Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Számítógéptudományi Tanszék

Ramsey-típusú tételek

Szakdolgozat

Készítette:
Tamaga István
matematika szakos hallgató

Témavezető:
Szőnyi Tamás
egyetemi tanár

Budapest
2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. A Ramsey-tétel **4**

3. Egyelemű részhalmazok, a skatulyaelv **5**

3.1. Alkalmazások 6

4. Kételemű részhalmazok **8**

4.1. Teljes gráfok színezése két színnel 8

4.2. Teljes gráfok színezése több színnel 19

4.3. Ramsey-számok speciális gráfokra 35

4.4. Teljes páros gráfok színezése 44

5. Többelemű részhalmazok, hipergráfok **50**

5.1. Eredmények 51

5.2. Alkalmazás 52

Köszönetnyilvánítás **54**

Irodalomjegyzék **55**

1. fejezet

Bevezetés

Jelen dolgozat célja, hogy megismertesse az Olvasót a Ramsey-elmélettel, a kombinatorika egyik érdekes ágával. Ez a témakör az 1920-as évek végén született Frank Plumpton Ramsey *Facts and Propositions* és *On a problem of formal logic* cikkeiben közölt eredmények alapján. Az elmélet filozófiája a következőképpen fogalmazható meg: Ha egy struktúra elég nagy, akkor elkerülhetetlen, hogy ne tartalmazzon szabályos részstruktúrákat.

A Dirichlet-féle skatulyaelv kimondja, hogy n tárgyat n-nél kevesebb skatulyába tetszőlegesen elhelyezve biztosan lesz olyan skatulya, amelyben egynél több tárgy lesz. Például: bárhogyan választunk ki három embert, biztosan lesz köztük két azonos nemű.

Szociológusok vették észre, hogy hat tetszőlegesen kiválasztott ember között vagy lesz három, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy lesz három, akik kölcsönösen nem ismerik egymást (itt az ismeretséget természetesen kölcsönösnek értelmezzük, miszerint ha A ismeri B-t, akkor B is ismeri A-t). Ramsey tételei azt mondják, hogy itt a klikk (azon emberek halmaza, akik kölcsönösen ismerik egymást) és az antiklikk (azon emberek halmaza, akik kölcsönösen nem ismerik egymást) mérete tetszőlegesen megadható, ha a társaság elég sok emberből áll.

Úgy érezzük, hogy a két példának közös gyökere lehet. A következőkben ismertetjük az észrevételek hátterében húzódó matematikát, valamint igyekszünk minél átfogóbb képet adni a témakör bonyolultságáról és az eddigi eredményekről.

2. fejezet

A Ramsey-tétel

A tétel véges formája: Egy tetszőleges n elemszámú S halmaznak vesszük az összes $r \in \mathbb{N}$ elemszámú részhalmazát. Ezeket a részhalmazokat s különböző színnel festjük (s diszjunkt részre bontjuk). Ekkor megfigyelhető, hogy bármely $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s$ pozitív egész számokra igaz, hogy van az alaphalmaznak olyan k_i-elemű részhalmaza, amelynek az összes r-elemű részhalmaza az i-edik osztályba esik (i-edik színű), ha S mérete elég nagy. A tétel kimondja, hogy létezik ilyen legkisebb $n = |S|$. Jelölése: $|S| = R_r(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s)$.

Az $r = 1$ esetben az alaphalmaz minden eleméhez színt rendelünk. Ebben az esetben pontos képletet adhatunk az azonos színű elemek számára.

Az $r = 2$ esetet jól modellezik a gráfok. Ekkor az adott ponthalmazon kételemű részhalmazokat választunk ki, ezek lesznek a gráf élei. Mivel az összes kettes részhalmazt vesszük, értelmezhetjük úgy a feladatot, hogy egy n pontú teljes gráf (K_n) éleit s színnel színezzük. Ilyenkor azt a legkisebb n számot keressük, melyre K_n-et tetszőlegesen színezve s színnel, a gráfban biztosan lesz k_i pontú i-edik színű teljes részgráf valamely i-re. Az ilyen számok megtalálása már igen nehéz feladat:

"Képzeljük el, hogy az embernél sokkal hatalmasabb idegen faj landol a Földön, és az $R(5,5)$ értékét követelik, vagy elpusztítják a bolygót. Ebben az esetben hadra kéne fognunk minden számítógépet és matematikust, hogy megtaláljuk az értéket. De tegyük fel, hogy ehelyett az $R(6,6)$ értékére kíváncsiak; ebben az esetben minden erőnkkel meg kéne próbálnunk legyőzni őket." - Erdős Pál

A problémát vizsgálhatjuk továbbá kettőnél nagyobb elemszámú részhalmazokra, valamint $r = 2$ esetén teljes részgráfok helyett speciális részgráfokra: például utakra, körökre.

3. fejezet

Egyelemű részhalmazok, a skatulyaelv

3.1. Tétel (Dirichlet-féle skatulyaelv **[18]**). *Ha van k darab gyufásdobozunk és $k+1$ gyufaszálunk, akkor akárhogyan rakjuk bele az összes gyufát a skatulyákba, valamelyik skatulyába legalább két gyufaszál jut. Végtelen esetre általánosítva: Véges sok skatulyába végtelen sok gyufaszálat tetszőlegesen elhelyezve biztosan lesz olyan skatulya, amelybe végtelen sok gyufaszál jut.*

3.2. Következmény. *Ha kevesebb gyufánk van, mint dobozunk, akkor tetszőleges elhelyezés esetén lesz üresen maradt doboz.*

A Ramsey-elmélet nyelvére fordítva: Egy n elemű S halmaz elemeit s különböző színnel színezve (a definíció alapján az azonos színűek kerülnek egy skatulyába) mekkora n-re igaz, hogy legalább egy esetben az i-edik színű halmaz elemszáma legalább k_i, vagyis mennyi $R_1(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s)$?

3.3. Tétel (**[21]**). $R_1(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s) = (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + (k_3 - 1) + \ldots + (k_s - 1) + 1.$

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $|S| = n = (k_1-1)+(k_2-1)+(k_3-1)+\ldots+(k_s-1)+1$, de létezik olyan színkiosztás, amelynél az i-edik színosztály mérete kisebb, mint k_i minden $i = 1, 2, 3, \ldots, s$ esetén. Ekkor az i-edik színosztály mérete maximálisan $k_i - 1$ lehet. Ezt a megfontolást alkalmazzuk minden i-re, így $n \leq (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + (k_3 - 1) + \ldots + (k_s - 1)$ esetén találtunk megfelelő osztályozást. Így ha az alaphalmaz mérete ennél nagyobb, valamely színosztály biztosan eléri a küszöbszámot. Ellentmondásra jutottunk. Beláttuk, hogy az $|S| = n = (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + (k_3 - 3) + \ldots + (k_s - 1) + 1$ esetén létezik olyan i-edik színű halmaz, melynek a mérete legalább k_i. Már csak azt kell igazolni, hogy ennél az értéknél kisebb n esetén találhatunk k_i-t nem tartalmazó színezést. Könnyen látható, hogy az iménti konstrukciónál $n = (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + (k_3 - 1) + \ldots + (k_s - 1)$ esetén minden színosztályban a küszöbnél eggyel kevesebb elem van, tehát valóban

$$R_1(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s) = (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + (k_3 - 1) + \ldots + (k_s - 1) + 1.$$

□

3.1. Alkalmazások

A skatulyaelvet több tétel bizonyításában is használjuk. Erre adunk két példát.

3.4. Tétel (Erdős–Szekeres, 1935 **[12]**). *Bármely $n \cdot k + 1$ darab különböző számból álló sorozatban van vagy egy n-nél hosszabb csökkenő részsorozat, vagy egy k-nál hosszabb növekvő részsorozat.*

Bizonyítás. Legyen az eredeti sorozat: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n \cdot k+1}$. Jelöljük a_i-vel az x_i-vel kezdődő leghosszabb csökkenő részsorozat hosszát, míg b_i-vel a leghosszabb x_i-vel kezdődő növekvő részsorozat hosszát. Ekkor minden x_i-hez hozzárendelünk egy (a_i, b_i) párt. Ha $i < j$ és $x_i < x_j$, akkor nyilván $b_i > b_j$, ha pedig $x_i > x_j$, akkor $a_i > a_j$. Ebből látszik, hogy különböző x_i-khez különböző (a_i, b_i) párokat kapunk (vagy az a_i-k, vagy a b_i-k különböznek). Tehát ha a sorozatban nem található meg a kívánt monoton részsorozatok egyike sem (vagyis minden i-re $a_i \leq n$ és $b_i \leq k$), akkor összesen maximum $n \cdot k$ különböző (a_i, b_i) párt tudunk készíteni, ugyanis a_i helyére n különböző érték kerülhet, míg b_i helyére k különböző. Mivel a két érték egymástól független, minden lehetséges eset előfordulhat, azaz az összes lehetőség $n \cdot k$. Vagyis a skatulyaelv miatt $n \cdot k + 1$ különböző szám esetén biztosan találunk n-nél hosszabb csökkenő részsorozatot, vagy k-nál hosszabb növekvő részsorozatot. Ebben az esetben a gyufák szerepét az $n \cdot k + 1$ index, a skatulyákét pedig az $n \cdot k$ darab különböző pár játsza. □

3.5. Tétel (Erdős–Hajnal, 1966 **[12]**). *Vegyünk egy X halmazt ($|X| = n$), és ennek pontosan 3-elemű különböző részhalmazait úgy, hogy ha $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ két részhalmaz a kiválasztott részhalmazok közül, akkor $|F_1 \cap F_2| \neq 2$. Ekkor létezik olyan $Y \subseteq X$, hogy $|Y| \geq \left\lfloor \sqrt{2n} \right\rfloor$ és minden $F_i \in \mathcal{F}$-re $F_i \not\subseteq Y$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van egy olyan k-elemű Y halmazunk, amit már nem lehet bővíteni, azaz akárhogyan veszünk hozzá egy új elemet, akkor Y' már tartalmazni fog legalább egy $F_i \in \mathcal{F}$-et. Ekkor azt mondhatjuk, hogy ennek az F_i-nek két pontja már eleme Y-nak, a harmadik pedig az, amit hozzá akartunk venni. Tehát ilyen módon minden külső ponthoz tartozik egy Y-beli pontpár. Azonban két külső ponthoz nem tartozhat ugyanaz az Y-beli pontpár, mivel ekkor ennek a két $\mathcal{F}$-beli halmaznak a metszete kételemű lenne, amit a feltétel tilt. Tehát a külső pontok száma legfeljebb annyi, mint a párok száma:

$$\binom{k}{2} \geq n - k,$$

ahol k az Y halmaz mérete. Megoldva ezt a k-ra másodfokú egyenlőtlenséget (figyelembe véve, hogy $k \geq 0$), $k \geq \sqrt{\frac{1}{4} + 2n} - \frac{1}{2}$-et kapunk. Mivel

$$\left\lceil \sqrt{\frac{1}{4} + 2n} - \frac{1}{2} \right\rceil \geq \left\lfloor \sqrt{2n} \right\rfloor,$$

Y megfelel a feltételeknek. Itt a skatulyaelv következményét használtuk ki, vagyis ha kevesebb gyufa van, mint doboz, akkor biztosan marad üres doboz a rendezés után. $\square$

4. fejezet

Kételemű részhalmazok

Egy S halmazon ($|S| = n$) vesszük az összes kételemű részhalmazt. Ezen párok s színnel való tetszőleges színezése mellett igyekszünk összefüggéseket keresni a színek száma, S elemszáma és a kialakult szabályos rendszerek mérete között. Ezt a részhalmazképzést jól reprezentálják a gráfok. Vagyis S elemei a gráf csúcsai és a kettes párok jelölik az éleket. Mivel az összes lehetséges párt nézzük, a problémát átfogalmazhatjuk: egy n pontú teljes gráf (K_n) éleit s színnel színezve szabályos részstruktúrákat keresünk. Tehát az $R_2(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s)$ szám az a legkisebb n, melyre K_n éleit tetszőlegesen színezve s színnel a gráfban biztosan lesz i-edik színű k_i méretű teljes részgráf (K_{k_i}) valamely i-re, azaz ezen k_i csúcs között minden él i-edik színű. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban elhagyjuk az 2-es indexet a képletből, és csupán $R(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s)$-re hivatkozunk.

Egyetlen színre nyilván $R(k) = k$, vagyis egyszínű K_n-ben pontosan akkor lesz ugyanolyan színű K_k, ha $k \leq n$, mivel azonban $R(k)$ a legkisebb ilyen, szükségképpen $k = n$.

A problémával először csak két szín esetén foglalkozunk.

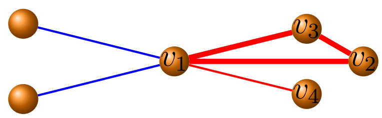
4.1. Teljes gráfok színezése két színnel

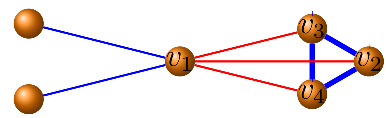
Térjünk vissza a szociológusok észrevételére, miszerint:

4.1. Tétel ([12, 17]). *Bármely hat fős társaságban vagy van három fő, akik kölcsönösen nem ismerik egymást, vagy van három fő, akik kölcsönösen ismerik egymást.*

Bizonyítás. Az ismeretségeket szemléltessük gráffal! Vagyis vegyünk egy hatpontú teljes gráfot, ahol a csúcsok a társaság tagjait reprezentálják, míg az élek az ismeretségeket.

Egy él legyen piros színű, ha a két végpontja olyan tagokat jelöl, akik ismerik egymást. Ellenkező esetben legyen az él kék színű. Jelöljünk ki egy csúcsot, legyen ez v_1. Ekkor v_1-nek 5 szomszédja van. A skatulyaelv miatt vagy van három csúcs, amihez v_1 piros éllel kötődik, vagy van három csúcs, amihez kék éllel kötődik. Tegyük fel, hogy v_1-nek legalább három piros éllel kötődő szomszédja van, legyenek ilyenek v_2, v_3, v_4. Vizsgáljuk meg az utóbbi három csúcs között futó éleket! Ha v_2, v_3, v_4 csúcsok között van piros él (pl.: v_2, v_3 között), akkor v_1, v_2, v_3 egy piros háromszög. Tehát v_2, v_3, v_4 között csak kék él lehet, ekkor azonban kék háromszöget kaptunk.

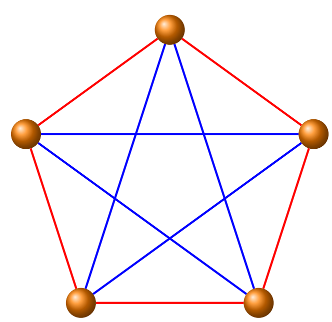




A másik esetben v_1-nek legalább három kék éllel kötődő szomszédja van. A bizonyítás ugyanaz. □

4.2. Tétel ([12, 17]). $R(3,3) = 6$.

Bizonyítás. Az előző tételben láttuk, hogy 6 csúcs esetén biztosan lesz egyszínű hármas, azaz $R(3,3) \leq 6$. Az egyenlőséghez látnunk kell, hogy kisebb n-re nem teljesül, vagyis $R(3,3) > 5$. Ezt a mellékelt színezés mutatja.



□

4.3. Megjegyzés. *Az $R(3,3) > 5$ igazolására készített kritikus színezés egyértelmű.*

Bizonyítás. Úgy szeretnénk kiszínezni K_5 éleit, hogy ne legyen benne egyszínű háromszög. Már a 4.1. Tétel bizonyításában is láttuk, hogy ha egy csúcsra három azonos színű él illeszkedik, akkor a gráfban biztosan lesz egyszínű háromszög. Tehát mindegyik csúcsra két piros és két kék él illeszkedik, azaz a piros és kék részgráf is 2-reguláris. Könnyű belátni, hogy egy 2-reguláris gráf vagy egy kör, vagy körök uniója. Az utóbbi 5 csúcson nem teljesülhet, tehát olyan gráfot keresünk, ami két 5 hosszú kör uniója, ilyenből pedig – izomorfia erejéig – csak egy van. □

4.4. Megjegyzés. *Gustavus Simmons 1969-ben megalkotta a Sim nevű játékot, amelyben két játékos színezi ki egy hat csúcsú teljes gráf éleit pirossal és kékkel felváltva. Az a játékos veszít, aki hamarabb kényszerül rá, hogy háromszöget alkosson a saját színéből. Az előző tétel igazolja, hogy a játék végkimenetele nem lehet döntetlen. Számítógépes vizsgálatok bizonyították, hogy a második játékosnak nyerő stratégiája lehet, azonban egy ilyen könnyen megjegyezhető stratégia alkotása egyelőre nyitott probléma.*

4.5. Tétel (Ramsey **[12, 17]**)**.** *Adott k, l pozitív egészekhez létezik egy olyan legkisebb $R(k, l)$ pozitív egész szám, hogy minden $n \geq R(k, l)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén az n pontú teljes gráf (K_n) éleit két színnel – kékkel és pirossal – tetszőlegesen kiszínezve van a gráfban kék K_k vagy piros K_l.*

4.6. Megjegyzés. *$R(k, l)$ definíciója miatt a két szín felcserélhető, azaz $R(k, l) = R(l, k)$.*

Ramsey tételének bizonyításával együtt belátjuk a következő tételt is.

4.7. Tétel (Erdős–Szekeres **[4]**)**.** $R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1)$.

Bizonyítás. k, l szerinti indukcióval bizonyítunk. Nyilvánvaló, hogy létezik $R(k, 2)$ és $R(2, l)$, és az értékük rendre k és l. Ez a gráfok nyelvére fordítva azt jelenti, hogy K_k-ban vagy van kék K_k, vagy egyetlen piros él. Tehát $R(k, 2) \leq k$ és adunk $k-1$-re ellenpéldát: K_{k-1} minden élét kékkel színezzük. Tehát $R(k, 2) = k$. $R(2, l)$-re hasonlóan.
Tegyük most fel, hogy létezik minden $R(s, t)$, ahol $s \leq k$ és $t < l$ vagy $s < k$ és $t \leq l$. Tegyük fel indirekt, hogy

$$n \geq R(k-1, l) + R(k, l-1),$$

és K_n élei színezhetők úgy két színnel, hogy K_n nem tartalmaz sem kék K_k-t, sem piros K_l-t. Válasszuk ki K_n egy tetszőleges pontját, v_1-et. Legyenek a v_1-ből kimenő kék élek végpontjai: $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_u$, a pirosak pedig $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_v$. Ha u nagyobb lenne, mint $R(k-1, l) - 1$, akkor a k_i pontok között a feltevés miatt lenne vagy kék K_{k-1} (v_1-el K_k), vagy piros K_l. Tehát a feltevésből következik, hogy $u \leq R(k-1, l) - 1$. Ugyanilyen megfontolásból $v \leq R(k, l-1) - 1$. Azonban így $n = u + v + 1 = R(k-1, l) + R(k, l-1) - 1$, ami ellentmond a feltételnek. Tehát $R(k-1, l) + R(k, l-1)$ olyan szám, hogy minden nála nem kisebb n-re K_n-et két színnel színezve biztosan lesz a gráfban vagy kék K_k, vagy piros K_l (azaz kék színű k pontú, vagy piros színű l pontú teljes részgráf). Ekkor viszont a legkisebb ilyen szám vagy $R(k-1,l)+R(k,l-1)$, vagy kisebb nála. Tehát beláttuk a tételt. □

4.8. Tétel (**[4]**). $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Bizonyítás. Teljes indukciót alkalmazunk az előző tételhez hasonlóan. Már láttuk, hogy $R(k,2)=k$. A tétel alapján: $R(k,2) \leq \binom{k}{k-1} = k$ teljesül. Tegyük most fel, hogy teljesül minden $R(s,t)$-re, ahol $s \leq k$ és $t < l$ vagy $s < k$ és $t \leq l$. Felhasználva az előző tételt:

$$R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1}.$$

A Pascal-háromszög azonossága alapján:

$$\binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Így igazoltuk a tételt. □

4.9. Definíció. *Jelöljük $K_{\mathbb{N}}$-nel azt a teljes gráfot, amelynek a csúcshalmaza megszámlálhatóan végtelen. (Ekkor a csúcsokat sorszámozhatjuk a természetes számok halmazának segítségével.)*

4.10. Tétel (Ramsey tétele végtelen esetre **[18]**). *Minden két színnel színezett $K_{\mathbb{N}}$ tartalmaz megszámlálhatóan végtelen méretű egyszínű teljes gráfot.*

Bizonyítás. Színezzük meg $K_{\mathbb{N}}$ éleit tetszőlegesen pirossal és kékkel, majd sorszámozzuk meg a csúcsokat: $\{1,2,3,\ldots\}$. Tekintsük az 1-es sorszámú csúcsot. Ekkor a skatulyaelv végtelen változata alapján ebbe a csúcsba vagy megszámlálhatóan végtelen sok piros, vagy megszámlálhatóan végtelen sok kék él fut be. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a piros élekből van megszámlálhatóan sok (kék esetben a bizonyítás ugyanez). Jelöljük X-el ezen piros éllel kötődő csúcsok halmazát. Tekintsünk egy $y > 1$ csúcsot, melyre $y \in X$. Ekkor mivel X mérete megszámlálhatóan végtelen, y-ra szintén megszámlálhatóan végtelen piros vagy kék él illeszkedik. Legyen $Y \subset X$ az a megszámlálhatóan végtelen sok csúcsból álló halmaz, amely kék (vagy piros) éllel kötődik y-hoz. Legyen z egy olyan csúcs, melyre teljesül, hogy $z > y$ és $z \in Y$. Ekkor nyilván Y mérete miatt z-be is fut megszámlálhatóan végtelen piros vagy megszámlálhatóan végtelen kék él. Legyen a végtelen sok egyszínű éllel kötődő csúcsok halmaza $Z \subset Y$. Ezt a módszert folytatva a következő csúcshalmazt kapjuk:

$$V = \{x, y, z, \ldots\} \subseteq K_{\mathbb{N}}.$$

Legyen E a V csúcsait összekötő élhalmaz:

$$E = \{\{x, y\}, \{x, z\}, \ldots, \{y, z\}, \ldots\}.$$

Ilyen módon E minden elemének színét pontosan meghatározza az adott élhez tartozó csúcsok kisebbike, azaz $u < v, w$ esetén $\{u, v\}$ és $\{u, w\}$ azonos színű$(*)$. Színezzük most meg V csúcsait pirossal és kékkel aszerint, hogy az $u \in V$ csúcshoz végtelen sok piros vagy kék él tartozik. Ekkor V végtelensége miatt az egyik színosztály biztosan végtelen méretű lesz (ugyancsak a skatulyaelv végtelen változata miatt). Ekkor az ezen végtelen sok csúcs közötti élek biztosan azonos színűek lesznek $(*)$ miatt, azaz megszámlálhatóan végtelen egyszínű teljes gráfot kaptunk. □

4.11. Tétel (Erdős **[12]**)**.** *Ha $k > 3$, akkor $R(k, k) \geq 2^{k/2}$.*

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy a Ramsey-számokra vonatkozó alsó becslések igazolásánál általában adunk egy konstrukciót egy kritikus színezésre. Ezzel ellentétben a következő megfontolás egy „tiszta" egzisztencia-bizonyítás.

A tétel átfogalmazása: egy $2^{k/2}$-nél kisebb pontszámú teljes gráfban létezik olyan piros-kék élszínezés, hogy a gráf nem tartalmaz piros vagy kék teljes K_k-t.

Jelöljük g_n-nel az n pontú piros-kék élű gráfok számát sorszámozott csúcsok esetén. Legyen $g_{n,k}$ azon n csúcsú gráfok száma, melyben van piros vagy kék színű K_k szintén sorszámozott csúcsok esetén. Ekkor elég belátnunk, hogy $g_{n,k} < g_n$, vagyis van olyan n pontú piros-kék gráf, ami nem tartalmaz teljes K_k-t. Egy n pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$. Ekkor $g_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\binom{n}{2}}$, mivel minden él lehet piros vagy kék, és az élek színezése független egymástól. Próbáljunk becslést találni $g_{n,k}$ értékére. Válasszunk ki az n csúcs közül k-t, ezek lesznek az egyszínű K_k csúcsai. Ezt $\binom{n}{k}$ féleképpen tehetjük meg. A kiválasztott csúcsok közötti összes él lehet piros vagy kék, így szorzunk kettővel. A megmaradt élek lehetnek pirosak vagy kékek. A felső becslés tehát:

$$2 \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}.$$

Ez a képlet az összes lehetséges ilyen gráfot fedi, vagyis nem tudunk olyan n pontú piros-kék gráfot mutatni, amiben piros vagy kék K_k lenne, de ez a képlet ne számolta volna össze. Azonban láthatjuk, hogy bizonyos gráfokat többször is összeszámoltunk. Például egy csupa kék gráf $\binom{n}{k}$ különböző, egyszínű K_k-t tartalmaz, azaz ezt az egy gráfot $\binom{n}{k}$-szor számoltuk meg. Tehát a készített képlet egy felső becslés.

Nézzük azt az esetet, amikor $2 \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} < g_n$, vagyis:

$$2 \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} < 2^{\binom{n}{2}}.$$

Ha ez az egyenlőtlenség teljesül, akkor $g_{n,k} < g_n$ is igaz. Egyszerűsítsünk $2^{\binom{n}{2}}$-vel és becsüljük felülről $\binom{n}{k}$-t $\frac{n^k}{k!}$-ral. (Ezt megtehetjük, hiszen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-1)(n)}{k!}$. A számlálóban k tag szerepel, melyek mindegyike $\leq n$, így felülről becsülhető n-nel, vagyis $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$.) Ha tehát

$$2\frac{n^k}{k!}\frac{1}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} < 1,$$

akkor $g_{n,k} < g_n$ biztosan teljesül. A tétel átfogalmazása értelmében írjunk n helyére $2^{k/2}$-t. Ha így az egyenlőtlenség teljesül $k \geq 3$-ra, a tételt sikeresen beláttuk.

$$2\frac{(2^{k/2})^k}{k!}\frac{1}{(2^{k/2})^{k-1}} < 1$$

A hatványozás azonosságainak alkalmazása után egyszerűsíthetünk $(2^{k/2})^{k-1}$-nel:

$$\frac{(2^{k/2+1})}{k!} < 1.$$

Már csak ellenőriznünk kell, hogy teljesül-e az egyenlőtlenség, ha $k \geq 3$. Teljes indukcióval bizonyítunk: $k = 3$ esetén $\frac{(2^{3/2+1})}{3!} \approx 0,9428 < 1$. Tegyük fel, hogy tetszőleges k-ra igaz, ekkor $k+1$ esetén a számlálót $\sqrt{2}$-vel, míg a nevezőt $k+1$-el szorozzuk, így $\frac{(2^{(k+1)/2+1})}{(k+1)!} = \frac{\sqrt{2}(2^{k/2+1})}{(k+1)k!} = \frac{\sqrt{2}}{k+1}\frac{(2^{k/2+1})}{k!} < 1$, mivel $\frac{\sqrt{2}}{k+1} < 1$, ha $k \geq 3$. Ezzel beláttuk, hogy a egyenlőtlenség $k \geq 3$ esetén teljesül. □

4.12. Tétel ([17]). $R(k,k) < 4^k$.

Bizonyítás. A 4.8. Tétel alapján $R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1}$. A következőkben azt fogjuk belátni, hogy $\binom{2k-2}{k-1} < 4^k$. Mivel

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n, \tag{$*$}$$

$$R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} < \sum_{i=0}^{2k-2} \binom{2k-2}{i} = 2^{2k-2} = 4^{k-1} < 4^k.$$

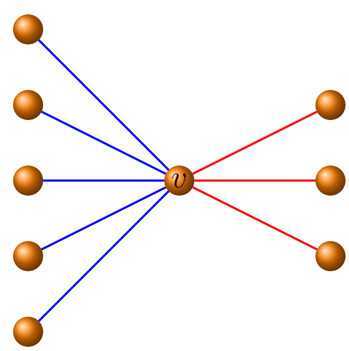
$(*)$ bizonyítása: Számoljuk meg kétféleképpen, hogy hány különböző n hosszúságú 0-1 sorozat létezik.

Az egyenlet jobb oldala: mindegyik helyre írhatunk 0-át vagy 1-et, ezek egymástól függetlenek. Az összes lehetőség száma: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

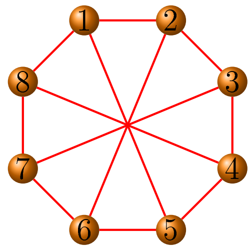
Az egyenlet bal oldal: Számoljuk meg, hogy hány olyan sorozat van, amelyben $0, 1, 2, \ldots, n$ darab egyes szerepel. Azon sorozatok száma, amelyben pontosan i darab egyes szerepel, $\binom{n}{i}$, ugyanis ki kell választanunk az n hely közül i-t úgy, hogy a sorrend nem számít. Az összes 0-1 sorozat számának meghatározásához össze kell adnunk azon sorozatok számát, melyben pontosan $0, 1, 2, \ldots, n$ darab egyes szerepel. Ezek összege pedig $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$. □

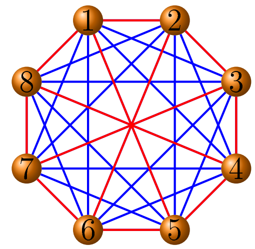
4.13. Tétel ([17]). $R(3,4) = 9$.

Bizonyítás. A felső becslésből tudjuk, hogy $R(3,4) \leq \binom{3+4-2}{3-1} = 10$. Próbáljuk meg igazolni, hogy 9 pont esetén létezik olyan színezés, melyben sem piros K_3 sem kék K_4 nincs. Vegyük a gráf egy tetszőleges v csúcsát.



Próbáljuk v piros szomszédainak számát becsülni. A piros szomszédok között nem lehet piros él, mert akkor v-vel együtt már piros K_3-at kapnánk. Tehát a piros szomszédok egymás közötti élei csak kékek lehetnek. Mivel kék K_4 sem lehet a gráfban, a szomszédok száma maximálisan 3. Vizsgáljuk most meg v kék szomszédait. Nyilván nem lehet közöttük sem piros sem kék háromszög, ugyanis ha kék háromszög lenne a szomszédok között, akkor v-vel kék K_4-et kapnánk. Tudjuk, hogy $R(3,3) = 6$. Tehát a kék szomszédok száma maximálisan 5 lehet. Mivel a gráf 9 pontú, mind a piros mind a kék szomszédok száma maximális kell, hogy legyen. Azaz ha létezik olyan 9 pontú gráf, melyben nincs sem piros K_3, sem kék K_4, akkor minden csúcsnak 3 piros és 5 kék szomszédja van. Számoljuk össze a piros éleket. (9 csúcs)$\cdot$(3 piros él)=27, de mivel a végpontokban minden élt kétszer számoltunk meg, az élszám $\frac{27}{2}$. Mivel $13,5$ nem egész szám, nem létezik ilyen gráf. Vagyis $R(3,4) \leq 9$. Már csak azt kell látnunk, hogy 8 csúcson létezik olyan gráf, melyben nincs sem piros K_3 sem kék K_4:



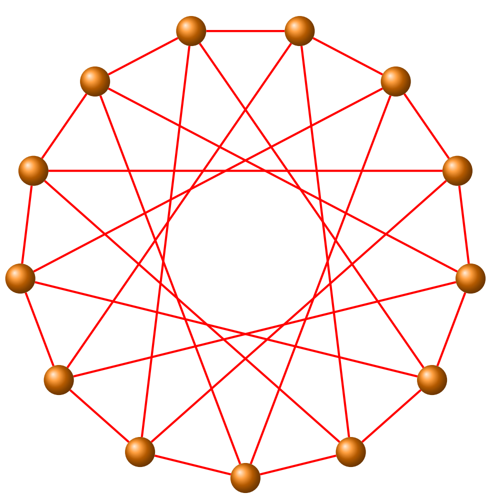
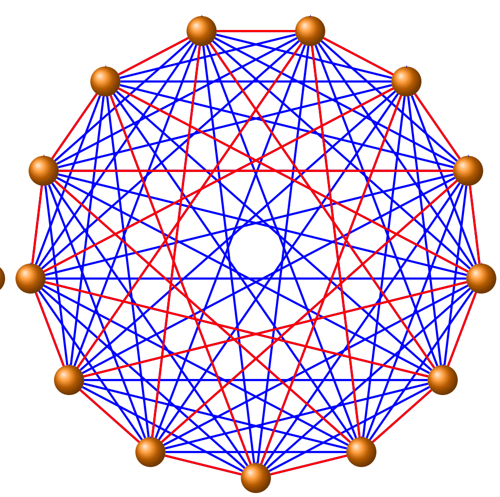


A bal oldali ábrán láthatóan nincs piros háromszög. A jobb oldali gráfon a piros 8 hosszúságú kör miatt kék K_4 vagy csak páratlan sorszámú csúcsokon, vagy csak páros sorszámú csúcsokon lehetséges. Látható, hogy mindkét esetben a K_4 átlói pirosak lesznek, azaz $R(3,4) = 9$ valóban. □

A következő tételek esetén is ezt a bizonyítási módot használjuk:

4.14. Tétel ([7]). $R(3,5) = 14$.

Bizonyítás. Az Erdős–Szekeres-tételből $R(3,5) \leq R(2,5) + R(3,4) = 5 + 9 = 14$.
$R(3,5) > 13$: Legyenek a gráf csúcsai a modulo 13 maradékosztályok (azaz 0, 1, 2, ..., 12). Ha két csúcs különbsége köbös maradék (vagyis 1, 5, 8, 12 $\equiv$ -1), legyen a két csúcs közötti él piros, ellenkező esetben pedig kék. Könnyen látható, hogy a piros részgráfban nem lesz háromszög, míg a kék részgráfban nem találunk K_4-et.

□

4.15. Tétel ([7]). $R(4,4) = 18$.

Bizonyítás. $R(4,4) \leq 18$: Egy v csúcsnak maximum 8 piros éle lehet, mivel a piros szomszédok által alkotott részgráfban nem lehet kék K_4, sem piros K_3, mert akkor v-vel piros K_4-et kapnánk, és $R(3,4) = 9$. Ez elmondható a kék szomszédokra is. Tehát 8+8=16, v 17-edik éle bármilyen színű is legyen, garantálja vagy a piros vagy a kék K_4-et. Tehát K_{18} bármely 2-színezésében lesz egyszínű K_4.

$R(4,4) > 17$:

Legyenek a gráf csúcsai a modulo 17 maradékosztályok (azaz 0, 1, 2, ..., 16). Ha két csúcs különbsége kvadratikus maradék (vagyis 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16), legyen a két csúcs közötti él piros, ellenkező esetben pedig kék. A gráfban nincs egyszínű K_4, ugyanis nincs olyan négy maradékosztály, hogy bármely kettő különbsége kvadratikus maradék vagy kvadratikus nemmaradék lenne.

Tegyük fel indirekt, hogy a gráfban létezik piros K_4, azaz létezik olyan a, b, c, d szám, hogy bármely kettő különbsége kvadratikus maradék. Vegyük észre, hogy ez a négy érték eltolható, ugyanis ha $a-b$ kvadratikus maradék, akkor $(a+x)-(b+x) = a+x-b-x = a-b$ is az. Toljuk el az értékeket $-a$-val, így $0, b-a, c-a, d-a$-t kapva. Most szorozzuk meg a csúcsokat $(b-a)^{-1}$-el (a különbségek továbbra is kvadratikus maradékok maradnak). Az új értékek: $0, 1, x := (c-a)(b-a)^{-1}, y := (d-a)(b-a)^{-1}$. Mivel $x, y, x-1, y-1$ is kvadratikus maradék, $x, y = 2, 9, 16$ lehet. Két ilyen elem különbsége 7 vagy 14, azonban ezek egyike sem kvadratikus maradék, tehát ellentmondásra jutottunk.

A kék részgráf ellenőrzésekor kénytelenek vagyunk minden lehetőséget megnézni. Indirekt tegyük fel, hogy a kék részgráfban van K_4, és vizsgáljuk meg, mely csúcsokon lehetséges. Az előbbi eltolás itt is használható, így legyen az első csúcs a 0. Nyilván nem lehet a 0 csúcsnak kvadratikus maradék sorszámú szomszédja. Nézzük meg, mely csúcsok maradtak: $\underline{0,}$ $\cancel{1}$, $\cancel{2}$, $\underline{3,}$ $\cancel{4}$, $\underline{5,\ 6,\ 7,}$ $\cancel{8}$, $\cancel{9}$, $\underline{10,\ 11,\ 12,}$ $\cancel{13}$, $\underline{14,}$ $\cancel{15}$, $\cancel{16}$. Ha két csúcs különbsége nem nagyobb kettőnél, piros él köti őket össze, így az aláhúzott csúcscsoportok mindegyikéből maximum egyet választhatunk. Négy csúcsra van szükségünk, és a 0 biztosan köztük lesz.

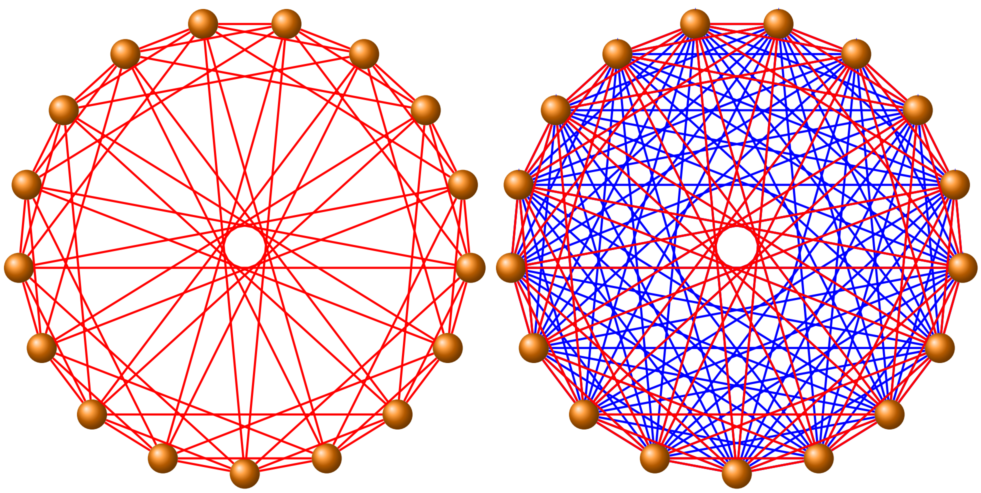
- Először nézzük azt az esetet, amikor a 14-es nem szerepel a négy csúcs között. A hármast biztosan választjuk, így további csúcsokat húzhatunk ki: $\underline{0,}$ $\cancel{1}$, $\cancel{2}$, $\underline{3,}$ $\cancel{4}$, $\cancel{5}$, $\underline{6,}\cancel{7}$, $\cancel{8}$, $\cancel{9}$, $\underline{10,}$ $\cancel{11}$, $\cancel{12}$, $\cancel{13}$, $\cancel{14}$, $\cancel{15}$, $\cancel{16}$. Azonban 10-6=4, ami piros él lesz.

- Hagyjuk figyelmen kívűl a 10-11-12-t. Az előbbiek alapján $0, 3, 6, 14$ maradnak, de

14-6=8 piros él.

- Hagyjuk figyelmen kívűl a 5-6-7-et. Az előbbiek alapján $0, 3, 10, 14$ maradnak, de 14-10=4 piros él.
- Hagyjuk végül figyelmen kívül a 3-ast. Ekkor a 14-es biztosan csúcs lesz, így innen számolva a maradékokat, új csúcsokat zárhatunk ki: $\underline{0}$, $\cancel{1}$, $\cancel{2}$, $\cancel{3}$, $\cancel{4}$, $\cancel{5}$, $\cancel{6}$, $\underline{7}$, $\cancel{8}$, $\cancel{9}$, $\cancel{10}$, $\underline{11}$, $\cancel{12}$, $\cancel{13}$, $\underline{14}$, $\cancel{15}$, $\cancel{16}$. De 11-7=4, ami piros él lesz.

Ellentmondásra jutottunk, azaz sem a piros, sem a kék részgráfban nem lehet egyszínű K_4. Igazoltuk, hogy $R(4, 4) > 17$. A konkrét színezés:



□

4.16. Megjegyzés. *$R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$, ugyanis az indukciós bizonyítás miatt a binomiális képlet azt az értéket adja, mint ha az Erdős–Szekeres-tételt alkalmaznánk addig, míg minden tag legalább egyik argumentuma 2 nem lesz. A $\binom{k+l-2}{k-1}$ képletet úgy határozták meg, hogy $R(k, 2)$ esetén k-t adjon. Javítsuk a képletet! Vonjunk ki egy másik binomiális tagot: $\binom{k+l-2x}{k-x}$. Azért ilyen alakban keressük a javítást, mert ebben az esetben is tudunk teljes indukcióval bizonyítani. Az eredeti képlet $R(3, 3)$ esetén még pontos, tehát legyen x olyan, hogy*

$$R(3, 4) = \binom{k+l-2}{k-1} - \binom{k+l-2x}{k-x} = 9$$

teljesüljön $x \in \mathbb{N}$ esetén. Az $x = 3$ esetben pontos megoldást kapunk, ekkor azonban fel kell tennünk, hogy $(k, l) > (3, 3)$. Vizsgáljuk meg az $R(4, 4)$ esetben is:

$$18 = R(4, 4) \leq \binom{6}{3} - \binom{2}{1} = 18.$$

Kis értékekre már megvizsgáltuk, a Pascal-háromszög azonosságának segítségével teljes indukcióval könnyen bizonyítható az állítás.

Néhány tétel bizonyítás nélkül

Alsó és felső becslések

Ramsey 1930-as cikke után először Erdős Pálnak és Szekeres Györgynek sikerült alsó és felső becsléseket találni.

4.17. Tétel (Erdős, 1935)**.** *Megfelelő pozitív c_1, c_2 konstansok esetén*

$$R(k,k) < \frac{c_1}{(\log k)^{c_2}} \binom{2k-2}{k-2}.$$

4.18. Tétel (Erdős, 1947)**.** $(1+o(1))\frac{1}{e\sqrt{2}} k \cdot 2^{k/2} < R(k,k)$.

Ezek után mintegy harminc évnek kellett eltelnie, hogy újabb előrelépés szülessen.

4.19. Tétel (Ajtai–Komlós–Szemerédi, 1980 és Kim, 1995)**.** *Megfelelő pozitív c_1 és c_2 kontansok esetén*

$$c_1 \frac{n^2}{\log n} \le R(3,n) \le c_2 \frac{n^2}{\log n}.$$

4.20. Tétel (Rödl, 1987)**.** *Alkalmas c_1 és c_2 pozitív konstansok esetén*

$$R(k,l) \le \binom{k+l-2}{k-1} \frac{c_1}{\log^{c_2}(k+l-2)}.$$

A következő tételt nem publikálták. Csupán az 1987-es *Surveys in Combinatorics* összefoglaló cikkben jelent meg.

4.21. Tétel (Graham–Rödl, 1987 (az előzőnél gyengébb))**.** $R(k,l) \le \binom{k+l-2}{k-1} \frac{6}{\log\log(k+l-2)}$.

4.22. Tétel (Thomason, 1988)**.** *Létezik pozitív c konstans, hogy $k \ge l$ esetén*

$$R(k,l) \le e^{-\frac{l-1}{2k-2}\log(k-1) + c\sqrt{\log(k-1)}} \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Speciálisan $R(k,k) \le (k-1)^{-\frac{1}{2}+\frac{c}{\log(k-1)}} \binom{2k-2}{k-1}$. *Megfelelően nagy k-ra* $R(k,k) \le \frac{1}{\sqrt{k}} \binom{2k-2}{k-1}$.

4.23. Tétel (Conlon, 2009)**.** *Létezik olyan c konstans, hogy*

$$R(k,k) \le (k-1)^{-c\frac{\log(k-1)}{\log\log(k-1)}} \binom{2k-2}{k-1}.$$

Ramsey-számok közötti összefüggések

4.24. Tétel (Walker, 1968)**.** $R(k,k) \leq 4R(k,k-2)+2$.

4.25. Tétel (Burr–Erdős–Faudree–Schelp, 1989)**.** $R(k,l) \geq R(k,l-1)+2k-3$.

4.26. Tétel (Chung–Cleve–Dagum, 1993)**.** $R(3,4k+1) \geq 6R(3,k+1)-5$.

4.27. Tétel (Xu–Xie–Exoo–Radziszowski, 2004)**.** $R(2k-1,l) \geq 4R(k,l-1)-3$ $l \geq 5$ *és* $k \geq 2$ *esetén.*

l / k	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40/43
4		18	25	35/41	49/61	56/84	73/115	92/149
5			43/49	58/87	80/143	101/216	125/315	143/442
6				102/165	113/298	130/495	169/780	179/1171
7					205/540	216/1031	237/1713	289/2826
8						282/1870	317/3583	?/6090
9							565/6588	580/12677
10								798/23556

1. táblázat: Ramsey-számok, becslések (2009) **[16]**

4.2. Teljes gráfok színezése több színnel

Ramsey tételének színezéssel való megfogalmazása amiatt szerencsés, hogy könnyen általánosítható több színre.

4.28. Definíció. *Legyen* $R(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s)$ *az a legkisebb* n *természetes szám, amelyre teljesül, hogy egy* n *csúcsú teljes gráf éleit* s *különböző színnel tetszőlegesen színezve a gráfban biztosan lesz legalább egy olyan* i, *hogy a gráfban található* k_i *csúcsú,* i*-edik színű teljes részgráf.*

4.29. Megjegyzés. *A definícióból triviálisan következik, hogy a színek felcserélhetőek.*

4.30. Állítás (**[17]**)**.** $R(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s) \leq R(R(k_1, k_2), k_3, \ldots, k_s)$.

Bizonyítás. Vonjuk össze az 1-es és 2-es színt, ezzel a színek számát eggyel csökkentve. Ekkor az összevont színből olyan nagyságú részgráfot kell kapnunk, hogy biztosan legyen benne vagy 1-es színű K_{k_1} vagy 2-es színű K_{k_2}. Ezt a Ramsey-tétel két színre (4.5. Tétel) garantálja. Tehát $n = R(R(k_1, k_2), k_3, \ldots, k_s)$ estén K_n-et s színnel színezve biztosan lesz olyan i, hogy a gráfban található k_i csúcsú i-edik színű teljes részgráf, de nem biztos, hogy n a legkisebb ilyen szám. Vagyis $R(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s) \leq R(R(k_1, k_2), k_3, \ldots, k_s)$. □

4.31. Megjegyzés. *Ez a becslés nagyon durva.* $R(3, 3, 3) \leq R(R(3, 3), 3) = R(6, 3) = 18$ *(az 1. táblázatból), pedig a későbbiekben látni fogjuk, hogy* $R(3, 3, 3) = 17$. *Nagyobb értékek esetén még nagyobb az eltérés.*

4.32. Tétel (**[17]**).

$$R(k_1, k_2, \ldots, k_s) \leq R(k_1-1, k_2, \ldots, k_s)+R(k_1, k_2-1, \ldots, k_s)+\ldots+R(k_1, k_2, \ldots, k_s-1)-s+2.$$

Bizonyítás. Először azt kell igazolnunk, hogy $R(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ létezik.

$$R(k_1, k_2) = R(k_1, k_2, 2) = R(k_1, k_2, \underbrace{2, \ldots, 2}_{s-2 \ darab})$$

$R(k_1, k_2)$ létezését már beláttuk. Gondoljuk meg, hogy három szín esetén $R(k_1, k_2) = R(k_1, k_2, 2)$, vagyis egy $n := R(k_1, k_2)$ pontú teljes gráf éleit két színnel festve biztosan lesz a gráfban 1-es színű k_1 méretű vagy 2-es színű k_2 méretű teljes részgráf. Most ugyanezt a gráfot három színnel festjük. Vegyük az összes színezést: ha akárcsak egyetlen élt is 3-as színűre festünk, kapunk a gráfban 3-as színű K_2-t, ha nem használjuk a harmadik színt, n csúcs esetén biztosan lesz a gráfban vagy 1-es színű k_1 méretű vagy 2-es színű k_2 méretű tejes részgráf (n-et ilyennek választottuk). Tehát $R(k_1, k_2) \geq R(k_1, k_2, 2)$, az egyenlőséget onnan láthatjuk, hogy $n - 1$ csúcs esetén létezik olyan 2-színezés, melyben sem 1-es színű k_1 méretű sem 2-es színű k_2 méretű teljes részgráf nincs (ezt az $R(k_1, k_2)$ definíciójából tudjuk). Ezt a színezést választva a 3-festés esetén (a harmadik színt nem használjuk) látható az egyenlőség. Vagyis az argumentumok sorozatos csökkentésével olyan kifejezéseket kapunk, amelyeket létezését már láttuk.

Most keressünk felső becslést $R(k_1, k_2, \ldots, k_s)$-re. Vegyünk egy megfelelően nagy teljes gráfot, és fessük meg az éleit s színnel. Ekkor egy tetszőlegesen kiválasztott u csúcsról a következőt mondhatjuk: az 1-es színű éllel kötődő szomszédai száma maximum

$R(k_1-1,k_2,\ldots,k_s)-1$ lehet (ha ennél nagyobb lenne, akkor u-t hozzávéve biztosan lenne k_i méretű i-edik színű teljes részgráf valamely $1 \leq i \leq s$ egész szám esetén). Ezt mindegyik szín esetén feltételezhetjük. Most számoljuk meg a csúcsokat: u szomszédainak száma $R(k_1-1,k_2,\ldots,k_s)+R(k_1,k_2-1,\ldots,k_s)+\ldots+R(k_1,k_2,\ldots,k_s-1)-s$, ehhez hozzávesszük még az u-t. Tehát minden ennél nagyobb csúcsszámú teljes gráf esetén az éleket s színnel színezve biztosan lesz a gráfban k_i csúcsú i-edik színű teljes részgráf valamely $1 \leq i \leq s$ természetes szám esetén, azaz

$$R(k_1,k_2,\ldots,k_s) \leq R(k_1-1,k_2,\ldots,k_s)+R(k_1,k_2-1,\ldots,k_s)+\ldots+R(k_1,k_2,\ldots,k_s-1)-s+2.$$

□

4.33. Tétel (Ramsey tétele végtelen esetre **[18]**). *$K_{\mathbb{N}}$ (a megszámlálhatóan végtelen méretű teljes gráf) éleit r színnel színezve biztosan lesz a gráfban egyszínű megszámlálhatóan végtelen méretű teljes gráf.*

A bizonyítás a 4.10. Tétel bizonyításához hasonlóan történik.

Bizonyítás. **1. változat.** Színezzük meg $K_{\mathbb{N}}$ éleit tetszőlegesen r színnel, majd sorszámozzuk meg a csúcsokat: $\{1,2,3,\ldots\}$. Tekintsük az 1-es sorszámú csúcsot. Ekkor a skatulyaelv végtelen változata alapján létezik olyan $i \leq r$, hogy ebbe a csúcsba megszámlálhatóan végtelen sok i-edik színű él fut be. Jelöljük X-el az ezen i-edik színű éllel kötődő csúcsok halmazát. Tekintsünk egy $y > 1$ csúcsot, mely $y \in X$. Ekkor mivel X mérete megszámlálhatóan végtelen, y-ra szintén megszámlálhatóan végtelen él illeszkedik. Az előbbi meggondolás alapján legyen $Y \subset X$ az a megszámlálhatóan végtelen sok csúcsból álló halmaz, amely j-edik színű éllel kötődik y-hoz (a skatulyaelv miatt biztosan létezik ilyen). Legyen z egy olyan csúcs, melyre teljesül, hogy $z > y$ és $z \in Y$. Ekkor nyilván Y mérete miatt z-be is fut megszámlálhatóan végtelen sok él. Legyen a végtelen sok egyszínű éllel kötődő csúcsok halmaza $Z \subset Y$. Ezt a módszert folytatva a következő csúcshalmazt kapjuk:

$$V = \{x,y,z,\ldots\} \subseteq K_{\mathbb{N}}.$$

Legyen E a V csúcsait összekötő élhalmaz:

$$E = \{\{x,y\},\{x,z\},\ldots,\{y,z\},\ldots\}.$$

Ilyen módon E minden elemének színét pontosan meghatározza az adott élhez tartozó csúcsok kisebbike, azaz $u < v, w$ esetén $\{u, v\}$ és $\{u, w\}$ azonos színű$(*)$. Színezzük most meg V csúcsait r színnel aszerint, hogy az $u \in V$ csúcshoz tartozó végtelen sok él milyen színű. Ekkor V végtelensége miatt az egyik színosztály biztosan végtelen méretű lesz (ugyancsak a skatulyaelv végtelen változata miatt). Ekkor az ezen végtelen sok csúcs közötti élek biztosan azonos színűek lesznek $(*)$ miatt, azaz megszámlálhatóan végtelen egyszínű teljes gráfot kaptunk. □

Bizonyítás. **2. változat.** A tételt beláthatjuk indukcióval is. Megszínezzük $K_{\mathbb{N}}$ éleit r színnel, majd az 4.10. Tétel alapján a gráfban biztosan van vagy 1. színű, vagy $\{2, 3, \ldots, r\}$ összevont színű végtelen teljes gráf. Ha az első teljesül, készen vagyunk. A második esetén vizsgáljuk meg az összevont színű teljes gráfot. Ekkor ugyancsak a 4.10. Tétel alapján a gráfban biztosan van vagy 2. színű, vagy $\{3, 4, \ldots, r\}$ összevont színű végtelen teljes gráf. Ha az első teljesül, készen vagyunk. A második esetén vizsgáljuk meg az összevont színű teljes gráfot. A bizonyítás folytatva az utolsó lépésben belátjuk, hogy a gráfban vagy $(r-1)$. színű, vagy r színű végtelen teljes gráf található. □

Ramsey tétele háromszögekre több szín esetén

A következőkben Ramsey tételét sok színre háromszögekre vizsgáljuk meg. A 4.2. Tétel alapján már tudjuk, hogy $R(3,3) = 6$. Hamarosan látni fogjuk, hogy $R(3,3,3) = 17$, valamint alsó és felső becsléseket keresünk, mely csak a hármasok számától függ.

4.34. Tétel ([17]). $R(\underbrace{3,3,\ldots,3,3}_{s\ darab}) \leq s(R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-1\ darab}) - 1) + 2.$

Bizonyítás. Egy $n := s(R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-1\ darab}) - 1) + 2$ pontú gráfban egy tetszőleges csúcsra $s(R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-1\ darab}) - 1) + 1$ él illeszkedik, amelyek s különböző színnel vannak színezve. A skatulyaelv (3.1. Tétel) miatt biztosan lesz közöttük olyan szín, amelyhez legalább $R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-1\ darab})$ darab u-ból kiinduló él tartozik. Ha ezen élek végpontjai között előfordul ez a szín, azaz létezik olyan v_1 és v_2 csúcs, hogy a v_1v_2 él olyan színű, mint az uv_1 és uv_2, akkor ezen csúcsok háromszöget alkotnak ebből a színből. Ha nincs közöttük ilyen színű él, akkor az azt jelenti, hogy az $R(3,3,\ldots,3)$ darab csúcs között csupán $s-1$ színt használtunk az élek színezésére. $R(3,3,\ldots,3)$ definíciója miatt ebben az esetben is találunk egyszínű háromszöget.

A bizonyítást végezhetjük a 4.32. Tétel segítségével figyelembe véve, hogy színek felcserélhetőek és $R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-1\ darab},2) = R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-1\ darab})$. □

4.35. Tétel (**[17]**)**.** $R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s\ darab}) \le 1 + \lfloor e \cdot s! \rfloor$.

Bizonyítás. s szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Az $s = 2$ és 3 esetén

$$6 = R(3,3) \le 1 + \lfloor e \cdot 2! \rfloor = 6$$

$$17 = R(3,3,3) \le 1 + \lfloor e \cdot 3! \rfloor = 17.$$

Tegyük fel, hogy $s = n-1$ esetén teljesül az állítás. Ekkor $s = n$-re

$$R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{n\ darab}) \le 1 + \lfloor e \cdot n! \rfloor\,,$$

vagyis egy tetszőleges u csúcsnak $\lfloor e \cdot n! \rfloor$ szomszédja van, melyek n osztályba vannak sorolva. Ekkor:

$$\lfloor e \cdot n! \rfloor = \left\lfloor \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n!}{i!} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} = 1 + n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!} = 1 + n \lfloor e(n-1)! \rfloor\,,$$

vagyis ezen n különböző színek között van olyan, amelyhez a skatulyaelv miatt $e(n-1)+1$ csúcs tartozik, legyen ez a szín a kék. Ha ezen csúcsok között találhatunk kék élt, akkor kék háromszöget kapunk, ha nincs közöttük kék él, akkor az azt jelenti, hogy az $e(n-1)+1$ csúcs közötti élek színezésére csak $n-1$ színt használunk, azaz teljesül az indukciós feltétel, és találunk egyszínű háromszöget. □

Következzen az egyetlen nem triviális sokszínű Ramsey-szám, amelynek tudjuk a pontos értékét.

4.36. Tétel (Greenwood–Gleason, 1955 **[8]**)**.** $R(3,3,3) = 17$.

Bizonyítás. A hagyományos módszert alkalmazzuk:

$R(3,3,3) \le 17$ (következik a 4.32. Tételből is):

Egy teljes gráf éleit színezzük pirossal, kékkel és sárgával. Egy tetszőleges u csúcsról elmondhatjuk, hogy a kék éllel kötődő szomszédainak száma maximum 5 lehet. Ennek az az oka, hogy a kékkel kötődő szomszédok között nem szerepelhet kék színű él, mert akkor kék háromszöget kapnánk. Tehát ezen csúcsok között csak két színt használhatunk. Tudjuk, hogy $R(3,3) = 6$ (4.2. Tétel), így ezen csúcsok szám maximum 5 lehet (ha 6 lenne, biztosan kapnánk piros vagy sárga háromszöget). Ez mindegyik színosztályról elmondható. Vagyis a gráf $5+5+5+1 = 16$ csúcsú eddig. Ha azonban a gráf csúcsait eggyel növeljük, akkor már biztosan lesz benne egyszínű háromszög.

$16 < R(3,3,3)$ **[17]**:

Már csak ellenpéldát kell adnunk 16-ra, vagyis három színnel kell színezni egy 16 csúcsú teljes gráf éleit úgy, hogy ne legyen a gráfban egyszínű háromszög. Legyen G egy 5 hosszú kör, a csúcsait jelölje $V(G)$, az éleit pedig $E(G)$. Készítsünk egy olyan 16 csúcsú gráfot, melyben minden csúcsnak $V(G)$ egy páros elemszámú részhalmazát tekintjük. Ezt megtehetjük, hiszen $\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = 1 + 10 + 5 = 16$. Ekkor v_i egy csúcs a gráfban és egy részhalmaza G-nek $i = 1 \ldots 16$ esetén. Ezen a 16 részhalmazon vizsgáljuk meg a szimmetrikus differencia műveletet. Definíció szerint: $v_i \Delta v_j = (v_i \backslash v_j) \cup (v_j \backslash v_i)$ (természetesen $i \neq j$, mivel a teljes gráfban nincs hurokél). Nézzük meg, hogy milyen halmazokat kaphatunk a művelet elvégzése után!

- $|v_i| = 4, |v_j| = 4$: Mivel $i \neq j$ $|v_i \Delta v_j| = 2$
- $|v_i| = 4, |v_j| = 2$: Ha $v_i \supset v_j \Rightarrow |v_i \Delta v_j| = 2$, ha $v_i \not\supset v_j \Rightarrow |v_i \Delta v_j| = 4$
- $|v_i| = 4, |v_j| = 0$: $|v_i \Delta v_j| = 4$
- $|v_i| = 2, |v_j| = 2$: Ha van közös csúcs, $|v_i \Delta v_j| = 2$, ha nincs $|v_i \Delta v_j| = 4$
- $|v_i| = 2, |v_j| = 0$: $|v_i \Delta v_j| = 2$

Azt kapjuk, hogy bármely két különböző részhalmaz összehasonlítható. Ekkor legyen a $v_i v_j$ él piros, ha $|v_i \Delta v_j| = 4$, más esetben a szimmetrikus differencia csak kételemű lehet, azaz a két csúcs meghatároz egy élt. Ha $v_i \Delta v_j$ él G-ben, akkor a $v_i v_j$ él legyen kék, ha $v_i \Delta v_j$ él $\overline{G}$-ben, akkor a $v_i v_j$ él legyen sárga, $\overline{G}$-vel a G gráf komplementerét jelöljük (azaz a gráf csúcshalmazán csak azon pontokat kötjük össze, amelyek az eredeti gráfban nem voltak szomszédosak). Ez a módszer megszínezi a K_{16} éleit három színnel. Már csak azt kell látnunk, hogy a gráfban nincs egyszínű háromszög.

Először nézzük a piros részgráfot: piros él csak 4-2, 4-0 valamint 2-2-elemű részgráf között lehetséges. Ha van piros háromszög, akkor az csak 2-2-2 és 2-4-2 csúcsok között lehet, mivel piros él nem lehetséges 0-2 és 4-4 csúcsok között.

- 2-2 esetben a két halmaz diszjunkt, így 2-2-2 piros háromszög létezéséhez legalább 6 pont kellene, de G csak 5 pontú.
- 2-4-2 esetben a két 2-esnek diszjunktnak kell lenni (más esetben nem piros éllel kapcsolódnának), 4-2 esetben pedig egy közös csúcsnak kell lennie. Ez ellentmondás, mivel 4-2 esetben a 2-esből az egyik csúcs nem lehet benne a 4-esben. Tehát a 4-ből kimaradó csúcs részhalmaza mindkét 2-esnek. Viszont a 2-esek diszjunktak.

A kék és sárga részgráf: A kettőt vizsgálhatjuk egyszerre, mivel G és $\overline{G}$ is egy 5 hosszú kör. Így a következőkben csak G-ben végezzük a vizsgálatot, és csak kék színt használunk. Kék él csak 4-4, 4-2, 2-2 és 2-0 csúcsok között futhat. Mivel 4-0 és 0-0 kék él nem létezik, csak 4-4-4, 4-4-2, 2-4-2, 2-2-2 és 2-0-2 egyszínű háromszögek képzelhetők el:

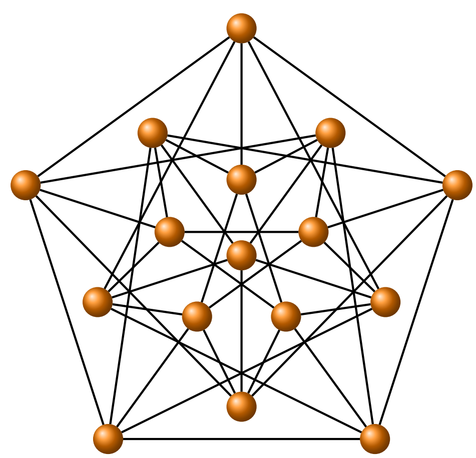
- 4-4-4: 4-4 esetben a 4-esekből kimaradó csúcsok kapcsolatát vizsgáljuk a G-ben: ha szomszédok G-ben, kék éllel kötjük őket K_{16}-ban, ha nem szomszédok, sárgával kötjük őket. Jól látható, hogy ebben az esetben nem kaphatunk egyszínű háromszöget, mert G-ben nincs három hosszú kör.
- 4-4-2: 4-4 esetben a két 4-esből kimaradó csúcsoknak szomszédosnak kell lenniük. 4-2 esetben a 2-es részgráfja mindkét 4-esnek. Vagyis a 4-4 metszetben található három csúcsból kell kiválasztani két szomszédosat. Ezt bárhogyan tesszük meg, az egyik 4-esben, amely egy 4 hosszú út G-ben, a 2-es a közepére fog esni. Vagyis két részhalmaz szimmetrikus differenciája a két szélső csúcs, amely nincs összekötve (sárga él lesz K_{16}-ban). Tehát nem kaphatunk kék háromszöget.
- 2-4-2: 4-2 esetben csak akkor kapunk kék élt, ha a 2 hosszú út a 4 hosszú út egyik végén található. Ez mindkét 2-esre igaz, így csak egy lehetőség van: az 4-es első két csúcsa az egyik 2-es, az utolsó két csúcs a másik 2-es. Ekkor azonban a két 2-es szimmetrikus differenciája 4-elemű lesz, azaz piros színt kap.
- 2-2-2: 2-2 esetben a két halmaznak egy közös csúcsa van. Így a nem közös csúcsok kapcsolatát vizsgáljuk: ha szomszédok, kék élt húzunk K_{16}-ba, ha nem szomszé-

dok, sárgát. Mivel nem találhatunk G-ben háromszöget, így kék háromszög sem készíthető.

- 2-0-2: 2-0 akkor kék él, ha a 2-esben szomszédos csúcsok vannak. 2-2 viszont akkor kék, ha a nem közös csúcsok szomszédosak. Ez nyilván nem lehetséges, mivel G-ben nincs háromszög.

Tehát a definiált gráf valóban háromszögmentes. $\square$

4.37. Megjegyzés ([20]). *Összesen két nem izomorf háromszögmentes színezés létezik (Kalbfleisch–Stanton, 1968). Bármelyik színezés esetén ha vesszük valamely egyszínű részgráfot, a sok szép tulajdonsággal rendelkező Clebsch-gráfot (Greenwood-Gleason-gráf néven is ismert) kapjuk:*



4.38. Megjegyzés ([19]). *A Clebsch-gráf összefüggő, 5-reguláris (azaz minden csúcs fokszáma 5) gráf. Emellett erősen reguláris is, ami azt jelenti, hogy létezik olyan λ és μ természetes szám, hogy bármely két szomszédos csúcs közös szomszédainak száma λ és bármely két nem szomszédos csúcs közös szomszédainak száma μ. A Clebsch-gráf esetén $\lambda = 0$ és $\mu = 2$. A $\lambda = 0$ könnyen látható, ugyanis ha két szomszédos csúcsnak lenne közös szomszédja, akkor a három csúcs a gráfban háromszöget alkotna, amit az előző bizonyítás kizárt. A gráf komplementere is erősen reguláris.*

A gráf 5-szörösen él- és csúcsösszefüggő, azaz a gráfból tetszőlegesen törölve 5-nél kevesebb élt/csúcsot, a gráf összefüggő marad. A gráfban van Hamilton-kör (vagyis létezik olyan élsorozat, amelyen végighaladva minden csúcson áthaladunk egyszer, és a kezdőcsúcsba jutunk vissza), de nincs Euler-körséta. A Clebsch-gráf nem síkbarajzolható, azaz nem lehetséges úgy lerajzolni, hogy valamely élek ne keresztezzék egymást.

A K_{16} kritikus színezése és a 3-SAT [11]

Ebben a részben megmutatjuk, hogy az $R(3,3,3) > 16$ kritikus színezésének feladata hogyan fogalmazható át 3-SAT problémává. A SAT témakör a matematikai logika és a számítástudomány egyik legismertebb problémája, mely a következő módon fogalmazható meg:

4.39. Definíció. *Boole-függvénynek nevezünk egy $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ leképezést. Szokás az 1 értéket az „IGAZ”, a 0 értéket a „HAMIS” logikai értékkel azonosítani. A függvény változóit, melyek ezeket az értékeket vehetik fel, logikai változóknak (vagy Boole-változóknak) nevezzük.*

A szokásos módon a logikai „ÉS” művelet jele legyen $\wedge$, a „VAGY”-é $\vee$, a negáció jele pedig $\neg$. Azt mondjuk, hogy f kifejezhető *konjunktív normálformulával*, azaz $f(x) = C_1(x) \wedge C_2(x) \wedge \ldots \wedge C_n(x)$, ahol $C_i(x) = x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee \ldots \vee x_{i,j}$ $(i, j \in \mathbb{N})$. Ekkor $x_{i,j}$-t literálnak, míg $C_i(x)$-et elemi diszjunkciónak nevezzük. Egy konjunktív normálforma akkor kielégíthető, ha létezik olyan $x \in \{0,1\}^n$, amely mindegyik elemi diszjunkciót kielégíti. Egy ilyen $C_i(x)$ elemi diszjunkció akkor kielégített, ha legalább az egyik literál „IGAZ”. Azon kielégíthető konjunktív normálformák nyelvét, melyek esetében minden elemi diszjunkció legfeljebb k literált tartalmaz, k-SAT-nak nevezzük.

4.40. Tétel. *A 3-SAT nyelv (azaz olyan megoldás találása, mely kielégíti f-et) NP-teljes.*

Az $R(3,3,3) > 16$ igazolásához szükségünk van arra, hogy mindegyik élhez úgy rendeljünk színt, hogy ne keletkezzen egyszínű háromszög.

Készítsünk olyan F 3-SAT-rendszert, mely pontosan azokra az inputokra teljesül amelyek alapján meg tudjuk színezni K_{16} éleit három színnel egyszínű háromszögek nélkül. A változók legyenek $\overset{c}{x}_{i,j}$, ahol $i, j \in \{1, 2, \ldots, 16\}$ és $i < j$ a gráf csúcsai, míg $c \in \{piros, kék, sárga\}$ az él színe. $\overset{c}{x}_{i,j}$ legyen 1, ha az i-edik és j-edik csúcs közötti él színe c, és legyen 0 különben. A színezés szabályainak teljesülését az elemi konjunkciók fogják ellenőrizni:

- Mindegyik élnek színezettnek kell lennie:
  $(\overset{piros}{x_{i,j}} \vee \overset{kék}{x_{i,j}} \vee \overset{sárga}{x_{i,j}})$, ahol $i, j \in \{1, 2, \ldots, 16\}$ és $i < j$. Ha valamelyik él nem lenne színezve, ez a tag „HAMIS” lenne, azaz f nem teljesülne. Összesen 120 elemi diszkunkció.

- Minden élnek csupán egyetlen színe lehet:
  $(\neg \overset{piros}{x_{i,j}} \vee \neg \overset{kék}{x_{i,j}})$, $(\neg \overset{piros}{x_{i,j}} \vee \neg \overset{sárga}{x_{i,j}})$, $(\neg \overset{kék}{x_{i,j}} \vee \neg \overset{sárga}{x_{i,j}})$, ahol $i, j \in \{1, 2, \ldots, 16\}$ és $i < j$. Ha valamelyik élhez több szín is lenne rendelve, a hozzá tartozó tag „HAMIS” lenne. Összesen 360 elemi diszkunkció.

- Nem lehet olyan három csúcs, melyek között az élek azonos színűek:
  $(\neg \overset{piros}{x_{i,j}} \vee \neg \overset{piros}{x_{j,k}} \vee \neg \overset{piros}{x_{i,k}})$, $(\neg \overset{kék}{x_{i,j}} \vee \neg \overset{kék}{x_{j,k}} \vee \neg \overset{kék}{x_{i,k}})$, $(\neg \overset{sárga}{x_{i,j}} \vee \neg \overset{sárga}{x_{j,k}} \vee \neg \overset{sárga}{x_{i,k}})$, ahol $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, 16\}$ és $i < j < k$. Összesen $3 \cdot \binom{16}{3} = 1680$ elemi diszjunkció.

Így a kapott F rendszer a következő (minden $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, 16\}$ és $i < j < k$ esetén):

$$F = \begin{cases} \overset{piros}{x_{i,j}} \vee \overset{kék}{x_{i,j}} \vee \overset{sárga}{x_{i,j}} \\ \neg \overset{piros}{x_{i,j}} \vee \neg \overset{kék}{x_{i,j}} \\ \neg \overset{piros}{x_{i,j}} \vee \neg \overset{sárga}{x_{i,j}} \\ \neg \overset{kék}{x_{i,j}} \vee \neg \overset{sárga}{x_{i,j}} \\ \neg \overset{piros}{x_{i,j}} \vee \neg \overset{piros}{x_{j,k}} \vee \neg \overset{piros}{x_{i,k}} \\ \neg \overset{kék}{x_{i,j}} \vee \neg \overset{kék}{x_{j,k}} \vee \neg \overset{kék}{x_{i,k}} \\ \neg \overset{sárga}{x_{i,j}} \vee \neg \overset{sárga}{x_{j,k}} \vee \neg \overset{sárga}{x_{i,k}} \end{cases}.$$

Így a két modell ekvivalens, azaz egy F-et kielégítő megoldás egyértelműen meghatározza a K_{16} gráfnak egy három színnel történő egyszínű háromszögmentes színezését, valamint egy kritikus színezés alapján készített $\overset{c}{x_{i,j}}$ változók kielégítik F-et.

Becslések háromszögekre több szín esetén

$R(3,3,3,3)$ pontos értékét egyelőre nem tudjuk, de az eddigi felső és alsó becslésekről igyekszünk minél teljesebb képet adni.

R. E. Greenwood és A. M. Gleason 1955-ben publikált cikkében $R(3,3)$ és $R(3,3,3)$ értéke mellett egyszerű alsó és felső becslést adtak $R(3,3,3,3)$-ra. A felső becslés és Chung alsó becslésének bizonyítását a következőkben látni is fogjuk. A további becsléseket az alábbi táblázat szemlélteti:

év	szerző(k)	alsó becslés	felső becslés
1955	Greenwood, Gleason **[8]**	42	66
1971	Golomb, Baumert	46	
1973	Whitehead	50	65
1973	Chung, Porter **[2]**	51	
1974	Folkman		65
1995	Sánchez-Flores		64
1995	Kramer		62
2001	Fettes, Kramer, Radziszowski **[5, 6]**		62

2. táblázat: Ramsey becslések R(3,3,3,3) (2009) **[16]**

4.41. Tétel (Greenwood–Gleason, 1955 **[8]**). *$R(3,3,3,3) \leq 66$ (következik a* 4.32. Té*telből is).*

Bizonyítás. Legyen G egy olyan gráf, amelynek az éleit négy színnel (kék, sárga, piros, zöld) tetszőlegesen megfestve, biztosan találunk a grfában egyszínű háromszöget. Becsüljük most G méretét. G egy tetszőleges v csúcsára igaz, hogy a szomszédai négy színosztályba sorolhatók. Vizsgáljunk most a kék színosztályt: v szomszédai között nem lehet olyan u_1 és u_2 csúcs, amelyek között kék él lenne, mert akkor a $v - u_1 - u_2$ kék háromszöget kapnánk. Ezért a v szomszédai közötti élek festésére csak három színt használhatunk. A 4.36. Tétel alapján a színosztály maximális mérete $17 - 1 = 16$ lehet. Ezt mindegyik osztályról elmondhatjuk, így mindegyik színosztály maximálisan 16 csúcsot tartalmazhat. Számoljuk össze a csúcsokat: $1 + 16 + 16 + 16 + 16 = 65$, tehát ha G csúcsainak száma 66, biztosan találunk egyszínű háromszöget. □

4.42. Tétel (Chung, 1973 **[2]**). $51 \leq R(3,3,3,3)$

Bizonyítás. **Vázlat.** Ellenpéldát adunk 50-re. Jelöljük $T_3(x_0, x_1, x_2, x_3)$-mal a következő szimmetrikus 16×16-os szomszédsági mátrixot, amely az egyik ellenpélda gráf $R(3,3,3) > 16$-ra $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ esetén. A mátrix megadja, hogy sorszámozott csúcsokon az i-edik csúcs milyen színnel van összekötve a j-edik csúccsal (itt a színek: $1, 2, 3$):

$$
T_3(x_0,x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix}
x_0 \\
x_1 & x_0 \\
x_1 & x_2 & x_0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_0 \\
x_1 & x_3 & x_2 & x_3 & x_0 \\
x_1 & x_3 & x_3 & x_2 & x_2 & x_0 \\
x_2 & x_1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_3 & x_0 \\
x_2 & x_1 & x_2 & x_1 & x_3 & x_2 & x_3 & x_0 \\
x_2 & x_3 & x_2 & x_2 & x_1 & x_1 & x_1 & x_1 & x_0 \\
x_2 & x_2 & x_1 & x_3 & x_2 & x_1 & x_3 & x_1 & x_3 & x_0 \\
x_2 & x_2 & x_3 & x_1 & x_1 & x_2 & x_1 & x_3 & x_3 & x_1 & x_0 \\
x_3 & x_1 & x_3 & x_2 & x_3 & x_1 & x_3 & x_2 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\
x_3 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_3 & x_2 & x_3 & x_3 & x_1 & x_2 & x_2 & x_0 \\
x_3 & x_3 & x_1 & x_3 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 & x_0 \\
x_3 & x_3 & x_3 & x_1 & x_2 & x_1 & x_1 & x_3 & x_2 & x_3 & x_2 & x_2 & x_1 & x_1 & x_0 \\
x_3 & x_2 & x_1 & x_1 & x_3 & x_3 & x_2 & x_2 & x_1 & x_3 & x_3 & x_1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_0
\end{bmatrix}
$$

Most készítsünk egy 50×50-es mátrixot a következő módon:

$$
T_4(0,1,2,3,4) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & & & 1 & 1 \\
T_3(0,2,3,4) & T_3(3,2,1,4)^T & T_3(2,1,3,4)^T & \vdots & \vdots \\
 & & & 1 & 1 \\ \hline
 & & & 2 & 2 \\
T_3(3,2,1,4) & T_3(0,3,1,4) & T_3(1,3,2,4)^T & \vdots & \vdots \\
 & & & 2 & 2 \\ \hline
 & & & 3 & 3 \\
T_3(2,1,3,4) & T_3(1,3,2,4) & T_3(0,1,2,4) & \vdots & \vdots \\
 & & & 3 & 3 \\ \hline
1\ldots 1 & 2\ldots 2 & 3\ldots 3 & 0 & 4 \\ \hline
1\ldots 1 & 2\ldots 2 & 3\ldots 3 & 4 & 0
\end{array}\right]
$$

Már csak azt kell látnunk, hogy a kapott mátrix valóban jó színezést ad. Chung a 4.36. Tétel eredeti Greenwood–Gleason-féle bizonyításában használt maradékosztályok segítségével esetszétválasztással látja be a mátrix helyességét. Mi most itt megelégszünk egy minden esetet megvizsgáló programmal (futásidő 1 másodperc alatt):

```
for i=1 to 48
  for j=i+1 to 49
    for k=j+1 to 50
      if M(i,j)==M(j,k)&M(j,k)==M(k,i)
        ('Egyszínű háromszög az ',i,' ',j,' ',k,' csúcsokon')
      end
    end
  end
end
```

□

4.43. Állítás. *Chung* $50 < R(3,3,3,3)$ *ellenpélda mátrixát nem lehet új csúccsal háromszögmentesen bővíteni (backtrack algoritmust futtattunk PC-n). Megvizsgáltuk a csúcsok egyes színosztályokhoz tartozó fokszámát, majd az átlagos értéktől leginkább eltérő csúcsot töröltük, majd ezt a* 49 *pontú gráfot egészítettük ki új csúccsal háromszögmentesen. Körülbelül félmillió megoldást kaptunk, amelyeket szintén megpróbáltunk új csúccsal bővíteni. Ezt a műveletet immár az ELTE Atlasz nevű szuperszámítógépén végeztük. Ezeket a gráfokat sem lehetséges háromszögmentesen bővíteni.*

4.44. Tétel (Chung, 1973 **[2]**). $R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s\ darab}) \geq 3R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-1\ darab}) + R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-3\ darab}) - 3.$

Bizonyítás. **Vázlat.** A tétel igazolása az előző bizonyítás általánosítása.

$$T_s(0,1,2,3,\ldots,s) =$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} T_{s-1}(0,2,3,4,\ldots,s) & & & \\ \hline T_{s-1}(3,2,1,4,\ldots,s) & T_{s-1}(0,3,1,4,\ldots,s) & & \\ \hline T_{s-1}(2,1,3,4,\ldots,s) & T_{s-1}(1,3,2,4,\ldots,s) & T_{s-1}(0,1,2,4,\ldots,s) & \\ \hline 1\ldots & 2\ldots & 3\ldots & T_{s-3}(0,4,\ldots,s) \end{array}\right]$$

$R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s\ darab})$ értékét szeretnénk alulról becsülni. Jelöljük a T_i mátrix sorainak számát $\overline{T_i}$-vel. A T_{s-1} és T_{s-3} olyan gráfok színezése, amelyekben nincs egyszínű háromszög. Tehát $\overline{T_{s-1}} < R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-1\ darab})$ és $\overline{T_{s-3}} < R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-3\ darab})$. A bizonyítás alapján az elkészült T_s

mátrix olyan gráfot határoz meg, amiben biztosan nincs $R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s\ darab})$. Számoljuk meg T_s sorainak számát:

$$R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s\ darab})-1 \geq \overline{T_s} = 3\overline{T_{s-1}} + \overline{T_{s-3}} = 3(R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-1\ darab})-1) + R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-3\ darab})-1$$

Rendezve: $R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s\ darab}) \geq 3R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-1\ darab}) + R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{s-3\ darab}) - 3.$ □

Becslések több színre

- (Exoo, 1994): $162 \leq R(3,3,3,3,3) \leq 307$.
- (Fredericksen, Sweet, 2000): $538 \leq R(3,3,3,3,3,3) \leq 1838$.
- (Fredericksen, Sweet, 2000): $1682 \leq R(3,3,3,3,3,3,3) \leq 12861$.

A felső becslések a 4.34. Tétel alapján számolhatóak a korábbi Ramsey felső becslésekből.

Egy alkalmazás

4.45. Definíció. *Jelöljük r_n-nel az $R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{n\ darab})$ számot.*

4.46. Tétel (Schur **[12, 17]**). *Az $\{1,2,3,\ldots,r_n-1\}$ halmazt bárhogyan osztjuk fel n darab diszjunkt $S_1,S_2,\ldots,S_n$ részhalmazra*

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i = \{1,2,3,\ldots,r_n\} \text{ és } \forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\},\ i \neq j \text{ esetén } S_i \cap S_j = \oslash,$$

valamelyik részhalmazban megoldható az $x+y=z$ egyenlet, azaz van olyan i,x,y,z számnégyes, hogy $x,y,z \in S_i$ és $x+y=z$.

Bizonyítás. Színezzük ki K_{r_n} éleit a következőképpen. Egy $\{u,v\}$ élt a k-adik színnel színezzünk ki, ha $|u-v| \in S_k$ ($|u-v| \in \{1,2,\ldots,r_n-1\}$). Ekkor r_n definíciója miatt van a gráfban valamilyen színű teljes hármas. Legyen ezen három csúcsnak megfelelő számok $u<v<w$, és a háromszög színe az i-edik szín. Jelöljük $w-v$-t x-szel, $v-u$-t y-nal és $w-u$-t z-vel. Az előbbi definíciók miatt $x,y,z \in S_i$ és $x+y=z$. □

4.47. Definíció. *Schur-számnak nevezzük azt a legkisebb pozitív $S(c)$ egész számot, melyre teljesül, hogy minden $n \geq S(c)$ természetes számra az $\{1,2,3,\ldots,n\}$ halmazt tetszőlegesen felosztva c diszjunkt részre, lesz olyan halmaz, amely tartalmaz olyan x,y és z elemeket, melyekre $x+y=z$ teljesül.*

4.48. Megjegyzés. *Az előbbi tétel igazolta, hogy* $S(c) \leq R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{c\ darab}) - 1$.

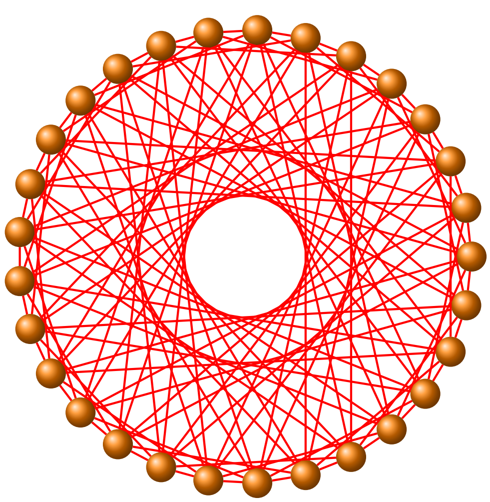
Egyéb több színű esetek

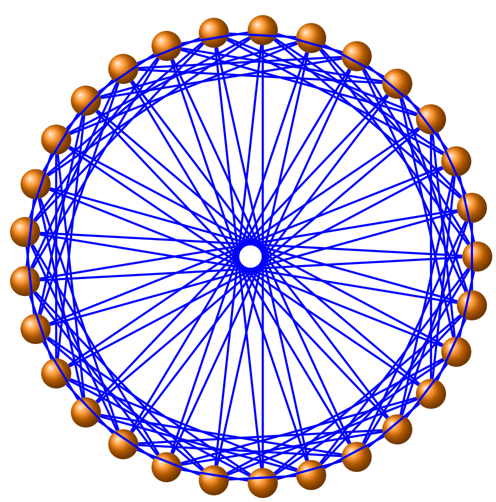
$R(3, 3, 4)$, a nem túl reménytelen probléma

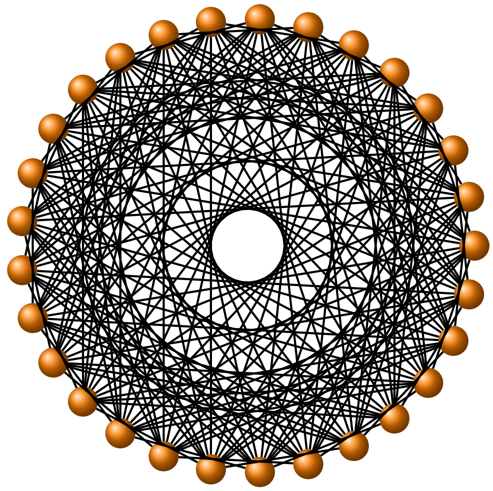
4.49. Állítás. $29 < R(3, 3, 4) \leq 31 \leq 34$.

Bizonyítás. Az $R(3, 3, 4) \leq 34$ állítás egyszerűen következik 4.32. Tételből. Azonban az $R(3, 3, 4) \leq 31$ állítás igazolásához már számítógépes eszközökre volt szükség **[14]**.

Az alsó becslést, mely szerint K_{29} éleinek létezik olyan három színnel történő színezése, hogy nincs benne sem piros, sem kék háromszög, valamint fekete K_4 sem, Kalbfleisch publikálta doktori disszertációjában 1966-ban. A ciklikus kritikus gráf a következő: egy körvonalon elhelyezzük a csúcsokat és minden pontból piros élt indítunk az adott pont 1., 4., 10. és 12. szomszédjába a körvonalon haladva jobbra és balra. Ugyanezzel a módszerrel kék éleket indítunk a 2., 5., 6. és 14. szomszédba, a kimaradt élek pedig feketék lesznek. Precízebben fogalmazva a gráf csúcsait azonosítjuk Z_{29}-el, és az elemek távolsága határozza meg a köztük vezető él színét: piros $\{1, 4, 10, 12\}$, kék $\{2, 5, 6, 14\}$; fekete $\{3, 7, 8, 9, 11, 13\}$. Az egyes színosztályok ellenőrzéséhez elegendő az adott osztályban lévő értékek különbségét megvizsgálni, ezt már az Olvasóra bízzuk.







□

Néhány szintén számítógépen futtatott algoritmus segítségével a következő tételek keletkeztek:

4.50. Tétel (**[14]**). $R(3,3,4) = 31$ *akkor és csak akkor, ha* K_{30} *éleinek létezik olyan rendre pirossal, kékkel és feketével történő színezése, hogy minden fekete háromszögnek létezik olyan* v *csúcsa, melyből pontosan* 13 *fekete él indul ki. Továbbá a színezésnek legalább* 14 *olyan csúcsa van, melybe* $8-8$ *piros és kék él fut be, valamint* 13 *fekete.*

4.51. Tétel (**[15]**). $R(3,3,4) = 31$ *akkor és csak akkor, ha* K_{30} *éleinek létezik olyan rendre pirossal, kékkel és feketével történő színezése, hogy minden fekete háromszögnek létezik olyan* v *és* u *csúcsa, melyekből pontosan* 13 *fekete él indul ki.*

4.52. Tétel (**[15]**). $R(3,3,4) = 31$ *akkor és csak akkor, ha* K_{30} *éleinek létezik olyan rendre pirossal, kékkel és feketével történő színezése, hogy minden fekete él legalább egyik végpontjába* 13 *fekete él fut be. Továbbá a színezésnek legalább* 25 *olyan csúcsa van, melybe* $8-8$ *piros és kék él fut be, valamint* 13 *fekete.*

Sajnos a kapott eredmények sem elegendőek ahhoz, hogy emberi időben lefutó algoritmus készüljön, mely meg tudná határozni $R(3,3,4)$ pontos értékét.

4.53. Állítás. *A Kalbfleisch által készített ciklikus kritikus* 29 *pontú gráf nem bővíthető további csúcsal.*

Bizonyítás. Arra gondoltunk, hogy érdemes lenne megpróbálni a kritikus gráfot további csúccsal bővíteni. Minden egyes új él 3 különböző színű lehet, azaz a kapott gráfot 3^{29}

alkalommal kellene ellenőriznünk. Ez egy személyi számítógépnek körülbelül 15 ezer évig tartana. Elkészítettünk azonban MATLAB-ban egy backtrack-algoritmust, mely kiegészítve egy megfelelő visszalépési feltétellel végigvizsgálva a lehetőségeket körülbelül fél óra alatt igazolta, egyetlen élszínezés mellett sem lesz az új gráf kritikus. □

Becslések

Tudjuk, hogy $R(2, k, l) = R(k, l)$, így a két színnel történő színezés után várhatóan azon Ramsey-számok megtalálása lesz a legegyszerűbb, amelyek $R(3, k, l)$ alakúak.

l / k	4	5	6	7	8	9
3	30	45	60	81	101	117
4	55	81	107	143	193	
5	81	129	169			

3. táblázat: Nemtriviális alsó becslések $R(3, k, l)$ esetén (2009) **[16]**

4.54. Tétel (Becslések négy színre **[16]**:).

- $93 \leq R(3, 3, 3, 4) \leq 153$.
- $171 \leq R(3, 3, 4, 4) \leq 462$.
- $381 \leq R(3, 4, 4, 4) \leq 1619$.
- $162 \leq R(3, 3, 3, 5)$.
- $561 \leq R(3, 3, 3, 11)$.

4.3. Ramsey-számok speciális gráfokra

A következőkben Ramsey-számok meghatározásával fogunk foglalkozni speciális gráfok esetén a teljesség igénye nélkül.

4.55. Definíció. *$R(G_1, G_2)$ jelölje azt a legkisebb n természetes számot, amelyre igaz, hogy K_n éleit két színnel (pirossal és kékkel) tetszőlegesen színezve a gráfban biztosan találunk piros színű G_1 gráfot, vagy kék színű G_2 gráfot.*

4.56. Megjegyzés. *A korábbiakhoz hasonlóan általánosítható a probléma több színre ($R(G_1, G_2, \ldots, G_s)$), ahol a színek tetszőlegesen felcserélhetők.*

Egy él elhagyása a teljes gráfból

4.57. Definíció. *A következőkben jelölje $K_n - e$ azt az n csúcsú gráfot, amit a K_n-ből egy él elhagyásával kapunk.*

4.58. Megjegyzés. *A* 4.5. Tétel *és a Ramsey-számok monotonitásából következik, hogy $R(K_{k-1}, G) \le R(K_k - e, G) \le R(K_k, G)$, ugyanis $K_{k-1} \subset K_k - e \subset K_k$.*

4.59. Tétel (Chvátal–Harary, 1972 **[3]**). *Minden G izolált pont mentes gráf esetén*

$$R(K_3 - e, G) = \begin{cases} |G| & \text{ha } \nu(\overline{G}) = \frac{|G|}{2}, \\ 2|G| - 2\nu(\overline{G}) - 1 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $|G|$ a G gráf csúcsainak számát, míg $\nu(\overline{G})$ a $\overline{G}$-ben található független élek maximális számát jelöli.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $K_3 - e$ egy kettő hosszú út. Így K_m egy tetszőleges piros-kék színezésében, amelyben nincs piros $K_3 - e$, csak független piros élek lehetnek, vagyis a piros színű részgráf részgráfja $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor K_2$-nek. Így a kék részgráf biztosan tartalmazza a $K_m - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor K_2$-ot (ha m páros, a $K_m - \frac{m}{2} K_2$ gráfot Hoffman „party graph”-nak nevezte, mivel egy összejövetelkor mindenki beszélget mindenkivel, kivéve azzal, akivel jött). Tehát $R(K_3 - e, G)$ a legkisebb olyan m, amelyre G a $K_m - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor K_2$ gráf részgráfja.

Természetesen $|G| \le R(K_3 - e, G)$, ugyanis kevesebb csúcs esetén minden élt kék színűre festve sem piros $K_3 - e$, sem kék G-t nem találunk.

Legyen G olyan, hogy $\overline{G}$-ben van teljes párosítás, azaz $\nu(\overline{G}) = \frac{|G|}{2}$. Ekkor a piros részgráf maximum $\frac{|G|}{2}$ élt tartalmazhat. Ha még egy piros élt húzunk be, biztosan kapunk piros $K_3 - e$-t, ellenkező esetben minden teljes párosításból kimaradt él kék színű lesz, akkor pontosan a G gráfot kapjuk (izomorfia erejéig). Azaz $R(K_3 - e, G) \le |G|$, az előző megfontolással együtt: $R(K_3 - e, G) = |G|$.

Most legyen G olyan, hogy $\nu(\overline{G}) = n < \frac{|G|}{2}$. Ha $m = 2|G| - 2n - 1$, akkor K_m minden 2-színezése, amelyben nincs piros $K_3 - e$, tartalmaz kék $K_m - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor K_2 = K_m - (|G| - n - 1) K_2$-t. Most belátjuk, hogy minden színezés esetén tartalmaz a gráf kék G-t. Gondoljuk meg, hogy

$$(|G| - n - 1)K_2 \cup K_1 \subset nK_2 \cup (|G| - 2n)K_1,$$

és a komplementert véve (a bal oldali kifejezés komplementerét $K_{|G|}$-re, míg a jobb oldalit K_m-re véve). A komplementerképzés azonosságai miatt a részhalmazreláció megfordul:

$$K_{|G|} - nK_2 \subset K_m - (|G| - n - 1)K_2.$$

Ebből láthatjuk, hogy K_m-ben maximális piros élszám mellett is kapunk kék G-t, azaz

$$R(K_3 - e, G) \leq m = 2|G| - 2\nu(\overline{G}) - 1.$$

Már csak azt kell látnunk, hogy K_{m-1} kiszínezhető két színnel úgy, hogy sem piros $K_3 - e$, sem kék G ne legyen benne. Ekkor a független piros élek száma maximálisan $\frac{m-1}{2} = |G| - n - 1$ lehet. Tegyük fel indirekt, hogy a kék részgráf tartalmazza G-t, vagyis

$$G \subset K_m - \frac{m-1}{2}K_2.$$

Vegyük most is a kifejezés komplementerét:

$$\frac{m-1}{2}K_2 \subset \overline{G}.$$

Számoljuk össze az éleket:

$$\frac{m-1}{2} = |G| - n - 1 < n(= \nu(\overline{G})).$$

Ebből következik, hogy

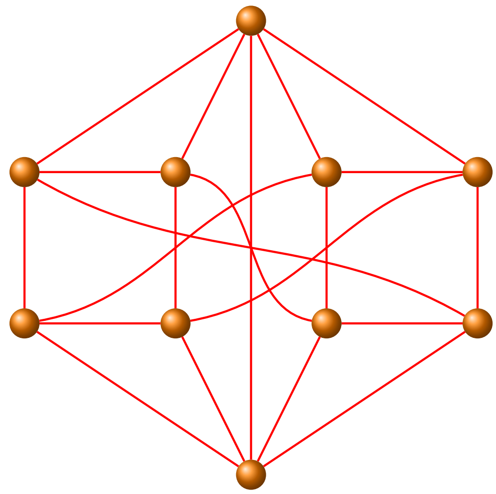
$$\frac{|G|-1}{2} < \nu(\overline{G}) < \frac{|G|}{2},$$

ami pedig ellentmondás, ugyanis $\nu(\overline{G})$ egész szám. □

4.60. Megjegyzés. *Az előző tétel speciális esete:* $R(K_3 - e, K_k) = R(K_3 - e, K_{k+1} - e) = 2k - 1$.

4.61. Tétel (Chvátal–Harary, 1972 **[3]**)**.** $R(K_4 - e, K_4) = 11$.

Bizonyítás. Most csak az alsó becslést igazoljuk. $R(K_4 - e, K_4) > 10$:



□

G_1 / G_2	K_3-e	K_4-e	K_5-e	K_6-e	K_7-e
K_3-e	3	5	7	9	11
K_3	5	7	11	17	21
K_4-e	5	10	13	17	28
K_4	7	11	19	27/36	37/52
K_5-e	7	13	22	31/39	40/66
K_5	9	16	30/34	43/67	?/112
K_6-e	9	17	31/39	45/70	59/135
K_6	11	21	37/55	?/116	?/205

4. táblázat: Ramsey-számok, becslések $R(G,H)$ (2009) **[16]**

4.62. Megjegyzés. *A fenti táblázat első oszlopa könnyen megkapható a* 4.59. Tétel *segítségével.*

Páros gráfok

4.63. Definíció. *Egy G egyszerű (párhuzamos- és hurokélmentes) gráfot páros gráfnak nevezünk, ha a csúcsait két osztályra lehet osztani úgy, hogy minden él kezdőpontja és végpontja külön osztályba essen.*

4.64. Definíció. *Nevezzük n, m osztályú teljes páros gráfnak azt a páros gráfot, amelynek osztályai n és m csúcsból állnak, és bármely két különböző osztályba tartozó csúcs között vezet él. Az n, m osztályú teljes páros gráfot jelöljük $K_{n,m}$-mel.*

A következőkben olyan $R(G_1, G_2)$ Ramsey-számokkal fogunk foglalkozni, amelyben G_1 és G_2 is páros gráf. Megjegyezzük, hogy $R(G_1, G_2)$ azt az n természetes számot jelöli, melyre igaz, hogy K_n éleit két színnel (pirossal és kékkel) tetszőlegesen megfestve biztosan találunk a gráfban vagy piros G_1-et, vagy kék G_2-t. Ugyanis a keresés értelmezhető K_n helyett a $K_{n,m}$ páros gráfon is, de ezzel később foglalkozunk.

4.65. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy $K_3 - e = K_{1,2}$. Azaz a* 4.59. Tétel *ebben a témakörben is jól használható.*

A következő tételben olyan páros gráfokra keresünk Ramsey-becslést, amelyeknek az egyik osztálya egyelemű, azaz a tétel n illetve m ágú csillagokra kimondva is használható.

4.66. Tétel (Harary, 1972 **[9]**).

$$R(K_{1,n}, K_{1,m}) = \begin{cases} n+m-1 & \textit{ha } n \textit{ és } m \textit{ is páros,} \\ n+m & \textit{egyébként.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Színezzük ki K_{m+n} éleit két színnel (pirossal és kékkel). Ekkor minden csúcsba $m+n-1$ él fut be. A skatulyaelv miatt tudjuk, hogy az adott csúcsba vagy legalább n darab piros, vagy legalább m darab kék él fut be. Tehát biztosan lesz a gráfban vagy piros $K_{1,n}$ vagy kék $K_{1,m}$. Azaz $R(K_{1,n}, K_{1,m}) \leq n+m$.

n vagy m páratlan: Tekintsük most n-et páratlannak. Ekkor $n-1$ páros, azaz K_{m+n-1}-et ki tudjuk úgy színezni, hogy minden csúcsba pontosan $n-1$ darab piros él fusson be. Ekkor a kék részgráfra jellemző, hogy minden csúcsban pontosan $m-1$ kék él fut be. Ezzel beláttuk, hogy $R(K_{1,n}, K_{1,m}) > n+m-1$, azaz az előző megfontolással $R(K_{1,n}, K_{1,m}) = n+m$.

n és m is páros: Igazoljuk, hogy $R(K_{1,n}, K_{1,m}) \leq n+m-1$. Ekkor egy csúcsba $n+m-2$ él fut be. Tegyük fel, hogy a gráfban nincs sem piros $K_{1,n}$, sem kék $K_{1,m}$. Ez csak akkor lehetséges, ha minden csúcsba pontosan $n-1$ piros és $m-1$ kék él fut be. Azonban n és m párosak, így a csúcsok száma páratlan. Tehát ennél a színezésnél azt várjuk el, hogy mind a piros, mind a kék részgráfra igaz legyen, hogy páratlan számú páratlan fokú csúcsból áll. Ilyen gráf nem létezik. Ez könnyen látható onnan, hogy az élek száma a csúcsok fokszámainak összegének a fele (minden új él behúzása két csúcsban is növeli a fokszámot eggyel). Jelen esetben azonban páratlan számot szorzunk páratlannal, ami nyilván nem osztható kettővel.

Az egyenlőség belátásához már csak arra van szükség, hogy adjuk meg K_{n+m-2} egy színezését, amiben nincs sem piros $K_{1,n}$, sem kék $K_{1,m}$. Egy $n-1$ piros és $m-2$ kék reguláris gráf megfelel a célnak (a csúcsok száma páros, így biztosan létezik ilyen gráf). $\square$

4.67. Tétel (Harborth–Mengersen, 1991). $R(K_{1,3}, K_{n,m}) = m + n + 2.$

4.68. Tétel (Chen, 1997). $R(K_{1,n+1}, K_{2,2}) \leq R(K_{1,n}, R(2,2)) + 2.$

4.69. Tétel (Burr–Erdős–Spencer, 1975). $R(nK_{1,3}, mK_{1,3}) = 4n + m - 1,\ n \geq m \geq 1$ *és* $n \geq 2$ *esetén.*

G_2 \ G_1	$K_{1,2}$	$K_{1,3}$	$K_{1,4}$	$K_{1,5}$	$K_{1,6}$
$K_{2,2}$	4	6	7	8	9
$K_{2,3}$	5	7	9	10	11
$K_{2,4}$	6	8	9	10	11
$K_{2,5}$	7	9	11	13	17
$K_{2,6}$	8	10	11	14	15
$K_{3,3}$	7	8	11	12	13
$K_{3,4}$	7	9	11	13	14
$K_{3,5}$	9	10	13	15	

5. táblázat: Ramsey-számok kis páros gráfok esetén $R(K_{n,m}, K_{p,q})$ (2009) **[16]**

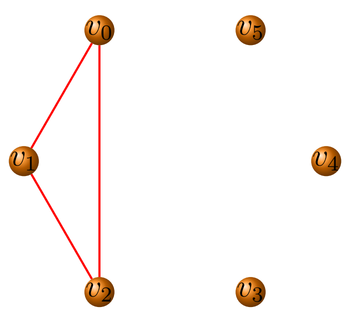
Körök és a teljes gráf

4.70. Definíció. *Nevezzük körnek az élek olyan egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben az élek és pontok egynél többször nem szerepelhetnek, és a kiindulási pont megegyezik a végponttal. A körben szereplő élek/csúcsok száma a kör hossza. Az n hosszú kört* C_n*-nel jelöljük.*

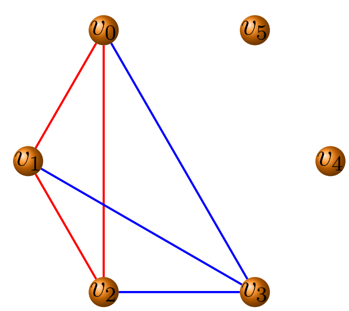
4.71. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a 3 hosszú kör nem más, mint egy háromszög, azaz* $C_3 = K_3$. *Innen következik, hogy* $R(C_3, C_3) = 6$ *a* 4.2. Tétel *alapján.*

4.72. Tétel (Chvátal–Harary, 1972 **[3]**)**.** $R(C_4, C_4) = 6$.

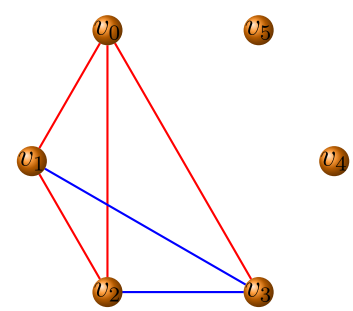
Bizonyítás. Tudjuk, hogy $R(3, 3) = 6$, azaz K_6-ot tetszőlegesen megfestve két színnel (pirossal és kékkel), a gráfban biztosan lesz egyszínű háromszög. Legyen most K_6-ban piros háromszög a $v_0 - v_1 - v_2$ csúcsokon (1. ábra). Kössük össze v_3-mat a piros háromszöggel. Ha két piros élt húznánk be, piros C_4-et kapnánk. Tehát legalább két kék éllel kell kötnünk v_3-mat a háromszöghöz. Ha mind a három él kék (2. ábra), akkor v_4 háromszöghöz kötésénél (a skatulyaelv miatt) legalább két azonos színű élt húzunk be, ezzel egyszínű C_4-et alkotva. Tehát a v_3-ból induló élek egyike lehet csak piros (3. ábra). Kössük most v_4-et a háromszöghöz: az előbbiek miatt itt is csak az egyik él lehet piros, de vigyáznunk kell, hogy ne ahhoz a csúcshoz kössünk pirossal, ahova az előbb (v_3 esetén), mert kék C_4-et kapunk (4. ábra). Ugyanilyen megfontolásból v_5-öt is csak egy piros éllel kötjük (v_3-ba). Ha például v_0-ba kötnénk pirossal, kék C_4-et kapnánk a $v_1 - v_3 - v_3 - v_5$ csúcsokon. A helyes színezést a 4. ábra szemlélteti. Már csak a $v_3 - v_4 - v_5$ háromszöget kell megszíneznünk. Ha bármelyik élt pirosra színezzük, piros C_4-et kapunk. Tehát a háromszög élei csak kékek lehetnek, ekkor azonban kék C_4-et kapunk. Minden lehetőséget végignéztünk, azaz $R(C_4, C_4) \leq 6$.



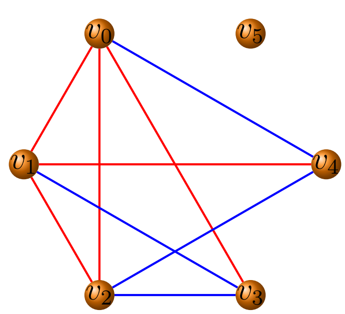
1. ábra



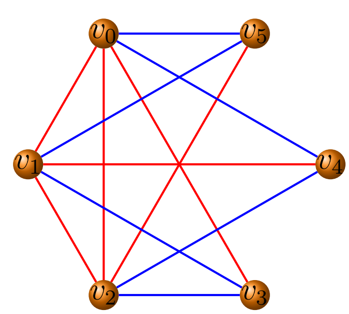
2. ábra



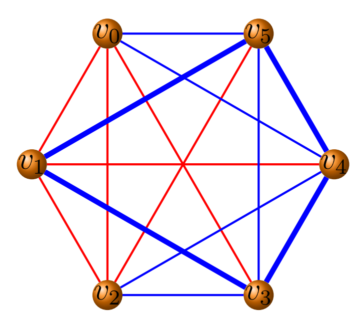
3. ábra



4. ábra



5. ábra



6. ábra

Már csak azt kell látnunk, hogy $R(C_4, C_4) > 5$. Az ellenpélda gráf ugyanaz, mint a 4.2. Tétel bizonyításában. □

4.73. Tétel (Chartrand–Schuster, 1971 **[1]**)**.** *$R(C_3, C_n) = 2n - 1$, ha $n \geq 4$.*

4.74. Tétel (Chartrand–Schuster, 1971 **[1]**)**.**

$$R(C_4, C_n) = \begin{cases} 6 & \text{ha } n = 4 \\ 7 & \text{ha } n = 5 \\ n+1 & \text{ha } n \geq 6 \end{cases}$$

Gary Chartrand és Seymour Schuster 1971-ben belátták még, hogy $R(C_5, C_n) = 2n-1$, ha $n \geq 5$ **[1]**.

A most következő általános tételt egymástól függetlenül Rosta Vera (1973) és R. J. Faudree, R. H. Schelp (1974) látták be, majd 1998-ban Rosta Vera és Károlyi Gyula egy új, egyszerűbb bizonyítást adott rá.

4.75. Tétel.

$$R(C_n, C_m) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{ha } 3 \leq m \leq n,\ m \text{ páratlan és } (n, m) \neq (3, 3) \\ n - 1 + \frac{m}{2} & \text{ha } 4 \leq m \leq n,\ m, n \text{ páros és } (n, m) \neq (4, 4) \\ \max\{n - 1 + \frac{m}{2}, 2m - 1\} & \text{ha } 4 \leq m < n \text{ és } n \text{ páratlan, míg } m \text{ páros} \end{cases}$$

4.76. Tétel (Burr–Erdős–Spencer, 1975)**.** *$R(nC_3, mC_3) = 3n + 2m$, ha $n \geq m \geq 1$ és $n \geq 2$.*

Most olyan $R(G_1, G_2)$ eseteket fogunk nézni, ahol G_1 kör, míg G_2 teljes gráf.

4.77. Sejtés. *$R(C_n, K_m) = (n - 1)(m - 1) + 1$ minden $n \geq m \geq 3$ esetén, kivéve $n = m = 3$.*

A már igazolt esetek:

- $n \geq m^2 - 2$ (Bondy, Erdős, 1973);
- $n > 3 = m$ (Chartrand, Schuster, 1971);
- $n \geq 4 = m$ (Yang, Huang, Zhang, 1999);
- $n \geq 5 = m$ (Bollobás, Jayawardene, Yang, Huang, Rousseau, Zhang, 2000);

- $n \geq 6 = m$ (Schiermeyer, 2003);
- $n \geq m \geq 7$, ha $n \geq m(m-2)$ (Schiermeyer, 2003);
- $n \geq 7 = m$ (Chen, Cheng, Zhang, 2008);
- $n \geq 4m + 2$, ha $m \geq 3$ (Nikiforov, 2005).

G_2 \ G_1	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
K_3	6	7	9	11	13	15
K_4	9	10	13	16	19	22
K_5	14	14	17	21	25	29
K_6	18	18	21	26	31	36
K_7	23	22	25	31	37	43

6. táblázat: Ramsey-számok kör, teljes gráf esetén $R(C_n, K_m)$ (2009) **[16]**

Utak

4.78. Definíció. *Egy* $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n)$ *élsorozatot* n *hosszú útnak nevezünk, és* P_n*-nel jelölünk, ha minden csúcsa különböző, és* e_i *a* v_{i-1} *és* v_i *csúcsokat összekötő él* $\forall i \in [1, n]$ *esetén. (Angol nyelvű szakirodalomban előfordul, hogy* P_n*-nel az* n *csúcsú,* $n-1$ *élű utat jelölik.)*

4.79. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy* $P_1 = K_2 = K_{1,1}$*, valamint* $P_2 = K_{1,2} = K_3 - e$*. Ebből következik, hogy* $R(P_1, P_1, \dots, P_1) = 2$*.*

4.80. Tétel. $R(P_3, P_3) = R(K_3 - e, K_3 - e) = 3.$

Bizonyítás. A skatulyaelvből triviálisan következik, hogy a K_3 éleinek 2-színezésekor az egyik színosztályba legalább két él tartozik. Mivel K_3 egy háromszög, a két él egy 2 hosszú utat ad. Azaz $R(P_3, P_3) \leq 3$. K_2 tetszőleges színezése igazolja az egyenlőséget. □

4.81. Lemma (Erdős)**.** *Ha egy gráf nem összefüggő, akkor a komplementere az.*

Bizonyítás. Ha egy gráf nem összefüggő, akkor a csúcsait két osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy a két osztály között nem vezet él. Tekintsük a gráf komplementerét: az összefüggőség definíció szerint azt jelenti, hogy bármely csúcsból bármely csúcsba el tudunk jutni az éleken haladva. Jelen esetben bármely két csúcs között vezet út: ha u_1, u_2 csúcs különböző osztályba tartozik, akkor vezet köztük él, ha azonos osztályba tartoznak, akkor a másik osztály összes v_i csúcsára igaz, hogy szomszédosak u_1-el és u_2-vel, azaz $u_1 - v_i$ és $v_i - u_2$ élek biztosan léteznek. □

4.82. Tétel. *$R(P_2, P_3) = 4$.*

Bizonyítás. Könnyű látni, hogy egy legalább 3 csúcsú összefüggő gráfban biztosan van 2 hosszú út. Színezzük ki K_4-et két színnel (pirossal és kékkel). Ha a piros részgráfban nincs P_2, akkor a részgráf nem összefüggő. Tehát a lemma értelmében a kék részgráf biztosan összefüggő. Ekkor a kék részgráfban vagy van P_3, vagy a kék részgráf egy csillag. Ekkor viszont a piros részgráf pontosan egy P_2. □

4.83. Tétel (Gerencsér–Gyárfás, 1967)**.** *$R(P_n, P_m) = n + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$, ha $n \geq m$.*

4.4. Teljes páros gráfok színezése

Az eddigiekben teljes gráfok éleit színeztük, majd az egyes színosztályokban kerestünk szabályos részstruktúrákat. Ebben a részben a vizsgálatokat teljes páros gráfokon fogjuk végezni. Emlékeztetésül:

4.84. Definíció. *Egy G egyszerű (párhuzamos- és hurokélmentes) gráfot páros gráfnak nevezünk, ha a csúcsait két osztályra lehet osztani úgy, hogy minden él kezdőpontja és végpontja külön osztályba essen.*

4.85. Definíció. *Nevezzük n, m osztályú teljes páros gráfnak azt a páros gráfot, amelynek osztályai n és m csúcsból állnak, és bármely két különböző osztályba tartozó csúcs között vezet él. Az n, m osztályú teljes páros gráfot jelöljük $K_{n,m}$-mel.*

A páros gráfokon vizsgált Ramsey-számokkal kapcsolatban többféle jelölés is elterjedt.

4.86. Definíció. *Jelöljük $R_b(K_{n_1,n_1}, K_{m_1,m_1})$-vel azt a legkisebb p számot, melyre a $K_{p,p}$ gráf éleit tetszőlegesen színezve pirossal és kékkel a gráfban biztosan lesz piros K_{n_1,n_1}, vagy kék K_{m_1,m_1}. (Az alsó indexben szereplő b az angol* bipartite*(páros) szóból ered.)*

4.87. Állítás (triviális esetek)**.**

1. *$R_b(K_{1,1}, K_{n,n}) = n$;*
2. *$R_b(K_{1,1}, K_{n,m}) = \max\{n, m\}$;*
3. *$R_b(K_{n_1,n_1}, K_{m_1,m_1}) = R_b(K_{n_1,n_1}, K_{m_1,m_1}, K_{1,1}, K_{1,1}, \ldots)$;*
4. *$R_b(K_{n_1,m_1}, K_{n_1,m_1}) \leq R_b(K_{n_2,m_2}, K_{n_2,m_2})$, $m_1 \leq m_2$ és $n_1 \leq n_2$ esetén;*
5. *$R_b(K_{n,m}, K_{n,m}) \leq R(n+m, n+m) \leq \binom{2n+2m-2}{n+m-1}$.*

Bizonyítás.

1. $R_b(K_{1,1}, K_{n,n}) \leq n$: Ha $K_{n,n}$-et kékre festjük, lesz benne kék $K_{n,n}$, ha egyetlen piros élt is behúzunk, akkor piros $K_{1,1}$ keletkezik. Már csak azt kell látnunk, hogy $n-1 < R_b(K_{1,1}, K_{n,n})$. Ehhez fessünk $K_{n-1,n-1}$ éleit kékre.
2. Az előbbiből triviálisan következik.
3. Új színeket vezetve be a gráfban vagy piros K_{n_1,n_1}-et kapunk vagy K_{m_1,m_1}-et. Ha valamelyik új színnel egyetlen élt is megfestünk, $K_{1,1}$ keletkezik.
4. Könnyen látható, ugyanis $m_1 \leq m_2$ és $n_1 \leq n_2$ esetén $K_{n_1,m_1} \subset K_{n_2,m_2}$.
5. Egyértelműen következik, ugyanis $K_{n,m} \subset K_{n+m}$.

□

4.88. Tétel (**[13]**)**.** *$R_b(K_{1,n}, K_{1,n}) = 2n-1$.*

Bizonyítás. $R_b(K_{1,n}, K_{1,n}) \leq 2n-1$: A skatulyaelv miatt egy tetszőleges csúcsnak legalább n azonos színű éllel kötődő szomszédja lesz a másik osztályból. Már csak azt kell látnunk, hogy $2n-2 < R_b(K_{1,n}, K_{1,n})$. Ennek az igazolására adunk egy konkrét színezést: legyen a két osztály A és B:

$$V(A) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n-2}\}\ V(B) = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2n-2}\}.$$

Legyen a piros élhalmaz a következő: $E_{piros} = \{a_i, b_j | n \leq i, j \leq 2n-2\} \cup \{a_i, b_j | 1 \leq i, j \leq n-1\}$, a kék élhalmazba pedig tartozzanak a kimarad élek. □

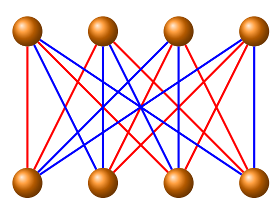
4.89. Tétel (**[13]**)**.** $R_b(K_{2,2}, K_{2,2}) = 5$.

Bizonyítás. $R_b(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq 5$: A bizonyítás során háromszor alkalmazzuk a skatulyaelvet. Tekintsük a $K_{5,5}$ páros gráfot melynek két osztálya a következő:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\};$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}.$$

Az egy csúcsból induló élek száma öt. Ezeket két színnel megfestve biztosan lesz olyan három él, amelyek azonos színűek. Az A pontosztályban karikázzuk be pirossal azokat a csúcsokat, melyekbe legalább három piros él fut be, kékkel pedig azokat, amelyekbe legalább három kék él fut be. A skatulyaelv miatt biztosan lesz három azonos színű karika, azaz létezik legalább három olyan csúcs, melyekbe legalább három él fut be ugyanabból a színből. Legyen ez a szín a piros (kék esetben a bizonyítás ugyanez). Az egyszerűség kedvéért legyen ez a három csúcs az a_1, a_2, a_3. Ezekből a csúcsokból három-három, azaz összesen kilenc, piros él fut a másik osztályba. Tegyük fel, hogy az a_1 csúcs piros éllek kapcsolódik a b_1, b_2, b_3 csúcsokhoz. Ha az a_2 csúcs az előbbi három csúcsból legalább kettőhoz kapcsolódik piros éllel, piros $K_{2,2}$-t kapunk. Most tekinsük azt az esetet, amikor a_2 a b_3, b_4, b_5 csúcsokhoz köt piros éllel. Vizsgáljuk meg most az a_3 csúcs piros éleit. Ezek közül kettő – a skatulyaelv miatt – vagy a b_1, b_2, b_3 csúcsokba, vagy a b_3, b_4, b_5 csúcsokba fut. Mindkét esetben piros $K_{2,2}$-t kapunk. Már csak azt kell látnunk, hogy $K_{4,4}$ megszínezhető két színnel egyszínű $K_{2,2}$-nélkül:



□

4.90. Tétel (bizonyítás nélkül **[13, 10]**)**.**

- $R_b(K_{2,3}, K_{2,3}) = 9$;
- $R_b(K_{3,3}, K_{3,3}) = 17$;
- $R_b(K_{2,4}, K_{2,4}) = 14$;

- *$R_b(K_{2,2}, K_{4,4}) = 14$;*
- *Általános esetben: $\sqrt{2} \leq \sqrt{R_b(K_{n,n}, K_{n,n})} \leq 2$;*
- *$R_b(\underbrace{K_{2,2}, K_{2,2}, \ldots, K_{2,2}}_{k \text{ darab}}) \leq k^2 + k - 1$.*

4.91. Tétel (Ramsey)**.** *Adott n, m pozitív egészekhez létezik egy olyan $R_b(K_{n,n}, K_{m,m})$ legkisebb, pozitív egész szám, hogy minden $p \geq R_b(K_{n,n}, K_{m,m})$-el jelölt $(p \in \mathbb{N})$ esetén a $K_{p,p}$ $2p$ pontú teljes páros gráf éleit két színnel – kékkel és pirossal – tetszőlegesen kiszínezve van a gráfban kék $K_{n,n}$ vagy piros $K_{m,m}$.*

Ramsey tételének bizonyításával együtt belátjuk a következő tételt is, mely erősen emlékeztet bennünket az Erdős–Szekeres-tételre. (Sajnos a szakdolgozat készítése közben a cikk egésze nem állt rendelkezésünkre, így a bizonyítások eltérhetnek az eredetitől.)

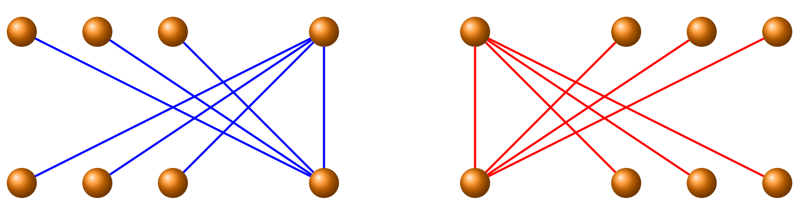
4.92. Tétel (**[10]**)**.** *$R_b(K_{n,n}, K_{m,m}) \leq R_b(K_{n-1,n-1}, K_{m,m}) + R_b(K_{n,n}, K_{m-1,m-1}) + 1$.*

Bizonyítás. n, m szerinti indukcióval bizonyítunk. Nyilvánvalóan létezik $R_b(K_{n,n}, K_{1,1})$ és $R_b(K_{1,1}, K_{m,m})$, és az értékük rendre n és m. Ez a gráfok nyelvére fordítva azt jelenti, hogy $K_{n,n}$-ben vagy van kék $K_{n,n}$, vagy egyetlen piros él. Tehát $R_b(K_{n,n}, K_{1,1}) \leq n$ és adunk $n-1$-re ellenpéldát: $K_{n-1,n-1}$ minden élét kékkel színezzük. Tehát $R_b(K_{n,n}, K_{1,1}) = n$. $R_b(K_{1,1}, K_{m,m})$-re hasonlóan.

Tegyük most fel, hogy létezik minden $R_b(K_{s,s}, K_{t,t})$, ahol $s \leq n$ és $t < m$ vagy $s < n$ és $t \leq m$. Tegyük fel indirekt, hogy

$$r \geq R_b(K_{n-1,n-1}, K_{m,m}) + R_b(K_{n,n}, K_{m-1,m-1}) + 1$$

és $K_{r,r}$ élei színezhetők úgy két színnel, hogy $K_{r,r}$ nem tartalmaz sem kék $K_{n,n}$-t, sem piros $K_{m,m}$-t. Feltehetjük, hogy a gráfban van piros és kék él is (ha csak az egyik szín található a gráfban, $R_b(K_{n,n}) = n$ nyilván). Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a két élnek nincs közös csúcsa (a bizonyítás ellenkező esetben is igaz).



Vizsgáljuk meg a kék $K_{1,1}$ kék élű szomszédait. Becsüljük felülről ezen szomszédok számát $R_b(K_{n-1,n-1}, K_{m,m}) - 1$-el, ugyanis ha a szomszédok száma több lenne ennél, az általuk alkotott részgráfban vagy piros $K_{m,m}$ vagy kék $K_{n-1,n-1}$ lenne, mely a kék $K_{1,1}$-el már $K_{n,n}$-et adna. Ugyanezt a megfontolást használhatjuk a piros $K_{1,1}$ és piros szomszédai esetén. Számoljuk most meg a gráf csúcspárjait: $r = 1 + 1 + R_b(K_{n-1,n-1}, K_{m,m}) - 1 + R_b(K_{n,n}, K_{m-1,m-1}) - 1$, ami ellentmond a feltételnek. Tehát $R_b(K_{n-1,n-1}, K_{m,m}) + R_b(K_{n,n}, K_{m-1,m-1}) + 1$ olyan szám, hogy minden nála nem kisebb r-re $K_{r,r}$-t két színnel színezve biztosan lesz a gráfban vagy kék $K_{n,n}$, vagy piros $K_{m,m}$. Ekkor viszont a legkisebb ilyen szám vagy $R_b(K_{n-1,n-1}, K_{m,m}) + R_b(K_{n,n}, K_{m-1,m-1}) + 1$, vagy kisebb nála. Tehát beláttuk a tételt.

Figyelem, itt feltettük, hogy a piros $K_{1,1}$ piros szomszédai és a kék $K_{1,1}$ kék szomszédai diszjunktak, ami gyakran nem teljesül. Ebben az esetben $r < R_b(K_{n-1,n-1}, K_{m,m}) + R_b(K_{n,n}, K_{m-1,m-1})$, amely szintén ellentmondáshoz vezet. □

4.93. Tétel ([10]). $R_b(K_{n,n}, K_{m,m}) \leq \binom{n+m}{n} - 1.$

Bizonyítás. A bizonyítás teljes indukcióval történik. Kis esetekre:

$$5 = R_b(K_{2,2}, K_{2,2}) \leq \binom{2+2}{2} - 1 = 5,$$

$$9 = R_b(K_{3,3}, K_{2,2}) \leq \binom{2+3}{2} - 1 = 9.$$

Tegyük most fel, hogy a tétel igaz minden olyan $R_b(K_{s,s}, K_{t,t})$-re, ahol $s < n$ és $t \leq m$ vagy $s \leq n$ és $t < m$. Felhasználva az előző tételt:

$$R_b(K_{n,n}, K_{m,m}) \leq R_b(K_{n-1,n-1}, K_{m,m}) + R_b(K_{n,n}, K_{m-1,m-1}) + 1 =$$
$$= \binom{n-1+m}{n-1} - 1 + \binom{n+m-1}{n} - 1 + 1.$$

A Pascal-háromszög azonossága alapján:

$$\binom{n-1+m}{n-1} + \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m}{n},$$

így $R_b(K_{n,n}, K_{m,m}) \leq \binom{n+m}{n} - 1$ valóban. □

A fenti Ramsey-számok keresésekor az alsó becsléshez célszerű a gráf szomszédsági mátrixán végezni a vizsgálódást. Vegyük észre, hogy a hagyományos szomszédsági mátrix páros gráf esetén a következő módon néz ki:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A^T \end{array}\right).$$

Tehát célszerű csupán az A mátrixot vizsgálni. Ekkor az oszlopokhoz az egyik osztály csúcsai tartoznak, míg a sorokhoz a másik osztály pontjai. Teljes páros gráf esetén a mátrixban sehol sincs nulla. Ramsey-számok keresésénél célszerű a színezést úgy jelölni, hogy a színeknek sorszámot adunk, majd a mátrixban az $\{u, v\}$ él színének megfelelő számot írjuk az u-adik sor v-edik oszlopába. Ekkor a gráfban akkor és csak akkor van teljes i-edik színű $K_{n,m}$, ha létezik olyan n különböző sor és m különböző oszlop, hogy ezen sorok és oszlopok metszéspontjait vizsgálva $n \times m$ méretű csupa i mátrixot kapunk.

5. fejezet

Többelemű részhalmazok, hipergráfok

A következőkben Ramsey tételét általános esetben vizsgáljuk meg, azaz egy S halmaznak vesszük az összes r-elemű részhalmazát, és ezekhez rendelünk színeket, majd szabályos részstruktúrákat keresünk. Ismertetni fogjuk a jelenleg aktuális ereményeket, és végül a tétel egy alkalmazását mutatjuk be.

5.1. Definíció. *Adott egy A halmaz és egy k természetes szám, jelöljük A összes k méretű részhalmazának halmazát $A^{(k)}$-val.*

5.2. Tétel (Ramsey, véges eset **[18]**)**.** *Egy tetszőleges n elemszámú S halmaznak vesszük az összes $r \in \mathbb{N}$ elemszámú részhalmazát. Ezeket a részhalmazokat s különböző színnel festjük (s diszjunkt részre bontjuk). Ekkor megfigyelhető, hogy bármely k_1, k_2, k_3, $\ldots$, k_s pozitív egész számokra igaz, hogy van az alaphalmaznak olyan k_i-elemű részhalmaza, amelynek az összes r-elemű részhalmaza az i-edik osztályba esik (i-edik színű), ha S mérete elég nagy. Létezik ilyen legkisebb $n = |S|$. Jelölése: $|S| = R_r(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s)$.*

5.3. Tétel (Ramsey, végtelen eset **[18]**)**.** *Legyen A egy megszámlálhatóan végtelen halmaz. Színezzük meg $A^{(k)}$-t r színnel, jelöljük ezt a színezést χ-vel, ahol $1 \leq k < \infty$. Ekkor létezik olyan megszámlálhatóan végtelen méretű $M \subset A$ halmaz, hogy $M^{(k)}$ minden eleme azonos színű.*

Bizonyítás. A tételt k szerinti indukcióval bizonyítjuk. A $k = 1$ esetben a skatulyaelv végtelen alakját kapjuk, azaz megszámlálhatóan végtelen sok elemet – A elemeit – véges sok r osztályba soroljuk. Ekkor biztosan lesz olyan osztály, melyben végtelen sok elem lesz. Feltesszük, hogy az állítást már beláttuk k-nál kisebb értékekre, azaz minden $q < k$

természetes szám esetén $A^{(q)}$ elemeink tetszőleges r-színezése esetén létezik olyan végtelen M halmaz, hogy $M^{(q)}$ minden eleme azonos színű.

Színezzük meg $A^{(k)}$-t r színnel, majd rögzítsük le ezt a színezést (jelöljük χ-vel). Legyen $A_0 = A$, majd válasszunk ki egy tetszőleges $a_0 \in A_0$ elemet. Legyen $B_1 = A_0 \backslash \{a_0\}$. Definiáljunk egy χ_1 színezést $B_1^{(k-1)}$ elemeire a következő módon: $\forall \tau \in B_1^{(k-1)}$ esetén $\chi_1(\tau) = \chi(\tau \cup \{a_0\})$. Az indukciós feltevés alapján létezik olyan végtelen méretű $A_1 \subset B_1$ halmaz, melynek minden $(k-1)$ méretű részhalmaza azonos színű.

Legyen $a_1 \in A_1$ tetszőleges, és $B_2 = A_1 \backslash \{a_1\}$. Színezzük meg $B_2^{(k-1)}$-t r színnel, legyen ez a színezés χ_2, melyet így definiálunk: $\forall \tau \in B_2^{(k-1)}$ esetén $\chi_2(\tau) = \chi(\tau \cup \{a_1\})$. Az indukciós feltevés alapján létezik olyan végtelen méretű $A_2 \subset B_2$ halmaz, melynek minden $(k-1)$ méretű részhalmaza azonos színű. A fenti módszer tetszőlegesen folytatható, melynek eredményeképpen a $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ végtelen halmazt kapjuk. Ekkor nyilván $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, mely kifejezésnek mindegyik tagja megszámlálhatóan végtelen méretű halmaz. Az $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ halmaz minden a_i elemét jelöljük meg azzal a színnel, amelyből végtelen sok $(k-1)$ méretű részhalmaz található A_{i+1}-ben. A skatulyelv miatt lesz olyan szín, melyet végtelen sokszor használtunk $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ megszínezésekor. Ekkor ezen végtelen sok a_i-k minden k-as részhalmaza azonos színű. $\square$

5.1. Eredmények

A következő tétel megadja az egyetlen ismert nem triviális klasszikus Ramsey-számot hipergráfokra. Az egyenlőség igazolásához számítógépes módszereket is használtak.

5.4. Tétel (McKay–Radziszowski, 1991)**.** $R_3(4,4) = 13$.

Becslések:

- $33 \leq R_3(4,5)$ (Exoo, 1998);
- $38 \leq R_3(4,6)$ (Huang, Song, 1996);
- $65 \leq R_3(5,5)$;
- $56 \leq R_3(4,4,4)$ (Exoo, 1992);
- $34 \leq R_4(5,5)$ (Exoo, 1997).

5.5. Tétel (Erdős–Hajnal, Rado)**.** $2^{cn^2} < R_3(n,n) < 2^{2^n}$.

5.6. Tétel. $R_3(C_{4k+2}, C_{4k+2}) > 5k+1$.

5.2. Alkalmazás

5.7. Definíció. *n darab pontot akkor nevezünk általános helyzetűnek, ha nincs közöttük olyan három, amely egy egyenesre illeszkedne.*

5.8. Tétel (Klein **[4]**)**.** *Öt síkbeli, általános helyzetű pont közül mindig kiválasztható négy, amelyek konvex négyszöget alkotnak.*

Bizonyítás. Válasszuk ki azokat a pontokat, amelyekre jellemző, hogy az általuk alkotott konvex poligon vagy ötszög, vagy magában foglalja a kimaradó pontokat. Könnyen látható, hogy ez minden esetben lehetséges. Ha ez a konvex poligon egy ötszög, akkor az egyik pontot kihagyva konvex négyszöget kapunk. Ha négyszög, készen vagyunk. Ha háromszög, akkor a háromszög belsejében található két ponton átmenő egyenes a háromszög csúcsait két halmazra bontja. A skatulyaelvből tudjuk, hogy az egyik oldalon biztosan lesz két csúcs. Ez a két csúcs a háromszög belsejében lévő két csúccsal biztosan konvex négyszöget alkot. □

5.9. Állítás (**[4]**)**.** *A síkon n általános helyzetű pont akkor, és csak akkor konvex helyzetű, ha bármely négy csúcsa konvex helyzetű.*

Bizonyítás. Az állítás könnyen igazolható, ugyanis a síkon n általános helyzetű pont akkor konkáv, ha az általuk meghatározott poligonban található két olyan csúcs, hogy az őket összekötő szakasznak van a poligonon kívül eső része. □

5.10. Tétel (Erdős–Szekeres (Klein sejtése), 1935 **[4]**)**.** *Bármely $3 \leq n$ esetén létezik olyan $K(n)$ szám, hogy minden legalább $K(n)$ darab általános helyzetű síkbeli pont közül kiválasztható n darab konvex helyzetű. Jelölje $K(n)$ a legkisebb ilyet számot.*

Bizonyítás. Válasszuk $K(n)$-nek az $R_4(n,5)$ Ramsey-számot. Színezzük az S

$$|S| = k \geq K(n) = R_4(n,5)$$

halmaz négyelemű részhalmazait pirosra vagy kékre aszerint, hogy konvex vagy konkáv helyzetűek. A Ramsey-tétel szerint vagy létezik olyan k pont, hogy minden négyelemű részhalmaza piros (azaz az előző állítás értelmében konvex helyzetű), vagy létezik olyan 5 pont, hogy minden négyelemű részhalmaza kék (azaz konkáv), amiről beláttunk, hogy nem lehet (5.8. Tétel). $\square$

5.11. Tétel (Erdős–Szekeres, 1935 **[4]**). $2^{n-2}+1 \leq K(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}+1$.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Szőnyi Tamásnak, hogy lehetőséget biztosított szakdolgozatom megírásához. Szakmai segítsége nagyban hozzájárult munkám elkészítéséhez.

Hálás vagyok Stabel Ferencnek, hogy ötleteivel, javaslataival színesebbé tette dolgozatomat, és Valkó Évának, hogy a felmerülő nyelvhelyességi, szerkesztési gondjaimban segítségemre volt.

Köszönettel tartozom családomnak és páromnak türelmükért és támogatásukért.

Irodalomjegyzék

[1] G. Chartrand és S. Schuster, On the existence of specified cycles in complementary graphs, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **77**(1971), 995–998.

[2] F. R. K. Chung, On the Ramsey Numbers N(3,3,...,3;2), *Discrete Mathematics*, **5**(1973), 317–321.

[3] V. Chvátal és F. Harary, Generalized Ramsey Theory for Graphs, III. Small Off-Diagonal Numbers, *Pacific Journal of Mathematics*, **42**(1972), 335–345.

[4] Erdős P. és Szekeres Gy., A Combinatorial Problem in Geometry, *Compositio Math.*, **2**(1935), 463–470.

[5] S. Fettes, R.L. Kramer és S.P. Radziszowski, An Upper Bound of 62 on the Classical Ramsey Number R(3,3,3,3), *Ars Combinatoria*, **77**(2004), 41–63.

[6] S. Fettes, On the Classical Ramsey Number R(3,3,3,3), `http://www.cs.oswego.edu/~fettes/thesis.ps`

[7] R. L. Graham, B. L. Rothschild és J. H. Spencer, *Ramsey theory*, John Wiley & Sons, New York, 1980.

[8] R. E. Greenwood és A. M. Gleason, Combinatorial Relations and Chromatic Graphs, *Canadian Journal of Mathematics*, **7**(1955), 1–7.

[9] F. Harary, Recent Results on Generalized Ramsey Theory for Graphs, *Graph Theory and Applications*, Springer, Berlin (1972) 125-138.

[10] J. H. Hattingh és M. A. Henning, Bipartitie Ramsey Theory, *Utilitas Mathematica*, **53**(1998), 217–230.

[11] J. M. Jaam, A new construction technique of a trinagle-free 3-colored K16's, *ScienceDirect, Information Sciences*, **177**(2007), 1992–1995.

[12] Katona Gy., Recski A. és Szabó Cs., *A számítástudomány alapjai*, Typotex, Budapest, 2006.

[13] V. Longani, Some bipartite Ramsey Numbers, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **26**(2002), 583–592.

[14] K. Piwakowski és S. P. Radziszowski, $30 \leq R(3,3,4) \leq 31$, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **27**(1998), 135–141.

[15] K. Piwakowski és S. P. Radziszowski, Towards the Exact Value of the Ramsey Number R(3, 3, 4), *Congressus Numerantium*, **148**(2001), 161–167.

[16] Stanisław P. Radziszowski, Small Ramsey Numbers, *The Electronic Journal of Combinatorics*, (2009), `http://www.combinatorics.org/Surveys/ds1/sur.pdf`

[17] Szőnyi Tamás, *Ramsey tétele(i) gráfokra*,
`http://www.cs.elte.hu/~szonyi/ramseyuj.pdf`

[18] Gregory E. W. Taylor, *Ramsey Theory (MSc szakdolgozat)*,
`http://web.mat.bham.ac.uk/D.Kuehn/RamseyGreg.pdf`

[19] Angol Wikipedia *Ramsey's theorem*,
`http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey%27s_theorem`

[20] Angol Wikipedia *Ramsey theory*,
`http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey-type_theorem`

[21] Magyar Wikipedia *Ramsey-tétel*,
`http://hu.wikipedia.org/wiki/Ramsey-t%C3%A9tel`

[22] A dolgozatban szereplő gráfokat a *tkz-graph* és *tkz-berge* csomagokkal készítettem, köszönet értük *Alain Matthes*-nek.
`http://www.altermundus.fr`

Nyilatkozat

Név: Tamaga István

ELTE Természettudományi Kar

Matematika BSc szak, alkalmazott matematikus szakirány

ETR azonosító: TAIPAAT.ELTE

Szakdolgozat címe: Ramsey-típusú tételek

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2011. 05. 31.

....

Tamaga István