I$ struktúra és $\mathfrak{C}$-hez olyan $g_i : \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{C}$ beágyazáspár, melyekre $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.*

Szemléletesen itt arról van szó, hogy ha egy $\mathfrak{A}$ véges relációrendszert már beágyaztunk két másik véges struktúrába, akkor azokat az ideálon belül össze tudjuk úgy kapcsolni, hogy a beágyazott $\mathfrak{A}$ struktúra ugyanoda kerüljön. Természetesen az amalgamációs tulajdonságnál sem lényeges, hogy az adott ideál elemeivel - mint izomorfiatípusokkal - dolgozunk-e, vagy a megfelelő izomorfiatípusokkal izomorf struktúrákkal. Ha ezt elfogadjuk, a bizonyításainkat gördülékenyebben fogalmazhatjuk majd meg. Az (AP)-ideálokkal kapcsolatban azonnal felmerülhet a kérdés, hogy mely relációrendszerek kora rendelkezik az amalgamációs tulajdonsággal.

4.1.2. Definíció. *Egy $\mathfrak{D} \in S_L$ relációrendszer* ***gyengén homogén****, ha tetszőleges egymást tartalmazó véges $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ részstruktúráira igaz, hogy bármely $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ beágyazás kiterjeszthető egy $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ beágyazássá.*

4.1.3. Állítás. *Bármely gyengén homogén relációrendszer kora (AP)-ideál.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $\mathfrak{D}$ gyengén homogén relációrendszert és $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \mathsf{age}\,\mathfrak{D}$ véges struktúrákat úgy, hogy $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}_i$ álljon ($i = 1, 2$-re), és legyen $f_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ egy beágyazáspár. Mivel $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{B}_2$ beágyazható $\mathfrak{D}$-be, vehetünk egy-egy $h_i : \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{D}$ beágyazást. Vegyük észre, hogy az $f_0 := h_2 \circ f_2 \circ f_1^{-1} \circ (h_1^{-1})_{|h_1[f_1[A]]}$ függvény egy, a véges $\mathfrak{A}$-val izomorf $\mathfrak{D}_{|h_1[f_1[A]]}$ részstruktúrán értelmezett $\mathfrak{D}$-be képző beágyazás, így $\mathfrak{D}$ gyenge homogenitása miatt kiterjeszthető egy $f : \mathfrak{D}_{|h_1[B_1]} \to \mathfrak{D}$ beágyazássá, hiszen $\mathfrak{D}_{|h_1[f_1[A]]} \subseteq \mathfrak{D}_{|h_1[B_1]}$ két véges részstruktúra. Világos, hogy $f \circ h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$.

Legyen $g_1 := f \circ h_1$, $g_2 := h_2$ és $\mathfrak{C} := \mathfrak{D}_{|g_1[B_1] \cup g_2[B_2]}$. Ekkor a $g_i : \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{C}$ beágyazásokra igaz, hogy $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ és $\mathsf{Is}(\mathfrak{C}) \in \mathsf{age}\,\mathfrak{D}$. Persze ez még első ránézésre nem az amalgamációs tulajdonságot igazolja, hiszen $\mathsf{Is}(\mathfrak{C}) \in \mathsf{age}\,\mathfrak{D}$ esetén $\mathfrak{C} \in \mathsf{age}\,\mathfrak{D}$ általában nem teljesül. Azonban vehetünk egy $g : \mathfrak{C} \to \mathsf{Is}(\mathfrak{C})$ izomorfizmust, majd a megadott g_i beágyazásokat módosíthatjuk a következőképpen: $\widetilde{g}_i := g \circ g_i$ ($i = 1, 2$). Ekkor $\widetilde{g}_i : \mathfrak{B}_i \to \mathsf{Is}(\mathfrak{C})$ és $\widetilde{g}_1 \circ f_1 = \widetilde{g}_2 \circ f_2$. Tehát $\mathsf{age}\,\mathfrak{D}$ valóban (AP)-ideál. □

Még szimmetrikusabb struktúrákat kaphatunk, ha nem csak a véges részstruktúrák esetén követeljük meg a beágyazások kiterjeszthetőségét.

4.1.4. Definíció. *Egy $\mathfrak{D}$ relációrendszer* ***homogén****, ha bármely $|\mathfrak{D}|$-nál kisebb méretű $\mathfrak{A}$ részstruktúráján ható $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ beágyazás kiterjeszthető $\mathfrak{D}$ egy automorfizmusává.*

Könnyen látható, hogy bármely homogén struktúra gyengén homogén, és ezért bármely homogén struktúra kora rendelkezik az amalgamációs tulajdonsággal. A 4.1.7. Állításban azt is láthatjuk majd, hogy megszámlálható relációrendszerek esetén a két fogalom egybeesik. Előtte azonban érdemes megfogalmaznunk következő problémánkat, melyre majd részleges megoldást szolgáltat Fraïssé tétele, de általános esetben nyitott kérdésnek tekintjük.

2. Probléma. *Reprezentálható-e bármely nemüres (AP)-ideál, és mely (AP)-ideálok reprezentálhatóak homogén struktúrával?*

A 4.1.7. Állítás és a Fraïssé tétel bizonyításához szükségünk lesz további állítások megfogalmazására is.

4.1.5. Állítás. *Legyen $\mathfrak{B}$ egy megszámlálható, $\mathfrak{D}$ pedig egy gyengén homogén relációrendszer, és tegyük fel, hogy* $\mathsf{age}\,\mathfrak{B} \subseteq \mathsf{age}\,\mathfrak{D}$. *Ekkor $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{D}$. Sőt, ha $\mathfrak{A}$ véges része $\mathfrak{B}$-nek és $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ egy beágyazás, akkor f_0 kiterjeszthető egy $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ beágyazássá.*

Bizonyítás: Vegyük $\mathfrak{B}$ egy $\mathfrak{A} \in \mathsf{skel}\,\mathfrak{B}$ véges részét és legyen $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ egy tetszőleges beágyazás (ilyen $\mathsf{age}\,\mathfrak{B} \subseteq \mathsf{age}\,\mathfrak{D}$ miatt biztosan létezik). Ha $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, akkor $f := f_0$, ellenkező esetben pedig soroljuk fel a $\mathfrak{B}$ struktúra A-n kívüli elemeit egy $\aleph_0$ hosszú (nem feltétlenül injektív) (b_n) sorozatban. $\mathfrak{B}_0 := \mathfrak{A}$ és $0 < n$-re $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{B}_{|A\cup\{b_0,\ldots,b_{n-1}\}}$. Ekkor $(\mathfrak{B}_n \mid n < \aleph_0)$ egy olyan skel $\mathfrak{B}$-beli lánc, melynek limesze éppen $\mathfrak{B}$.

Most bármely n természetes számra $\mathsf{Is}(\mathfrak{B}_n) \in \mathsf{age}\,\mathfrak{B} \subseteq \mathsf{age}\,\mathfrak{D}$, így minden $0 < n$-re létezik egy $g_n : \mathfrak{B}_n \to \mathfrak{D}$ beágyazás. n-szerinti rekurziót alkalmazva készítsünk egy $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ beágyazást. $f_0 : \mathfrak{B}_0 \to \mathfrak{D}$ már adott, és ha valamely $0 \leq n$-re az f_n egy már rendelkezésünkre álló $\mathfrak{B}_n \to \mathfrak{D}$ beágyazás, akkor a következőképpen terjeszthetjük ki egy $f_{n+1} : \mathfrak{B}_{n+1} \to \mathfrak{D}$ beágyazássá. Mivel $g_{n+1}[\mathfrak{B}_{n+1}] \subseteq \mathfrak{D}$ véges részstruktúra, $g_{n+1}[\mathfrak{B}_n] \subseteq g_{n+1}[\mathfrak{B}_{n+1}]$ és $f_n \circ (g_{n+1}^{-1})_{|g_{n+1}[\mathfrak{B}_n]}$ egy izomorfizmus $g_{n+1}[\mathfrak{B}_n]$ és $f_n[\mathfrak{B}_n] \subseteq \mathfrak{D}$ között, így a $\mathfrak{D}$ struktúra gyenge homogenitása miatt kiterjeszthető egy $h : g_{n+1}[\mathfrak{B}_{n+1}] \to \mathfrak{D}$ beágyazássá. Ekkor az $f_{n+1} := h \circ g_{n+1}$ függvény egy olyan $\mathfrak{B}_{n+1}$-ből $\mathfrak{D}$-be ható beágyazás, melynek $\mathfrak{B}_n$-re vett megszorítása egyenlő f_n-nel.

Ezzel készen is vagyunk, ugyanis könnyen látható, hogy az így megkonstruált $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \ldots$ beágyazás-lánc uniójaként előálló f függvény egy beágyazás $\mathfrak{B}$-ből $\mathfrak{D}$-be, és $f_{|A} = f_0$. □

4.1.6. Állítás. *Ha $\mathfrak{D}_1$ és $\mathfrak{D}_2$ két megszámlálható gyengén homogén relációrendszer és* $\mathsf{age}\,\mathfrak{D}_1 = \mathsf{age}\,\mathfrak{D}_2$, *akkor $\mathfrak{D}_1 \cong \mathfrak{D}_2$. Sőt, ha $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D}_1$ egy véges részstruktúra és $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}_2$ egy beágyazás, akkor f_0 kiterjeszthető egy $f : \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_2$ izomorfizmussá.*

Bizonyítás: Soroljuk fel $\mathfrak{D}_i$ elemeit egy $\aleph_0$ hosszú $(d_n^{(i)})$ sorozatba (megengedhetjük az ismétlődést), majd vegyünk egy $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D}_1$ véges részstruktúrát, egy $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}_2$ beágyazást és $\mathfrak{A}_0 := \mathfrak{A}$. Tegyük fel, hogy valamely n-re már adott az $\mathfrak{A}_n \in \mathsf{skel}\, \mathfrak{D}_1$ véges részstruktúra és az $f_n : \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{D}_2$ beágyazás. Legyen $g_0 := f_n^{-1}$. Ekkor g_0 egy, a véges $f_n[A_n]$ alaphalmazú $\mathfrak{D}_2$-beli részstruktúrán értelmezett beágyazás. Ez a 4.1.5. Állítás értelmében kiterjed egy $\mathfrak{D}_2 \to \mathfrak{D}_1$ beágyazássá, jelölje ennek az $f_n[A_n] \cup \{d_n^{(2)}\}$ alaphalmazra vett leszűkítését g. Ekkor g^{-1} egy véges alaphalmazon értelmezett ${\mathfrak{D}_1}_{|g[f_n[A_n]\cup\{d_n^{(2)}\}]} \to \mathfrak{D}_2$ beágyazás, így ismét a 4.1.5. Állítás alapján kiterjeszthető egy $\mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_2$ beágyazássá. Legyen ennek a $g[f_n[A_n] \cup \{d_n^{(2)}\}] \cup \{d_n^{(1)}\}$ halmazra vett megszorítása f_{n+1} és $\mathfrak{A}_{n+1} := {\mathfrak{D}_1}_{|g[f_n[A_n]\cup\{d_n^{(2)}\}]\cup\{d_n^{(1)}\}}$. A konstrukció alapján világos, hogy $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_{n+1}$ és $f_n \subseteq f_{n+1}$, továbbá $d_n^{(1)} \in A_{n+1}$ és $d_n^{(2)} \in f_{n+1}[A_{n+1}]$. A rekurzió által kapunk beágyazásoknak egy olyan $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \ldots$ láncát, amelynek az $f := \bigcup_{n<\aleph_0} f_n$ limesze egy, a $\mathfrak{D}_1$ struktúrán értelmezett $\mathfrak{D}_2$-be képző szürjektív beágyazás. Tehát $f : \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_2$ egy olyan izomorfizmus, amelyre $f_0 \subseteq f$. □

Láthatjuk tehát, hogy két megszámlálató gyengén homogén struktúra pontosan akkor izomorf, ha azonos a koruk. Ez a tulajdonság fogja biztosítani a Fraïssé limesz egyértelműségét megszámlálható esetben, a következő állítás pedig a homogenitását.

4.1.7. Állítás. *Egy megszámlálható relációrendszer pontosan akkor homogén, ha gyengén homogén.*

Bizonyítás: Bármely homogén struktúra gyengén homogén is, így csak azt kell belátnunk, hogy bármely megszámlálható gyengén homogén relációrendszer homogén. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{D}$ egy megszámlálható gyengén homogén relációrendszer. Legyen $\mathfrak{A} \in \mathsf{skel}\, \mathfrak{D}$ egy véges részstruktúra, $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ egy beágyazás, valamint $\mathfrak{D}_i := \mathfrak{D}$ $(i = 1, 2)$. Ekkor $\mathfrak{D}_1$ és $\mathfrak{D}_2$ két egymással izomorf megszámlálható gyengén homogén struktúra, ezért $\mathsf{age}\, \mathfrak{D}_1 = \mathsf{age}\, \mathfrak{D}_2$. Továbbá ebben az esetben $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}_2$ egy beágyazás és $\mathfrak{A} \in \mathsf{skel}\, \mathfrak{D}_1$. A 4.1.6. Állítás alapján f_0 kiterjed egy $f : \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_2$ izomorfizmussá, amely $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ miatt éppen a $\mathfrak{D}$ relációrendszer egy automorfizmusa. □

Végül még két tulajdonságot érdemes megvizsgálnunk, melyek hasznosak lesznek a Fraïssé tétel bizonyítása során. Ezek közül az első a kiterjesztési tulajdonság fennállását fogja biztosítani, a második pedig azt, hogy gyengén homogén struktúrákból álló láncok limeszeivel előállíthatjuk az amalgamációs tulajdonsággal rendelkező ideál Fraïssé limeszét.

4.1.8. Állítás. *Legyen I egy végtelen (AP)-ideál, $\mathfrak{A}$ pedig egy olyan megszámlálható relációrendszer, amelynek kora részideálja I-nek. Ekkor $\mathfrak{A}$ kibővíthető olyan megszámlálható gyengén homogén relációrendszerré, amelynek kora szintén részideálja I-nek.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy I egy (AP)-ideál, $\mathfrak{A}$ pedig egy megszámlálható relációrendszer és $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} \subseteq I$. Először azt látjuk be, hogy $\mathfrak{A}$-nak van olyan megszámlálható $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ bővítése, amelynek kora szintén I-beli és amelyre teljesül a következő tulajdonság: tetszőleges $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}'' \in \mathsf{skel}\,\mathfrak{A}$ véges részstruktúrák esetén bármely $f_0 : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ beágyazás kiterjed egy $f : \mathfrak{A}'' \to \mathfrak{B}$ beágyazássá. Nevezzünk egy ilyen, a fenti tulajdonságban megjelenő $F = (f_0, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'')$ hármast egy $\mathfrak{A}$-beli feladatnak. Könnyen látható, hogy $|\mathfrak{A}| \leq \aleph_0$ miatt az $\mathfrak{A}$-beli feladatok is megszámlálható sokan vannak. Tekintsük ezek egy $\aleph_0$ hosszú felsorolását, és jelöljük (F_n)-nel. Ezután építsünk fel megszámlálható struktúrák egy olyan $(\mathfrak{B}_n)$ láncát, amelyre $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}$, $\mathsf{age}\,\mathfrak{B}_n \subseteq I$, és amelynek $(n+1)$-edik tagjában megoldható az n-edik F_n feladat, azaz amelyre igaz, hogy $F_n = (f_0, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'')$ esetén létezik egy $f_0 \subseteq f : \mathfrak{A}'' \to \mathfrak{B}_{n+1}$ beágyazás (bármely $n \in \mathbb{N}$-re).

Legyen $\mathfrak{B}_0 := \mathfrak{A}$, ha pedig valamely n-re $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_n$ már adott, akkor a következőképpen készíthető el $\mathfrak{B}_{n+1}$. Tegyük fel, hogy $F_n = (f_0, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'')$ az n-edik megoldandó feladat. A korábban látottakhoz hasonlóan $\mathfrak{B}_n$ könnyedén előállítható egy olyan véges relációrendszerekből álló $\aleph_0$ hosszú $(\mathfrak{B}_k^{(n)} \mid k < \aleph_0)$ lánc limeszeként, amelynek $\mathfrak{B}_0^{(n)}$ kezdőstruktúrája $\mathfrak{B}_{n|A'' \cup f_0[A']}$. Most $f_0 : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{B}_0^{(n)}$ és $\mathsf{id}_{A'} : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}''$ egy-egy beágyazás, $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}', \mathsf{age}\,\mathfrak{A}'', \mathsf{age}\,\mathfrak{B}_0^{(n)} \subseteq I$, és I rendelkezik az amalgamációs tulajdonsággal, ezért létezik egy olyan $\mathfrak{B}_0^{(n)} \subseteq \mathfrak{C}_0$ véges struktúra, melynek kora részideálja I-nek, és amelyhez létezik egy $h : \mathfrak{A}'' \to \mathfrak{C}_0$ beágyazás úgy, hogy $f_0 = h \circ \mathsf{id}_{A'}$. Mivel $\mathsf{Is}(\mathfrak{C}_0) \in I$, $\mathsf{id}_{B_0^{(n)}} : \mathfrak{B}_0^{(n)} \to \mathfrak{C}_0$ és $\mathsf{id}_{B_0^{(n)}} : \mathfrak{B}_0^{(n)} \to \mathfrak{B}_1^{(n)}$, valamint I egy (AP)-ideál, ezért van olyan $\mathfrak{C}_0 \subseteq \mathfrak{C}_1$ véges relációrendszer, amelynek kora részideálja I-nek és amelyhez létezik $h' : \mathfrak{B}_1^{(n)} \to \mathfrak{C}_1$ beágyazás úgy, hogy $\mathsf{id}_{B_0^{(n)}} = h' \circ \mathsf{id}_{B_0^{(n)}}$. Most ismét $\mathsf{Is}(\mathfrak{C}_1) \in I$, $\mathsf{id}_{B_1^{(n)}} : \mathfrak{B}_1^{(n)} \to \mathfrak{C}_1$ és $\mathsf{id}_{B_1^{(n)}} : \mathfrak{B}_1^{(n)} \to \mathfrak{B}_2^{(n)}$ és I egy (AP)-ideál, ezért van olyan $\mathfrak{C}_1 \subseteq \mathfrak{C}_2$ véges relációrendszer, amelynek kora részideálja I-nek és amelyhez létezik $h'' : \mathfrak{B}_2^{(n)} \to \mathfrak{C}_2$ beágyazás úgy, hogy $\mathsf{id}_{B_1^{(n)}} = h'' \circ \mathsf{id}_{B_1^{(n)}}$. Az eljárást folytatva olyan véges struktúrákból álló $\aleph_0$ hosszú $(\mathfrak{C}_n)$ lánc adódik, melyben bármely tag kora részideálja I-nek, és amelynek megszámlálható méretű $\mathfrak{C}$ limeszére $\mathsf{age}\ \mathfrak{C} \subseteq I$ és $\mathfrak{B}_n \subseteq \mathsf{age}\ \mathfrak{C}$ teljesül, és amiben az n-edik F_n feladat is megoldható. Ennek megfelelően legyen $\mathfrak{B}_{n+1} := \mathfrak{C}$.

Vegyük most az így adódó $\aleph_0$-hosszú $(\mathfrak{B}_n)$ lánc $\mathfrak{B}$ limeszét. Világos, hogy ez $\mathfrak{A}$-nak olyan megszámlálható bővítése, melynek kora részideálja I-nek és amelyben az összes ($\mathfrak{A}$-beli) F_n feladat megoldható. Most vegye át $\mathfrak{A}$ szerepét $\mathfrak{B}$. Az előbbiek alapján van olyan megszámlálható $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ relációrendszer, amelyre $\mathsf{age}\ \mathfrak{C} \subseteq I$ és amelyben minden $\mathfrak{B}$-beli feladat megoldható. Ezt az eljárást is folytathatjuk, így kapunk egy olyan $\aleph_0$ hosszú láncot, melynek $\widetilde{\mathfrak{A}}$-mal jelölt limeszére az alábiak teljesülnek. $\mathfrak{A} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}$, $|\widetilde{\mathfrak{A}}| \leq \aleph_0$, $\mathsf{age}\ \widetilde{\mathfrak{A}} \subseteq I$, és mivel bármely $\widetilde{\mathfrak{A}}$-beli feladat a lánc valamelyik tagjában is egy feladat - és így a következő tagban meg is oldható -, ezért bármely $\widetilde{\mathfrak{A}}$-beli feladat megoldható $\widetilde{\mathfrak{A}}$-ban, ami pedig éppen azt jelenti, hogy $\widetilde{\mathfrak{A}}$ gyengén homogén. $\square$

4.1.9. Állítás. *Gyengén homogén relációrendszerekből álló lánc limesze is gyengén homogén.*

Bizonyítás: Legyen λ egy tetszőleges rendszám, $(\mathfrak{D}_\xi)$ gyengén homogén relációrendszerek egy λ hosszú lánca, és jelölje a lánc limeszét $\mathfrak{D}$. Ha most $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}'' \in \mathsf{skel}\ \mathfrak{D}$ és $f_0 : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{D}$ egy beágyazás, akkor az $A'' \cup f_0[A']$ halmaz végessége miatt van olyan $\xi < \lambda$ rendszám, amelyre $\mathfrak{D}_{|A'' \cup f_0[A']} \subseteq \mathfrak{D}_\xi \subseteq \mathfrak{D}$. Mivel $\mathfrak{D}_\xi$ gyengén homogén, ezért f_0 kiterjed egy $f : \mathfrak{A}'' \to \mathfrak{D}_\xi$ beágyazássá, ami természetesen egy $f : \mathfrak{A}'' \to \mathfrak{D}$ beágyazás is egyben. Tehát $\mathfrak{D}$ is gyengén homogén. $\square$

4.2. Fraïssé tétele

Elérkeztünk ahhoz, hogy Roland Fraïssé híres tételét bemutassuk. Mint említettük, az ideálok reprezentálhatóságának problémája egészen eddig az 1954-ben publikált eredményig nyúlik vissza. Az előző szakaszban minden előkészületet gondosan elvégeztünk, így már csak a babérokat kell learatnunk. Legyen ehhez L egy tetszőleges relációjelkészlet és $I \in \mathscr{I}_L$ egy nemüres ideál.

4.2.1. Tétel (Fraïssé tétele). *Ha I legfeljebb $\aleph_1$ számosságú ideál, és rendelkezik az amalgamációs tulajdonsággal, akkor létezik egy legfeljebb $\max(|I|, \aleph_0)$ számosságú gyengén homogén $\mathfrak{D}$ relációrendszer, amely reprezentálja I-t. Az ilyen $\mathfrak{D}$ relációrendszereket az I (AP)-ideál* ***Fraïssé limeszének*** *nevezzük. Ha I megszámlálható, akkor Fraïssé limesze izomorfia erejéig egyértelmű, megszámlálható és homogén.*

Bizonyítás: Az 1. Probléma megfogalmazása után láttuk, hogy bármely véges ideálnak létezik egy, a $\leqslant$ rendezésre nézve legnagyobb eleme, amely ráadásul reprezentálja is az ideált. Ha I véges, akkor legyen $\mathfrak{D}$ a legnagyobb eleme (ami szintén véges) és lássuk be, hogy $\mathfrak{D}$ homogén (és így gyengén homogén is). $\mathfrak{D}$ végessége folytán elegendő azt belátnunk, hogy tetszőleges $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D}$ esetén bármely $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ beágyazás kiterjeszthető $\mathfrak{D}$ egy f automorfizmusává. Legyen adott $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$. $\mathsf{id}_A : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ és $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ egy-egy $\mathfrak{A}$-n értelmezett beágyazás az I (AP)-ideálon belül, ezért van olyan $\mathfrak{C} \in I$ és $g, h : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ beágyazások, melyekre $g \circ f_0 = h \circ \mathsf{id}_A$. Mivel $\mathfrak{C} \in I = \mathsf{age}\,\mathfrak{D}$, ezért $\mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{D}$. $\mathfrak{D} \leqslant \mathfrak{C}$ is igaz, hiszen g és h is egy-egy $\mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ beágyazás. Viszont Ω_L elemein $\leqslant$ antiszimmetrikus, ezért $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$. Ekkor azonban g és h egy-egy automorfizmus, hiszen mindkettő egy véges struktúrát önmagába képző beágyazás (ami szükségképpen szürjektív is). Így $f := g^{-1} \circ h$ a $\mathfrak{D}$ struktúra egy automorfizmusa, és a g, h beágyazások választása folytán f az f_0 kiterjesztése is. Mindez azt mutatja, hogy $\mathfrak{D}$ homogén, tehát véges ideálra igaz az állítás.

Most tegyük fel, hogy $|I| = \aleph_0$, vagy $|I| = \aleph_1$. Jelölje K azt a struktúraosztályt, amelyben olyan megszámlálható (gyengén) homogén (L-típusú) relációrendszerek vannak, melyek kora részideálja I-nek. Ekkor K nemüres, mert bármely egypontú relációrendszer homogén, így I bármely egypontú struktúrája eleme K-nak is. Először azt igazoljuk, hogy bármely $\mathfrak{A} \in K$-hoz és $\mathfrak{B} \in I$-hez létezik $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'' \in K$, amelybe beágyazható a $\mathfrak{B}$ struktúra. $\mathfrak{A} \in K$ esetén $\mathfrak{A}$ megszámlálható, ezért előáll olyan $\aleph_0$ hosszú $(\mathfrak{A}_n)$ lánc limeszeként, melynek minden tagja véges, így bármely tagjának izomorfiatípusa eleme I-nek. Mivel I ideál, ezért van olyan $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}'_0$ véges relációrendszer, amelybe beágyazható a $\mathfrak{B}$ relációrendszer. Ha valamely n-re már $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}'_n$ adott, akkor I (AP)-tulajdonsága miatt létezik olyan $\mathfrak{A}_{n+1} \subseteq \mathfrak{A}'_{n+1}$, amely véges és amelyre $\mathfrak{A}'_n \subseteq \mathfrak{A}'_{n+1}$ is teljesül. Valóban, ilyen $\mathfrak{A}'_{n+1}$ struktúrát kaphatunk, ha az amalgamációs tulajdonságot az $f = \mathsf{id}_{A_n} : \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}'_n$ és $g = \mathsf{id}_{A_n} : \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}_{n+1}$ beágyazáspárra alkalmazzuk. Világos, hogy a most bemutatott rekurzióval olyan $\aleph_0$ hosszú $(\mathfrak{A}'_n)$ láncot kapunk, amelynek $\mathfrak{A}'$ limeszének része $\mathfrak{A}$ és amelybe $\mathfrak{B}$ is beágyazható. Továbbá a lánc minden tagja véges, a lánc hossza pedig $\aleph_0$, ezért $\mathfrak{A}'$ is megszámlálható. Végül $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}' \subseteq I$ (hiszen a lánc bármely tagjának kora részideálja I-nek), ezért a 4.1.8. Állítás alapján $\mathfrak{A}'$ kiterjeszthető olyan $\mathfrak{A}''$ megszámlálható gyengén homogén relációrendszerré, amelynek kora szintén részideálja I-nek. Mivel $\mathfrak{A}''$ megszámlálható, ezért a 4.1.7. Állítás miatt homogén is, tehát eleme K-nak és olyan bővítése $\mathfrak{A}$-nak, amelybe a $\mathfrak{B} \in I$ elem beágyazható.

A következő lépésben soroljuk fel I elemeit kölcsönösen egyértelmű módon egy $\lambda := |I|$ hosszú $(\mathfrak{B}_\xi) = (\mathfrak{B}_\xi \mid \xi < \lambda)$ sorozatban. K nemüres, ezért vehetjük egy $\mathfrak{A}$ elemét, melyhez az előbbiek alapján megadhatunk olyan $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'' \in K$ struktúrát, melybe $\mathfrak{B}_0$ is beágyazható. $\mathfrak{D}_0 := \mathfrak{A}''$. Tegyük fel, hogy valamely $\xi < \lambda$ rendszám esetén bármely $\eta < \xi$-re $\mathfrak{D}_\eta$ már definiált, és $(\mathfrak{D}_\eta \mid \eta < \xi)$ olyan lánc, melynek minden tagja K-beli és amelynek tagjaira igaz, hogy $\eta < \xi$ esetén $\mathfrak{B}_\eta \leqslant \mathfrak{D}_\eta$. Jelölje most $\widetilde{\mathfrak{A}}$ ennek a már elkészült ξ hosszú láncnak a limeszét. Mivel $\xi < |I| \leq \aleph_1$, ezért $|\xi| \leq \aleph_0$, és mivel $(\mathfrak{D}_\eta \mid \eta < \xi)$ minden tagja megszámlálható, ezért $\widetilde{\mathfrak{A}}$ is az. A lánc minden tagja K-beli, így gyengén homogén is, ezért a 4.1.9. Állítás alapján $\widetilde{\mathfrak{A}}$ is gyengén homogén, tehát K-beli. Következésképp létezik olyan $\widetilde{\mathfrak{A}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}'' \in K$, amelybe $\mathfrak{B}_\xi \in I$ beágyazható. Ennek megfelelően $\mathfrak{D}_\xi := \widetilde{\mathfrak{A}}''$.

Az előbbi rekurzióval olyan $\lambda = |I| \in \{\aleph_0, \aleph_1\}$ hosszú $(\mathfrak{D}_\eta \mid \eta < \lambda)$ láncot kapunk, amelynek bármely tagjára teljesülnek a következők. $\xi < \lambda$ esetén $\mathfrak{D}_\xi$ olyan megszámlálható gyengén homogén relációrendszer, amelybe beágyazható a

$\mathfrak{B}_\xi \in I$ struktúra és amelynek kora részideálja I-nek. Mindezt összekapcsolva, azt kapjuk, hogy a $(\mathfrak{D}_\eta \mid \eta < \lambda)$ lánc $\mathfrak{D}$ limesze legfeljebb $\lambda = \max(|I|, \aleph_0)$ számosságú, $\mathsf{age}\ \mathfrak{D} = I$, és a 4.1.9. Állítás alapján $\mathfrak{D}$ gyengén homogén.

Végül tegyük fel, hogy I megszámlálható, és Fraïssé limeszét jelölje $\mathfrak{D}$. Ekkor $|\mathfrak{D}| \leq \max(|I|, \aleph_0) = \aleph_0$ miatt $\mathfrak{D}$ megszámlálható, és az előbbiek alapján gyengén homogén, ezért a 4.1.7. Állítás értelmében homogén is. Továbbá, ha $\mathfrak{D}'$ az I ideál egy másik Fraïssé limesze, akkor $\mathfrak{D}$ és $\mathfrak{D}'$ két olyan megszámlálható, és gyengén homogén relációrendszer, melynek kora azonos, ezért a 4.1.6. Állítás miatt egymással izomorf is. □

Jegyezzük meg, hogy a tételhez implicit az is hozzátartozik, hogy végtelen ideál esetén a Fraïssé limesz mérete megegyezik az ideál méretével. Valóban, ha a végtelen, legfeljebb $\aleph_1$ számosságú I ideál Fraïssé limesze $\mathfrak{D}$, akkor a Fraïssé tétel alapján $|\mathfrak{D}| \leq |I| \cdot \aleph_0 = |I|$ és kisebb a 2.1.6. Állítás miatt nem lehet.

Nézzünk most egy példát. Legyen L_G a gráfok nyelve, és jelölje $\Omega_G \subseteq \Omega_L$ a véges gráfok izomorfiatípusainak halmazát. Könnyen látható, hogy Ω_G részideálja Ω_L-nek, és nem nehéz megmutatni azt sem, hogy rendelkezik az amalgamációs tulajdonsággal (a részleteket az Olvasóra bízzuk). Továbbá L_G véges nyelvtípus, ezért $|\Omega_L| = \aleph_0$, így Ω_G is megszámlálható. Véges persze nem lehet, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}^+$-ra eleme az n pontú él nélküli gráftípus, tehát $|\Omega_G| = \aleph_0$. Ekkor a Fraïssé tétel alapján izomorfia erejéig egyértelműen létezik egy olyan megszámlálhatóan végtelen homogén relációrendszer, amely reprezentálja Ω_G-t. Világos, hogy ha egy L_G-típusú relációrendszer minden véges része gráf, akkor ő is az. Ezek alapján a következő mondható.

4.2.2. Tétel. *Izomorfia erejéig egyértelműen létezik egy olyan megszámlálhatóan végtelen homogén gráf, amelybe az összes véges gráf beágyazható. Ez a gráf éppen az Ω_G ideál Fraïssé limesze.*

4.3. Véletlen gráfok

Nézzünk most egy példát a Fraïssé tétel alkalmazására. Igazoljuk, hogy ha véletlenszerűen választunk egy megszámlálhatóan végtelen gráfot, akkor az majdnem biztosan homogén. Ehhez persze először a véletlen gráf fogalmát kell, hogy tisztázzuk. Mi a véletlen gráfok Erdős-Rényi féle modelljét fogjuk ismertetni és használni. Legyen V egy tetszőleges nemüres halmaz, és jelölje kételemű részhalmazainak halmazát $[V]^2$. Rögzítsünk V kételemű $uv = \{u, v\} \in [V]^2$ részhalmazaihoz egy-egy X_{uv} egymástól (teljesen) független igazságos indikátorváltozót, és jelölje az $(X_{uv}) = (X_{uv} \mid uv \in [V]^2)$ független rendszerhez tartozó valószínűségi mezőt $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (ez a tér a szorzattér-konstrukcióval könnyen elkészíthető). Tehát bármely uv párra $\mathbb{P}(X_{uv} = 0) = \mathbb{P}(X_{uv} = 1) = \frac{1}{2}$. $G_H = (V, X_{uv})$ a V ponthalmaz felett feszített **véletlen gráf**. Úgy képzeljük, hogy ha az $\omega \in X$ elemi esemény következik be, akkor a $G = G_V(\omega)$ véletlen gráfunk a következő: $V(G) = V$ és $E(G) = \{uv \in [V]^2 \mid X_{uv}(\omega) = 1\}$.

A továbbiakban V vagy a természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza lesz, vagy egy véges halmaz. Véges V esetén feltehetjük, hogy a ponthalmaz $V = \{1, \ldots, n\}$ alakú (alkalmas $n \in \mathbb{N}^+$-szal), és ebben az esetben G_V-t G_n-nel, $V = \mathbb{N}$ esetén pedig G_∞-nel jelöljük. Így például $2 \leq n$ esetén

$$\mathbb{P}(G_n \text{ teljes}) = \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}}.$$

Vegyük észre, hogy $V = \mathbb{N}$ esetén $|[V]^2| = |[[V]^2]^{<\infty}| = \aleph_0$ (ahol egy A halmaz esetén $[A]^{<\infty}$ jelöli A véges részhalmazainak halmazát), ezért a 4.1.7. Állítás értelmében G_∞ pontosan akkor homogén, ha gyengén homogén. Ha adott két véges $A \subseteq A' \subseteq V$ ponthalmaz, valamint egy $f_0 : A \to V$ függvény, akkor azon elemi események halmaza, amelyre f_0 beágyazás és amelyre f_0 kiterjeszthető egy A'-n értelmezett beágyazássá $\mathcal{A}$-beli eseményt alkot, hiszen megszámlálhatóan sok halmazművelettel előállítható az indikátorok segítségével. Ha adott az elemei események halmazán egy Φ pontbeli tulajdonság ($X \to \{0, 1\}$ függvény), akkor $\{\Phi\}$ jelöli az $\{\omega \in X \mid \Phi(\omega)\}$ halmazt. $G := G_{\infty|A}$ és $G' := G_{\infty|A'}$. Ekkor az, hogy f_0 egy $G \to G_\infty$ beágyazás, $\mathcal{A}$-beli esemény, hiszen

$$\{f_0 : G \to G_\infty \text{ beágyazás}\} \;=\; \bigcap_{uv \in [A]^2} \{X_{uv} = X_{f(u)f(v)}\} \;\in\; \mathcal{A}.$$

Ennek megfelelően, ha $A' - A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, akkor

$$\{\text{ha } f_0 : G \to G_\infty \text{ beágyazás, akkor kiterjeszthető egy } f : G' \to G_\infty \text{ beágyazássá}\} \;=$$

$$=\; \{f_0 : G \to G_\infty \text{ beágyazás}\}^{\complement} \cup$$

$$\bigcup_{a'_1,\ldots,a'_n \in V} \{\text{ha } f_{|A} = f_0 \text{ és } f(a_1) = a'_1, \ldots, f(a_n) = a'_n, \text{ akkor } f : G \to G_\infty \text{ egy beágyazás}\}$$

is egy $\mathcal{A}$-beli esemény (itt $^{\complement}$ az X halmazra vontakozó komplementer-képzést jelöli). Mivel V megszámlálható, ezért megszámlálhatóan sok $A \subseteq A' \in [V]^{<\infty}$ halmazpár és $f_0 : A \to V$ függvény rögzíthető. Éppen ezért

$$\{G_\infty \text{ homogén}\} \;=\; \{G_\infty \text{ gyengén homogén}\} \;=$$

$$\bigcap_{A \subseteq A' \in [V]^{<\infty}, f_0 : A \to V} \{\text{ha } f_0 : G_{\infty|A} \to G_\infty \text{ beágyazás, akkor kiterjeszthető egy}$$

$$f : G_{\infty|A'} \to G_\infty \text{ beágyazássá}\} \;\in\; \mathcal{A}.$$

Állítjuk, hogy $\mathbb{P}(G_\infty \text{ homogén}) \;=\; 1$. Először $n, m \in \mathbb{N}^+$ esetén tekintsük a gráfelmélet nyelvén a következő $\varphi_{n,m}$ formulát:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m \Big(\big(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j \;\wedge \bigwedge_{1 \le i < j \le m} y_i \neq y_j \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} x_i \neq y_j \big) \;\to$$

$$\to\; \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} (x_i \neq z \;\wedge\; y_j \neq z \;\wedge\; \mathsf{E}(x_i, z) \;\wedge\; \neg \mathsf{E}(y_j, z)) \Big),$$

és $T_R \;:=\; \{\forall x \neg \mathsf{E}(x,x)\;,\; \forall x \forall y (\mathsf{E}(x,y) \;\to\; \mathsf{E}(y,x))\} \;\cup\; \{\varphi_{n,m} \mid n, m \;\in\; \mathbb{N}^+\}$. Így, ha T_R konzisztens, akkor minden modellje egy olyan gráf, melyben bárhogyan is veszünk n különböző $u_1, \dots, u_n$, illetve ezektől és egymástól is különböző m darab $v_1, \dots, v_m$ csúcsot, meg tudunk adni egy minden eddigi ponttól különböző w csúcsot, amely az $u_1, \dots, u_n$ csúcsok mindegyikével és a $v_1, \dots, v_m$ csúcsok egyikével sem szomszédos. Ebből az is látható, hogy T_R-nek csak végtelen modelljei lehetnek.

Jelöljük a véges gráftípusok halmazát Ω_G-vel. Fraïssé tétele után láttuk, hogy izomorfia erejéig egyértelműen létezik egy megszámlálhatóan végtelen homogén relációrendszer, amely reprezentálja Ω_G-t, és ez a Fraïssé limesz is egy egyszerű gráf, jelölje őt D. Állítjuk, hogy T_R-nek izomorfia erejéig egyetlen megszámlálhatóan végtelen modellje van, azaz T_R egy $\aleph_0$**-kategorikus** elmélet, és ez a lényegében egyértelmű gráf éppen D-vel azonos.

4.3.1. Állítás. *A T_R elmélet $\aleph_0$-kategorikus és $D \models T_R$.*

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy D modellje T_R-nek. Mivel D egy gráf, ezért azt kell csak igazolnunk, hogy tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}^+$ esetén $D \models \varphi_{n,m}$. Vegyünk ehhez D-ből $n+m$ különböző $u_1, \dots, u_n$ és $v_1, \dots, v_m$ csúcsot, $U := \{u_1, \dots, u_n\}$, $U' := \{v_1, \dots, v_m\}$ és $D_0 := D_{|U \cup U'}$. Egészítsük ki D_0-t egy új w_0 csúccsal úgy, hogy az minden U-belivel, de egyetlen U'-belivel se legyen szomszédos, és jelöljük a kapott gráfot D'-vel. Ekkor $\mathsf{Is}(D') \in \Omega_G$, és mivel $\mathsf{age}\ D = \Omega_G$, ezért D' beágyazható D-be. Legyen $g : D' \to D$ egy beágyazás és $f_0 := (g_{|D_0})^{-1}$. Mivel f_0 egy, a D gyengén homogén gráf $g[D_0]$ véges részén értelmezett beágyazás, ezért kiterjed egy $f : g[D'] \to D$ beágyazássá, és ebben az esetben $f \circ g_{|D_0} = \mathsf{id}_{D_0}$. Így viszont a $w := f(g(w_0))$ a D gráf olyan csúcsa, amely szomszédos U elemeivel, de nem szomszédos U' egyetlen elemével sem. Tehát $D \models \varphi_{n,m}$ tetszőleges n, m pozitív egész esetén, ezért pedig $D \models T_R$.

Tehát T_R-nek van egy $\aleph_0$ számosságú modellje. Ha most $\widetilde{D}$ is egy megszámlálhatóan végtelen modellje, akkor belátjuk, hogy izomorf D-vel. Ehhez a Fraïssé limesz egyértelműsége alapján azt kell csak megmutatnunk, hogy ebben az esetben $\widetilde{D}$ gyengén homogén és reprezentálja Ω_G-t. Mivel $\mathsf{age}\ \widetilde{D} \subseteq \Omega_G$ bizonyosan igaz, ezért azt kell csak igazolnunk, hogy $\widetilde{D}$ gyengén homogén és bármely véges gráf beágyazható $\widetilde{D}$-ba. Először $\widetilde{D}$ gyenge homogenitását mutatjuk meg. Tegyük fel, hogy $G' \subseteq G'' \subseteq \widetilde{D}$ két véges részgráf és $f_0 : G' \to \widetilde{D}$ egy beágyazás. Ha $G' = G''$, akkor az $f := f_0$ választás megfelel, tehát feltehető, hogy $G' \subsetneq G''$. Azt is feltehetjük, hogy G''-nek csak eggyel több pontja van, mint G'-nek, ellenkező esetben $|V(G'') - V(G')|$ alkalommal megismételve a következő gondolatot, megkapnánk a keresett $f : G'' \to \widetilde{D}$ kiterjesztést. Legyen tehát w_0 a $V(G'') - V(G')$ halmaz egyetlen eleme. Jelölje U a w_0-al szomszédos G'-beli csúcsokat, U' pedig a többi G'-beli pontot. Mivel $\widetilde{D}$ modellje T_R-nek, ezért $\widetilde{D}$-nak van olyan w csúcsa, amely az $f_0[U]$-beli csúcsok mindegyikével szomszédos, de nem szomszédos az $f_0[U']$ csúcsok egyikével sem. Legyen f az a G''-n értelmezett függvény, amely G' pontjain megegyezik f_0-al, és amely w_0-t w-be viszi. Világos, hogy f az f_0-nak egy olyan kiterjesztése, amely egy $f : G'' \to \widetilde{D}$ beágyazás. Tehát $\widetilde{D}$ gyengén homogén, így már csak azt kell belátnunk, hogy $\widetilde{D}$-ba bármely véges gráf beágyazható.

Indirekt tegyük fel, hogy nem ez a helyzet, és jelölje k a legkisebb olyan pozitív egész számot, amelyhez létezik olyan k pontú véges G gráf, amely nem ágyazható be $\widetilde{D}$-ba. Nyilván $2 \leq k$. Vegyük G egy $k-1$ elemű (feszített) részgráfját, jelöljük G'-vel és $V(G) - V(G')$ egyetlen pontját w_0-al. A feltevésünk alapján $G' \leqslant \widetilde{D}$, és azt is feltehetjük, hogy $G' \subseteq D$. U álljon G' azon csúcsaiból, melyek szomszédosak w_0-al, U' pedig azokból, melyek nem szomszédosak w_0-al. Mivel $\widetilde{D} \models T_R$, ezért $\widetilde{D}$-ban létezik olyan w csúcs, amely U minden elemével, de U' egyetlen elemével sem szomszédos. Végül legyen $f : G \to \widetilde{D}$ az a függvény, amely G' csúcsain identikusan hat, w_0-t pedig w-be viszi. A konstrukció alapján világos, hogy $f : G \to \widetilde{D}$ egy beágyazás, ami ellentmond a $G \notin \mathsf{age}\, \widetilde{D}$ feltevésünknek. Tehát $\widetilde{D} \cong D$, és ezért T_R egy $\aleph_0$-kategorikus elmélet. $\square$

Bebizonyítottuk tehát, hogy T_R-nek nemcsak, hogy izomorfia erejéig egyértelműen létezik megszámlálhatóan végtelen modellje, de az a lényegében egyértelmű modellje nem más, mint az Ω_L ideál Fraïssé limesze. Ahhoz, hogy belássuk, G_∞ majdnem biztosan homogén, még a következő állítást kell meggondolnunk.

4.3.2. Állítás. $\mathbb{P}(G_\infty \models T_R) = 1.$

Bizonyítás: Azt, hogy a gráfelmélet bármely φ formulája esetén $\{G_\infty \models \varphi\} \in \mathcal{A}$, a $\{G_\infty$ gyengén homogén$\} \in \mathcal{A}$ állítás bizonyításához hasonlóan igazolhatjuk formulák összetettségére vonatkozó indukció segítségével. Mivel T_R megszámlálható, így egyrészről $\{G_\infty \models T_R\}$ is $\mathcal{A}$-beli esemény, másfelől az állításunk igazolása céljából elegendő azt megmutatnunk, hogy bármely $\varphi \in T_R$ formulára $\mathbb{P}(G_\infty \models \varphi) = 1$. Mivel G_∞ minden esetben egy gráf, ezért azt kell csak igazolnunk, hogy tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}^+$ esetén $\mathbb{P}(G_\infty \models \varphi_{n,m}) = 1$. Legyen $U, U' \subseteq V(G_\infty)$ két diszjunkt halmaz, $|U| = n$ és $|U'| = m$, $V(G_\infty) - (U \,\dot\cup\, U') = \{w_0, w_1, w_2, \ldots\}$, és rövidítsük $\mathsf{S}(w, U, U')$-vel azt az állítást, hogy a w csúcs szomszédos U minden elemével, de nem szomszédos U' egyetlen elemével sem. Ekkor

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{van olyan } w \in V(G_\infty) - (U \cup U') \text{ csúcs, amelyre } \mathsf{S}(w, U, U')) = \\
&= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=0}^{\infty} \{\neg\mathsf{S}(w_0, U, U') \wedge \ldots \wedge \neg\mathsf{S}(w_k, U, U')\}\Big) = \\
&= 1 - \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\neg\mathsf{S}(w_0, U, U') \wedge \ldots \wedge \neg\mathsf{S}(w_k, U, U')) = \\
&= 1 - \lim_{k\to\infty} \big[\mathbb{P}(\neg\mathsf{S}(w_0, U, U')) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\neg\mathsf{S}(w_k, U, U'))\big] = \\
&= 1 - \lim_{k\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{2^{n+m}}\Big)^{k+1} = \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

ahol kihasználtuk a valószínűség folytonosságát, az X_{uv} valószínűségi változók függetlenségét és azt, hogy $0 \le q := 1 - \frac{1}{2^{n+m}} < 1$ miatt $q^{k+1} \to 0$, amint $k \to \infty$. Végül, mivel csak megszámlálhatóan sok ilyen (U, U') pár létezik, azt is megkaptuk, hogy G_∞-ben 1 valószínűséggel igaz a $\varphi_{n,m}$ formula. Ez a megszámlálhatóan sok (n, m) pár bármelyikére igaz, ezért G_∞ majdnem biztosan modellje T_R-nek. □

Ennek a két állításnak két meglepő következménye is van. Az egyik az, amit már említettünk: G_∞ majdnem biztosan homogén, a másik pedig a nevezetes **0-1 törvény**, amely azt állítja, hogy bármely, a gráfelmélet nyelvén felírt φ formula G_∞-ben 0, vagy 1 valószínűséggel igaz.

4.3.3. Következmény. *A G_∞ véletlen gráf 1 valószínűséggel homogén.*

Bizonyítás: Ha G_∞ nem homogén, akkor biztosan nem izomorf Ω_G Fraïssé limeszével, és így nem is lehet modellje T_R-nek. Azt viszont láttuk, hogy $\mathbb{P}(G_\infty \not\models T_R) = 0$, ezért $\mathbb{P}(G_\infty$ nem homogén$) = 0$ szintén teljesül. $\square$

4.3.4. Következmény (0-1 törvény). *$\varphi \in \mathsf{Form}(L_G)$ esetén $\mathbb{P}(G_\infty \models \varphi) \in \{0, 1\}$.*

Bizonyítás: Rögzítsük a φ formulát, és jelölje Ω_G Fraïssé limeszét D. Ekkor a teljes valószínűség tétele alapján

$$\mathbb{P}(G_\infty \models \varphi) =$$
$$= \mathbb{P}(G_\infty \models \varphi \mid D \models \varphi) \cdot \mathbb{P}(D \models \varphi) + \mathbb{P}(G_\infty \models \varphi \mid D \not\models \varphi) \cdot \mathbb{P}(D \not\models \varphi) =$$
$$= \mathbb{P}(D \models \varphi),$$

ugyanis $\mathbb{P}(G_\infty \cong D) = 1$, amiből pedig az következik, hogy $\mathbb{P}(G_\infty \models \varphi \mid D \models \varphi) = 1$ és $\mathbb{P}(G_\infty \models \varphi \mid D \not\models \varphi) = 0$. Viszont $\mathbb{P}(D \models \varphi) = 1$, ha φ igaz D-ben és $\mathbb{P}(D \models \varphi) = 0$, ha φ nem igaz D-ben, hiszen D egy konkrét gráf, nem függ a véletlentől. $\square$

Ezekhez az állításokhoz hasonlóan sok más érdekességet is megfigyelhetnénk a véletlen gráfokról, de terjedelmi korlátok miatt most ezt nem tesszük meg. Annyit megjegyzünk még, hogy ezek az állítások a Fraïssé tétel ismerete nélkül is igazolhatóak, egy ilyen lehetséges felépítést [6]-ban olvashatunk.

5. fejezet

Zárt ideálok

A fejezet első részében a zárt ideálok fogalmával fogunk megismerkedni, melyek a véges nyelvreduktumok segítségével értelmezhetőek. Lényegében arról van szó, hogy ha egy relációrendszer véges reduktumai benne vannak egy ideálban (illetve az ideál megfelelő reduktumában), akkor az eredeti relációrendszer - mint a véges reduktumainak egyfajta torlódási pontja - szintén eleme az ideálnak. Innen ered az elnevezés. A modellelmélet egyik legfontosabb segédeszköze az ultraszorzás, ezért felvetődhet a kérdés, hogy eddig miért nem vizsgáltuk a reprezentálhatóság problémáját az ultraszorzatok segítségével. A fejezet második részében erre adunk választ. Végül, a fejezet utolsó szakaszában röviden vázoljuk a szaturált relációrendszerek fogalmát, majd megmutatjuk, hogy egy ideál κ-szaturált struktúrával való reprezentálhatósága az ideál zártságával ekvivalens.

5.1. Zárt ideál fogalma

A bevezető fejezetben értelmeztük relációrendszerek reduktumait. Egy L nyelv $L' \subseteq L$ része és egy $\mathfrak{A} \in S_L$ relációrendszer esetén az $\mathfrak{A}$ struktúra L'-reduktumát $\mathfrak{A}_{|L'}$-vel jelöltük. A zárt ideálok fogalmához úgy juthatunk el, ha az ideálok reduktumait is értelmezzük. Legyen ehhez L' az L nyelv része és $I \in \mathscr{I}_L$ egy ideál. Ekkor

$$I_{|L'} \doteq \{\mathsf{Is}(\mathfrak{A}_{|L'}) \in \Omega_{L'} \mid \mathfrak{A} \in I\}$$

az I **ideál L'-reduktuma**. Ha L' véges, akkor **véges reduktum**ról beszélhetünk. Ezekkel a fogalmakkal kapcsolatban a következő megállapodással élünk: ha valamely L típusú $\mathfrak{A}$ relációrendszerre azt írjuk, hogy $\mathfrak{A}_{|L'} \in I_{|L'}$, akkor ez alatt azt értjük, hogy $\mathsf{Is}(\mathfrak{A}_{|L'}) \in I_{|L'}$. Vegyük észre, hogy ha $I \subseteq \Omega_L$ egy ideál, akkor $I_{|L'} \subseteq \Omega_{L'}$ is egy ideál és persze $(\Omega_L)_{|L'} = \Omega_{L'}$.

5.1.1. Definíció. *$I \in \mathscr{I}_L$ egy **zárt ideál**, ha bármely $\mathfrak{A} \in \Omega_L$ relációrendszerre $\mathfrak{A} \in I$ pontosan akkor igaz, ha L bármely véges $L' \subseteq L$ részére $\mathfrak{A}_{|L'} \in I_{|L'}$.*

Könnyen látható, hogy $\emptyset$ és Ω_L zárt ideálok, sőt bármely véges ideál is zárt. Továbbá véges L nyelv esetén Ω_L részideáljai zártak, de végtelen nyelvek esetén léteznek nem zárt ideálok is. Hogy egy zárt ideál miért is érdekes, azt a következő állítás mutatja.

5.1.2. Tétel. *Bármely nemüres zárt ideál rendelkezik a kiterjesztési tulajdonsággal, tehát reprezentálható is.*

A tételt közvetlenül is beláthatnánk a diagramm-lemma és a kompaktsági tétel segítségével, mi viszont az ultraszorzatok módszerét fogjuk alkalmazni. A bizonyítás előtt érdemes megemlítenünk, hogy a tételből azonnal következik, hogy véges L nyelv esetén bármely ideál rendelkezik a kiterjesztési tulajdonsággal, következésképp reprezentálható is, ugyanis véges nyelv esetén bármely ideál zárt. Tehát az 5.1.2. Tétel felhasználásával újabb bizonyítást nyertünk a 3.1.5. Következményre.

5.2. Ultraszorzatok

Most az ultraszorzatokkal kapcsolatos ismereteket szeretnénk feleleveníteni, de az egyszerűség kedvéért most is csak relációrendszerekre szorítkozunk. Minden, az ultraszorzatok témakörébe tartozó, általunk felhasznált információ megtalálható [6]-ban, most csak röviden vázoljuk a szerkezetüket. Vegyünk ehhez egy Γ indexhalmazt (nemüres halmazt), melynek elemeit leggyakrabban ξ-vel, η-val, stb. jelöljük majd (feltehetnénk, hogy minden indexhalmaz egy 0-tól különböző számossággal egyenlő, melynek minden eleme rendszám). Ha $\xi \in \Gamma$ esetén A_ξ egy nemüres halmaz, akkor a kiválasztási axióma alapján az A_ξ halmazok $\prod_{\xi\in\Gamma} A_\xi$ szorzata sem üres. Ennek egy $a \in \prod_{\xi\in\Gamma} A_\xi$ elemét vektornak is hívhatjuk, melynek ξ-edik koordinátáját $a(\xi)$-vel, vagy a_ξ-vel jelöljük ($a_\xi \in A_\xi$).

Ha Γ egy indexhalmaz, akkor beszélhetünk Γ feletti ultraszűrőkről, melyeket általában $\mathcal{U}$-val jelölünk. Γ részhalmazainak egy $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{P}(\Gamma)$ rendszere **szűrő**, ha nemüres, nem tartalmazza az üres halmazt, zárt a véges metszet-képzésre (azaz $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{U}$ esetén $u_1 \cap \ldots \cap u_n \in \mathcal{U}$), és ha felszálló (azaz $u \in \mathcal{U}$ és $u \subseteq v \subseteq \Gamma$ esetén $v \in \mathcal{U}$). Ha még az is igaz, hogy $u \subseteq \Gamma$ esetén vagy u, vagy $\Gamma - u$ eleme $\mathcal{U}$-nak (mindkettő természetesen nem lehet), akkor $\mathcal{U}$ egy Γ feletti **ultraszűrő**. Ultraszűrő készíthető például egy centrált rendszer segítségével. Γ részhalmazainak egy $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{P}(\Gamma)$ rendszere **centrált rendszer**, ha bármely véges részének metszete nem üres, azaz ha $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{C}$ esetén $u_1 \cap \ldots \cap u_n \neq \emptyset$. Ismert, hogy bármely Γ-beli $\mathcal{C}$ centrált rendszer kitejeszthető egy Γ feletti $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$ ultraszűrővé.

Ha már adott egy Γ feletti $\mathcal{U}$ ultraszűrő, akkor a következőképpen készíthetjük el relációrendszerek egy ultraszorzatát. Legyen ehhez $\xi \in \Gamma$ esetén $\mathfrak{A}_\xi \in S_L$ egy relációrendszer, és tekintsük ezek alaphalmazainak $\prod_{\xi\in\Gamma} A_\xi$ szorzatát. Ezen a szorzathalmazon $\mathcal{U}$ segítségével definiálhatunk egy $\sim$ ekvivalenciarelációt: $a, a' \in \prod_{\xi\in\Gamma} A_\xi$ esetén

$$a \sim a' \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad \{\xi \in \Gamma \mid a_\xi = a'_\xi\} \in \mathcal{U}.$$

Szokás azt mondani, hogy $a \sim a'$ pontosan akkor teljesül, ha a és a' ultra sok helyen egyenlő. Az $\mathfrak{A}_\xi$ ($\xi \in \Gamma$) relációrendszerek $\mathfrak{A} := \prod_{\xi\in\Gamma} \mathfrak{A}_\xi{/_{\mathcal{U}}}$ **ultraszorzat**a az a relációrendszer, melynek alaphalmaza a $\prod_{\xi\in\Gamma} A_\xi{/_{\mathcal{U}}}$ faktorhalmaz, és amelyben egy $\mathsf{R} \in L$ relációjel interpretációja a következő:

$$\tilde{a} \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \quad \text{akkor és csakis akkor, ha} \quad \{\xi \in \Gamma \mid a_\xi \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}_\xi}\} \in \mathcal{U},$$

ahol $\tilde{a}$ az $a \in \prod_{\xi\in\Gamma} A_\xi$ vektor $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztálya (könnyen belátható, hogy a fenti ételmezés független az ekvivalenciaosztály reprezentánsának választásától). A következő tétel alapvető az ultraszorzatok elméletében.

5.2.1. Tétel (Łoś-lemma). *A jelöléseinket megtartva, egy $\varphi \in \mathsf{Form}(L)$ formula pontosan akkor igaz a $\prod_{\xi\in\Gamma} \mathfrak{A}_\xi \big/ _{\mathcal{U}}$ ultraszorzatban, ha ultrasok koordinátán igaz:*

$$\{\xi \in \Gamma \mid \mathfrak{A}_\xi \models \varphi\} \ \in \ \mathcal{U}.$$

Az ultraszorzás éppen az előző állítás miatt lesz a modellelmélet egyik fontos segédeszköze. Segítségével például a kompaktsági tétel is igazolható, és nagyon sok esetben ultraszorzás módszerével készítehetünk modelleket egy-egy elmélethez. A vizsgálataink során is szükség lesz az alkalmazásukra, és az ultraszorzással párhuzamosan a modellosztályok axiomatizálhatósága is előkerül majd, amely éppen az ultraszorzatok segítségével jellemezhető.

Egy $K \subseteq S_L$ modellosztályt akkor nevezünk **axiomatizálható**nak, ha megadható olyan $T \subseteq \mathsf{Form}(L)$ elmélet, amelynek modelljei éppen a K osztály elemei, azaz amelyre $\mathsf{Mod}(T) = K$. Ez a logikai fogalom jellemezhető az ultraszorzás és az elemi ekvivalencia segítségével. Két struktúra **elemien ekvivalens**, ha elméletük azonos, azaz $\mathfrak{A} \equiv_e \mathfrak{B}$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) = \mathsf{Th}(\mathfrak{B})$. Ennek megfelelően egy K **modellosztály zárt az elemi ekvivalenciára**, ha valahányszor $\mathfrak{A} \in K$ és $\mathfrak{A} \equiv_e \mathfrak{B}$, úgy $\mathfrak{B} \in K$ is teljesül. Végül a K **modellosztály zárt az ultraszorzásra**, ha bármely Γ indexhalmazra és Γ feletti $\mathcal{U}$ ultraszűrőre igaz, hogy K-beli $\mathfrak{A}_\xi$ struktúrák $\prod_{\xi\in\Gamma} \mathfrak{A}_\xi \big/ _{\mathcal{U}}$ ultraszorzata is K-beli. A következőt is ismertnek tekintjük (lásd [6]).

5.2.2. Tétel. *Egy modellosztály pontosan akkor axiomatizálható, ha zárt az elemi ekvivalenciára és az ultraszorzásra.*

Most már visszakanyarodhatunk eredeti célunk irányába, a zárt ideálok reprezentálhatóságához. Először nézzük meg, hogy az univerzális elmélettel történő axiomatizálást, illetve az ultraszorzás műveletére való zártságot miként értelmezhetjük az ideálok körében.

5.2.3. Definíció. *Az I* ***ideál univerzális elmélettel axiomatizálható****, ha van olyan univerzális mondatokból álló $T \subseteq \mathsf{Form}(L)$ elmélet, amelyre $\mathsf{Mod}(T) \cap \Omega_L = I$, azaz ha I a T elmélet véges modelljeinek izomorfiatípusaiból áll.*

5.2.4. Definíció. *Az I* ***ideál zárt az ultraszorzásra****, ha bárhogyan is veszünk egy Γ indexhalmazt, egy Γ feletti $\mathcal{U}$ ultraszűrőt és $\xi \in \Gamma$ esetén olyan $\mathfrak{A}_\xi \in S_L$ relációrendszereket, melyekre $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}_\xi \subseteq I$, akkor a belőlük képzett ultraszorzatra $\mathsf{age}\Big(\prod_{\xi\in\Gamma}\mathfrak{A}_\xi/_{\mathcal{U}}\Big) \subseteq I$.*

Az előbbi fogalmak segítségével megfogalmazhatjuk a következő lemmát, amely egy önmagában is érdekes állítás, és emellett az 5.1.2. Tétel bizonyításában is nagy segítséget fog nyújtani.

5.2.5. Lemma. *Tetszőleges $I \in \mathscr{I}_L$ ideálra az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *I zárt ideál,*

(2) *I univerzális elmélettel axiomatizálható,*

(3) *I zárt az ultraszorzásra.*

Bizonyítás: Ha $I = \emptyset$ az üres ideál, akkor zárt ideál, zárt az ultraszorzásra és axiomatizálja a $\{\forall x \neg(x = x)\}$ univerzális elmélet. Tegyük fel tehát, hogy $I \neq \emptyset$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Álljon T az összes olyan univerzális mondatból, melyek igazak I minden elemében. Állítjuk, hogy $I = \mathsf{Mod}(T) \cap \Omega_L$. T definíciója alapján az $I \subseteq \mathsf{Mod}(T) \cap \Omega_L$ tartalmazás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} \in \mathsf{Mod}(T) \cap \Omega_L$. I zártsága miatt elegendő azt megmutatni, hogy bármely véges $L' \subseteq L$ esetén $\mathfrak{A}_{|L'} \in I_{|L'}$. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem így van, azaz van olyan véges $L' \subseteq L$, amelyre $\mathfrak{A}_{|L'} \notin I_{|L'}$. Vegyük észre, hogy L' végessége folytán $\mathfrak{A}_{|L'}$ diagrammja véges sok (zárt és kvantromentes) formulából áll. $\mathsf{diag}\,\mathfrak{A}_{|L}$ elemeit kapcsoljuk össze konjunkcióval:

$$\psi_0 \ := \bigwedge_{\varphi \,\in\, \mathsf{diag}\ \mathfrak{A}_{|L'}} \varphi.$$

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}$ alaphalmaza $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, majd cseréljük ki ψ_0-ban a c_{a_i} konstansjelet az x_i változóra ($i = 1, \ldots, n$), és az így kapott nyílt formulát jelölje $\psi_1 \in \mathsf{Form}(L')$. Végül

$$\psi \ := \ \exists x_1 \ldots \exists x_n \psi_1.$$

Világos, hogy $\mathfrak{A}_{|L'} \notin I_{|L'}$ miatt I-nek nincs olyan eleme, amelyben igaz volna ψ, ellenkező esetben $\mathfrak{A}_{|L'}$ beágyazható volna $I_{|L'}$ valamelyik elemébe, ami az ideálok leszálló tulajdonsága miatt az $\mathfrak{A}_{|L'} \in I_{|L'}$ ellentmondáshoz vezetne. Tehát $I_{|L'}$ bármely eleme modellje a zárt ψ formula $\neg\psi$ tagadásának. Mivel $\neg\psi$ univerzális mondat (pontosabban az univerzális $\forall x_1 \ldots \forall x_n \neg\psi_1$ formulával ekvivalens mondat), ezért $\neg\psi \in T$, így $\mathfrak{A} \models \neg\psi$ is adódik, ami pedig azzal ekvivalens, hogy $\mathfrak{A}_{|L'} \models \neg\psi$. Ez azonban lehetetlen, hiszen ψ konstrukciója folytán $\mathfrak{A}_{|L'} \models \psi$. Tehát az I ideált axiomatizálja az univerzális T elmélet.

(2) $\Rightarrow$ (3): Most tegyük fel, hogy I-t axiomatizálja az univerzális T elmélet. A $K := \mathsf{Mod}(T)$ jelöléssel tehát $I = K \cap \Omega_L$. Legyen Γ indexhalmaz, $\mathcal{U}$ ultraszűrő Γ felett, és tegyük fel, hogy $\xi \in \Gamma$ esetén az $\mathfrak{A}_\xi \in S_L$ relációrendszerek olyanok, hogy $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}_\xi \subseteq I$. A T elmélet minden eleme egy univerzális mondat, és bármely $\varphi \in T$ univerzális mondat esetén φ igaz $\mathfrak{A}_\xi$ ($\xi \in \Gamma$) bármely véges részstruktúrájában, hiszen $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}_\xi \subseteq I = K \cap \Omega_L$. Ebből viszont azt kapjuk, hogy $\mathfrak{A}_\xi \models \varphi$, hiszen egy univerzális mondat pontosan akkor igaz egy struktúrában, ha annak bármely részstruktúrájában is igaz. Mindezt összefoglalva azt mondhatjuk, hogy $\xi \in \Gamma$ esetén $\mathfrak{A}_\xi \models T$, ezért $\mathfrak{A}_\xi \in K$. Mivel K-t a T elmélettel axiomatizáltuk, ezért K axiomatizálható, és így az 5.2.2. Tétel alapján zárt az ultraszorzásra is, következésképp

$$\prod_{\xi\in\Gamma} \mathfrak{A}_\xi \big/ \mathcal{U} \in K.$$

De $K = \mathsf{Mod}(T)$ és T formulái univerzális mondatok, ezért $\prod_{\xi\in\Gamma} \mathfrak{A}_\xi \big/ \mathcal{U}$ bármely véges része is modellje T-nek, és így

$$\mathsf{age}\Big(\prod_{\xi\in\Gamma}\mathfrak{A}_\xi\big/_{\mathcal{U}}\Big) \subseteq \ \mathsf{Mod}(T)\cap\Omega_L \ = \ I,$$

azaz az I ideál zárt az ultraszorzásra.

(3) $\Rightarrow$ (1): Végül indirekt tegyük fel, hogy az I ideál nem zárt, de zárt az ultraszorzásra. Ekkor létezik egy olyan $\mathfrak{A}\in\Omega_L$ véges relációrendszer, amely nem eleme I-nek, de bármely $L'\subseteq L$ véges rész esetén $\mathfrak{A}_{|L'}\in I_{|L'}$, tehát van olyan $\mathfrak{B}_{L'}\in I$, amelyre $\mathfrak{A}_{|L'}\cong(\mathfrak{B}_{L'})_{|L'}$. Álljon a Γ indexhalmazunk az L nyelv véges részibből, és $L'\in\Gamma$ esetén $\widehat{L'}:=\{L''\in\Gamma \mid L'\subseteq L''\}$. Ekkor $\{\widehat{L'}\mid L'\in\Gamma\}$ egy centrált rendszer, így kiterjeszthető Γ felett egy $\mathcal{U}$ ultraszűrővé. Ezzel az $\mathcal{U}$ ultraszűrővel képezzük a következő relációrendszert:

$$\mathfrak{B} \ := \ \prod_{L'\in\Gamma}\mathfrak{B}_{L'}\big/_{\mathcal{U}}.$$

Bármely L'-re $\mathsf{age}\,\mathfrak{B}_{L'}\subseteq I$, és I zárt az ultraszorzásra, ezért

$$\mathsf{age}\,\mathfrak{B} \ \subseteq \ I.$$

Minden $L'\in\Gamma$-ra rögzítsünk egy $f_{L'}:\mathfrak{A}_{|L'}\to(\mathfrak{B}_{L'})_{|L'}$ izomorfizmust. Ezután $a\in A$-ra $f_0(a)$ legyen a $\prod_{L'\in\Gamma}B_{L'}$ szorzathalmaznak az az eleme, melynek L'-edik koordinátája éppen $f_{L'}(a)$. Végül legyen $f(a):=f_0(a)\big/_{\mathcal{U}}$. Belátjuk, hogy f egy beágyazás $\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{B}$-be. f injektív, hiszen $a\neq a'$ esetén bármely L'-re $f_{L'}(a)\neq f_{L'}(a')$, így

$$\{L'\in\Gamma \mid f_0(a)\ L'\text{-edik koordinátája egyenlő } f_0(a')\ L'\text{-edik koordinátájával}\} \ =$$
$$= \ \emptyset \ \notin \ \mathcal{U},$$

ezért pedig $f(a)\neq f(a')$. Ha most R az L nyelv egy relációjele, akkor az $L':=\{\mathsf{R}\}$ választással $\widehat{L'}\in\mathcal{U}$, és $L''\in\widehat{L'}$ esetén az $(a_1,\ldots,a_{\mu_\mathsf{R}})\in\mathsf{R}^{\mathfrak{A}}$ állítás ekvivalens az $(f_{L''}(a_1),\ldots,f_{L''}(a_{\mu_\mathsf{R}}))\in\mathsf{R}^{\mathfrak{B}_{L''}}$ állítással, ami pedig az ultraszorzatok definíciója alapján azt jelenti, hogy

$$(a_1, \dots, a_{\mu_\mathsf{R}}) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \text{ pontosan akkor, ha } (f(a_1), \dots, f(a_{\mu_\mathsf{R}})) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{B}}.$$

Mindebből azt kapjuk, hogy $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ egy beágyazás. Ez azért jelent ellentmondást, mert ekkor $\mathsf{age}\ \mathfrak{A} \subseteq \mathsf{age}\ \mathfrak{B} \subseteq I$, és mivel $\mathfrak{A}$ véges, ezért $\mathfrak{A} \in I$, holott feltettük, hogy $\mathfrak{A} \notin I$. Szükségképpen egy ultraszorzatra zárt ideál zárt ideál is egyben. □

Nem maradt más feladatunk, mint igazolni az 5.1.2. Tételt.

5.1.2. Tétel bizonyítása: Legyen $I \in \mathscr{I}_L$ egy nemüres zárt ideál, $\mathfrak{A} \in I$ tetszőleges, valamint $\mathfrak{B} \in S_L$ olyan, amelyre $\mathsf{age}\ \mathfrak{B} \subseteq I$. Legyen még $\Gamma := \mathsf{skel}\ \mathfrak{B}$ és $\xi \in \Gamma$ esetén $\widehat{\xi} := \{\eta \in \Gamma \mid \xi \subseteq \eta\}$. Most $\xi \in \Gamma$ esetén vehető egy olyan $\mathfrak{C}_\xi \in I$ relációrendszer, amelybe ξ és $\mathfrak{A}$ is beágyazható. Rögzítsünk ezekhez egy $g_\xi : \xi \to \mathfrak{C}_\xi$ és egy $f_\xi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}_\xi$ beágyazást. Vegyük észre, hogy $\{\widehat{\xi} \mid \xi \in \Gamma\}$ most is centrált rendszer, ezért kiterjed egy Γ feletti $\mathcal{U}$ ultraszűrővé. Mivel $\mathfrak{C}_\xi \in I$, ezért $\mathsf{age}\ \mathfrak{C}_\xi \subseteq I$, tehát az I ideál zártsága, valamint az 5.2.5. Lemma miatt

$$\mathsf{age}\Big(\prod_{\xi \in \Gamma} \mathfrak{C}_\xi \big/ \mathcal{U}\Big) \subseteq I.$$

Legyen $\mathfrak{C} := \prod_{\xi \in \Gamma} \mathfrak{C}_\xi \big/ \mathcal{U}$, és mutassuk meg, hogy $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ is beágyazható $\mathfrak{C}$-be. Ehhez vegyük a következő $f : A \to C$ függvényt: $f(a) := \Big(\prod_{\xi \in \Gamma} f_\xi(a)\Big) \big/ \mathcal{U}$. Az 5.2.5. Lemma bizonyításában szereplő módszerrel beláthatjuk, hogy f egy beágyazás. Végül a $g : B \to C$ függvény a következőképpen adódik. Tetszőleges $b \in B$-re $\xi := \mathfrak{B}_{|\{b\}} \in \mathsf{skel}\ \mathfrak{B} = \Gamma$, ezért $\eta \in \widehat{\xi}$ esetén b eleme az η struktúrának, tehát minden ilyen η résztruktúrára $b \in \mathsf{dom}\ g_\eta$. Mivel egy ultraszorzatba képző függvény definiálásakor elegendő azt csak ultra sok koordinátán megadni, így az alábbi megfeleltetés $\widehat{\xi} \in \mathcal{U}$ miatt értelmes:

$$g(b) := \Big(\prod_{\eta \in \Gamma} g_\eta(a)\Big) \big/ \mathcal{U}.$$

Az, hogy az így kapott g függvény is beágyazás, ismét az 5.2.5. Lemma bizonyításánál látottakhoz hasonlóan igazolható, a részleteket az Olvasóra bízzuk. □

5.3. Szaturált reprezentánsok

A fejezet záró részeként a zárt ideálok témakörét szeretnénk egy kiegészítéssel bővíteni. Megmutatjuk, hogy egy nemüres ideál zártsága ekvivalens azzal is, hogy az ideál tetszőleges κ számosság esetén reprezentálható κ-szatuált relációrendszerrel. A szaturáltság már nem képezi a szokásos matematikai logika kurzusok tananyagát, ezért a szükséges alapfogalmakat röviden most is bemutatjuk. Természetesen most sem törekedhetünk a teljességre, csak nagy vonalakban tárgyaljuk a fogalmakat. A szakasz végéig a szaturáltsággal kapcsolatos [6]-beli ismereteket vesszük alapul.

Rögzítsünk egy L nyelvet, $\|L\| := \max(\aleph_0, |L|) = |\mathsf{Form}(L)|$, és vegyünk egy $\mathfrak{A} \in S_L$ struktúrát, majd annak egy $\emptyset \neq X \subseteq A$ részhalmazát. Ezután bővítsük új konstansjelek hozzávételével az L nyelvet. Legyen L_X az L nyelv $(c_x \mid x \in X)$ konstansjelekkel vett bővítése, és jelölje $\mathfrak{A}_X$ az $\mathfrak{A}$ struktúrának azt az L_X-kiterjesztését, amelyre $c_x^{\mathfrak{A}_X} = x$ teljesül tetszőleges $x \in X$ esetén.

A matematikai logikában bevett szokás, hogy ha φ egy olyan formula, melynek legfeljebb csak a $v_1, \ldots, v_n$ változók a szabad változói, akkor (és csak akkor) φ-t $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$-vel is jelölik. Mi is ezt fogjuk követni. E jelölés segítségével a típusok fogalmához a következőképpen juthatunk. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint $a_1, \ldots, a_n \in A$. Ekkor az $\bar{a} := (a_1, \ldots, a_n)$ **elemek típusa $\mathfrak{A}$-ban X felett** az alábbi formulahalmaz:

$$\mathsf{tip}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/X) \doteq \{\varphi(v_1, \ldots, v_n) \in \mathsf{Form}(L_X) \mid \mathfrak{A}_X \models \varphi\,[a_1, \ldots, a_n]\}.$$

A kedves Olvasó könnyen meggondolhatja (de a részletek megtalálhatóak [6]-ban), hogy ekkor a $\mathfrak{p} := \mathsf{tip}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/X)$ jelöléssel az X feletti $\mathfrak{p}$ típus kielégíti a következő három tulajdonságot:

(1) $\mathfrak{p}$ elemeiben legfeljebb a $v_1, \ldots, v_n$ változók fordulnak elő szabadon,

(2) ha $T \subseteq \mathfrak{p}$ véges, akkor $\mathfrak{A}_X \models \exists v_1 \ldots \exists v_n \bigwedge T$, és

(3) ha $\varphi \in \mathsf{Form}(L_X)$ olyan formula, melyben legfeljebb a $v_1, \ldots, v_n$ változók fordulnak elő szabadon, akkor $\varphi \in \mathfrak{p}$, vagy $\neg\varphi \in \mathfrak{p}$.

Vigyázzunk, a **(3)**-as tulajdonságnál a negálás előtt nem zártuk le φ-t, tehát akár egy nyílt formulát is negálhatunk. Érdemes azt is megjegyezni, hogy a **(3)**-beli diszjunkció **(2)** következtében egy kizáró diszjunkció. Tehát a $\mathfrak{p} = \mathsf{tip}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/X)$ formulahalmaz teljesíti az előző három tulajdonságot, de vajon igaz-e a megfordítás? Adott $\mathfrak{p} \subseteq \mathsf{Form}(L_X)$ esetén, ha $\mathfrak{p}$ teljesíti az **(1)** - **(3)** tulajdonságokat, akkor előáll $\mathfrak{p} = \mathsf{tip}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/X)$ alakban? Egy ilyen, az **(1)** - **(3)** tulajdonságokat kielégítő $\mathfrak{p}$-t nevezzünk X**-feletti** n**-típus**nak, és jelöljük ezek halmazát $\mathcal{S}_n(X)$-szel. Ekkor $\mathcal{S}(X) := \bigcup_{n<\aleph_0} \mathcal{S}_n(X)$ az X **feletti típusok halmaza**. Egy $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}_n(X)$ **típus realizálható** $\mathfrak{A}$**-ban**, ha $\mathfrak{A}$-nak vannak olyan $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ elemei, melyekre $\mathfrak{p} = \mathsf{tip}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/X)$. Ez nyilván pontosan azzal ekvivalens, hogy létezik $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ úgy, hogy bármely $\varphi \in \mathfrak{p}$-re $\mathfrak{A}_X \models \varphi\ [a_1, \ldots, a_n]$.

Ha most veszünk egy $\mathfrak{A} \in S_L$ relációrendszert és annak egy $X \subseteq A$ részét, akkor megvizsgálhatjuk, hogy minden X-feletti típus realizálható-e $\mathfrak{A}$-ban. Ha igen, akkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ **szaturált** X **felett**. Ha κ egy számosság, akkor beszélhetünk κ**-szaturált** struktúráról, ami egy olyan struktúra, ami bármely κ-nál kisebb számosságú része felett szaturált. Végül, ha az $\mathfrak{A}$ struktúra $|\mathfrak{A}|$-szaturált, akkor $\mathfrak{A}$-t **szaturált**nak nevezzük. Látni fogjuk, hogy a κ-szaturált relációrendszerekkel való reprezentálhatóság egyenértékű az adott ideál zártságával. Ehhez még a következő állításra lesz szükségünk.

5.3.1. Tétel. *Ha $\mathfrak{A}$ egy L-struktúra és κ egy végtelen számosság, akkor $\mathfrak{A}$-nak létezik κ-szaturált ultrahatványa.*

 Sági [6]-ban - Keisler és Shelah bizonyítását követve - κ-jó nem megszámlálhatóan teljes ultraszűrők segítségével igazolja ezt az állítást. A bizonyítás részleteitől eltekintünk.

5.3.2. Tétel. *Ha I egy nemüres ideál, akkor az alábbiak ekvivalensek.*

(1) *I zárt,*

(2) *bármely κ számosságra I reprezentálható κ-szaturált relációrendszerrel,*

(3) *I reprezentálható 1-szaturált relációrendszerrel.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy I egy nemüres zárt ideál, és legyen κ egy tetszőleges számosság. Feltehető, hogy κ végtelen, hiszen ha valamely κ számosságra egy struktúra κ-szaturált, akkor bármely κ-nál kisebb λ számosságra λ-szaturált is. Az 5.1.2. Tétel alapján tudjuk, hogy I zártsága miatt reprezentálható, sőt az 5.2.5. Lemma alapján zárt az ultraszorzásra is, ezért az ultrahatvány-képzésre is. Legyen $\mathfrak{A}$ az I ideált reprezentáló relációrendszer és κ egy végtelen számosság. Az 5.3.1. Tétel alapján $\mathfrak{A}$-nak van egy κ-szaturált $\mathfrak{A}'$ ultrahatványa, és mivel I zárt az ultraszorzásra, ezért $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}' \subseteq I$. Ismert azonban az is, hogy $\mathfrak{A}$ beágyazható $\mathfrak{A}'$-be a diagonális beágyazás segítségével (lásd [6]), és így

$$I \;=\; \mathsf{age}\,\mathfrak{A} \;\subseteq\; \mathsf{age}\,\mathfrak{A}' \;\subseteq\; I$$

miatt a κ-szaturált $\mathfrak{A}'$ is reprezentálja I-t. Tehát **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**, **(2)** $\Rightarrow$ **(3)** pedig nyilvánvaló.

Most tegyük fel, hogy I-t reprezentálja az 1-szaturált $\mathfrak{A}$ relációrendszer, és mutassuk meg, hogy ebben az esetben I zárt. Ha most $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $\mathcal{S}_n^{\mathfrak{A}}(\emptyset)$ minden eleme realizálható $\mathfrak{A}$-ban hiszen $|\emptyset| < 1$ és $\mathfrak{A}$ 1-szaturált. Legyen $\mathfrak{B} \in \Omega_L$ olyan, amelyre igaz, hogy bármely véges $L' \subseteq L$ esetén $\mathfrak{B}_{|L'} \in I_{|L'}$. Azt kell megmutatnunk, hogy ebben az esetben $\mathfrak{B} \in I$, azaz $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}$. Vegyük észre, hogy bármely $L' \subseteq L$ esetén $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}_{|L'} = I_{|L'}$, így bármely véges $L' \subseteq L$ esetén $\mathfrak{B}_{|L'} \leqslant \mathfrak{A}_{|L'}$. Tegyük fel, hogy $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Vegyük $\mathfrak{B}$ diagrammját, és egy $\varphi \in \mathsf{diag}\,\mathfrak{B}$ esetén cseréljük ki φ-ben a c_{b_i} konstansjelet a v_i változóra, így kapva φ'-t. $T := \{\varphi' \mid \varphi \in \mathsf{diag}\,\mathfrak{B}\}$. Ekkor T-ben olyan formulák vannak, melyekben legfeljebb a $v_1, \ldots, v_n$ változók fordulnak elő szabadon. Továbbá az is igaz, hogy $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_m \in T$ esetén $\mathfrak{B} \models \exists v_1 \ldots \exists v_n \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi'_i$.

Legyen most $L' \subseteq L$ olyan véges reduktum, amelyre $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_m \in \mathsf{Form}(L')$ teljesül. Ekkor $\mathfrak{B}_{|L'} \models \exists v_1 \ldots \exists v_n \bigwedge_{i=1}^m \varphi'_i$, és mivel $\mathfrak{B}_{|L'} \leqslant \mathfrak{A}_{|L'}$ is igaz, ezért $\mathfrak{A}_{|L'} \models \exists v_1 \ldots \exists v_n \bigwedge_{i=1}^m \varphi'_i$, hiszen az egyes φ' formulák nyíltak. Ekkor viszont $\mathfrak{A} \models \exists v_1 \ldots \exists v_n \bigwedge_{i=1}^m \varphi'_i$ is igaz kell, hogy legyen.

Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy a T elméletre teljesülnek az $\mathcal{S}_n^{\mathfrak{A}}(\emptyset)$-beli n-típusokra vonatkozó definíció **(1)** és **(2)** tulajdonságai, amiből pedig a Zorn-lemma segítségével nem nehéz belátni, hogy T kiterjeszthető egy $\mathcal{S}_n^{\mathfrak{A}}(\emptyset)$-beli $\mathfrak{p}$ típussá (lásd [6]). Továbbá $\mathfrak{A}$ egy 1-szaturált relációrendszer, ezért vannak olyan $a_1, \ldots, a_n \in A$ elemei, melyekre $\mathfrak{p} = \mathsf{tip}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/\emptyset)$. Ekkor viszont a diagramm-lemma alapján az az $f : B \to A$ függvény, amelyre $f(b_i) = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, éppen egy $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ beágyazás. Tehát $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}$ és ezért $\mathfrak{B} \in I$. Ebből pedig azt kapjuk, hogy I egy zárt ideál, ahogyan azt állítottuk. Tehát **(3)** $\Rightarrow$ **(1)** is teljesül. $\square$

Láttuk, hogy az ultraszorzás pontosan abban az esetben nem vezet ki egy ideálból - és így pontosan akkor korlátlanul használható eszköz a reprezentálhatóság szempontjából -, ha az ideálunk zárt. Ebben az esetben az adott ideál reprezentálható is, sőt bármely κ számosság esetén reprezentálható κ-szaturált struktúrával is.

6. fejezet

Kompaktság

Ebben az utolsó fejezetben C. Delhommé, M. Pouzet, Sági G. és N. Sauer tételét szeretnénk bemutatni. Ehhez először a hatványhalmazok topológiáját ismertetjük, majd ennek segítségével értelmezzük az ideálok topológiáját és megnézzük hogy milyen kapcsolatok állnak fenn Ω_L topologikus tulajdonságai és az L nyelv mérete között. Így jutunk el Delhommé, Pouzet, Sági és Sauer tételének bizonyításához, melynek részletei után megfogalmazzuk harmadik és egyben utolsó problémánkat is.

6.1. Kompakt ideálok

Feltételezzük, hogy az Olvasó jártas a topológiai alapfogalmakban, így például ismeri az alábbiakat: topologikus tér bázisa, Hausdorff-tér, torlódási pont, perfekt halmazok, kompaktság, folytonosság, Tyihonov tétele. Több monográfia is létezik, amely a topologikus terek elméletével foglalkozik, mi Komornik Vilmos nagyszerű Valós Analízis Előadások I. című művére, [5]-re támaszkodunk. Csupán a számunkra legfontosabb topologikus tér konstrukcióját vázoljuk, a hatványhalmazét.

Rögzítsünk egy X halmazt, és tekintsük a következő módon adódó topológiát az X halmaz $\mathscr{P}(X)$ hatványhalmazán. $\mathscr{P}(X)$ természetes módon azonosítható a $\{0,1\}$ halmaz "X-szeres" szorzatával, mégpedig a karakterisztikus vektorok segítségével. Jelölje ehhez P a $\prod_{\xi\in X}\{0,1\}$ szorzatot. P elemei tehát az X halmazon értelmezett 0-1 értékű függvények. Az előző fejezetben egy $\bar{a} \in P$ vektor és egy $\xi \in X$ koordináta esetén az $\bar{a}(\xi)$ értéket a_ξ-vel is jelöltük, és az $\bar{a}$ vektor ξ-edik koordinátájának hívtuk. Egy $A \subseteq X$ részhalmaz karakterisztikus vektora $\bar{a} = \chi_A \in P$, ahol $\chi_A(\xi) = 1$, ha $\xi \in A$, és $\chi_A(\xi) = 0$, ha $\xi \notin A$. Ismert, hogy az így értelmezett $\mathscr{P}(X) \ni A \mapsto \chi_A \in P$ leképezés bijekció, ezért a P szorzathalmaz azonosítható $\mathscr{P}(X)$-szel. Következésképp, ha P-n megadunk egy topológiát, az azonnal indukál $\mathscr{P}(X)$-en is egyet. Mi P-t a szorzattopológiával látjuk el, ahogyan azt a következő gondolatok is mutatják. Vegyük a $\{0,1\}$ halmazon a szokásos diszkrét topológiát, azaz $\tau_{\{0,1\}} := \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Ezután készítsük el a P-beli topológia bázisát, melynek elemeit a következőképpen értelmezhetjük: tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$-re és $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m \in X$-re

$$V(\xi_1, \ldots, \xi_n \mid \eta_1, \ldots, \eta_m) := \{\bar{a} \in P \mid \bar{a}_{\xi_1} = \ldots = \bar{a}_{\xi_n} = 1 \text{ és } \bar{a}_{\eta_1} = \ldots = \bar{a}_{\eta_m} = 0\}.$$

Itt megengedjük az $n = 0$, illetve az $m = 0$ elfajuló eseteket is, így például $n = m = 0$ esetén $V(\xi_1, \ldots, \xi_n \mid \eta_1, \ldots, \eta_m) = P$. Továbbá az is igaz, hogy $\xi \in X$ esetén $V(\xi \mid \xi) = \emptyset$. Az előbbi $A \leftrightarrow \chi_A$ azonosításnak megfelelően $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in X$ esetén $V(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_n)$ az X halmaz azon A részhalmazaiból áll, melyek tartalmazzák az $x_1, \ldots, x_n$ pontokat, de nem tartalmazzák az $y_1, \ldots, y_m$ pontok egyikét sem.

Ha most $\mathcal{B}$ jelöli az ilyen $V(\xi_1, \ldots, \xi_n \mid \eta_1, \ldots, \eta_m)$ alakú ún. elemi nyílt halmazok rendszerét, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathcal{B}$ zárt a véges metszet-képzésre, így egy τ topológia bázisát alkotja. Ennek a τ topológiának bármely eleme előáll $\mathcal{B}$-beli halmazok uniójaként. Világos, hogy $U \subseteq P$ pontosan akkor nyílt, ha bármely $A \in U$ X-beli részhalmazhoz megadható véges sok $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in X$ elem úgy, hogy

$$A \in V(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_m) \subseteq U.$$

$A \in V(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_m)$ esetén $V(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_m)$ az A részhalmaz egy elemi környezete. Könnyen látható, hogy $(\{0,1\}, \tau_{\{0,1\}})$ egy Hausdorff-tér (azaz bármely két pontja szétválasztható diszjunkt nyílt halmazok segítségével), és végessége miatt kompakt is. Tudjuk, hogy Hausdorff-terek szorzata is Hausdorff-tér, és Tyihonov tétele alapján kompakt terek szorzata is kompakt. Tehát $\mathscr{P}(X)$ az imént értelmezett τ topológiával egy kompakt Hausdorff-tér. Az is ismert tény, hogy egy kompakt Hausdorff-tér esetén a tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha topológiailag zárt. Azért hangsúlyozzuk, hogy ez a zártság topológiailag értendő, mert az előző fejezetben a zárt kifejezést másra használtuk. Éppen ezért mi $\mathscr{P}(X)$ zárt halmazait kompakt halmazoknak fogjuk hívni. A továbbiakban ezt a topológiát tekintjük a hatványhalmazok standard topológiájának, másféle topológiákkal nem fogunk foglalkozni.

Alkalmazzuk az előbb mondottakat $X = \Omega_L$-re, valamely rögzített L relációjelkészlet esetén. Ekkor $\mathscr{I}_L \subseteq \mathscr{P}(\Omega_L)$, így az ideálok $\mathscr{I}_L$ halmazát elláthatjuk a $\mathscr{P}(\Omega_L)$ hatványhalmaz megfelelő altértopológiájával. Ebben az altérben egy I ideálnak az $U \subseteq \mathscr{I}_L$ halmaz pontosan akkor elemi nyílt környezete, ha megadható véges sok (esetleg 0 darab) $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \in I$ és véges sok (esetleg 0 darab) $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m \in \Omega_L - I$ relációrendszer úgy, hogy U-nak pontosan azok az ideálok az elemei, melyek tartalmazzák az $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ struktúrákat, de nem tartalmazzák a $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$ struktúrák egyikét sem. Természetesen ezek a gondolatok $\mathscr{I}_L$ helyett bármely $I \in \mathscr{I}_L$ esetén az $\mathscr{I}(I) \subseteq \mathscr{P}(\Omega_L)$ alterekre is elmondhatóak (a megfelelő környezetben).

6.1.1. Definíció. *Egy I ideál* ***kompakt ideál****, ha részideáljainak $\mathscr{I}(I)$ halmaza kompakt altere $\mathscr{P}(\Omega_L)$-nek. Ha az $\mathscr{I}(I)$ halmaz perfekt $\mathscr{P}(\Omega_L)$-ben (azaz topológiailag zárt és nem tartalmaz izolált pontot), akkor I-t* ***perfekt ideál****nak hívjuk.*

Mint említettük, a következő szakaszban megmutatjuk, hogy Ω_L kompaktsága, illetve perfektsége kapcsolatba hozható az L nyelv méretével, és ez a kapcsolat elvezet majd Delhommé, Pouzet, Sági és Sauer tételéhez. Mielőtt ezt az említett kapcsolatot megmutatnánk, érdemes a kompakt ideálok - mint rendezett halmazok - egy fontos tulajdonságát rögzíteni. Ez a tulajdonság az alábbi szuprémum-fogalomra épül.

6.1.2. Definíció. *Legyen I egy nemüres ideál és $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ véges sok relációrendszer I-ből. Azt mondjuk, hogy a $\mathfrak{B} \in I$ relációrendszer* ***az $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ struktúrák szuprémuma I-ben****, ha az $(I, \leqslant)$ részbenrendezett halmazban $\mathfrak{B}$ az $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ re-*

lációrendszerek egy mimiális felső korlátja. Az $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *struktúrák* I*-beli szuprémumainak halmazát* $\sup_I(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ *jelöli.*

Az, hogy a $\mathfrak{B}$ relációrendszer az $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ relációrendszerek egy mimiális felső korlátja, azzal ekvivalens, hogy $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ mindegyike beágyazható $\mathfrak{B}$-be, de $\mathfrak{B}$ egyetlen valódi részébe sem ágyazhatóak be mindannyian. Vigyázat, $\sup_I(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ nem egy egyértelmű I-beli elem, hanem I egy részhalmaza, lehet akár végtelen sok eleme is (ahogy azt később láthatjuk is). Az viszont igaz, hogy $\sup_I(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ soha sem üres. Valóban, ha $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \in I$, akkor (mivel I egy ideál) van olyan $\mathfrak{B}_0 \in I$, amelybe az $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ relációrendszerek mindegyike beágyazható. Tehát $\mathsf{age}\ \mathfrak{B}_0 \subseteq I$ tartalmazza az $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ elemek egy I-beli felső korlátját. Mivel $\mathsf{age}\ \mathfrak{B}_0$ véges halmaz, az ilyen felső korlátok között van minimális is, ami pedig automatikusan eleme $\sup_I(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$-nek. Nevezzük az I ideál $\sup_I(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ alakú részhalmazait I **szuprémum-halmaza**inak. Ezek a szuprémum-halmazok azért fontosak, mert segítségükkel karakterizálhatjuk a kompakt ideálokat, ahogyan azt a következő lemma is mutatja.

6.1.3. Lemma. *Egy I ideál pontosan akkor kompakt, ha bármely szuprémum-halmaza véges.*

Bizonyítás: Az $I = \emptyset$ üres ideálnak nincsenek szuprémum-halmazai, és $I = \emptyset$ kompakt is, ezért ebben az esetben az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $I \neq \emptyset$.

Legyen először I kompakt ideál és $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \in I$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. Ha most $\mathfrak{B} \in I$ esetén $\mathfrak{B}$-be nem ágyazható be az összes $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \in I$ struktúra, akkor az $\mathsf{age}\ \mathfrak{B}$ részideálnak van olyan nyílt $U_\mathfrak{B}$ környezete, amelynek egyetlen ideálja sem tartalmaz $\sup_I(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$-beli elemet (például, ha $\mathfrak{A}_1 \not\leq \mathfrak{B}$, akkor $U_\mathfrak{B} := V(\mathfrak{B} \mid \mathfrak{A}_1)$ ilyen, hiszen ez tartalmazza $\mathsf{age}\ \mathfrak{B}$-t, és egyetlen $U_\mathfrak{B}$-beli ideál sem tartalmazza $\mathfrak{A}_1$-et). Jelölje az ilyen $\mathfrak{B} \in I$ relációrendszerek halmazát H és $U := \bigcup_{\mathfrak{B}\in H} U_\mathfrak{B}$. Ekkor U nyílt halmaz, I pedig kompakt ideál, ezért az $F := \mathscr{I}(I) - U$ választással F is kompakt, és pontosan azok az I-beli részideálok az elemei, melyek tartalmazzák az $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ relációrendszerek mindegyikét. Ekkor viszont bármely $J \in F$ részideál esetén $J \cap \sup_I(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) \neq \emptyset$. Ebből adódóan, ha minden $\mathfrak{B} \in \sup_I(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$-

re vesszük a $V_{\mathfrak{B}} := V(\mathfrak{B} \mid \emptyset)$ nyílt környezetet, akkor az F kompakt halmaz egy nyílt lefedését kapjuk:

$$F = \bigcup_{\mathfrak{B} \in \sup_I(\mathfrak{A}_i)_{i=1}^n} V_{\mathfrak{B}}.$$

F viszont kompakt, ezért megadható véges sok olyan $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m \in \sup_I(\mathfrak{A}_i)_{i=1}^n$ szuprémum, amelyre $F = \bigcup_{j=1}^m V_{\mathfrak{B}_j}$. Most tetszőleges $\mathfrak{B} \in \sup_I(\mathfrak{A}_i)_{i=1}^n$ relációrendszerre $\mathsf{age}\,\mathfrak{B} \in F = \bigcup_{j=1}^m V_{\mathfrak{B}_j}$, ezért van olyan $1 \leq j \leq m$ index, amelyre $\mathsf{age}\,\mathfrak{B} \in V_{\mathfrak{B}_j}$, azaz $\mathfrak{B}_j \in \mathsf{age}\,\mathfrak{B}$. Ez utóbbi azzal egyenértékű, hogy $\mathfrak{B}_j \leqslant \mathfrak{B}$. Legyen $f : \mathfrak{B}_j \to \mathfrak{B}$ egy tetszőleges beágyazás. Mivel $\mathfrak{B}_j \in \sup_I(\mathfrak{A}_i)_{i=1}^n$, ezért $\mathsf{Is}(\mathfrak{B}_{|f[B_j]}) \in \sup_I(\mathfrak{A}_i)_{i=1}^n$. De $\mathfrak{B} \in \sup_I(\mathfrak{A}_i)_{i=1}^n$ és $\mathfrak{B}_{|f[B_j]} \subseteq \mathfrak{B}$, így a szuprémumok minimalitási tulajdonságiból $\mathfrak{B}_{|f[B_j]} = \mathfrak{B}$ adódik, ami pedig azt jelenti, hogy f egy izomorfizmus, tehát $\mathfrak{B}_j \cong \mathfrak{B}$. De egy ideálban egy adott izomorfiatípusból legfeljebb csak egy lehet, ezért $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_j$. Mindezt összekapcsolva, azt kapjuk, hogy $\sup_I(\mathfrak{A}_i)_{i=1}^n \subseteq \{\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m\}$, tehát a kompakt I ideálban bármely szuprémum-halmaz véges.

Most tegyük fel, hogy a nemüres I bármely szuprémum-halmaza véges, és lássuk be, hogy ebben az esetben I kompakt is. Mivel a $\mathscr{P}(I)$ hatványhalmaz kompakt, és $\mathscr{I}(I)$ pontosan akkor kompakt $\mathscr{P}(\Omega_L)$-ben, ha kompakt $\mathscr{P}(I)$-ben, ezért I kompaktságához azt kell megmutatnunk, hogy I bármely olyan részhalmaza, amely nem ideál, elválasztható nyílt halmazzal $\mathscr{I}(I)$-től. Legyen $H \subseteq I$, és tegyük fel, hogy H nem ideál. Ekkor H nem üres, ezért vagy nem leszálló, vagy van két olyan eleme, amelynek nincsen H-beli közös felső korlátja. Tegyük fel, hogy létezik $\mathfrak{B} \in H$ és $\mathfrak{A} \in \mathsf{age}\,\mathfrak{B} - H$. Ekkor, ha U az I azon részhalmazaiból áll, melyek tartalmazzák $\mathfrak{B}$-t, de nem tartalmazzák $\mathfrak{A}$-t, akkor egyrészről U nyílt $\mathscr{P}(I)$-ben és $H \subseteq U$, másfelől U-nak nem lehet egyetlen ideál sem eleme, hiszen ha egy ideál tartalmazza $\mathfrak{B}$-t, akkor a leszáló tulajdonság értelmében tartalmazza $\mathfrak{A}$-t is. Tehát U egy, az $\mathscr{I}(I)$-től diszjunkt nyílt környezete H-nak. Ha pedig H-ban létezik két olyan $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in H$ relációrendszer, melyeknek egyetlen közös I-beli felső korlátja sem H-beli, akkor H diszjunkt a véges és nemüres $\sup_I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ szuprémum-halmaztól. Ekkor viszont, ha U az I ideál olyan részhalmazaiból áll, melyek tartalmazzák $\mathfrak{A}$-t és $\mathfrak{B}$-t, de nem tartalmazzák a véges $\sup_I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ halmaz egyetlen elemét sem, akkor U olyan nyílt környezete H-nak, amely nem tartalmaz I-beli részideált. Valóban, ha egy I-beli részideál tartalmazza $\mathfrak{A}$-t és $\mathfrak{B}$-t is, akkor az nem lehet diszjunkt $\sup_I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-től. Tehát U ismét egy, az $\mathscr{I}(I)$-től diszjunkt nyílt környezete H-nak. Mindezek alapján azt kapjuk, hogy $\mathscr{P}(I) - \mathscr{I}(I)$ nyílt halmaz, és ezért I egy kompakt ideál. □

A lemma önmagában is nagyon érdekes, hiszen kapcsolatot teremt egy ideál rendezése és topológiája között. Természetesen nem csak ezért fontos számunkra, hanem azért is, mert egy, a hátralévő bizonyítások során jól használható eszközt szolgáltat számunkra.

6.2. Topologikus tulajdonságok

Most megmutatjuk, hogy milyen kapcsolat építhető ki az L nyelv mérete és a hozzá tartozó Ω_L ideál topologikus tulajdonsága között. Először megnézzük, hogy Ω_L kompaktsága milyen, az L nyelvre vonatkozó tulajdonsággal ekvivalens. Tekintsük ehhez a következő fogalmat.

6.2.1. Definíció. *Egy L relációjelkészlet* ***kvázivéges****, ha benne a legalább kétváltozós relációjelek száma véges.*

Tehát egy kvázivéges nyelvben akárhány egyváltozós relációjel lehet, de többváltozós relációjelből csak véges sok. Érdekes, hogy a nyelv e tulajdonsága szoros kapcsolatban áll az Ω_L ideál topologikus tulajdonságával.

6.2.2. Tétel. *Az Ω_L ideál pontosan akkor kompakt, ha az L nyelv kvázivéges.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy L kvázivéges relációjelkészlet, és mutassuk meg, hogy ekkor Ω_L szuprémum halmazai végesek. Ha ezt belátjuk, akkor a 6.1.3. Lemma alapján az Ω_L kompaktsága is bizonyossá válik. A 6.1.3. Lemma bizonyításából az is kiderül, hogy elegendő azt megmutatnunk, hogy bármely $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \Omega_L$ esetén $\sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \sup_{\Omega_L}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ véges. Legyen tehát $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \Omega_L$ tetszőlegesen rögzített.

Vegyük észre, hogy $\mathfrak{C} \in \sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ esetén megadhatóak olyan $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ és $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ beágyazások, melyekre $C = f[A] \cup g[B]$. Egy ilyen (f, g) beágyazáspárra azt mondjuk majd, hogy képhalmazaik lefedik C-t. Ebben az esetben $|C| \leq m := |A| + |B|$. Egy $\sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-beli $\mathfrak{C}$ relációrendszer alaphalmazát nyugodtan kicserélhetjük a $H := \{1, \dots, m\}$ véges halmaz $\{1, \dots, |\mathfrak{C}|\}$ részhalmazával. Ez $\sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ számosságát nem befolyásolja, hiszen $\sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ semmelyik két eleme sem izomorf. Tegyük fel tehát, hogy $\sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bármely elemének alaphalmaza része H-nak. Vegyük el az L nyelv legalább kétváltozós relációjeleit: L' álljon az L nyelv egyváltozós relációjeleiből. Ha most $\mathfrak{C} \in \sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ és $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$, illetve $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ beágyazások az L nyelven, akkor ezek $f : \mathfrak{A}_{|L'} \to \mathfrak{C}_{|L'}$ és $g : \mathfrak{B}_{|L'} \to \mathfrak{C}_{|L'}$ alakú beágyazások az L' nyelven is. Mivel L-ben véges sok többváltozós relációjel van, így bármely $\mathfrak{C} \in \sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-hez véges sok olyan olyan $\mathfrak{C}' \in \sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ adható meg, amelyre $\mathfrak{C}_{|L'} \cong \mathfrak{C}'_{|L'}$. Ennek következtében $\sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ pontosan akkor véges, ha L'-reduktumainak száma véges.

Legyen most $H' \subseteq H$ nemüres részhalmaz (ebből is véges sok van). Ekkor véges sok olyan $f : A \to H'$ és $g : B \to H'$ injektív függvénypár létezik, amelyek képhalmaza lefedi H'-t. Ezek között szükségképpen véges sok olyan van, amelyre a következő tulajdonság teljesül:

$$a \in A, b \in B \text{ és } f(a) = g(b) \text{ esetén, bármely } \mathsf{R} \in L'\text{-re } a \in \mathsf{R}^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow b \in \mathsf{R}^{\mathfrak{B}}.$$

Ez az utolsó észrevétel éppen azt jelenti, hogy H'-n az L' nyelv jelei véges sokféleképpen interpretálhatóak úgy, hogy megadható legyen olyan $\mathfrak{A}_{|L'}$-n, illetve $\mathfrak{B}_{|L'}$-n értelmezett (f, g) beágyazáspár, melyek képhalmaza lefedi H'-t. Mivel a $\sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-beli L'-reduktumok bármelyikének alaphalmaza része a H halmaznak, ezáltal csak véges sok lehet belőlük, így $\sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ is véges. A 6.1.3. Lemma értelmében tehát Ω_L kompakt ideál.

Most tegyük fel, hogy L nem kvázivéges. Legyen R és R' két különböző legalább kétváltozós relációjel L-ből. Legyen $\mathfrak{A}$ az az egyetlen a pontból álló izomorfiatípus, melyre $\mathfrak{A} \models \mathsf{R}(a, \dots, a)$, de bármely R-től különböző L-beli R'' relációjelre $\mathsf{R}''^{\mathfrak{A}} = \emptyset$. Hasonlóan legyen $\mathfrak{B}$ az az egyetlen b pontból álló izomorfiatípus, amelyre

$\mathfrak{B} \models \mathsf{R}'(b, \ldots, b)$, de bármely R'-től különböző L-beli R'' relációjelre $\mathsf{R}''^{\mathfrak{B}} = \emptyset$. Ekkor $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \Omega_L$ és $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$. $\sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-nek éppen olyan véges izomorfiatípusok az elemei, melyek kételeműek és melyeknek egyik egyelemű részstruktúrája $\mathfrak{A}$-val izomorf, másik pedig $\mathfrak{B}$-vel. Mivel L-nek végtelen sok legalább kétváltozós relációjele van, ezért Ω_L ilyen kételemű izomorfiatípusainak számossága végtelen, következésképp $\sup(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ számossága is végtelen, tehát Ω_L nem kompakt. □

Kiderült, hogy ha végetelen sok többváltozós relációjelünk van, akkor Ω_L semmiképp sem kompakt, de ha a többváltozós relációjelek száma véges, akkor bizonyosan az. Ennek segítségével a következő részben megmutatjuk, hogy Ω_L kompaktsága szoros kapcsolatban áll azzal a kérdéssel, hogy Ω_L minden (nemüres) részideálja reprezentálható-e. Jelen szakaszt a következő észrevétellel zárjuk.

6.2.3. Tétel. *Ω_L pontosan akkor perfekt, ha L kvázivéges, de nem véges.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy L kvázivéges, de nem véges. Ekkor Ω_L kompakt, azaz $\mathscr{P}(\Omega_L)$-ben $\mathscr{I}(\Omega_L)$ topológiailag zárt, így csak azt kell belátnunk, hogy nem tartalmaz izolált pontot. Legyen $I \in \mathscr{I}(\Omega_L)$ nemüres részideál. Ennek elemi nyílt környezetei olyan $V(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \mid \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m)$ halmazok, melyekre $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \in I$ és $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m \notin I$. Rögzítsünk egy ilyen elemi nyílt halmazt. Feltehetjük, hogy $n > 0$, ellenkező esetben $\emptyset$ egy I-től különböző $V(\emptyset \mid \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m)$-beli ideál lenne, azaz a $V(\emptyset \mid \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m)$ nyílt halmaz tartalmazna I-től különböző ideált is.

Tegyük fel tehát, hogy $n > 0$. Ekkor megadható olyan $\mathfrak{A} \in I$, amelybe $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ mindegyike beágyazható, azaz $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n\} \subseteq \mathsf{age}\,\mathfrak{A}$. Mivel $\mathfrak{A} \in I$, ezért $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} \in \mathscr{I}(I)$, és mivel $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m \notin I$, ezért $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}$ diszjunkt a $\{\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m\}$ halmaztól. Ekkor viszont $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} \in V(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \mid \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m)$. Két eset lehetséges: $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} = I$, vagy $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} \neq I$. Ha az utóbbi teljesül, akkor készen vagyunk, hiszen ebben az esetben $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}$ egy I-től különböző $V(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \mid \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m)$-beli ideál.

Tegyük fel, hogy $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} = I$. Mivel az L nyelv kvázivéges, de nem véges, ezért végtelen sok egyváltozós relációjelet tartalmaz, ennek következtében pedig

Ω_L végtelen sok egyelemű izomorfiatípust tartalmaz. Ezek között biztosan van olyan, amely nem eleme a véges $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} \cup \mathsf{age}\,\mathfrak{B}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{age}\,\mathfrak{B}_m$ halmaznak, jelöljön egy ilyet $\mathfrak{C}$. Tehát $|\mathfrak{C}| = 1$, és $\mathfrak{C}$ nem ágyazható be $\mathfrak{A}$-ba és a $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$ relációrendszerek egyikébe sem. Vegyünk egy tetszőleges $\mathfrak{D} \in \sup_{\Omega_L}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ struktúrát. Ekkor $\mathfrak{D}$ különbözik $\mathfrak{A}$-tól, és $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{D}$ miatt az $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ relációrendszerek mindegyike beágyazható $\mathfrak{D}$-be. Továbbá tetszőleges $1 \leq i \leq m$-re $\mathfrak{B}_i \nleqslant \mathfrak{D}$, ugyanis $\mathfrak{B}_i \leqslant \mathfrak{D}$ esetén $\mathfrak{C} \nleqslant \mathfrak{B}_i$ miatt $\mathfrak{B}_i \leqslant \mathfrak{A}$ adódna, ami ellentmondás. Mindebből azt kapjuk, hogy $\mathsf{age}\,\mathfrak{D} \in V(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \mid \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m)$, és $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{D}$ miatt $\mathsf{age}\,\mathfrak{D} \neq \mathsf{age}\,\mathfrak{A} = I$.

Láthatjuk tehát, hogy a nemüres ideálok mindegyike torlódási pontja $\mathscr{I}_L$-nek. Ω_L perfektségéhez tehát csak azt kell még belátnunk, hogy az $I = \emptyset$ üres ideál sem izolált pont. Ha $V(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \mid \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m)$ az üres ideál egy elemi nyít környezete, akkor $n = 0$, azaz ez az elemi nyílt halmaz $V(\emptyset \mid \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m)$ alakú, tehát bármely eleme egy olyan ideál, amely nem tartalmazza a $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$ relációrendszerek egyikét sem. Mivel Ω_L-ben végtelen sok egyelemű izomorfiatípus van, így van közöttük olyan is, amely nem ágyazható be a $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$ relációrendszerek egyikébe sem, jelöljön egy ilyet $\mathfrak{C}$. Mivel $|\mathfrak{C}| = 1$ és $\mathfrak{C}$ nem ágyazható be a $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$ relációrendszerek egyikébe sem, ezért a $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$ relációrendszerek egyike sem ágyazható be $\mathfrak{C}$-be. Következésképp $\mathsf{age}\,\mathfrak{C}$ egy $V(\emptyset \mid \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m)$-beli nemüres ideál, tehát $\emptyset$ sem izolált pontja $\mathscr{I}_L$-nek, és ezért Ω_L perfekt.

Végül tegyük fel, hogy Ω_L perfekt, és igazoljuk, hogy L kvázivéges, de nem véges. Ha Ω_L perfekt, akkor zárt is, tehát kompakt is, így a 6.2.2. Tétel miatt L biztosan kvázivéges. Ha L véges volna, akkor véges sok egyelemű izomorfiatípus létezne Ω_L-ben (k darab relációjellel 2^k különböző egyelemű izomorfiatípus képezhető), ha pedig ezeket $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$-nel jelölnénk, akkor $V(\emptyset \mid \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ pontosan az üres ideált tartalmazná (hiszen bármely nemüres ideálnak van egyelemű relációrendszere). Ebben az esetben tehát az üres ideál izolált pont volna $\mathscr{I}_L$-ben, ami ellentmondana Ω_L perfektségének. □

6.3. Delhommé, Pouzet, Sági és Sauer tétele

Véges nyelv esetén bármely nemüres ideál reprezentálható. Vajon végtelen nyelv esetén mindenképp létezik nemüres nem-reprezentálható ideál? Nem, ugyanis, ha csak véges sok legalább kétváltozós relációjelünk van, egyváltozósból pedig bármennyi, akkor is reprezentálható bármely nemüres ideál. Sőt a nyelv kvázivégessége egyszerre szükséges és elégséges feltétel az összes nemüres ideál reprezentálhatóságára. Egészen pontosan Christian Delhommé, Maurice Pouzet, Sági Gábor és Norbert Sauer a következő eredményt mutatta meg [2]-ben.

6.3.1. Tétel (Delhommé, Pouzet, Sági, Sauer). *Az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *Ω_L bármely nemüres részideálja reprezentálható,*

(2) *L kvázivéges,*

(3) *Ω_L kompakt ideál.*

Bizonyítás: A **(2)** $\Leftrightarrow$ **(3)** ekvivalencia éppen a 6.2.2. Tétel, így nekünk már csak az **(1)** és a **(2)** állítások ekvivalenciáját kell megmutatnunk. Először tegyük fel, hogy L egy kvázivéges nyelv. Belátjuk, hogy ebben az esetben bármely nemüres I ideál rendelkezik a kiterjesztési tulajdonsággal, így a 3.1.3. Tétel alapján reprezentálható is. Ehhez a diagramm-lemmát is segítségül hívjuk majd. Mindenek előtt rögzítsünk egy nemüres I ideált-t. Ha $I = \Omega_L$, akkor a 2.2.3. Állítás értelmében reprezentálható, sőt nyilvánvalóan rendelkezik a kiterjesztési tulajdonsággal is. Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq I \neq \Omega_L$. Legyen $\mathfrak{A}$ olyan relációrendszer, melynek kora részideálja I-nek, azaz amelyre $\mathsf{age}\,\mathfrak{A} \subseteq I$. Legyen még $\mathfrak{B} \in I$ tetszőleges, és lássuk be, hogy van olyan $\mathfrak{A}'$ relációrendszer, amelybe $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ is beágyazható, és amelyre $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}' \subseteq I$.

Legyen $T_{\mathfrak{A}} := \mathsf{diag}\,\mathfrak{A}$ és $T_{\mathfrak{B}} := \mathsf{diag}\,\mathfrak{B}$. Ha $\mathfrak{C} \in \mathsf{skel}\,\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{D} \in \Omega_L - I$ olyanok, melyekre $\mathfrak{C}, \mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{D}$, akkor meg kell tiltanunk azt, hogy $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ úgy legyen összekapcsolva, ahogyan $\mathfrak{D}$-ben lehetséges, de I-ben nem. Ez egészen pontosan a következőt jelenti. Ha $f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ és $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ együttesen szürjektív beágyazások, azaz $D = f[C] \cup g[B]$, akkor először jelöljük meg $\mathfrak{D}$ elemeit f, illetve g mentén a c_c ($c \in C$), illetve a c_b ($b \in B$) konstansjelekkel (például a c_b konstansjelet interpretáljuk D-ben a $g(b) \in D$ elem segítségével). Ezen a bővebb nyelven vegyük az összes olyan zárt literált, amelyben csak a legalább kétváltozós relációjelek fordulnak elő (beleértve az egyenlőségjelet is) és amelyek igazak ebben a kibővített nyelven vett $\mathfrak{D}'$ struktúrában. Az ilyen zárt literálok véges sokan vannak, hiszen véges sok legalább kétváltozós relációjelünk van, ezért konjunkcióval összekapcsolhatóak, majd az így előálló zárt formula negálható. Jelölje az így kapott formulát $\varphi_{f,g}$. Álljon $T_{\mathfrak{C}}$ az összes ilyen lehetséges $\mathfrak{D}$-re és az összes lehetséges $\mathfrak{D}$-hez tartozó (f, g) együttesen szürjektív beágyazáspárhoz rendelhető $\varphi_{f,g}$ formulából (ha nincs ilyen $\mathfrak{D}$, akkor $T_{\mathfrak{C}} := \emptyset$). Végül $T_{\mathsf{forb}} := \bigcup_{\mathfrak{C} \in \mathsf{skel}\,\mathfrak{A}} T_{\mathfrak{C}}$ a tiltott összekapcsolásokat leíró elmélet és

$$T := T_{\mathfrak{A}} \cup T_{\mathfrak{B}} \cup T_{\mathsf{forb}}.$$

Belátjuk, hogy T konzisztens. A kompaktsági tétel folytán elegendő azt igazolni, hogy bármely véges részének van modellje, ehhez viszont elég azt megmutatnunk, hogy ha $\mathfrak{C} \in \mathsf{skel}\,\mathfrak{A}$, akkor $\mathsf{diag}\,\mathfrak{C} \cup T_{\mathfrak{B}} \cup T_{\mathsf{forb}}$ konzisztens. Ez viszont igaz, ugyanis, van olyan I-beli $\mathfrak{D}$ relációrendszer, amelybe $\mathfrak{C}$ és $\mathfrak{B}$ is beágyzaható. $\mathfrak{D}$-ben egy-egy rögzített beágyazás mentén interpretálva a c_c ($c \in C$), illetve c_b ($b \in B$) konstansjeleket, olyan $\widetilde{\mathfrak{D}}$ struktúra adódik, amely a diagramm-lemma alapján modellje $\mathsf{diag}\,\mathfrak{C} \cup T_{\mathfrak{B}}$-nek. Persze $\mathfrak{D} \in I$ miatt $\mathfrak{C}$ és $\mathfrak{B}$ lehetséges $\mathfrak{D}$-beli összekapcsolásai nem tiltottak, így $\widetilde{\mathfrak{D}} \models T_{\mathsf{forb}}$ is teljesül. Tehát T konzisztens, létezik modellje.

Mivel T minden formulája zárt és kvantormentes, ezért van olyan modellje is, amelyben minden elem meg van jelölve egy T-ben szereplő konstansjellel (azaz egy c_a, vagy egy c_b alakú konstansjellel alkalmas $a \in A$, vagy $b \in B$ elemmel). Vegyük T egy ilyen modelljét, és jelölje annak L-reduktumát $\mathfrak{A}'$. Ekkor ismét a diagramm-lemma alapján $\mathfrak{A}'$-be $\mathfrak{A}$ is és $\mathfrak{B}$ is beágyazható, továbbá a konstrukcióból az is adódik, hogy $(\Omega_L - I)$-beli $\mathfrak{D}$ struktúra bizonyosan nem ágyazható be $\mathfrak{A}$-ba, hiszen $\mathfrak{A}'$ a $T_{\mathsf{forb}} \subseteq T$ elmélet egy modelljének L-reduktuma. Tehát $\mathsf{age}\,\mathfrak{A}' \subseteq I$ is teljesül, ezért I egy nemüres (EP)-ideál, és így a 3.1.3. Tétel alapján reprezentálható is. Tehát kvázivéges L nyelv esetén Ω_L bármely nemüres részideálja reprezentálható.

Most tegyük fel, hogy L nem kvázivéges. Ekkor L végtelen sok többváltozós relációjelet tartalmaz, jelölje a hozzájuk tartozó nyelv reduktumot $L' \subseteq L$. Mivel L' végtelen, ezért megadható egy injektív $\mathbb{Q}_0^+ \to L'$ leképezés, melynek $q \in \mathbb{Q}_0^+$ helyen felvett értékét R'_q-vel fogjuk jelölni, R'_q-höz pedig a metrikus terek $L_{\mathbb{M}}$ nyelvéből származó kétváltozós R_q relációjel fog tartozni. Ha $\mathfrak{A} \in S_{L_{\mathbb{M}}}$, akkor rendeljük hozzá azt az $\mathfrak{A}'$ L-típusú relációrendszert, melyben $q \in \mathbb{Q}_0^+$ esetén $\mathsf{R}_q'^{\mathfrak{A}'} = \mathsf{R}_q^{\mathfrak{A}} \times A^{\mu(\mathsf{R}'_q)-2}$ (így R'_q csak az első két változójától függ), és amelyben L bármely más R relációjelére $\mathsf{R}^{\mathfrak{A}'} = \emptyset$. Világos, hogy az így adódó $S_{L_{\mathbb{M}}} \to S_L$ megfeleltetés injektív. Ennek megfelelően S_L egy relációrendszere metrikus térnek tekinthető, ha előáll egy $\mathfrak{A} \in S_{L_{\mathbb{M}}}$ metrikus tér $\mathfrak{A}'$ képeként. A 2. Fejezet utolsó szakaszában értelmeztük a véges metrikus terekből álló nemüres I_{diff} ideált, amelyről a 2.3.3. Állításban láthattuk, hogy nem reprezentálható. Legyen

$$I \;:=\; \{\mathsf{Is}(\mathfrak{A}') \mid \mathfrak{A} \in I_{\mathsf{diff}}\},$$

amely nyilván az Ω_L egy nemüres részideálja. Állítjuk, hogy I nem reprezentálható. Ha $\mathsf{age}\,\mathfrak{B} = I$ állna, akkor I konstrukciója alapján az I-t reprezentáló L-típusú $\mathfrak{B}$ struktúra $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}$ alakú lenne alkalmas $L_{\mathbb{M}}$-típusú $\mathfrak{A}$ relációrendszerrel. Valóban, $\mathfrak{B}$-ben az $\mathsf{R}_q'^{\mathfrak{B}}$ alakú relációk $B_1 \times B_2 \times B^{\mu(\mathsf{R}'_q)-2}$ alakúak, L többi R relációjelére pedig $\mathsf{R}^{\mathfrak{B}} = \emptyset$, hiszen $\mathsf{age}\,\mathfrak{B} = \{\mathsf{Is}(\mathfrak{A}') \mid \mathfrak{A} \in I_{\mathsf{diff}}\}$. Legyen $A := B$, és tetszőleges $q \in \mathbb{Q}_0^+$-ra $\mathsf{R}_q^{\mathfrak{A}}$ az $\mathsf{R}_q'^{\mathfrak{B}}$ reláció első két koordinátájára vett vetületével egyezzen meg. Világos, hogy $\mathfrak{A} \in S_L$ és $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}$. Azonban ez lehetetlen, hiszen ebben az esetben $\mathfrak{A}$ reprezentálná I_{diff}-et, ami pedig ellentmondana a 2.3.3. Állításnak. Tehát I nemüres nem-reprezentálható részideálja Ω_L-nek. □

Tehát adott nyelv esetén pontosan akkor létezik nemüres nem-reprezentálható ideál, ha a nyelv tartalmaz végtelen sok többváltozós relációjet, ami pedig azzal ekvivalens, hogy Ω_L nem kompakt. Felvetődhet a kérdés, hogy reprezentálható-e bármely nemüres kompakt ideál? Sajnos e kérdésre nem ismerjük a választ, ezzel a problémával szeretnénk búcsúzni a kedves Olvasótól.

3. Probléma. *Igaz-e, hogy bármely nemüres kompakt ideál reprezentálható?*

Irodalomjegyzék

[1] **Csirmaz László**
Matematikai Logika
ELTE (1994)

[2] **Christian Delhommé, Maurice Pouzet, Sági Gábor, Norbert Sauer**
Representation of Ideals of Relational Structures
Discrete Mathematics Volume 309, Issue 01-13, Elsevier (2009)

[3] **Hajnal András, Hamburger Péter**
Halmazelmélet
Tankönyvkiadó (1983)

[4] **Wilfrid Hodges**
Model Theory
Cambridge University Press (1997)

[5] **Komornik Vilmos**
Valós Analízis Előadások I.
TypoTEX (2003)

[6] **Sági Gábor**
Válogatott Fejezetek a Modellelméletből és Határterületeiből
(2005)