Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Mi legyen egy függvény $\sqrt{2}$-edik deriváltja?

Szakdolgozat

Süli Balázs Márton

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Kós Géza

adjunktus

Analízis Tanszék

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés és matematikai alapok

1.1. Bevezetés

A tradicionális integrálást és deriválást nyugodtan nevezhetjük a matematika egyik legfőbb gyakorlatban felhasznált területének. Nélkülözhetetlen különféle mesterséges és természetes rendszerek, folyamatok modellezéséhez. A Tört Kalkulus területe a hagyományos integrál és differenciálszámításból fejlődött ki, nagyon hasonlóan ahhoz ahogyan az egészkitevős hatványozásból kialakult a tört, valós illetve komplex értékű hatványkitevők elmélete. Ezen a matematikai terepen függvények n-edik integrál és n-edik deriváltjának a fogalmát terjesztjük ki az egész számoknál bővebb számhalmazokra, így a tört, valós és komplex esetekre. Gondolkodjunk el egy pillanatra a hatványkitevő valódi jelentéséről! Egy szám pozitív egészértékű hatványa lényegében egy ismételt szorzását jelöli az alapszámnak amint azt először a gimnáziumban megtanultuk. Ebből könnyen ellenőrizhető mondjuk x^4 értéke, hiszen felhasználva a kifejezés szemléletes jelentését máris az $x \cdot x \cdot x \cdot x$ alakot kapjuk, amit már könnyen el tudunk végezni a hagyományos szorzás segítségével is. Ámde mivan akkor, ha a sokkal kevésbé elképzélhető $x^{5,345}$ értékére vagyunk kiváncsiak? Hogyan szorzunk meg egy számot önmagával $5,345$-ször? Ebben az esetben nem működőképes az előbbi eljárás, ámbár mégis tudjuk, hogy ezen kifejezés is egy pontos, egyértelműen meghatározott értéket jelöl. Mivel a matematika ezen része, a hagyományos hatványozás kiterjesztése bővebb számhalmazokra, nem tartozik ehhez a szakdolgozathoz ezért nem is esik több szó róla itt. (Az érdeklődő Olvasó könnyen találhat megfelelő anyagokat ehhez a témához máshol.)

A már megismert, pozitív egész n-ekre definiált n-edik deriválás és n-edik integrálás operátorában a kitevő (n) iteratív jellegű a kompozícióra nézve. Így például amennyiben az n-edik deriváltat D^n-nel, az első deriváltat D-vel jelöljük akkor a $D^3(f)$ kifejezés megegyezik a $D \circ D \circ D(f)$ kifejezéssel. Ezzel visszavezethettük a hagyományos deriválásra az n-edik deriválást. Ez hasonlóan elmondható az n-edik integráltra is. Azonban újra felvetődik a kérdés, hogy akkor létezhet-e illetve ha létezik, hogyan határozható meg egy függvény $\frac{1}{2}$-edik integráltja? Hiszen az előző szemléletes átalakítás itt már korántsem alkalmazható. Ez a kérdés régóta foglalkoztatott nagy elméket és mára bebizonyosodott, hogy amennyiben a függvény eleget tesz néhány alapvető feltételnek (a hagyományos integrál és deriválásnál is voltak feltételek, például a függvény folytonossága) akkor a tört, valós illetve komplex-edik derivált és integrál létezik és egyértelműen meghatározható.

1.2. A Tört Kalkulus története

Valószínűleg a legtöbb ezen témával foglalkozó szerző és tudós egy bizonyos dátumot idézne fel a „Tört Kalkulus” születésének napjára. Egy 1695 szeptember 30-ára keltezett levélben írt L'Hospital Leibniznek, melyben egy konkrét jelöléssel kapcsolatban kérdezi őt amelyet egyik publikációjában használt. A lineáris függvény $f(x) = x$ n-edik deriváltjának a jelölésére használta Leibniz a következőt $\frac{D^n x}{Dx^n}$. L'Hospital kérdése a következő volt: „Vajon mi lenne az eredmény, ha $n = \frac{1}{2}$ lenne?” Leibniz a következő választ küldte erre: „ Egy látszólagos ellentmondás amelyből majd egy napon hasznos következtetéseket fognak levonni.”. Minden bizonnyal ezekkel a szavakkal született meg a Tört Kalkulus. L'Hospital és Leibniz kezdeti vizsgálódásait követve ezen terület elsősorban a legjobb matematikai elmék fennségterülete volt. Többek között Fourier, Euler és Laplace is sokat foglalkozott a tört kalkulus elméletével és annak matematikai következményeivel. Sokan találtak definíciókat - elsősorban saját jelöléseikre és módszereikre alapozva - melyek megfeleltek egy függvény nem-egészértékű integrál vagy deriváltjának kifejezésére. A legnagyobb népszerűségnek örvendő definiciók a tört kalkulus világában a Riemann-Liouville és a Grunwald-Letnikov definíciók. Habár az igazi száma a definícióknak és módszereknek nagyjából annyi mint ahány férfi és nő foglalkozott ezzel a területtel, valójában a legtöbbjük erre a két típusra épül nagyrészt, ennek a kettőnek variálásai így legfeljebb csak részletekben lesznek említve ezen szakdolgozat keretei között. A tört kalkulus elméletéhez felhasználható matematikai teóriák legnagyobb része a huszadik század előtt keletkezett.

Ennek ellenére az elmúlt száz év szolgálta a legérdekesebb ugrásokat, előrelépéseket ezen matematikai terület felhasználásait tekintve a különböző tudományágakban és alkalmazásokban. A matematikának néhány esetben változnia kellett, hogy a fizikai világ elvárásainak megfeleljen. Caputo újraformázta a „klasszikus" változatát a Riemann-Liouville tört kitevős deriváltnak, azon célból, hogy egész rendű kezdeti feltételeket használhasson a tört rendű differenciálegyenleteinek a megoldásához. 1996-ban Kolowankar ismét újraalakította a Riemann-Liouville tört kitevős derivált definícióját, hogy differenciálhasson sehol nem deriválható fraktál függvényeket. Leibniz válasza az elmúlt 300 év kutatásainak fényében már legalább félig beigazolódott. Világos, hogy a huszadik század alatt kifejezetten sok fizikai és mérnöki alkalmazását találták meg a tört kalkulusnak. Ez bizonyítja Leibniz gondolatát, miszerint egy napon sok hasznos következtetést vonnak majd le e problémáról. Az, viszont, hogy ezen alkalmazások, vagy a matematikai háttér ami kapcsolódik a témához „látszólagos ellentmondás" természetűek lennének már korántsem igazolt. Sőt, amíg a fizikai interpretációja nehezen elképzelhető egy törtkitevős deriváltnak vagy integrálnak, addig a definiciója nem sokkal nehezebb egészkitevős változatának a definíciójánál.

1.3. Matematikai háttér

Ahhoz, hogy a tört kalkulus definícióit könnyebben megértsük, szükségünk lesz néhány viszonylag egyszerű és alapvető matematikai definíció bevezetésére, átgondolására. Ilyenek a Gamma-függvény, a Béta-függvény, a Laplace transzformáció, a Laplace konvolúció és a Mittag-Leffler függvény. Ezekkel a most következő alfejezetekben foglalkozunk kicsit részletesebben.

1.3.1. Gamma-függvény

A Gamma-függvény egyike a legnélkülözhetetlenebb matematikai eszközöknek amely a tört kalkulus bevezetéséhez szükséges. Ez lényegében egy természetes kiterjesztése a faktoriálisnak a természetes számok halmazáról a valós számok halmazára. Később látni fogjuk, hogy ezen tulajdonságát fogjuk közvetlenül felhasználni a derivált kiterjesztésének a definíciójában. A Gamma-függvény definíció szerint a következő:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy$$

Ez az integrál minden olyan x-re konvergens, melyre $Re(x) > 0$. Analitikus úton kiterjeszthető a Gamma-függvény minden komplex számra a nempozitív egészek kivételével.

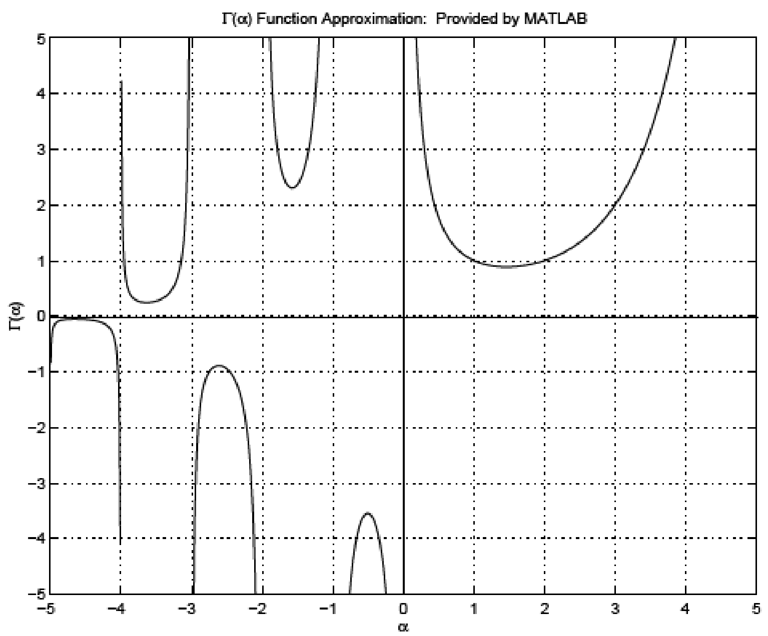
A függvény igazi érdekessége a részleteiben található meg. Az egyik ilyen nagyon fontos - és természetes számok esetén a hagyományos faktoriálist is jól jellemző - tulajdonság, hogy bármely valós x értékre fennáll a következő egyenlőség:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

A Gamma-függvény kapcsolatát a faktoriálissal a következő képlet adja:

$$\Gamma(x) = (x-1)! \qquad \forall x \in \mathbb{N}^+$$

Ezen egyenlőségek könnyedén leellenőrizhetőek ha elvégezzük a definíciókban szereplő integrálást mindkét oldalon. A következő ábra szemlélteti a Gamma-függvényt a nulla egy környezetében. Észrevehetjük, hogy a nullára és a negatív egészekre ezen kiterjesztett változat sem értelmezhető, de az összes többi valós számra konkrét számot kapunk értékül.



Az $\binom{n}{k}$ kifejezésnek is adódik egy természetes kiterjesztése a Gamma-függvény felhasználásával:

$$\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}$$

1.3.2. Béta-függvény

A matematikában a Béta-függvény (vagy másnéven: első típusú Euler intergrál) egy speciális függvény amit a következő képlettel definiálunk:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad Re(x), Re(y) > 0$$

A Béta-függvény szimmetrikus:

$$B(x,y) = B(y,x)$$

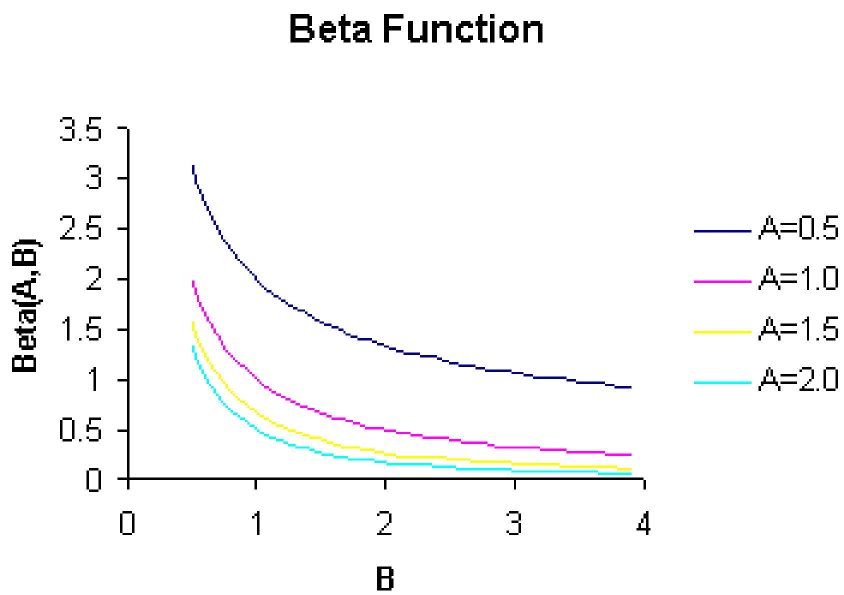
Pozitív egész x és y esetén a Béta függvény felírható a következő alakban:

$$B(x,y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

A Gamma függvény felhasználásával adódik a következő alakja a Béta függvénynek, melyet sokszor alkalmazhatunk a tört kalkulus területén belül:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

A következő ábrán látható a $B(\alpha, \beta)$ függvény ábrázolva, néhány különféle rögzített α-ra β függvényeként.



1.3.3. Laplace-transzformáció és konvolúció

A Laplace transzformáció egy széles körben alkalmazott integráltranszformációs formula. A következő jelölést alkalmazva: $\mathcal{L}(f(t))$ ez egy lineáris operátor, amely egy $f(t)$ $(t \geq 0)$ valós argumentumú függvényt egy $F(s)$ komplex argumentumú függvénnyé konvertál. Ez az operátor lényegében bijektív a legtöbb gyakorlati alkalmazás esetében. A Laplace-operátort gyakran használják bonyolult differenciálegyenletek megoldásánál. Segítségével gyakran elkerülhető, hogy olyan egyenletekkel kelljen foglalkoznunk amelyben különböző rendű deriváltak szerepelnek, helyettük inkább áttranszformáljuk őket egy közös változóra, egy olyan formára ahol sokkal egyszerűbb alakot vesz fel a differenciálegyenlet.

A formális definíciója egy $f(t) \qquad (t \geq 0)$ függvény Laplace transzformáltjának:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Akkor mondjuk, hogy létezik az $\mathcal{L}(f(t))$ Laplace-transzformált, ha az előző képletben definiált integrál konvergens. Ennek a szükséges feltétele, hogy $f(t)$ nem nőhet nagyobb nagyságrendben mint ahogy az e^{-st} exponenciális kifejezés csökken.

Egy másik gyakran alkalmazott képlet a Laplace-féle konvolúció. Ez az operáció két függvényhez rendel egy harmadikat. A képlet:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = g(t) * f(t)$$

Két függvény konvolúcióját a t változóban gyakran korántsem egyszerű meghatározni. Ekkor azonban nagy segítség lehet a Laplace-transzformált s változójában meghatározni a konvolúció eredményét. A következő képlet szerint két függvény konvoláltjának a Laplace - transzformáltja megegyezik a függvények transzformáltjának hagyományos szorzatával.

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = \mathcal{L}(f(t)) \mathcal{L}(g(t))$$

Még egy fontos tulajdonsága a Laplace-transzformáltnak amit érdemes megemlíteni: Az $f(t)$ függvény pozitív egész n-edrendű deriváltjának a Laplace-transzformáltja a következő:

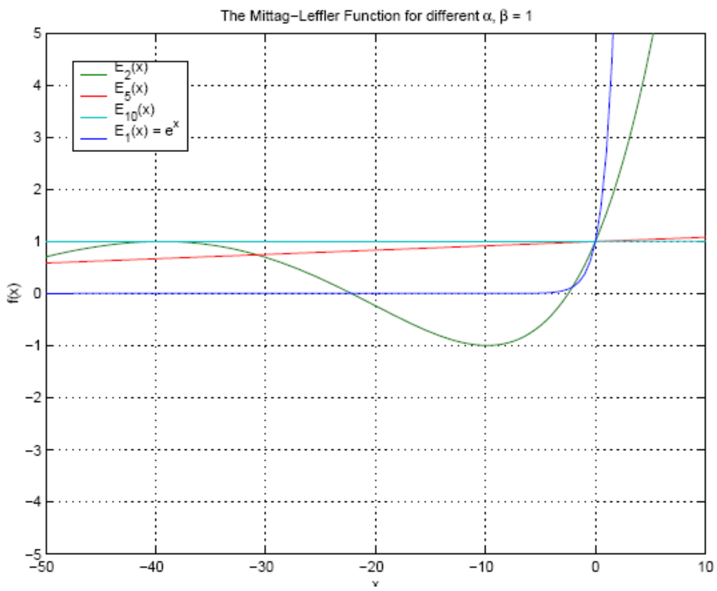
$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0)$$

1.3.4. Mittag-Leffler-függvény

Az $E_{\alpha,\beta}$-val jelölt Mittag-Leffler függvény egy komplex függvény, két komplex paraméterrel, ezt jelöltük α- val és β-val. Amennyiben α valós része szigorúan pozitív a következő képlettel szemléltethetjük a függvényt:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_0^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Abban az esetben ha α és β is valósak és pozitívak a függvény minden z értékre konvergál, tehát $E_{\alpha,\beta}(z)$ egészfüggvény, azaz $\mathbb{C}$ minden pontjában holomorf. A Mittag-Leffler függvény igen fontos szerepet tölt be a tört kalkulus területén belül. Ahogyan az exponenciális függvény adódik gyakori megoldásul az egész rendű differenciálegyenletekre, úgy játszik hasonlóan nagy szerepet a Mittag-Leffler függvény a nem egész rendű differenciálegyenletek megoldásában. α és β egyenlő egy esetben az exponenciális függvényt, α egyenlő nulla és β egyenlő egy esetben pedig a mértani sor összegképletét kapjuk. A következő ábra szemlélteti a Mittag-Leffler függvényt különböző α értékekre ($\beta = 1$).



A tört kalkulus területén belül gyakran használják egy egyszerűbb alakját a Mittag-Leffler függvénynek, ez pedig a következő:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \qquad \alpha > 0$$

Ez lényegében az mintha az előző általánosabb képletben szereplő β-t egy értékkel rögzítenénk. Gyakran csak erre az alakra lesz szükségünk tört rendű differenciálegyenletek megoldásához.

1.3.5. Gel'fand-Shilov-függvény

A Gamma-függvény segítségével definiálhatunk egy függvényt a következőképpen:

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

,ahol a plusz jel az alsóindexben azt jelöli, hogy a függvény eltűnik negatív számokon. Ezt a függvényt szokás nevezni α rendű Gel'fand-Shilov függvénynek, hogy ezzel is adózzunk a szerzők előtt akik először tettek említést róla a könyvükben (Gel'fand és Shilov(1964)). Pozitív α esetén ez a függvény lokálisan integrálható minden pozitív valós számon.
Fennáll a következő kompozíciós szabály:

$$\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) = \Phi_{\alpha+\beta}(t)$$

2. fejezet

Az integrálás és deriválás kiterjesztése

A deriválás és az integrálás operátorát szeretnénk kiterjeszteni valós rendre. Erre sokféle módszer létezik, most az egyikről ejtünk szót kicsit részletesebben. Ez a Riemann-Liouville definíció, az egyik leggyakrabban alkalmazott módszer a tört kalkulus területén belül. Ehhez először az eddig pozitív egész n-ekre defintiált n-edik integrálást fogjuk kiterjeszteni oly módon, hogy értelmezni tudjuk pozitív valós α-kra az α-dik integrált fogalmát. Majd miután ez megvan, ennek felhasználásával fogjuk definiálni az α-dik deriváltját egy függvénynek pozitív és valós α értékekre nézve.

2.1. A Riemann-Liouville tört integrál

Vegyünk egy tetszőleges $f(t)$ „causal" függvényt - ami annyit jelent, hogy $f(t)$ valós vagy komplex értékű, a t valós változó amelyre a függvény $t < 0$ esetén eltűnik - és egy $x > 0$ értéket. Ekkor jelöljük a hagyományos definíció szerint az $f(t)$ függvény határozott integrálját nullától x-ig a következőképpen:

$$(Jf)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Mégegyszer megismételve ezt az operációt kapnánk, hogy:

$$(J^2f)(x) = \int_0^x (Jf)(t)dt = \int_0^x (\int_0^t f(s)ds)dt$$

Ezt az eljárást folytathatnánk a végtelenségig. A J^n jelölés esetén az n iteratív kitevő, azt jelenti, hogy a J operációt n-szer alkalmaztuk egymás után egy függvényre iteratív módon. Természetesen itt (hogy ez a szemlélet megállja a helyét) n természetes számot kell, hogy jelöljön. A J^0-t az identitásoperátornak szokás definiálni.
A következő jól ismert - gyakran Cauchynak tulajdonított - formula segítségével az n-szeres integrálást meg tudjuk határozni egy darab, konvolúcióra hasonlító integrálással:

$$(J^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

Ezzel a jól ismert képlettel tehát az n-ed rendű integrálást visszavezettük egy könnyebben kiértékelhető alakra, pozitív egész n-ek esetében.

Azonban nézzük csak meg jobban a képletet! Amennyiben a célunk ezt az operációt pozitív valós n-ekre kiterjeszteni, vajon, hol ütközhetünk akadályba Cauchy-képletét használva? Két helyen szerepel az n szám, az egyik egy hatványkitevő, amelyre nyugodtan írhatunk pozitív (sőt akármilyen) valós számot az integrálon belüli kifejezés ugyanúgy értelmes marad. A másik egy faktoriális, amelyet csak pozitív egészekre definiáltunk. Induljunk ki tehát a következő alakból:

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{h(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

Itt $h(\alpha)$ α-nak valami függvényét jelöli.

A célunk pontosan definiálni egy olyan új operátort amely az előző Cauchy-féle képletből indul ki és minden α pozitív valós szám esetére egy $f(t)$ kezdeti feltételeknek („causal függvény") eleget tevő függvényhez egyértelműen hozzárendel egy másik függvényt. Mindemellett ezt valami oly módon teszi ami „hasonlít" a hagyományos integrálásra. Az, hogy „hasonlít" a hagyományos integrálásra azt jelenti, hogy annak bizonyos jellemző tulajdonságaival rendelkezik.
A hagyományos integrálás egyik ilyen jellemző tulajdonsága, hogy az exponenciális függvényt akárhányszor integráljuk, mindig egy „vele azonos nagyságrendű" függvényt kapunk eredményül. Induljunk ki ebből!

Tudjuk, hogy az e^x függvényt akárhányszor is integráljuk egymás után, mindig egy asszimptotikusan e^x nagyságrendű függvényt kapunk eredményül. Egészen pontosan $e^x+p(x)$-et ahol $p(x)$ x-nek valami polinomja.
Hiszen:

$$(Je^t)(x) = \int_0^x e^t dt = e^x - e^0 = e^x - 1$$

$$(J^2e^t)(x) = \int_0^x (\int_0^t e^s ds)dt = \int_0^x e^t - 1dt = e^x - x - 1$$

...stb.

Ezért aztán, bármely $n > 0$ egészre:

$$J^n e^x \sim e^x \qquad ha \qquad x \to \infty$$

.
Azaz az integrált asszimptotikusan mindig e^x nagyságrendű marad. Szeretnénk, ha az exponenciális függvénynek ez a tulajdonsága megmaradni akkor is amikor $\alpha > 0$ valós számszor integrálunk:

$$J^\alpha e^x \sim e^x \qquad ha \qquad x \to \infty$$

.
Esetünkben a $J^\alpha e^x$ kifejezés a következővel egyenlő:

$$J^\alpha e^x = \frac{1}{h(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^t dt$$

ahol az $\frac{1}{h(\alpha)}$ egy csak α-tól függő függvény.
A célunk belátni, hogy ez a kifejezés asszimptotikusan egyenlő nagyságrendű az e^x függvénnyel. Azaz, hogy fennáll a következő:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{h(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^t dt}{e^x} = 1$$

Ezt a kifejezést kicsit átalakítva a következő kifejezést kapjuk:

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}e^{t-x}dt = h(\alpha)$$

Alkalmazzuk a következő helyettesítést: $u := x - t$
Ekkor:

$$h(\alpha) = \lim_{x\to\infty}\int_x^0 u^{\alpha-1}e^{-u}(-du) = \lim_{x\to\infty}\int_0^x u^{\alpha-1}e^{-u}du$$

Azaz:

$$h(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du = \Gamma(\alpha)$$

Beláttuk tehát, hogy amennyiben szeretnénk, hogy az újonnan definiált intergráloperátor megtartsa az exponenciális függvény asszimptotikus tulajdonságát $h(\alpha)$ csak és kizárólag egyféle lehet, méghozzá: $\Gamma(\alpha)$.

Tehát az így kapott képletünk az integráloperátorra:

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt$$

Nevezzük a következő definíciót ($\alpha > 0$) valós szám esetén az $f(t)$ függvény α rendű Riemann-Liouville intergráljának:

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt$$

Figyeljük meg, hogy amennyiben $f(t)$ eleget tesz a fejezet elején említett feltételeknek akkor az így definiált $(J^\alpha f)(x)$ mindig létezik és egyértelmű!
Emellett azt is tudjuk, hogy az exponenciális függvény asszimptotikus tulajdonságát is megtartja a Riemann-Liouville integráloperátor.

Most ellenőrizzük le még néhány egyéb kívánt tulajdonságát az integráloperátornak!

Amennyiben egy függvényt integrálunk n-szer, majd utána még m-szer, ahol az n és m pozitív egész számok, akkor szemléletesen adódik, illetve a definícióból is könnyen leellenőrizhető a következő:

$$J^m(J^n(f(x)) = J^n(J^m(f(x)) = J^{(n+m)}f(x)$$

Tehát a hagyományos n-edik integrálások operátorhalmazára igaz, hogy a konvolúcióra nézve additívak.

$$J^n \circ J^m = J^{n+m}$$

Meg szeretnénk vizsgálni, hogy a Riemann-Liouville intergráloperátort alkalmazva először α majd β rendben egy függvényre, fennáll-e hasonló. A kérdés tehát, hogy igaz-e a következő:

$$(J^\beta(J^\alpha f))(x) =^? (J^\alpha(J^\beta f))(x) =^? (J^{(\alpha+\beta)}f)(x)$$

Kibontva ez annyit jelent, hogy fennáll-e a következő egyenlőség:

$$(J^\beta(J^\alpha f))(x)) =^? \int_0^x \frac{(x-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(\int_0^y \frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(t)dt)dy =^? \int_0^x \frac{(x-v)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}f(v)dv$$

Ellenőrizzük le először valami egyszerű függvényre és integrálási tartományra!
Vegyük az $f \equiv 1$, tehát az azonosan 1 konstans függvényt és ennek nézzük az intergrálját az egyszerűség kedvéért $(0,1)$-en.!

Az előző egyenletbe f helyére az azonosan 1 függvényt helyettesítve a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\beta-1}(\int_0^y (y-t)^{\alpha-1}dt)dy =^? \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-v)^{\alpha+\beta-1}dv$$

Mivel:

$$\int_0^y (y-t)^{\alpha-1}dt = \frac{y^\alpha}{\alpha}$$

illetve

$$\int_0^1 (1-v)^{\alpha+\beta-1}dv = \frac{1}{\alpha+\beta}$$

Ezért az előző egyenlettel ekvivalens a következő:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^\beta dy$$

Amiből következik, hogy az operátor additivitásának szükséges feltétele:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = B(\alpha,\beta)$$

(Itt $B(x,y)$ a bevezetőben már említett béta-függvényt jelöli)

Ez az egyenlőség könnyen ellenőrizhető és már a matematikai háttérfogalmak taglalásánál is említettük. Ebből tehát következik, hogy az operátor additív az $f(t) \equiv 1$ függvényre és $x = 1$ értékre nézve.

Most próbáljuk meg bebizonyítani az általános esetre!

A Gel'fand-Shilov függvény segítségével a Riemann-Liouville integráloperátor definíciója a következő alakra írható át:

$$(J^\alpha f)(x) = (\Phi_\alpha * f)(x)$$

Ez könnyen ellenőrizhető:

$$(\Phi_\alpha * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\alpha(x-t)f(t)dt$$

Ami pedig megegyezik a következővel:

$$\int_0^x \Phi_\alpha(x-t)f(t)dt$$

hiszen $t < 0$ esetben $f(t)$ lesz nulla, míg $t > x$ esetben pedig $\Phi_\alpha(x-t)$ argumentuma lesz negatív tehát a függvény értéke ott is nulla lesz.
Továbbírva tehát:

$$\int_0^x \Phi_\alpha(x-t)f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy:

$$(J^\alpha f)(x) = (\Phi_\alpha * f)(x)$$

Ezt az alakot a most következő gondolatmenetben alkalmazni fogjuk.

Azt szeretnénk tehát belátni, hogy a Riemann-Liouville integráloperátor additív, tehát, hogy:

$$(J^\beta(J^\alpha))f(x)) = J^{(\alpha+\beta)}f(x)$$

Az előbb belátott alakot felhasználva ez tehát a következővel ekvivalens:

$$(J^\beta(J^\alpha f))(x)) = (\Phi_\beta * (\Phi_\alpha * f))(x)$$

Az egyenlet jobb oldala pedig:

$$J^{(\alpha+\beta)}f(x) = (\Phi_{\alpha+\beta} * f)(x)$$

Az eredeti belátni kívánt egyenlet tehát az új alakban felírva:

$$(\Phi_\beta * (\Phi_\alpha * f))(x) = (\Phi_{\alpha+\beta} * f)(x)$$

Felhasználva, hogy a konvolúció asszociatív művelet a következő egyenletre jutunk:

$$((\Phi_\alpha * \Phi_\beta) * f)(x) = (\Phi_{\alpha+\beta} * f)(x)$$

Már a hattató függvény bemutatásánál is megemlítettük a következő egyenlőséget:

$$\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) = \Phi_{\alpha+\beta}(t)$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy a Riemann-Liouville integráloperátor additív!
Ebből következik, hogy kommutatív is a kompozícióra nézve, hiszen:

$$(J^\alpha(J^\beta f))(x) = (J^{\alpha+\beta}f)(x) = (J^\beta(J^\alpha f))(x)$$

Amennyiben a J^0 operátort az identitásként definiáljuk, azaz $(J^0 f)(x) = f(x)$ és felhasználva az imént belátott additivitást könnyen beláthatjuk, hogy a J^α integráloperátorok $\forall\alpha \in \mathbb{R}_0^+$-ra, a kompozíció műveletére félcsoportot alkotnak.

Az imént belátott konvolúciós alakja a Riemann-Liouville tört integrálnak nagy segítséget tud nyújtani az integrált Laplace-transzformáltjának a kiszámításához. Mivel:

$$\mathcal{L}(t^{\alpha-1}) = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}$$

Ebből adódik, hogy:

$$\mathcal{L}(\Phi_\alpha(t)) = s^{-\alpha}$$

Tehát a tört intergrál Laplace-transzformáltjára igaz a következő:

$$\mathcal{L}((J^\alpha f)(t)) = \mathcal{L}((\Phi_\alpha * f)(t)) = \mathcal{L}(\Phi_\alpha(t))\mathcal{L}(f(t)) = s^{-\alpha}F(s)$$

Itt felhasználtuk a bevezetőben említett, konvolúció Laplace-transzformáltjára vonatkozó azonosságot.

A Riemann-Liouville integrál lineáris:

$$(J^\alpha)(cf + dg)(x) = (c(J^\alpha f) + d(J^\alpha g))(x)$$

A Riemann-Liouville integrálnak belátható még számos egyéb, a hagyományos integrálással megegyező tulajdonsága is, ám sajnos ez már nem fér bele ennek a szakdolgozatnak a kereteibe.

A következő részben az integrálás definícióját felhasználva bemutatjuk deriválás kiterjesztését valós számokra!

2.2. A deriválás kiterjesztése

Hagyományos, egészértékű esetben a deriválás és integrálás „egymást kioltó” műveletek. Jelöljük az n-edik deriválás operátorát D^n-nel. Ekkor már tudjuk, hogy nemnegatív egész n esetén (és ha a függvény megfelel a deriválási és integrálási kritériumoknak) fennáll a következő egyenlőség:

$$(D^n(J^n f))(x) = f(x)$$

És amennyiben igaz, hogy $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, akkor a következő is teljesül:

$$(J^n(D^n f))(x) = f(x)$$

Illetve ekkor, hasonlóan igaz az is (nemnegatív egész n és m-ekre), hogy:

$$(D^n(J^m f))(x) = (J^m(D^n f))(x) = (J^{m-n} f)(x) = (D^{n-m} f)(x)$$

Mivel nem definiáltuk még negatív egészekre ezeket az operátorokat, ezért most megtesszük a lehető legkézenfekvőbb módon. Azt szeretnénk, hogy nemnegatív egész m esetén a $-m$-szeres deriválás az m-szeres integrálást, a $-m$-szeres integrálás pedig az m-szeres deriválást jelölje. A következő természetes jelölést alkalmazzuk, amely bármely egész n értékre fennáll:

$$(J^{-n} f)(x) := (D^n f)(x)$$

illetve

$$(D^{-n} f)(x) := (J^n f)(x)$$

2.2.1. A Riemann-Liouville derivált

Definiálni szeretnénk az α-adik deriváltját egy (deriválható) $f(t)$ függvénynek nemnegatív, valós α esetén.

Mint említettem, a Riemann-Liouville féle integráloperátort fogjuk felhasználni a deriválás kiterjesztéséhez. Legyen α nemnegatív valós szám, $f(t)$ pedig az α-szor deriválni kívánt függvény. Legyen m az az α által egyértelműen meghatározott pozitív egész melyre fennáll, hogy: $m-1 < \alpha \le m$, tehát m az α valós felső egészrésze. Most integráljuk először $f(t)$-t $(m-\alpha)$-szor, majd a kapott függvényt deriváljuk a hagyományos módon m-szer. Amit kaptunk:

$$(D^{\alpha})f(t) := \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m}[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}d(\tau)] & \text{,ha } m-1<\alpha<m \\ \frac{d^m}{dt^m}f(t) & \text{,ha } \alpha=m \end{cases}$$

Ez az úgynevezett Baloldali Definíció az α-dik rendű derivált meghatározására.

Ez a definíció a következőképpen alakul ki szemléletesen.
Amennyiben $\alpha = 0$, úgy $(D^{\alpha}f)(t) = f(t)$.

Amennyiben α egy pozitív egész szám, akkor a képlet szerint:

$$(D^{\alpha}f)(t) = \frac{d^m}{dt^m}f(t)$$

,azaz a hagyományos, ismert módon m-szer deriváljuk $f(t)$-t egymás után.

Ha pedig α pozitív valós szám amelyre $m-1 < \alpha < m$, akkor először integráljuk a függvényt $m-\alpha$-szor, majd a kapott függvényt deriváljuk m-szer.

Megfigyelhetjük, hogy az α-dik derivált definiálásához, csak a hagyományos többszörös deriválást és a Riemann-Liouville integrálást használtuk fel.

Így most már bevezethető a következő jelölés bármely α valós szám esetére:

$$(J^{-\alpha}f)(x) := (D^{\alpha}f)(x)$$

illetve

$$(D^{-\alpha}f)(x) := (J^{\alpha}f)(x)$$

Ezzel tehát definiáltuk $(J^{\alpha}f)(x)$-et és $(D^{\alpha}f)(x)$-et bármely α valósra.

Leellenőrizhető, hogy fennáll:

$$(D^{\alpha}J^{\alpha}f)(x) = (J^{\alpha}D^{\alpha}f)(x) = f(x)$$

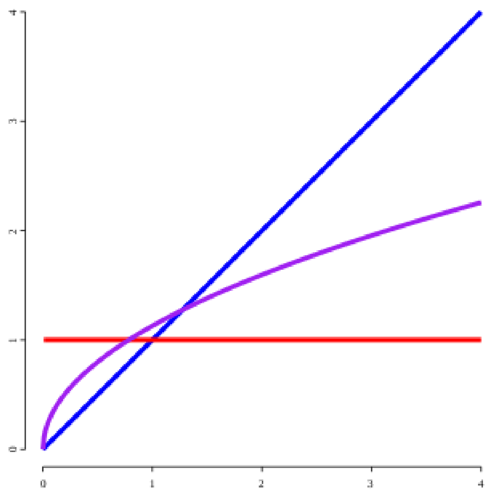
Illetve, hogy bármely α és β valós értékekre:

$$J^{\alpha} \circ J^{\beta} = J^{\alpha+\beta}$$

és

$$D^{\alpha} \circ D^{\beta} = D^{\alpha+\beta}$$

A következő ábrán megfigyelhető az $f(x) = x$ függvény (kék) és annak első (piros) illetve $\frac{1}{2}$-dik deriváltja (lila).



2.2.2. A Caputo-féle derivált

A valósadik derivált definiálására egy másik (az előző lényeges tulajdonságaival szintén rendelkező) módszer az úgynevezett Caputó-féle derivált, vagy Jobboldali Definíció. Eszerint egy (deriválhatósági kritériumnak megfelelő) $f(t)$ függvény α-adik deriváltját a következőképpen definiáljuk:

$$(D_*^{\alpha})f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}d(\tau) & \text{,ha } m-1<\alpha<m \\ \frac{d^m}{dt^m}f(t) & \text{,ha } \alpha=m \end{cases}$$

Ebben a típusban annyi történt, hogy fordított sorrendben végeztük el a matematikai műveleteket. Először deriváltuk a függvényt m-szer, majd utána integráltuk $m-\alpha$-szor.

Mindkét definíció megfelel az elvárásoknak olyan szempontból, hogy tartalmazza a differenciálás legfontosabb tulajdonságait:

Mindkét definícióra ellenőrizhető, hogy megtartják a hagyományos deriválás néhány fontos tulajdonságát. Például, ha van egy m-szer folytonosan differenciálható $f(t)$ függvényünk ($m>0$ egész) akkor $\forall 0<\alpha<m$-re is $D^{\alpha}(t)$ létezik és folytonos. Ez bármely definíciót használjuk is könnyen adódik. Egész α esetén ez semmi különösebb belegondolást nem igényel, amennyiben α nem egész valós akkor is könnyen megkapható a hagyományos integrálás és deriválás hasonló tulajdonságaiból.

Könnyen belátható, hogy lineárisak ezek a definíciók:

$$D^{\alpha}(af(x)+bg(x)) = aD^{\alpha}f(x)+bD^{\alpha}g(x)$$

Az exponenciális függvény bármely n-edik deriváltja (pozitív egész n-re) ismert, hogy önmaga. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden α pozitív valósra is fennáll ez az azonosság:

$$D^{\alpha}(e^x) = e^x$$

Észrevehető azonban, hogy a jobb oldali definíció valamivel szigorúbb feltételeknk veti alá a függvényt. Vegyük például a Riemann-Liouville integráláshoz szükséges feltételeket, tehát például, hogy $t < 0$ esetében a függvénynek el kell tűnnie. A jobboldali definíció esetében $t < 0$ esetében nem elég, hogy $f(t) = 0$, de a következőknek is igaznak kell lenniük:

$$f^{(1)}(t) = f^{(2)}(t) = \cdots = f^{(m)}(t) = 0$$

Felvetődhet ilyenkor a kérdés, hogy miért is van akkor szükség akkor a jobboldali definícióra? Erre a választ leginkább differenciálegyenletek megoldásánál kereshetjük. Vannak esetek amikor ott különös hasznát lehet venni a jobboldali definíciónak. Az egyik legnagyobb hasznát a Caputo-féle definíciónak olyan kezdetiérték feladatoknál vehetjük amikor a kezdeti értékek egész-edik deriváltak formájában vannak megadva.

Hogy ez nyilvánvalóvá váljon vizsgáljuk meg a Laplace-transzformáltját egy ilyen Caputo-féle deriváltnak! A szokásos jelölést használva most α pozitív valós szám melyre $m - 1 < \alpha \leq m$ és m pozitív egész szám:

$$\mathcal{L}(D_*^\alpha f(t))(s) = \mathcal{L}(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau)(s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0^+)$$

ahol $f^{(k)}(0^+)$ a következőt jelöli: $\lim_{t \to 0+} D^k f(t)$. Itt felhasználtuk a bevezetőben említett deriváltak Laplace-transzformáltjára vonatkozó azonosságot.

És most nézzük meg a baloldali definíció által derivált függvény Laplace-transzformáltját:

$$\mathcal{L}(D^\alpha f(t)(s) = \mathcal{L}(\frac{d^m}{dt^m}[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d(\tau)](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k D^{\alpha-1-k} f(0))$$

Könnyen látszik, hogy a Caputo féle módszer Laplace-transzformáltjában csak egész rendű deriváltjai szerepelnek a függvénynek, míg a Baloldali Definíciót használva a transzformáltban sok nem egész rendbeli deriválás szerepel. A fizikai világ modellezésére már kialakult rendszer van egész rendű deriváltak alkalmazásával, így olyan kezdetiérték problémáknál melyben a kezdeti értékek egész rendű deriváltak, sokkal jobban használható a Caputo-féle, vagy Jobboldali definíció.

2.3. Egyéb definíciók

A Riemann-Liouville-féle megközelítésen kívül, vagy akár abból kiindulva több különböző egyéb definiálása is keletkezett a tört kalkulusbeli fogalmaknak. Hogy melyik definíciót mikor érdemes alkalmazni az leginkább az adott probléma típusától függ. Előfordulnak előnyösebb és kevésbé előnyös alakok is a megoldásra (mint amire már a Baloldali és a Caputo-féle definíció esetében példát is láttunk). A következő megközelítéseket csak megemlítés szinten tárgyaljuk, a szakdolgozat keretei nem engedik meg mindegyik típus bebizonyítását.

2.3.1. Grünwald-Letnikov definíció

A Riemann-Liouville módszerhez képest egy igen eltérő változat a Grunvald-Letnikov féle megközelítés. A. K. Grünwald és A. V. Letnikov matematikusokról kapta a nevét, akik ennek a modellnek a megalkotói. Ebben a módszerben a derivált hagyományos definíciójának az oldaláról közelítünk az általánosított fogalomhoz.
Tudjuk, hogy egy $f(x)$ deriválható függvényre:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ezt n-szer „ismételve” kapjuk az n-edik derivált képletét:

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{k} f(x - mh)$$

Végül ennek a képletnek a kiterjesztésével kapjuk meg a Grünwald-Letnikov féle képletet:

$$(D^\alpha f)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha - m + 1)} f(x - mh)$$

Itt t és a egy intervallum határai ($t > a$) amin a differenciálást nézzük, $h \to \infty$ esetben könnyen láthatóan a szumma felső határa végtelenhez tart.

Néhány igazítás után negatív kitevőre a tört integrált kaphatjuk a következőképpen:

$$(D^{-\alpha}f)(x) = \lim_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\Gamma(\alpha)} f(x-mh)$$

Ezzel tehát megkaptuk egy egészen másik definícióját az α-adik deriváltnak és integráltnak α valós paraméter esetében. A Grünwald-Letnikov és a Riemann-Liouville féle definíciók ekvivalensek, de ennek a bizonyítása hosszadalmasabb és bonyolultabb.

2.3.2. Marchaud tört-derivált

Marchaud abból indult ki, hogy a hagyományos Riemann-Liouville integrál képletébe $-\alpha$-t írunk, ahol α pozitív valós szám, hogyan juthatunk el az α-adik deriválthoz.
A Marchaud-féle α-dik derivált $(0 < \alpha < l)$ a következő:

$$(D^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{C_{\alpha,l}} \int_0^{\infty} \frac{\Delta_t^l f(x)}{t^{l+\alpha}} dt$$

ahol:

$$\Delta_t^l f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{l}{j} f(x-jt)$$

ileltve:

$$C_{\alpha,l} = \int_0^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^l}{t^{l+\alpha}} dt$$

2.3.3. Riesz integrál és derivált

Riesz Marcell magyar matematikus nevéhez fűződik a következő tétel, mely nem explicit definíciót ad az α-adik deriváltra:
Tétel: Legyen $\alpha > 0$, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Ekkor a következők ekvivalensek:
(i) f-nek létezik az α-adik erős Riesz-deriváltja

(ii) Létezik egy olyan $g \in \mathcal{L}^p((R))$ függvény amire fennáll a következő:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\| \frac{1}{K_{\alpha,2j}} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\overline{\Delta}_u^{2j} f}{u^{1+\alpha}} du - g \right\|_p = 0$$

ahol j egy pozitív egész, úgy megválasztva, hogy $0 < \alpha < 2j$.

$$K_{\alpha,2j} = (-1)^j 2^{2j-\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2j} u}{u^{l+\alpha}} du$$

$$\overline{\Delta}_u^{2j} f(x) = \sum_{k=0}^{2j} (-1)^k \binom{2j}{k} f(x + (j-k)u)$$

Ebben az esetben ez a g függvény a keresett $D^\alpha f$, az α-dik erős Riesz derivált.

3. fejezet

Integrál és differenciálegyenletek

Ebben a részben néhány hagyományos integrál illetve differenciálegyenletet vizsgálunk meg olyan esetben amikor valós-adik integrálás vagy deriválás szerepel benne. Két egyszerűbb típusú integrálegyenletet és két egyszerűbb diffegyenletet nézünk meg kicsit részletesebben.

3.1. Integrálegyenletek valós rendben

3.1.1. Első típus

Talán az egyik legegyszerűbb, hagyományos típusú integrálegyenlet a következő:

$$(Jf)(x) = g(x)$$

Ennek a megoldása pedig:

$$f(x) = g'(x)$$

A Tört Kalkulus felhasználásval vizsgálhatjuk a következő egyenletet:

$$(J^\alpha f)(x) = g(x), \qquad 0 < \alpha < 1$$

Itt $(J^\alpha f)(x)$ a hagyományos Riemann-Liouville integrálást jelöli, tehát az egyenlet egy ekvivalens alakja a következő:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = g(x), \qquad 0<\alpha<1$$

Az egyenlet megoldása a követkeő:

$$f(x) = (D^\alpha g)(x)$$

Itt jogosan adódhat a kérdés, hogy melyik fajta deriválási definíciót alkalmazzuk, illetve, hogy számít-e egyáltalán, hogy melyiket választjuk!
Könnyen ellenőrizhető, hogy ha a hagyományos Baloldali Definíciót alkalmazzuk, akkor minden ilyen estben fennáll, hogy:

$$(D^\alpha(J^\alpha f))(x) = ((J^{1-\alpha}(J^\alpha f))'(x) = (Jf)'(x) = f(x)$$

Ellenben, amennyiben a Caputo-féle definíciót alkalmazzuk nem minden esetben áll fennt a következő:

$$(D_*^\alpha(J^\alpha f))(x) = f(x)$$

A kétféle definíció közötti különbség megfigyelhető abban az esetben is ha a Laplace-transzformációt használjuk fel az integrálegyenlet megoldására. Nézzük meg mit is jelent ez pontosan:

$$\mathcal{L}(J^\alpha f)(s) = \mathcal{L}(\Phi_\alpha * f)(s) = \frac{F(s)}{s^\alpha} = \mathcal{L}(g)(s) = G(s)$$

Tehát az egyenlet Laplace-transzformáltja:

$$F(s) = s^\alpha G(s)$$

Ezt átrendezve kaphatjuk, hogy:

$$F(s) = s(\frac{G(s)}{s^{1-\alpha}})$$

És amikor ezt az alakot visszatranszformáljuk az eredeti változóra, megkapjuk, hogy az egyenlet megoldása a Baloldali Definíció használatával kapható:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(\int_0^x \frac{f(t)}{x-t}^\alpha dt)' = (J^{1-\alpha}f)'(x) = (D^\alpha f)(x)$$

Azonban, ha máshogy rendezzük az egyenlet Laplace-transzformáltját:

$$F(s) = \frac{1}{s^{1-\alpha}}(sG(s) - G(0)) + \frac{G(0)}{s^{1-\alpha}}$$

Ezt visszatranszformálva kapjuk, hogy:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f'(x)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x) + f(0) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Láthatóan tehát, amennyiben a Caputo-féle deriváltat szeretnénk alkalmazni, nem szabad elfeledkeznünk, hogy lesz a megoldásban még egy $f(0)$-tól is függő tényező amivel számolnunk kell.

3.1.2. Második típus

Nevezzük a következő formájú egyenleteket a második típusú tört integrál egyenleteknek:

$$(1 + \lambda J^\alpha) f(x) = g(x)$$

Ennek a megoldása:

$$f(x) = (1 + \lambda J^\alpha)^{-1} g(x) = (1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n J^{\alpha n}) g(x) = g(x) + (\sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \Phi_{\alpha n}) * g(x)$$

Ismerve a Mittag-Leffler függvényt adódik a következő:

$$E_\alpha(-\lambda x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Felhasználva ezt a második típusú integrálegyenlet megoldása tehát a következőképpen néz ki:

$$f(x) = g(x) + (E_\alpha(-\lambda x^\alpha))' * g(x)$$

Amennyiben a Laplace-transzformációt használtuk volna fel a megoldáshoz mint például az előző példában, itt is lenne olyan ekvivalens átalakítás, hogy pontosan ugyanerre az alakra jutottunk volna vissza. Ez könnyen leellenőrizhető.

3.2. Differenciálegyenletek valós rendben

A közönséges differenciálegyenletek körében van két igen fontos alak amit vizsgálni szokás.
Az egyik az úgynevezett Relaxációs Forma:

$$f'(x) = -f(x) + c(x)$$

A másik pedig az oszcillációs forma:

$$f''(x) = -f(x) + c(x)$$

Ennek a két formának a megoldásai általában nagyon különbözőek egymástól, így ezt a két típusát a differenciálegyenleteknek igencsak külön lapon szoktuk kezelni. A Tört Kalkulusra ez már kevéssé lesz az igaz.
Nevezzük a következőt Tört Relaxációs formának:

$$(D^{\alpha}f)(x) = -f(x) + c(x) \qquad 0 < \alpha \leq 1$$

Illetve Tört Oszcillációs formának:

$$(D^{\alpha}f)(x) = -f(x) + c(x) \qquad 1 < \alpha \leq 2$$

A most definiált két alak megoldásaiban nem fog olyan jelentősen eltérni egymástól, hogy külön lapon kéne említeni őket és megoldási módszereiket.
Bevezethetünk egy általános formulát amely mindkét esetben megoldást szolgáltat:

$$D_{*}^{\alpha}f(x) = D^{\alpha}(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)) = -f(x) + c(x), \qquad m-1 < \alpha \leq m$$

Ismét felhasználva a Laplace-transzformációt a megoldáshoz a következőre juthatunk:

$$s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) = -G(s) + C(s)$$

Átalakítva:

$$F(s) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\alpha - k - 1}{s^{\alpha} + 1} f^{(k)}(0) + \frac{1}{s^{\alpha+1}}$$

Ebből az alakból néhány kisebb átalakítással és visszatranszfromálással kapjuk a differenciálegyenlet megoldását:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} J^k E_\alpha(-t^\alpha) f^{(k)}(0) - q(x) * E'_\alpha(-t^\alpha)$$

Látható tehát a Baloldali Definíció illetve a Caputo féle definíció közötti különbség, illetve Mittag-Leffler függvény fontos szerepe tört integrál és differenciálegyenletek megoldásában.

3.3. Alkalmazások

3.3.1. Az első alkalmazás

Érdemes megemlíteni, hogy a Tört Kalkulus első alkalmazását Abel, a fiatalon elhunyt norvég matematikus fedezte fel. Az úgynevezett „tautochrone" problémán dolgozott, amely egy súrlódásmentes, szimmetrikus görbén gurított, gravitáció hatása alatt lévő objektum mozgását kívánta modellezni. A tautochrone görög eredetű, jelentése „egyazon idő". Azért hívják így ezt a feladatot, mert ha egy ilyen görbén elhelyezünk egy objektumot amire hat a gravitáció (és a súrlódás meg nem) akkor bármely kezdőpontból is indítjuk, mindig ugyanannyi idő lesz a mozgásának egy periódusa. Abel a feladathoz a következő integrálegyenletet használta:

$$\sqrt{2g}T = \int_0^\eta (\eta - y)^{-\frac{1}{2}} f'(y) dy$$

Itt T jelöli a mozgás egy periódusának az idejét, g a gravitációs gyorsulás, (ξ, η) jelöli a kezdeti poziciót és $s = f(y)$ pedig a görbe egyenlete. Ez az egyenlet pedig ekvivalens a következő tört integrálegyenlettel:

$$T\sqrt{2g} = \Gamma(\frac{1}{2}) D^{-\frac{1}{2}} f'(\eta)$$

3.3.2. Genetikus-algoritmus

A Genetikus Algoritmus egy kifejezetten hasznos módszer olyan problémák esetében aminek a kiszámítása jelenkori számítógépeinkkel lehetetlen vagy extrém mértékben nehéznek bizonyulna. Olyan alaphelyzetekben mikor véges számú független változónk van és ezek lehetséges kombinációinak a száma több mint 10^{10} az a módszer, hogy számítógéppel megnézünk minden esetet és meghatározzuk a legjobbat hihetetlenül nehéz folyamat lehet. A Genetikus Algoritmust alkalmazva ilyenkor az evolúciót és genetikát szimulálva kis kezdőcsoportokból, egymást javító és mutálódó módon közelítjük a jó megoldást. A mutáció, mely egyegy megoldás bizonyos részének random megváltoztatását jelenti kezdetben rögzített valószínűséggel következett be minden elemen. Ezt próbálták meg oly módon változtatni, hogy különböző generációkban a mutáció valószínűsége is változzon meg véletlen módon. A következő tört kalkulust használó képlet jól modellezte a mutáció-valószínűségek függvényében a végeredmény jóságát:

$$G_n(s) = k\frac{(\frac{s}{a})^{\alpha} + 1}{(\frac{s}{b})^{\beta} + 1}$$

A konklúzió az volt, hogy a tört-rendű modellek gyakran olyan részleteket és jelenségeket is ki tudnak mutatni, amit egész rendű modellekkel nem lehetséges.

4. fejezet

Felhasznált irodalom

Mindenekelőtt említeném segítő konzulensem, Kós Géza nevét, akinek ötletei, javaslatai felhasználásra kerültek és jobbá tették ezt a szakdolgozatot. Köszönöm szépen!

((1)) Adam Loverro: Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer
(Nagyon sok segítséget nyújtott az egész dokumentum, szinte minden benne található gondolatot felhasználtam, az első két fejezet (matematikai alapok és bevezető) esetében fogalmazásában is támaszkodtam rá)

((2)) Francesco Mainardi: Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity
(Az integrálás bevezetésénél, a Gelfand-Shilov függvénynél illetve kevéssé a deriváltnál használtam fel konkrétan, de sok hasznos információhoz jutottam belőle amelyeket használtam közvetett módon)

((3)) Mehdi Dalir, Majid Bashour: Applications of Fractional Calculus
(Az Abel-féle alkalmazásnál használtam ezt az irodalmat)

((4)) P.L. Butzer, U. Westphal: An introduction to Fractional Calculus
(Az egyéb definícióknál használtam ezt az irodalmat)