Fixpont Tételek

Szakdolgozat

Készítette: Lestyán Szilvia

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezetők:

Kristóf János

Egyetemi Docens

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Tóth Árpád

Egyetemi Docens

Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2013

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőimnek, Kristóf Jánosnak, aki hasznos ötleteivel és tanácsaival segítette munkámat, Tóth Árpádnak, akinek a segítsége nélkül ezen dolgozat nem jöhetett volna létre. Köszönettel tartozom még a családomnak támogatásukért és bátorításukért. Valamint köszönöm még Magyar Róbertnek, Tarcsay Zsigmondnak, Titkos Tamásnak és Szűcs Zsoltnak, hogy mindig bizalommal fordulhattam hozzájuk a kérdéseimmel.

Budapest, 2013. május 31.

Lestyán Szilvia

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Ezen dolgozat célja, hogy felépítse a topológiai fokszám és a fix pont index fogalmát. Az első fejezet a Brouwer fokszám problémával foglalkozik, célja, hogy felépítsen egy olyan függvényt, amely megadja $\mathbb{R}^n$-en értelmezett folytonos függvények, és az azokhoz elég közeli folytonos függvények zérushelyeinek a minimális számát. Először poliédereken dolgozunk, majd a kapott fokszámfüggvényt kiterjesztjük tetszőleges nyílt halmazokra is. Első lépésként keresünk egy $\mathcal{A}$ halmazt, amely sűrű a (kisebb megszorítással) folytonos függvények terében, valamint fontos, hogy minden egyes $\phi \in \mathcal{A}$ függvénynek csak véges sok zérushelye legyen. Ezután algebrai úton összeszámoljuk ezeket a zérushelyeket. Ezt úgy csináljuk, hogy minden egyes pontra, melyet ϕ a nullába képez megnézzük, hogy a leképezés megfordítja-e a pontot tartalmazó szimplex körüljárását, majd az így kapott lokális indexeket összegezzük. Harmadik lépésben megmutatjuk, hogy a kapott fokszám függvényünk invariáns adott homotópia alatt, amiből pedig rögtön következik, hogy lokálisan állandó is. Folytonos függvények fokát pedig úgy kapjuk meg, hogy approximáljuk őket $\mathcal{A}$-beli leképezésekkel, így a fokszámuk meg fog egyezni. A fejezet végén már készen állunk arra, hogy a fokszám függvényt kiterjesszük tetszőleges nyílt halmazokra, azzal a megkötéssel, hogy a zérushelyek halmaza kompakt legyen.
A második fejezetben beevezetjük magát a fixpont indexet, ami szinte azon-

nal következik abból a megállapításból, hogy egy f függvény fixpontjainak a halmaza megegyezik az $id - f$ függvény zérushelyeinek a halmazával. A fokszám tulajdonságai is könnyedén átvihetőek a fixpont indexre, sőt még többet is be fogunk látni, ezt természetes mind $\mathbb{R}^n$-ben tesszük. A dolgozat legvégén még egy kiterjesztést csinálunk, méghozzá véges dimenziós normált terekre, ahol pedig még egy újabb tulajdonságot belátunk.

1.1. Jelölések, alapfogalmak

Legyen E egy normált lineáris tér, minden $A \subset E$ részhalmaz esetén hívjuk az A-t tartalmazó konvex halmazok metszetét az A *konvex burkának*, $conv(A)$, ez az A-t tartalmazó legszűkebb konvex halmaz:

$$conv(A) = \{y | y = \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i a_i; a_i \in A, 0 \leq \lambda_i, \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i = 1;\ n \text{ tetszőleges}\}.$$

Egy E-beli *sík*nak hívjuk $L + a$ egy alterét, ahol L az E egy lineáris altere, és $a \in E$.
Egy $\phi : \sigma^n \to \mathbb{R}^k$ leképezés affin, ha $\phi\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(p_i)$.
$s + 1$ pont halmazát *affin független*nek hívjuk, ha E egyik s-1 síkja sem tartalmazza őket.
Legyenek most a $\{p_0, p_1, ..., p_s\}$ pontok affin függetlenek E-ben. Ekkor az $s + 1$ pont konvex burka:

$$\{x \in E | x = \Sigma_{i=0}^{s} \lambda_i p_i;\ 0 \leq \lambda_i \leq 1,\ \sigma_{i=1}^{s} \lambda_i = 1\},$$

amit (zárt) *s-szimplex*nek nevezünk, csúcsai a $p_0, ..., p_s$ pontok, jelölés: $[p_0, ..., p_s]$; ha nem emeljük ki a csúcsokat, akkor σ vagy σ^s jelöli, ahol s a dimenzió-szám.

Azt a k-szimplexet melyet a $p_0, ...p_s$ csúcsok bármely k+1 részhalmaza feszít σ^s *k-oldal*ának hívjuk, σ^s egyetlen s-oldala maga σ^s. Azon oldalak úniója, melyek dimenziója $\leq s - 1$ a σ^s határa, $\partial\sigma^s$ (ez nem feltétlenül σ^s topológiai határa E-ben); egy *nyílt s-szimplex* nem más, mint $\sigma^s - \partial\sigma^s$; σ^s 0-oldalai a csúcsai, a $[p_i, p_j]$ 1-oldalakat pedig az élek. Mivel σ^s konvex, azért könnyen láthatjuk, hogy $\delta(\sigma^s)$, a σ^s átmérője nem más, mint a leghosszabb élének hossza.

Egy szimplex nyilvánvalóan egy kompakt metrikus tér, sőt mivel a csúcsai affin függetlenek, ezért minden egyes $x \in \sigma^s = [p_0, ..., p_s]$ egyértelműen felírható $x = \Sigma_{i=0}^s \lambda_i(x) p_i$ alakban, ahol $\Sigma_{i=0}^s \lambda_i(x) = 1$ és $0 \leq \lambda_i(x) \leq 1$ minden $x \in \sigma^s$ pontra, $i = 0, ..., s$; a $(\lambda_0(x), ..., \lambda_s(x))$ valós számok $s+1$-esét hívjuk $x \in \sigma^s$ *baricentrikus koordinátá*inak, valamint a $\lambda_i : \sigma^s \to [0,1]$ leképezéseket pedig a σ^s *baricentrikus koordináta függvény*einek.

1.1.1. Állítás. *Bármely kettő s-szimplex affin homeomorf egymással. Továbbá, bármely σ szimplex esetén, a $\lambda_i : \sigma \to [0,1]$ baricentrikus koordináta függvények folytonosak.*

*Szimpliciális komplexus*nak nevezzük $\mathbf{R}^n$-beli szimplexek egy $\mathcal{K} = \{\sigma\}$ véges halmazát, ahol:
(a) ha $\sigma \in \mathcal{K}$, akkor σ minden oldala is $\mathcal{K}$-beli
(b) ha $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$, akkor $\sigma \cap \tau$ vagy üres, vagy σ és τ egy közös oldala.
A *poliéder* egy $(K, \mathcal{K})$ pár, ahol $\mathcal{K}$ egy szimpliciális komplexus, és
$K = \cup\{\sigma | \sigma \in \mathcal{K}\}$, ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{K} = sd\ K$ a poliéder *szimplex felbontása*, valamint legyen a $K = |\mathcal{K}|$ a $\mathcal{K}$ *tartó*ja.
$(K, \mathcal{K})$ *dimenzió*ja: $max\{dim\ \sigma | \sigma \in \mathcal{K}\}$, $\mathcal{K}$ *bősége*: $max\{\delta(\sigma) | \sigma \in \mathcal{K}\}$. A $(K, \mathcal{K})$ egy *részpoliéder*e alatt értsünk egy $(L, \mathcal{L})$ párt, ahol $\mathcal{L}$ a $\mathcal{K}$ valamely részhalmaza, amely kielégíti (a)-t, és ahol L az $\mathcal{L}$ tartója; mivel $\mathcal{L}$ kielégíti (b)-t, ezért láthatjuk, hogy az $(L, \mathcal{L})$ pár szintén egy poliéder. $\mathcal{K}$ *q-váza* az a részpoliéder, amely azon szimplexből áll, melyeknek q-nál kisebb vagy egyenlő a dimenziójuk, jelölés: $(K, \mathcal{K})^q$. A $(K, \mathcal{K})^0$ halmaz pedig nem más, mint a poliéder csúcsainak a halmaza.

Legyen adva K valamely szimplex felbontása $\mathcal{K}$, most készítsünk el a $\mathcal{K}'$ *baricentrikus felosztást*: a lényege abban rejlik, hogy $\mathcal{K}'$ szimplexei "kisebbek", mint $\mathcal{K}$ szimplexei, így a felosztást ismételgetve tetszőleges bőséggel rendelkező tartót készíthetünk a felosztáshoz.
Egy $\sigma = (p_0, ..., p_n)$ n-szimplex *baricentrum*a a $[\sigma] = \frac{1}{n+1} \Sigma_{i=0}^n p_i$ pont (jelölésben: b_σ); egy null-szimplex önmaga baricentruma. Vegyünk most egy

$(\sigma^n, \mathcal{F}(\sigma^n))$ poliédert (itt most σ^n egyetlen egy n-szimplex), és készítsük el az $Sd^1\sigma^n$ baricentrikus felosztást: σ^n oldalainak a baricentrumai $Sd^1\sigma^n$ csúcsai lesznek, σ^n dimenziója szerinti indukcióval haladunk tovább:
1. ha $dim\ \sigma = 0$, akkor $Sd^1\sigma^n = \sigma^n$;
2. tegyük fel, hogy ismerjük $Sd^1\sigma^n$ minden egyes $\leq n-1$ dimenzós szimplexét, valamint legyen $\mathcal{L}$ az $Sd^1\sigma^{n-1}$ (n-1)-szimplexeinek az összessége, ahol σ^{n-1} végig fut σ^n (n-1)-oldalain. Ekkor $Sd^1\sigma^n$ a következő szimplexekből áll:

$$\{(y_0, ..., y_{n-1}, [\sigma^n] | (y_0, ..., y_{n-1}) \in \mathcal{L}\},$$

valamint ezen szimplexek oldalaiból.
Vegyük észre, hogy σ^n baricentrikus felosztása nem vezet be új pontot σ^n-en, így ha vesszük két σ, τ szimplex baricentrikus felosztását, a módszer ugyanazt a felosztást adja a $\sigma \cap \tau$ metszeten.
A $\mathcal{K}' = Sd^1\mathcal{K}$ baricentrikus felosztást úgy kapjuk, hogy minden egyes $\sigma \in \mathcal{K}$ szimplexnek elkészítjük a baricentrikus felosztását, így a következő szimplexekből fog állni:

$$\{\sigma' | \sigma' \in Sd^1\sigma,\ \sigma \in \mathcal{K}\}$$

Egy n dimenziós szimplex poliédert *n-homogén*nak nevezünk, ha minden egyes szimplex egy n-szimplexnek az oldala.

2. fejezet

A Topológiai Fokszám Bevezetése

A fejezet célja, hogy $\mathbb{R}^n$-ben felépítse a topológiai fokszám fogalmát és főbb tulajdonságait.

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és nyílt, valamint legyen $C(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ az $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvények tere a sup metrikával. Általánosan megfogalmazva a (Brouwer) fokszám probléma nem más, mint hogy hozzárendeljünk egy $d(f, U)$ egész számot minden egyes $f \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ függvényhez, ahol d jelenti f, és az f-hez elég közeli függvények zérushelyeinek a minimális számát.

Az $f \mapsto d(f, U)$ nem lehet lokálisan állandó, ha a függvények felvehetnek 0-t ∂U-n, ezért vegyük a következő nyílt alteret: $C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n) = \{f | f : (\overline{U}, \partial U) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})\}$. Először választanunk kell egy $\mathcal{A} \subset C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ sűrű halmazt úgy, hogy minden $\phi \in \mathcal{A}$-nak csak véges sok zérushelye legyen U-ban. Ezután algebrai úton számoljuk meg a nullákat, így kapunk egy fokszám függényt, amely lokálisan állandó lesz az $\mathcal{A}$ altéren. Amennyiben minden egyes $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ függvényre úgy definiáljuk a $d(f, U)$ fokszám függvényt, hogy az megegyezzen f minden elég közeli $\phi \in \mathcal{A}$ approximációjával, akkor megkapjuk a kívánt fokszám függvényt.

2.1. Poliéderek PL leképezései

2.1.1. Definíció. *Egy (K, Q) poliéder-pár alatt értsük magát a K poliédert és a hozzá tartozó $Q \subset K$ részpoliédert.*
Azt mondjuk, hogy egy ilyen (K, Q) pár speciális, ha minden $\sigma^m = (p_0, ..., p_m)$ esetén, ahol minden $p_i \in Q^0$: $\sigma^m \in Q$. Vegyük észre, hogy bármely (K, Q) pár $(\hat{K}, \hat{Q})$ baricentrikus felosztása mindig speciális.

2.1.2. Definíció. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ egy poliéder. Egy $\phi : K \to \mathbb{R}^n$ PL-nek (vagyis részenként lineárisnak) nevezünk, ha minden egyes szimplexen affin. PL^n pedig ha minden egyes $\leq n$ dimenziójú szimplexen homeomorfizmus is (önmagára véve).*

Ha egy kicsit elmozdítjuk a csúcsok képét egy általános pozicióba, akkor bármely PL leképezés approximálható egy PL^n leképezéssel; ezt fogalmazzuk meg valamivel pontosabban:

2.1.3. Lemma. *Legyen (Q, K) egy speciális poliéder-pár $\mathbb{R}^s$-ben, valamint legyen $f : K \to \mathbb{R}^n$ egy PL leképezés, amely a Q-n PL^n. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $\phi : K \to \mathbb{R}^n$ PL^n leképezés melyre igaz, hogy $\phi|Q = f|Q$ és $\|f - \phi\| < \varepsilon$.*

BIZONYÍTÁS: Jelen dolgozatban ezt a tételt nem bizonyítjuk.

Célunk elérése érdekében viszont még fontosabb, hogy megfogalmazzuk tetszőleges folytonos függvények PL^n aprroximációját:

2.1.4. Tétel. *Legyen (Q, K) egy poliéder-pár $\mathbb{R}^s$-ben, valamint legyen $f : K \to \mathbb{R}^n$ egy folytonos leképezés, amely a Q-n PL^n. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik K egy $\hat{K}$ felosztása, és egy $\psi : \hat{K} \to \mathbb{R}^n$ leképezés melyre igaz, hogy $\psi|Q = f|Q$ és $\|\psi - f\| < \varepsilon$.*

BIZONYÍTÁS: Mivel K kompakt, f egyenletesen folytonos (Heine-tétel), ekkor pedig létezik egy $\delta > 0$ és $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon/2$, ha $\|x - y\| < \delta$.

Osszuk fel K-t a baricentrikusan, ezt folytassuk addig, amíg kapunk egy olyan $\hat{K}$-t, hogy $\hat{K}$ bősége $< \delta$. Majd állítsuk be ϕ-t úgy, hogy $\phi(\hat{p}) = f(\hat{p})$ minden $\hat{p} \in \hat{K}$ csúcsra, és terjesszük ki $\hat{K}$ többi szimplexére is, úgy hogy egy PL leképezést kapjunk. Ha $\bar{\sigma}$ egy Q-beli szimplex, és $\hat{\sigma} \subset \bar{\sigma}$ pedig $\hat{K}$ egy szimplexe, akkor ϕ és f mindketten affin leképezések $\bar{\sigma}$-on, a $\hat{\sigma}$-beli csúcsokon pedig egybeesnek, így $f|\hat{\sigma} = \phi|\hat{\sigma}$, és így $\phi|Q = f|Q$. Végül, ha $x \in \hat{K}$ valamelyik $(\hat{p_0}, ..., \hat{p_l}) \in \hat{K}$ szimplex egy belső pontja, akkor $\|x - \hat{p_i}\| < \delta$, ahol $i = 0, ..., l$, vagyis $\|f(x) - \phi(x)\| = \left\| f(x) - \sum_{i=0}^{l} \lambda_i f(\hat{p_i} \right\| < \varepsilon/2$. Most pedig alkalmazzuk az előző lemmát ϕ-re, ezzel kaptunk egy ψ PL^n leképezést, amire igaz, hogy $\|\psi - f\| < \varepsilon$, és $\psi|Q = f|Q$.

□

2.1.5. Definíció. *Legyen K egy poliéder, K^{n-1} pedig a hozzá tarozó $(n-1)$-váz. Kritikus értékek halmazának nevezzük egy $f : K \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény $f(K^{n-1})$ képét, az $\mathbb{R}^n - f(K^{n-1})$ pontokat pedig reguláris értékeknek.*

Ezzel a terminológiával pedig most fogalmazzuk meg a Sard tétel PL megfelelőjét:

2.1.6. Tétel. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ egy poliéder, $\phi : K \to \mathbb{R}^n$ pedig egy PL leképezés. Ekkor ϕ reguláris értékeinek halmaza nyílt és sűrű $\mathbb{R}^n$-ben.*

BIZONYÍTÁS: A ϕ függvény $\phi(\sigma^{n-1})$ kritikus értékeinek halmaza véges sok halmaz uniójában van ($\sigma^{n-1} \in K$); mivel egyiknek sincs belseje (azaz egyik sem tartalmaz nyílt halmazt), így az uniójuknak sincs belseje, ezzel készen is van a bizonyítás.

□

A következőekben hívjunk egy $\phi : K \to \mathbb{R}^n$ PL^n leképezést speciális PL^n-nek, ha a 0 a ϕ egy reguláris értéke. Így egy $\phi : (K, K^{n-1}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ PL leképezés speciális PL^n, ha ϕ a K^n minden egyes szimplexén homeomorfuzmus.

2.2. Poliédertartomány $\mathbb{R}^n$-en. Generikus leképezések foka

Egy $U \subset \mathbb{R}^s$ nyílt halmazt *poliédertartomány*nak nevezünk, ha a lezártja véges poliéder.

2.2.1. Definíció. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^s$ egy poliédertartomány. PL-generikusnak (vagy generikusnak) nevezünk egy $f : (\overline{U}, \partial U) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ folytonos függvényt, ha az $\overline{U}$ egy felosztásán speciális PL^n:*

$$\mathcal{A}(\overline{U}, \mathbb{R}^n) := \{f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)|\ f \quad PL - generikus\}$$

2.2.2. Tétel. *Ha $U \subset \mathbb{R}^n$ egy poliédertartomány, akkor az $\mathcal{A}(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ generikus függvények halmaza sűrű $C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$-ben.*

BIZONYÍTÁS: Vegyünk először is egy $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ függvényt, és legyen $\varepsilon > 0$, a 2.1.4. tételt felhasználva készítsünk egy ϕ leképezést, amely PL^n az $\overline{U}$ valamilyen $\hat{K}$ felosztásán, és $\|\phi - f\| < \varepsilon/2$. Mivel ϕ reguláris értékeinek halmaza nyílt és sűrű $\mathbb{R}^n$-ben, létezik egy reguláris érték melyre $\|y_0\| < \varepsilon/2$. Ekkor $\phi - y_0$ generikus és $\|(\phi - y_0) - f\| < \varepsilon$.

□

Most tekintsük egy $\phi \in \mathcal{A}(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ függvény zérushelyeit. Mivel $dim\overline{U} = n$ és ϕ pedig speciális PL^n az $\overline{U}$ egy K' felosztásán, ezért ϕ-nek csak véges sok zérushelye lehet, sőt maximum egy lehet minden egyes $\sigma^n \in K'$ n-szimplex belsejében. Számoljuk ezeket össze algebrai úton: meg kell állapítanunk minden $p \in \phi^{-1}(0)$ pontra, hogy ϕ megfordítja-e a p-t belső pontként tartalmazó n-szimplex körüljárását.

Először is idézzük fel, hogy ha $(u_1, ..., u_n)$ egy olyan rendezett bázis, amely meghatározza $\mathbb{R}^n$ körüljárását, akkor egy $\sigma^n = (p_0, ..., p_n) \subset \mathbb{R}^n$ n-szimplex körüljárási irányát a következő nem szinguláris (invertálható) lineáris transzformáció determinánsa határozza meg:

$$L : (u_1, ..., u_n) \mapsto (p_1 - p_0, ..., p_n - p_0).$$

Ha ez az érték pozitív, akkor a szimplex irányítása megegyezik $\mathbb{R}^n$ irányításával, ha negatív, akkor ellentétes. A p_i pont koordinátái legyenek $((p_i)_1, ..., (p_i)_n) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor L determinánsa a következő:

$$\mathbf{detL} = \begin{vmatrix} (p_1)_1 - (p_0)_1 & ... & (p_n)_1 - (p_0)_1 \\ ... & ... & ... \\ (p_1)_n - (p_0)_n & ... & (p_n)_n - (p_0)_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 \\ (p_0)_1 & ... & (p_n)_1 \\ ... & ... & ... \\ (p_0)_n & ... & (p_n)_n \end{vmatrix}$$

Jelöljük $detL/|detL|$-et $\|p_0, ..., p_n\|$-al. Most legyen $\phi : \sigma^n \to \mathbb{R}^n$ egy affin homeomorfizmus σ^n-en; ekkor a $\|p_0, ..., p_n\| \cdot \|\phi(p_0), ..., \phi(p_n)\|$ szorzatból megkapjuk, hogy σ^n és $\phi(\sigma^n)$ irányítása megegyezik-e vagy sem. Mivel p_i transzponálásával mindkét determináns előjele megváltozik, láthatjuk, hogy ez a szorzat független $\mathbb{R}^n$ választott irányításától, vagy a szimplex csúcsainak sorrendjétől.
Ezzel már definiálhatjuk az $\mathcal{A}$ approximáló halmazunk leképezéseihez tartozó $d(\phi, U)$ fokszámot:

2.2.3. Definíció. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ egy poliédertartomány, valamint legyen $\phi : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ generikus. Ha egy $p \in \phi^{-1}(0)$ a $(p_0, ..., p_n)$ n-szimplex egy belső pontja, akkor a ϕ leképezés p-beli lokális indexe a következő:*

$$J(\phi, p) = \|p_0, ..., p_n\| \cdot \|\phi(p_0), ..., \phi(p_n)\|,$$

ϕ fokszáma U-n pedig:

$$d(\phi, U) = \sum \{J(\phi, p) | p \in \phi^{-1}(0)\}.$$

2.2.4. Tétel. *Legyen U egy poliédertartomány $\mathbb{R}^n$-ben, és legyen $\phi \in \mathcal{A}(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$. Tegyük fel, hogy $p \in \phi^{-1}(0)$ a $(p_0, ..., p_n)$ n-szimplex egy belső pontja, valamint legyen T a $\phi|\sigma^n$ affin homeomorfizmus lineáris része. Ekkor*

$$J(\phi, p) = sgn\ detT = (-1)^\lambda,$$

ahol λ a T negatív sajátértékeinek a száma multiplicitással együtt számolva.

BIZONYÍTÁS: Legyen az $(u_1, ..., u_n)$ az $\mathbb{R}^n$ egy bázisa. Ha L az a lineáris transzformáció, amely $(u_1, ..., u_n)$-t $(p_1 - p_0, ..., p_n - p_0)$-ba viszi, akkor $T \circ L$ is lineáris, és $(u_1, ..., u_n)$-t $(\phi(p_1) - \phi(p_0), ..., \phi(p_n) - \phi(p_0))$-ba viszi. Így:

$$\|\phi(p_0), ..., \phi(p_n)\| = sgn\ det(T \circ L) = sgn\ detT\ sgn\ detL,$$

következésképpen:
$J(\phi, p) = \|p_0, ..., p_n\| \cdot \|\phi(p_0), ..., \phi(p_n)\| = (sgn\ detL)^2 sgn\ detT = sgn\ detT$. Mivel T nem szinguláris és n db nemnulla sajátértéke van (multiplicitással együtt számolva), $detT = \prod_i \lambda_i$, és mivel a komplex sajátértékek konjugált párjaikkal együtt fordulnak elő, megkapjuk, hogy $sgn\ detT = (-1)^\lambda$.

□

A fenti tétel egy fontos következménye, hogy $J(\phi, p)$ kizárólag a $\phi|\sigma^n$ leképezéstől függ, nem pedig egy, a p-t belső pontként tartalmazó, az explicit számoláshoz felhasznált speciális szimplextől. Következésképpen, egy generikus függvény fokszáma csak ϕ lokális viselkedésétől függ, és független a számoláshoz felhasznált felosztástól. Mindezek mellett a fokszám elég kicsi transzláció esetén invariáns:

2.2.5. Állítás. *Legyen U egy poliédertartomány $\mathbb{R}^n$-ben, és legyen $\phi : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ egy generikus függvény. Ekkor létezik $\mathbb{R}^n$-ben a 0-nak egy $V(0)$ környezete melyre igaz, hogy minden $y \in V(0)$ esetén a $\phi - y$ leképezés generikus.*

BIZONYÍTÁS: Ha K az $\overline{U}$-nak egy felosztása, amin ϕ egy speciális PL^n, akkor legyen σ_i^n, $(i = 1, ..., N)$ a K azon n-szimplexeinek a halmaza, melyek ϕ zérushelyeit belső pontként tartalmazzák. Vegyük észre, hogy $\varepsilon_i = dist(0, \phi(\partial\sigma_i^n)) > 0$ $(i = 1, ..., N)$, és

$$\eta = dist\left[0, \phi(\overline{U} - \cup_{i=n}^{N} \sigma_i^n)\right] > 0.$$

Most pedig válasszuk $V(0)$-nak az $\varepsilon < \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N, \eta\}$ sugarú gömböt.

□

2.3. Lokális állandóság, homotópia invariancia

A következő részben megmutatjuk, hogy $d(\phi, U)$ lokálisan állandó az $\mathcal{A}(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ halmazon. Láthatjuk majd, hogy ez könnyen következik abból, hogy $d(\phi, U)$ invariáns a $\phi : (\overline{U}, \partial U) \times I \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ homotópiák alatt.

2.3.1. Lemma. *Legyen a $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ egy poliédertartomány, valamint legyen $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ speciális PL^n. Ekkor $\phi^{-1}(0)$ minden komponense homeomorf az $\mathbb{I}$ egység intervallummal, vagy egy körrel; az első esetben pedig a komponens mindkét végpontja ∂W-n van.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük föl, hogy $\sigma^{n+1} \cap \phi^{-1}(0) \neq \emptyset$; mivel $\phi|\sigma^{n+1}$ affin és $dim\ \phi(\sigma^{n+1}) = n$, láthatjuk, hogy $dim(\phi|\sigma^{n+1})^{-1}(0) = 1$, vagyis $(\phi|\sigma^{n+1})^{-1}(0)$ egy szakasz. Ezt a szakaszt σ^{n+1} egyik σ^n n-oldala sem tartalmazhatja, mivel $\phi|\sigma^n$ egy homeomorfizmus, ezért csak két különböző n-oldal belső pontjait kötheti össze. Ha bármelyik ezen n-oldalak közül egy másik σ_1^{n+1} szimplexnek is oldala, akkor a szakasznak folytatódnia kell σ_1^{n+1}-ben is. Így a komponens olyan véges szakaszokból fog állni, melyek egy σ^n egy belső pontjában találkoznak egymással. Mivel $\phi^{-1}(0) \cap \sigma^{n+1}$ maximum egy szakaszból állhat, ezért egy ilyen szakasz soha nem keresztezheti önmagát. Így ha a szakasz visszatér egy korábbi pontba, akkor a komponens homeomorf egy körrel; ellenkező esetben pedig $\mathbb{I}$-vel homeomorf. A második esetben viszont a komponens nem végződhet egy olyan c pontban, amely W egy belső pontja: ekkor c egy σ^n n-szimplex egy belső pontja, valamint egy W-beli B $(n+1)$-gömb középpontja is lenne; ha B^+, B^- a B és σ^n linearis burka által meghatározott két nyílt féltér metszetei, akkor tudjuk, hogy mindekettő W-nek egy-egy $(n+1)$ dimenziós nem üres részhalmaza, ezeknek pedig abban a két különböző szimplexben kell lenniük, melyek oldala maga σ^n; azt pedig már láttuk, hogy a komponens keresztül halad σ^n-en.

$\square$

Most pedig menjünk végig $\phi^{-1}(0)$-en és építsünk fel egy formulát, amely nyomon követi a lokális index kialakulását.

Legyen $\sigma^n = (p_0, ...p_n)$ egy rendezett n-szimplex az irányított $\mathbb{R}^{n+1}$-ben; ekkor minden σ^n által kifeszített n-síkon kívül eső ξ-re, a szimplex relatív irányítása legyen $[p_0, ..., p_n, \xi]$, valamint igaz a követlező állítás:

2.3.2. Állítás. .

1. *$\|p_0, ..., p_n, \xi\| = \pm \|p_0, ..., p_n, \eta\|$; az előjelek megegyeznek, ha $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n+1}$ a $\sigma^n = (p_0, ..., p_n)$ által kifeszített Σ n-sík azonos oldalán helyezkednek el, ha pedig különböző oldalakon vannak, akkor pozitív.*

2. *Ha $q_0, q_1, ..., q_n$ mind ugyanazon az $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbb{R}^n \times \{t\}$ hipersíkon helyezkednek el, azaz $q_i = (\hat{q}_i, t)$ és $(\nu, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$, ahol $\tau \neq t$, akkor*

$$\|q_0, ..., q_n, (\nu, \tau)\| = \|\hat{q_0}, ..., \hat{q_n}\| \cdot sgn[\tau - t].$$

BIZONYÍTÁS: (a) Legyen $(1-t)\xi + t\eta$, $0 < t < 1$ az a nyílt szakasz, melynek két végpontja ξ és η. Ekkor ha a p_i $(i = 0, 1, ..., n+1)$ pont koordinátái $((p_i)_1, ..., (p_i)_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, és ha $det\ [p_0, ..., p_n, p_{n+1}]$ a következő $(n+2) \times (n+2)$-es mátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 1 & ... & 1 \\ (p_0)_1 & ... & (p_{n+1})_1 \\ ... & ... & ... \\ (p_0)_n & ... & (p_{n+1})_n \\ (p_0)_{n+1} & ... & (p_{n+1})_{n+1} \end{vmatrix},$$

akkor
$det[p_0, ..., p_n, (1-t)\xi + t\eta] = (1-t)det[p_0, ..., p_n, \xi] + t\ det[p_0, ..., p_n, \eta]$,
így az értékek egy $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ intervallumot határoznak meg $\mathbb{R}$-ben. Most pedig idézzük fel, hogy $det[p_0, ..., p_n, \alpha] = 0$ akkor és csak akkor, ha $p_0, ..., p_n, \alpha$ nem affin függetlenek, vagyis ha $\alpha \in \Sigma$. Így, ha a szakasz nem metszi Σ-t, akkor $0 \notin (\hat{\xi}, \hat{\eta})$, vagyis a végpontoknak megegyezik az előjele. Ha pedig $(\xi, \eta) \cap \Sigma \neq \emptyset$, akkor $0 \in (\hat{\xi}, \hat{\eta})$, vagyis a végpontok előjele különböző.

(b) $det[(\hat{q_0}, t), ..., (\hat{q_n}, t), (\nu, \tau)] =$

$$\begin{vmatrix} 1 & ... & 1 & 1 \\ (\hat{q}_0)_1 & ... & (\hat{q}_n)_1 & \nu_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ (\hat{q}_0)_n & ... & (\hat{q}_n)_n & \nu_n \\ t & ... & t & \tau \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 & 1 \\ (\hat{q}_0)_1 & ... & (\hat{q}_n)_1 & \nu_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ (\hat{q}_0)_n & ... & (\hat{q}_n)_n & \nu_n \\ 0 & ... & 0 & \tau - t \end{vmatrix} =$$

$$(\tau - t)det[\hat{q}_0, ..., \hat{q}_n].$$

□

Legyen $\sigma^n = (p_0, ...p_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, és legyen $\phi : \sigma^n \to \mathbb{R}^n$ egy affin homeomorfizmus. Válasszuk meg ξ-t úgy, hogy ne a σ^n által kifeszített síkba essen, ezzel bevezetünk egy olyan mértéket, amely összehasonlítja az $\mathbb{R}^{n+1}$-beli $(p_0, ..., p_n, \xi)$ és az $\mathbb{R}^n$-beli $(\phi(p_0), ..., \phi(p_n))$ irányítását:

$$\Delta(\phi, \sigma^n; \xi) = \|p_0, ..., p_1, \xi\| \cdot \ \|\phi(p_0), ..., \phi(p_n)\|.$$

Ez a mennyiség független a σ^n csúcsainak az irányításától.
A következő lemmára nagy szükségünk lesz a homotópia invariancia bizonyítása során:

2.3.3. Lemma. *Legyen* $(p_0, ...p_{n+1}) = \sigma^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, és legyen*

$$\phi : (\sigma^{n+1}, (\sigma^{n+1})^{n-1}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$$

egy PL^n *leképezés, melyre* $\phi^{-1}(0) \neq \emptyset$*. Ekkor* $\phi^{-1}(0)$ *egy olyan szakasz, amely két különböző n-oldalt köt össze. Azaz* $a_0 \in \sigma_0 = (p_0, ..., p_n)$ *pontot összeköti* $a_1 \in \sigma_1 = (p_0, ..., p_{n+1})$ *ponttal; valamint*

$$\Delta(\phi, \sigma_0; a_1) = -(\Delta(\phi, \sigma_1; a_0)$$

BIZONYÍTÁS: Az a_1 és p_{n+1} pontok mindketten ugyanabban a $(p_0, ..., p_n)$ által meghatározott féltérben vannak, mivel az $a_1 \in (p_1, ..., p_{n+1})$ és p_{n+1} pontokat össze tudjuk kötni egy σ_1-beli szakasszal; valamint ugyanezt megtehetjük a_0 és p_0 esetén is. Ekkor az előző tétel alapján:

$\Delta(\phi, \sigma_0; a_1) =$

$$
\begin{aligned}
&= \|p_0, ..., p_n, a_1\| \cdot \|\phi(p_0), ..., \phi(p_n)\| \\
&= \|p_0, ..., p_n, p_{n+1}\| \cdot \|\phi(p_0), ..., \phi(p_n)\| \\
&= (-1)^{n+1} \|p_1, ..., p_{n+1}, p_0\| \cdot (-1)^n \|\phi(p_1), ..., \phi(p_n), \phi(p_0)\| \\
&= - \|p_1, ..., p_{n+1}, a_0\| \cdot \|\phi(p_1), ..., \phi(p_n), \phi(p_0)\|.
\end{aligned}
$$

Ekkor a $(\phi(p_1), ..., \phi(p_n)) \subset \mathbb{R}^n$ által kifeszített Σ $(n-1)$-sík nem tartalmaz 0-t; de mind $(\phi(p_1), ..., \phi(p_n), \phi(p_0))$ és $(\phi(p_1), ..., \phi(p_n)\phi(p_{n+1}))$ igen. Ebből következik, hogy $\phi(p_0)$ és $\phi(p_{n+1})$ mindketten ugyanabba a Σ által meghatározott féltérbe esnek, amiből megkapjuk, hogy:
$\Delta(\phi, \sigma_0; a_1) = - \|p_1, ..., p_{n+1}, a_0\| \cdot \|\phi(p_1), ..., \phi(p_n), \phi(p_{n+1})\| = -\Delta(\phi, \sigma_1; a_0)$.

□

Legyen $W \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ egy poliédertartomány, ahol $\overline{W} \subset \mathbb{R}^n \times I$. Tegyük fel, hogy a következő halmazok

$$
\begin{aligned}
\overline{W}_0 &= \overline{W} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}), \\
\overline{W}_1 &= \overline{W} \cap (\mathbb{R}^n \times \{1\}).
\end{aligned}
$$

nem üresek, és legyen $\hat{\partial} W := \partial W - (\overline{W}_0 \cup \overline{W}_1)$ a W vertikális határa. Ekkor:

2.3.4. Tétel. *Legyen $\phi : (\overline{W}, \hat{\partial} W) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ folytonos és speciális PL^n leképezés $\overline{W}_0 \cup \overline{W}_1$-en. Ekkor $d(\phi|\overline{W}_0, W_0) = (\phi|\overline{W}_1, W_1)$.*

BIZONYÍTÁS: Feltehetjük, hogy Φ speciális PL^n. Legyen $\varepsilon = dist(0, \Phi(\hat{\partial} W)) > 0$, és vegyük észre, hogy $(\overline{W}, \overline{W}_0 \cup \overline{W}_1)$ egy n-homogén poliéder pár. Következésképpen, a 2.1.4, tételt felhasználva létezik egy $H : \overline{W} \to \mathbb{R}^n$ PL^n leképezés amire igaz, hogy $\|H - \Phi\| < \varepsilon/4$, és $H|\overline{W}_0 = \Phi|\overline{W}_0 = \phi_0$, $H|\overline{W}_1 = \Phi|\overline{W}_1 = \phi_1$. Ekkor pedig a 2.2.5. tétel szerint létezik egy $V(0)$ környezet úgy, hogy $d(\phi_i - y, W_i) = d(\phi_i, W_i)$ $i = 0, 1$, $\forall$ $y \in V(0)$ esetén, és mivel H reguláris értékeinek halmaza sűrű, $V(0)$ tartalmaz egy $\hat{y}$ reguláris értéket, melyre $\|\hat{y}\| < \varepsilon/4$. Ekkor $H - \hat{y}$ egy PL^n leképezés 0 reguláris értékkel, $d(\phi_i - \hat{y}, W_i) = d(\phi_i, W_i)$ $i = 0, 1$, és mivel $\|H - \hat{y} - \Phi\| < \varepsilon/2$, a $H - \hat{y}$ leképezésnek nincsen zérushelye $\hat{\partial} W$-n. Így valóban feltehetjük, hogy Φ speciális

PL^n.

Ahhoz, hogy megszámoljuk a zérushelyeket, tekintsük $\Phi^{-1}(0)$ azon komponenseit, amelyek metszik a $\overline{W}_0 \cup \overline{W}_1$ halmazt: minden olyan komponens, amely nem találkozik ezekkel a halmazokkal, nem tartalmazhat olyan pontot, amely befolyásolná a $d(\phi_0, W_0)$ vagy $d(\phi_1, W_1)$ fokszámok értékét.

Legyen most L egy olyan komponens, amely tartalmazza az $a_0 \in Int\ \sigma_0^n \subset \overline{W}_0$ pontot. A 2.3.1. tételt figyelembe véve, ez a komponens nem lehet homeomorf egy körrel, mivel ekkor a σ_0^n oldalhoz tartozó $(n+1)$-szimplex az L két különböző szakaszát tartalmazná. Vagyis L homeomorf $\mathbb{I}$-vel, és a_0 az egyik végpontja, a másik pedig ∂W-n kell hogy legyen; sőt mivel Φ-nek nincs zérushelye $\hat{\partial} W$-n, ezért a másik végpont $\overline{W}_0$-on vagy $\overline{W}_1$-on van.

Tegyük fel, hogy L az $a_0 \in W_0$ pontból indul, (ahol a_0 a σ_0^n n-szimplex egy belső pontja) és később pedig az $a_i \in Int\ \sigma_i^n$ pontokban találkozik a $\sigma_1^n, ..., \sigma_k^n$ n-szimplexekkel, ahol $\sigma_i^n, \sigma_{i+1}^n$ pedig egy $\sigma_{i,i+1}^{n+1}$ (n+1)-szimplex oldalai. A következő mennyiség:

$$\Delta(\Phi, \sigma_i^n; a_{i+1}) = \|p_0^i, ..., p_n^i, a_{i+1}\| \cdot \|\Phi(p_0^i), ..., \Phi(p_n^i)\|$$

állandó az L mentén, és a 2.3.3. tételből következik:

$$\Delta(\Phi, \sigma_i^n; a_{i+1}) = -\Delta(\Phi, \sigma_{i+1}^n; a_i) = \Delta(\Phi, \sigma_{i+1}^n; a_{i+2}),$$

mivel a_i és a_{i+2} a σ_{i+1}^n által meghatározott ellentétes félterekben vannak.

A kiindulási pontunk ekkor:

$$\begin{aligned}\Delta(\Phi, \sigma_0^n; a_1) &= \|(p_0, 0), ..., (p_n, 0), a_1\| \cdot \|\phi_0(p_0), ..., \phi_0(p_n)\| \\ &= \|p_0, ..., p_n\| \cdot \|\phi_0(p_0), ..., \phi_0(p_n)\| = J(\phi_0, a_0)\end{aligned}$$

mivel a_1 a σ_0 csúcsait tartalmazó $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ hipersík felett helyezkedik el. Most vizsgáljuk meg L másik végpontját:

1. eset: L az $\mathbb{R}^n \times \{1\}$-ben végződik:

$$J(\phi_0, a_0) = \Delta(\Phi, \sigma_0^n; a_1) = ... = \Delta(\Phi, \sigma_{k-1}^n; a_k) = -\Delta(\Phi, \sigma_k^n; a_{k-1});$$

mivel a_{k-1} a σ_k csúcsait tartalmazó hipersík alatt van, ezért a 2.3.2.(b) tételből következik:

$$-\Delta(\Phi, \sigma_k^n; a_{k-1}) = -(-J(\phi_1, a_k)) = J(\phi_1, a_k),$$

ami megegyezik a ϕ_0 leképezésünk a_0-beli indexével.
2. eset: L az $\mathbb{R}^n \times \{0\}$-ban végződik:

$$J(\phi_0, a_0) = \Delta(\Phi, \sigma_{k-1}^n; a_k) = -\Delta(\Phi, \sigma_k^n; a_{k-1});$$

ez alkalommal a_{k-1} a σ_k csúcsait tartalmazó hipersík felett van, így

$$J(\phi_0, a_0) = -J(\phi_0, a_k),$$

ezzel az összesítés során $J(\phi_0, a_0)$ kiesik.

$\overline{W}_1$-ből kiindulva könnyedén haladhatunk visszafele ezen a gondolatmeneten. Így ϕ_0 és ϕ_1 fokszámaihoz csak a $\overline{W}_0$ és $\overline{W}_1$ között futó L komponens zérushelyei tesznek hozzá, sőt mindkettő ugyanannyit; végeredményben pedig $d(\phi_0, W_0) = d(\phi_1, W_1)$.

□

2.4. Folytonos leképezések foka

Most már készen állunk arra, hogy minden $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ leképezésre definiáljuk a $d(f, U)$ fokszámot, ezt úgy fogjuk csinálni, hogy approximáljuk f-et $\mathcal{A}(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$-beli elemekkel; de előtte még a következő állítást fogalmazzuk meg:

2.4.1. Állítás. *Legyen $f : X \to \mathbb{R}^n$ egy folytonos leképezés, és legyen $A \subset X$ olyan, hogy $dist(0, f(A)) = \alpha > 0$. Ha a $g : X \to \mathbb{R}^n$ leképezésre igaz, hogy $\|g - f\| < \alpha/2$, akkor:*
(i) $0 \notin g(A)$,
(ii) a két $f, g : (X, A) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ leképezés homotóp.

BIZONYÍTÁS: Az (i) állítás könnyedén következik a következő észrevételből: $a \in A$ esetén igaz, hogy $\|g(a)\| \geq \|f(a)\| - \|f(a) - g(a)\| \geq \alpha/2$.
(ii) Minden $a \in A$ esetén $g(a) \in B(f(a), \alpha/2)$. Legyen $h_t(x) = (1 - t)f(x) + tg(x)$, ekkor $h_t(a) \in B(f(a), \alpha/2)$ minden $a \in A$ esetén; és mivel $0 \notin B(f(A), \alpha/2)$, ezért következik, hogy $h_t : (X, A) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ egy f-et és g-t összekötő homotópia.

2.4.2. Definíció. *Legyen U egy poliédertartomány $\mathbb{R}^n$-ben, valamint legyen az $f : (\overline{U}, \partial U) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ leképezés folytonos. Válasszunk egy $\phi \in \mathcal{A}(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ generikus leképezést úgy, hogy $\|f - \phi\| < \frac{1}{2} dist(0, f(\partial U))$. Ekkor f fokszáma U-n: $d(f, U) = d(\phi, U)$.*

A 2.2.2-es tétel szerint létezik ilyen ϕ. Most mutassuk meg, hogy $d(f, U)$ független ϕ választásától. Válasszunk egy másik, a feltételeknek megfelelő $\psi \in \mathcal{A}(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ függvényt, valamint legyenek a K és K'az $\overline{U}$-nak olyan felosztásai, amelyeken ϕ és ψ speciális PL^n. Tudjuk, hogy az $\overline{U} \times \mathbb{I}$ poliédernek létezik egy szimplex felosztása, amely egybeesik K-val az $\overline{U} \times \{0\}$-án, és K'-vel az $\overline{U} \times \{1\}$-en: vegyük azokat a szimplexeket $\overline{U} \times \mathbb{I}$-ben, amelyek nincsenek $\overline{U} \times \{0\}$-ban vagy $\overline{U} \times \{1\}$-ben, tovább haladva dimenzió szerinti indukcióval, osszunk fel minden ilyen σ^{k+1}-et $(b, y_0, ..., y_k)$ szimplexekre, ahol a b a σ^{k+1} baricentrikus középpontja, $(y_0, ..., y_k)$ pedig végig fut azokon a k-szimplexeken, melyek a σ^{k+1} határán helyezkednek el. Ha vesszük $\overline{U} \times \mathbb{I}$-nek ezt a felosztását, és $\Phi(x, t) := (1 - t)\phi(x) + t\psi(x)$, akkor láthatjuk, hogy Φ folytonos $\overline{U} \times \mathbb{I}$-n, és speciális PL^n az $\overline{U} \times \{0\} \cup \overline{U} \times \{1\}$-en:

$$\|f(x) - \Phi(x)\| \leq (1 - t) \|f(x) - \phi(x)\| + t \|f(x) - \psi(x)\| < \frac{1}{2} dist(0, f(\partial U)).$$

A 2.4.1-es tételből következik, hogy Φ nem lehet nulla a $\partial U \times \mathbb{I}$-n, ekkor pedig a 2.3.4-es tételt felhaszálva láthatjuk, hogy $d(\phi, U) = d(\psi, U)$.

Ha $\alpha = d(0, f(\partial U)$, akkor ugyanazzal a generikus ϕ leképezéssel tudjuk approximálni a $B(f, \alpha/8)$ gömbbeli függvényeket. Ezzel eljutottunk a topológiai fokszám főtételéhez:

2.4.3. Tétel. *Legyen U egy poliédertartomány $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor az $f \mapsto d(f, U)$ hozzárendelés definiál egy lokálisan állandó (és így folytonos) $d : C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{Z}$ függvényt, amely kielégíti a következőket:*

1. *(Szigorú normalizáció) Ha $T : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ egy affin homeomorfizmus és $T(u) = 0$ valamilyen $u \in U$-ra, akkor $d(T, U) = -1^\lambda$, ahol λ jelenti T lineáris részéhez tartozó negatív sajátértékeket multiplicitással együtt számolva.*

2. *(Additivitás) Minden* $U_1, U_2 \subset U$ *diszjunkt poliédertartományra, és minden* $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ *függvényre, melynek zérushelyei az* $U_1 \cup U_2$*-ben vannak igaz, hogy:*

$$d(f, U) = d(f, U_1) + d(f, U_2).$$

3. *(Homotópia) Ha* $H : (\overline{U}, \partial U) \times \mathbb{I} \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ *egy homotópia, akkor* $d(H|\overline{U} \times \{0\}, U) = d(H|\overline{U} \times \{1\}, U)$.

BIZONYÍTÁS: Az (1) állítást már bebizonyítottuk.
A (2)-hez legyen $f_i = f|\overline{U}_i$, $i = 1, 2$, és $\alpha = dist(0, f(\overline{U} - (U_1 \cup U_2)))$. Legyen még ϕ egy generikus leképezés, és $\|\phi - f\| < \alpha/2$. Mivel az $\overline{U}_i$-k részpoliéderek, a $\phi_i = \phi|\overline{U}_i$ leképezések is generikusak és approximálják f_i-t; valamint mivel minden zérushely $U_1 \cup U_2$ -ben van: $d(\phi, U) = d(\phi_1, U_1) + d(\phi_2, U_2)$.
A (3) a 2.3.4. tétel egyenes következménye: legyenek a ϕ és ψ leképezések a $h_0 = H|\overline{U} \times \{0\}$ és $h_1 = H|\overline{U} \times \{1\}$ homotópiákhoz tartozó generikus approximációk, ekkor $\phi \simeq h_0$, $\phi \simeq h_1$, és mivel $\phi \simeq \psi$, az állítás bizonyítást nyert.

□

Megjegyzés: Az előzőnél egy még általánosabb formája is igaz a homotópia invariánciának: $d(f, U)$ invariáns f és U egyidejű folytonos deformációi mellett feltéve, ha zérushelyek nem kerülnek a határokra.

Könnyen láthatjuk, hogy a 2.4.3-as tételben megadott tulajdonságok egyértelműen meghatározzák a fokszám függényünket:

2.4.4. Tétel. *Legyen U egy poliédertartomány* $\mathbb{R}^n$*-ben. Ha a* $\hat{d} : C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{Z}$ *egy függvény, amelyre igaz a szigorú normalizáció, additivitás és a homotópia, akkor* $\hat{d}(f, U) = d(f, U)$.

BIZONYÍTÁS: A 2.2.2. és a 2.4.1. tételek felhasználásával vegyünk egy lineáris homotópiát és egy $\phi \in \mathcal{A}(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ speciális PL^n leképezést, így $\hat{d}(f, U) = \hat{d}(\phi, U)$. Ekkor $\phi^{-1}(0)$ egy véges $\{u_1, ..., u_k\}$ halmaz; válasszunk diszjunkt, nyílt szimplexeket úgy, hogy $u_k \in Int\ \sigma_i^n,\ i = 1, ..., k$. Ezután az additivitásból következik:

$$\hat{d}(\phi, U) = \sum_{i=1}^{k} \hat{d}(\phi, Int\ \sigma_i^n);$$

a szigorú normalizációból pedig:

$$\hat{d}(\phi, Int\ \sigma_i^n) = d(\phi, Int\ \sigma_i^n).$$

□

Megjegyzés: Jegyezzük meg, hogy a 2.4.3. tételbeli axiómák nem függetlenek egymástól: a szigorú normalizáció helyettesíthető: $d(id, U) = +1$, ha $0 \in U$.

2.5. A fokszám néhány tulajdonsága

A következő részben bemutatjuk a topológiai fokszám néhány további tulajdonságát. Ezek közül mindegyik egyenesen következik a 2.4.3-as tételből. Tegyük most fel, hogy $U = U_1 = U_2 = \emptyset$, ekkor az additivitásból következik, hogy $d(f, \emptyset) = 0$, valamint:

2.5.1. Tétel. *(Kiválasztás) Ha $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$ poliédertartományok, és $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ minden zérushelye V-ben van, akkor $d(f, U) = d(f, V)$.*

BIZONYÍTÁS: Az f függvény zérushelyei V-ben és $\emptyset$-ban vannak, ezek pedig diszjunktak, így a tétel következik az additivitásból.

□

Az előző tételből rögtön láthatjuk, hogy amennyiben $f(U) \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$, akkor $d(f, U) = d(f, \emptyset) = 0$; ez pedig egy fontos eredményre következtet:

2.5.2. Tétel. *(Létezés) Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ egy poliédertartomány, és legyen $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$. Ha $d(f, U) \neq 0$, akkor $f(U)$ tartalmazza 0-nak egy környezetét.*

BIZONYÍTÁS: Korábbi megjegyzésekből következik, hogy ha $d(f, U) \neq 0$, akkor az $f(u) = 0$ egyenletnek van megoldása U-ban. A lokális állandóságot felhasználva $d(g, U) \neq 0$ igaz minden egyes f-hez elég közeli g-re, így egy $\|y\| < \varepsilon$ esetén, ahol $\varepsilon > 0$, a $g = f - y$ függvénynek van zérushelye az U-ban; ezzel a tétel bizonyítást nyert.

□

2.5.3. Tétel. *(Multiplikativitás) Legyenek $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ és $U_2 \subset \mathbb{R}^k$ poliédertartományok, valamint legyenek $f_1 \in C_0(\overline{U}_1, \mathbb{R}^n)$, és $f_2 \in: C_0(\overline{U}_2, \mathbb{R}^k)$. Ekkor $f_1 \times f_2 \in C_0(\overline{U}_1 \times \overline{U}_2, \mathbb{R}^{n+k})$, és*

$$d(f_1 \times f_2, U_1 \times U_2) = d(f_1, U_1) \cdot d(f_2, U_2).$$

BIZONYÍTÁS: Mivel a fokszám függvény lokálisan állandó, approximálhatjuk f_i-t elég közeli speciális PL^n (és PL^k) ϕ_i leképezésekkel, ahol $d(f_i, U_i) = d(\phi_i, U_i)$, $i = 1, 2$, és $\phi_1 \times \phi_2$ fokszáma megegyezik $f_1 \times f_2$ fokszámával. Ha Z_i a ϕ_i zérushelyeinek a halmaza, akkor $Z_1 \times Z_2$ a $\phi_1 \times \phi_2$ zérushelyeinek a halmaza; számoljuk ki $\phi_1 \times \phi_2$ lokális indexét minden egyes $x_i \times y_i$ nullhelyen.

Mivel $\phi_1 \times \phi_2$ affin, ha a ϕ_i-k affinok, ezért ha L_1 a ϕ_1 lineáris része az x_i-t belső pontként tartalmazó σ_i^n szimplexen, L_2 pedig a ϕ_2 lineáris része az y_j-t a belső pontként tartalmazó σ_j^k szimplexen, akkor a 2.2.4. tétel szerint $det(L_1 \times L_2)$ előjele meghatározza az indexet. Válasszunk egy $(e_1, ..., e_n, ...e_{n+k})$ bázist $\mathbb{R}^{n+k}$-ban úgy, hogy $(e_1, ..., e_n)$ az $\mathbb{R}^n$, $(e_{n+1}, ..., e_{n+k})$ pedig az $\mathbb{R}^k$ bázisa legyen. Ekkor $L_1 \times L_2$-t kifejezheztjük $\begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}$ alakban, így

$$det\ (L_1 \times L_2) = det\ L_1 \cdot det\ L_2,$$

amiből következik, hogy

$$J(\phi_1 \times \phi_2, x_i \times y_j) = J(\phi_1, x_1) \cdot J(\phi_2, y_j).$$

Összegezzük az $x_i \in Z_1$-eket minden egyes y_j-re:

$\sum_{x_i \in Z_1} J(\phi_1 \times \phi_2, x_i \times y_j) = \left[\sum_{x_i \in Z_1} J(\phi_1, x_i)\right] J(\phi_2, y_j) = d(\phi_1, U_1) \cdot J(\phi_2, y_j),$

végül összegezzük az y_j-ket is, amivel megkapjuk a kívánt formulát.

2.6. Kiterjesztés tetszőleges nyílt halmazokra

A következő részben kiterjesztjük a fokszámfüggvényünket tetszőleges nyílt halmazokra, vagyis többé már nem szükséges, hogy U egy poliéder legyen, továbbá arra sem lesz szükségünk, hogy U korlátos legyen, sőt nem szükséges az sem, hogy a függvények értelmezve legyenek ∂U-n.

Először is vegyük észre, hogy ha veszünk egy U poliédertartományt és egy $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ függvényt, akkor a $Z(f) = f^{-1}(0)$ zérushelyek halmaza (ez korlátos és zárt, mivel f folytonos) a nyílt U poliédertartománynak egy kompakt részhalmaza. Ebből kiindulva:

2.6.1. Definíció. *Legyen $W \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz. Egy folytonos $f : W \to \mathbb{R}^n$ leképezés W-ben kompakt gyökű, ha $Z(f)$ kompakt. Jelölje $C_0(W, \mathbb{R}^n)$ azon függvények halmazát, melyek kompakt gyökűek W-n.*

Mivel $Z(f) \subset W$ kompakt, mindig létezik egy U poliédertartomány melyre $Z(f) \subset U \subset \overline{U} \subset W$: $Z(f)$ és a zárt $\mathbb{R}^n - W$ távolsága nagyobb, mint valamilyen pozitív α, ezért vegyük $\mathbb{R}^n$ egy négyzetes felosztását, ahol egy oldal hossza $< \alpha/2$, és vegyük ki ezekből azokat az n-kockákat, melyek metszik $Z(f)$-et; ezzel egy megfelelő halmazt kaptunk.

2.6.2. Definíció. *Legyen $W \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz. Válaszunk $f \in C_0(W, \mathbb{R}^n)$-hez egy U poliédertartományt a következőképpen: $Z(f) \subset U \subset \overline{U} \subset W$, ekkor f fokszáma W-n: $d(f, W) = d(f, U)$.*

Vegyük észre, hogy $d(f, W)$ értéke független a választott poliédertartománytól: ha V egy másik ugyanilyen poliédertartomány, akkor két ilyen poliédertartomány metszete is egy poliédertartomány ($\sigma_U^n \cap \sigma_V^n$ metszetei mind konvexek, így a keletkezett rendszernek létezik szimplex felosztása), ekkor a kiválasztási tulajdonságból következik, hogy $d(f,U) = d(f,U \cap V) = d(f,V)$.

Ha azt követelnénk meg, hogy minden egyes H_t kompakt gyökű legyen, akkor egy túl gyenge feltételt kapnánk, és így a fokszám homotópia invarianciája nem maradna meg, például: ha $W = (0,1) \subset \mathbb{R}^1$, és $H(w,t) = w-(t+1/2)$, akkor minen egyes H_t kompakt gyökű W-ben, de $d(H_0,W) = 1$ miközben $d(H_1,W) = 0$. A megfelelő feltétel az az lesz, hogy H kompakt gyökű legyen $W \times \mathbb{I}$-n:

2.6.3. Állítás. *Legyen $H : W \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ folytonos, ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *$H^{-1}(0)$ kompakt (azaz H kompakt gyökű $W \times \mathbb{I}$-n).*
2. *$P_W H^{-1}(0)$ kompakt, ahol $P_W : W \times \mathbb{I} \to W$ a projekció.*
3. *$\bigcup\{Z(H_t) | 0 \leq t \leq 1\}$ kompakt.*

BIZONYÍTÁS: (1) $\Rightarrow$ (2) nyilvánvaló; mivel a (3)-beli halmaz nem más, mint $P_W H^{-1}(0)$, ezért (2) $\Leftrightarrow$ (3). (2) $\Rightarrow$ (1)-hez vegyük észre, hogy $H^{-1}(0)$ zárt a $P_W H^{-1}(0) \times \mathbb{I}$ kompakt halmazok szorzatában.

□

Jegyezzük meg, hogy ha $H : W \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ kompakt gyökű, akkor mivel minden egyes $Z(H_t)$ zárt a 2.6.3/(3)-ból következik, hogy H kompakt gyökű W-ben.

Mostmár készen vagyunk a 2.4.3. tétel általánosítására. Mindezek előtt még figyeljük meg, hogy ha W korlátos és $H : \overline{W} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$, akkor H akkor és csak akkor lehet kompakt gyökű $W \times \mathbb{I}$-n, ha $H|\partial W \times \mathbb{I}$-nek nincsen zérushelye.

2.6.4. Tétel. *Legyen $W \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, ekkor az $f \mapsto d(f,W)$ hozzárendelés meghatároz egy $d : C_0(W,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{Z}$ függvényt, melyre igazak a következők:*

1. *Szigorú normalizáció*

2. *Additivitás*

3. *(Homotópia) Ha* $H : W \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ *egy kompakt gyökű homotópia, akkor* $d(H|W \times \{0\}, W) = d(H|W \times \{1\}, W)$.

BIZONYÍTÁS: (1) és (2) nyilvánvaló a definició miatt. (3) bizonyításához válasszunk egy U poliédertartományt a következőképpen: $H^{-1}(0) \subset U \times \mathbb{I}$ és $U \subset \overline{U} \subset W$, majd alkalmazzuk a 2.4.3. tételt.

□

2.7. A Brouwer fokszám főtétele $\mathbb{R}^n$-ben

A következő tétel mintegy összefoglalása az eddig leírtaknak:

2.7.1. Tétel. *Jelölje* $\mathcal{M}$ *az* $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ *függvények halmazát, ahol* $U \subset \mathbb{R}^n$ *nyílt és korlátos halmaz. Ekkor:*
(A) Létezik egy $d : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$ *függvény, amely minden egyes* $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ *függvényhez hozzárendeli a* $d(f) = d(f, U)$ *fokszámot, valamint kielégíti a következőket:*

1. *(Normalizáció) Ha* $0 \in U$ *és* $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ *az* $id_{\overline{U}}$ *identitás, akkor* $d(f, U) = 1$.

2. *(Additivitás) Ha* $V_1 \cup V_2 \subset U$, *ahol* V_1 *és* V_2 *nyílt és diszjunkt halmazok,* $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ *és* $Z(f) \subset V_1 \cup V_2$, *akkor* $d(f, U) = d(f, V_1) + d(f, V_2)$.

3. *(Homotópia) Ha a* $h_t : (\overline{U}, \partial U) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ *egy homotópia, akkor* $d(h_0) = d(h_1)$.

4. *(Létezés) Ha* $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ *és* $d(f) \neq 0$, *akkor* $f(U)$ *tartalmazza* 0*-nak egy környezetét.*

5. *(Kiválasztás) Ha* $V \subset U$ *nyílt halmazok* $\mathbb{R}^n$*-ben és* $f \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ *minden zérushelye* V*-ben van, akkor* $d(f, U) = d(f, V)$.

(B) A $d : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$ fokszám függvényt egyértelműen meghatározzák az (1)-(3) tulajdonságok.

$\square$

A (3) homotópia egyik meglepő következménye, hogy $d(f, U)$ kizárólag csak $f|\partial U$-tól függ:

2.7.2. Tétel. *Ha az $U \subset \mathbb{R}^n$ egy korlátos és nyílt halmaz, és $f, g \in C_0(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ leképezésekre igaz, hogy $f|\partial U = g|\partial U$, akkor $d(f, U) = d(g, U)$.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $H : \overline{U} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$, ahol $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$. Mivel minden t-re $H_t|\partial U = f|\partial U = g|\partial U$, ezért $f, g : (\overline{U}, \partial U) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ homotóp, ebből pedig következik, hogy $d(f, U) = d(g, U)$.

$\square$

Most pedig ekvivalens formában fogalmazzuk meg a topológiai fokszám főtételét $\mathbb{R}^n$-ben. Ez a tétel lesz a kiindulási pontunk a fix pont index felépítésekor a következő fejezetben:

2.7.3. Tétel. *(Kompakt gyökű leképezések foka) Jelölje $\mathcal{M}^*$ az $f : U \to \mathbb{R}^n$ kompakt gyökű függvények halmazát, ahol $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Ekkor:*
(A) Létezik egy $d : \mathcal{M}^* \to \mathbb{Z}$ függvény, amely minden egyes $f : U \to \mathbb{R}^n$ függvényhez hozzárendeli a $D(f) = D(f, U)$ fokszámot, valamint kielégíti a következőket:

1. *(Normalizáció) Ha $0 \in U$ és $f = id_U$ az identitás, akkor $D(f, U) = 1$.*
2. *(Additivitás) Ha $V_1 \cup V_2 \subset U$, ahol V_1 és V_2 nyílt és diszjunkt halmazok, valamint ha $Z(f) \subset V_1 \cup V_2$, akkor $D(f, U) = D(f, V_1) + D(f, V_2)$.*
3. *(Homotópia) Legyen $H_t : W \to \mathbb{R}^n$ egy kompakt gyükű homotópia. Ekkor $D(H_0, W) = D(H_1, W)$.*
4. *(Létezés) Ha $D(f, U) \neq 0$, akkor $Z(f) \neq \emptyset$*

5. *(Kiválasztás) Ha a* $V \subset U$ *egy nyílt halmaz, és* $Z(f) \subset V$, *akkor* $D(f,U) = D(f,V)$.

6. *(Multiplikativitás) Legyenek* $U \subset \mathbb{R}^n$ *és* $V \subset \mathbb{R}^m$ *nyílt halmazok, valamint* $f \in C_0(U,\mathbb{R}^n)$, $g \in C_0(V,\mathbb{R}^m)$. *Ekkor* $f \times g \in C_0(U \times V, \mathbb{R}^{n+m})$, *és* $D(f \times g, U \times V) = D(f,U) \cdot D(g,V)$.

(B) A $D : \mathcal{M}^* \to \mathbb{Z}$ *fokszám függvényt egyértelműen meghatározzák az (1)-(3) tulajdonságok.*

$\square$

3. fejezet

Fixpont Index

A most következő fejezet célja, hogy bevezesse a Leray-Schauder fixpont index fogalmát. Ebben nagy segítségünkre lesz az előző fejezetben felépített $\mathbb{R}^n$-beli topológiai fokszám, valamint még néhány geometriai módszer, amiket az alábbiakban fogunk bevezetni.

Ebben a fejezetben a következő jelölésekkel fogunk élni: legyen X egy tér, $U \subset X$ nyílt, és $f : U \to X$ pedig folytonos. Azt mondjuk, hogy f $kompaktanfix$, ha $Fix(f)$, az f fixpontjainak a halmaza kompakt. Az $f : U \to X$ kompaktan fix függvényeknek a halmazát jelölje $\mathcal{F}(U, X)$. Egy $h_t : U \to X$ homotópiát kompaktan fixnek hívunk, ha $\cup_{t \in I} Fix(h_t)$ kompakt.

3.1. Fixpont Index $\mathbb{R}^n$-ben

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, és $f : U \to \mathbb{R}^n$ egy folytonos függvény, $Z(f)$ pedig az f zérushelyeinek a halmazát jelöli. Vegyük észre, hogy

$$Fix(f) = Z(id - f).$$

A 2.7.3. tételt felhasználva definiáljunk egy indexet, amely f fixpontjainak a minimális számát jelöli.

3.1.1. Definíció. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, valamint legyen $\mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$ az $f : U \to \mathbb{R}^n$ kompaktan fix függvények halmaza. Egy $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$-hez* *tartozó* $I : \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{Z}$ *fixpont index függvényt a következő módon definiáljuk:*

$$I(f) = I(f, U) = D(id - f, U),$$

ahol $I(f, U)$ *jelöli az* f *függvény fixpont indexét.*

A 2.7.3. tételben a kompakt gyökű leképezések fokszámára adott axiómákat rögtön le is fordíthatjuk a nyílt $U \subset \mathbb{R}^n$-en értelmezett kompaktan fix leképezések indexének megfelelően:

1. *(Normalizáció)* Ha $f : U \to \mathbb{R}^n$ az $u \mapsto u_0$ konstans leképezés, ahol $u_0 \in U$, akkor $I(f, U) = 1$.

2. *(Additivitás)* Minden diszjunkt, nyílt $V_1, V_2 \subset U$ halmazra, ha $Fix(f) \subset V_1 \cup V_2$, akkor $I(f, U) = I(f, V_1) + I(f, V_2)$.

3. *(Homotópia)* Legyen $H_t : U \to \mathbb{R}^n$ egy kompaktan fix homotópia, ekkor $I(H_0, U) = I(H_1, U)$.

4. *(Létezés)* Ha $I(f, U) \neq 0$, akkor f-nek van U-ban fix pontja.
   BIZONYÍTÁS: $D(id - f, U) \neq 0$, vagyis $id - f$-nek van zérushelye U-ban.

   $\square$

5. *(Kiválasztás)* Ha $V \subset U$ nyílt, és $Fix(f) \subset V$, akkor $I(f, V) = I(f, U)$.
   BIZONYÍTÁS: Ez egyszerüen csak megegyezik a fokszám kiválasztási tulajdonságával.

   $\square$

6. *(Multiplikativitás)* Legyenek $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, valamint legyenek $f : U \to \mathbb{R}^n$ és $g : V \to \mathbb{R}^m$ kompaktan fix leképezések. Ekkor

$$I(f \times g, U \times V) = I(f, U) \cdot I(g, V).$$

BIZONYÍTÁS: Könnyen láthatjuk, hogy $Fix(f \times g) = Fix(f) \times Fix(g)$, vagyis $f \times g : U \times V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ kompaktan fix. Tekintsük most a következő leképezést:

$$(x, y) \mapsto (x, y) - (f(x), g(y)) = (id_{U\times V} - (f \times g))(x, y) =$$
$$[x - f(x)] \times [y - g(y)].$$

Ekkor a kompaktan fix leképezések fokszámának multiplikativitását felhaszanálva:

$$D\{[x - f(x)] \times [y - g(y)], U \times V\} = D[x - f(x), U] \cdot D[y - g(y), V].$$

□

7. *(Kommutativitás)* Legyenek $U \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmazok, és $f : U \to \mathbb{R}^n$, $g : W \to \mathbb{R}^m$. Vegyük a következő leképezéseket:

$$gf : V = f^{-1}(W) \to \mathbb{R}^n \text{ és } fg : V' = g^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m.$$

Ha gf kompaktan fix, akkor fg is, és

$$I(gf, V) = I(fg, V').$$

BIZONYÍTÁS: Vizsgáljuk meg a következő fix pont halmazt:

$$Fix(gf) = \{x \in f^{-1}(W) | x = gf(x)\},\ Fix(fg) = \{y \in g^{-1(U)} | y = fg(y)\},$$

és vegyük észre, hogy a $f : Fix(gf) \to Fix(fg)$ és $g : Fix(fg) \to Fix(gf)$ leképezések egymás inverzei, vagyis a $Fix(gf)$ és a $Fix(fg)$ halmazok homeomorfak. Ekkor ha az egyik kompakt, a másik is az.

Tegyük fel, hogy mindkét halmaz kompakt, ekkor:

- $I(gf, V) = I((gfx, 0), V \times \mathbb{R}^m$.
  Az $(x, y) \mapsto (gfx, 0)$ hozzárendelés nem más, mint a $gf : V \to \mathbb{R}^n$ és a $0 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ leképezések szorzata, ekkor a multiplikativitást felhasználva, és azt, hogy $I(0, \mathbb{R}^m) = 1$ megkapjuk, hogy

$$I((gfx,0),V\times\mathbb{R}^m)=I(gf,V)\cdot I(0,\mathbb{R}^m)=I(gf,V).$$

- $I((gfx,0),V\times\mathbb{R}^m=I((gfx,fx),V\times\mathbb{R}^m)$. (gfx,fx) és $(gfx0)$ összeköthető az $\alpha_t : V\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ kompaktan fix homotópiával, ahol

$$\alpha_t(x,y)=(gfx,(1-t)fx),\qquad t\in[0,1].$$

  Vegyük észre, hogy $\cup_{t\in I}ix(\alpha_t)\subset\mathbb{R}^m$ kompakt, mivel egybeesik a $Fix(gf)\times I$ kompakt halmaz képével az $(x,t)\mapsto(x,(1-t)fx)$ hozzárendelés mellett.

- $I[(gfx,fx),V\times\mathbb{R}^m]=I[(gfx,fx),V\times V']$.
  Abban az esetben ha $gfx=x$ és $y=fx$, ahol $x\in V=f^{-1}(W)$, akkor $gy=x$ miatt $y\in g^{-1}(U)=V'$; így az $(x,y)\mapsto(gfx,fx)$ leképezés fix pontjai $V\times\mathbb{R}^m$-ben valójában egy kisebb halmazban vannak, méghozzá $V\times V'$-ben, a kiválasztási tulajdonságot felhasználva pedig lecsökkenthetjük erre az értelmezési tartományt.

- $I[(gfx,fx),V\times V']=I[(gy,fx),V\times V']$. Az $(x,y)\mapsto(gfx,fx)$ és az $(x,y)\mapsto(gy,fx)$ leképezéseket össze tudjuk kötni egy $H_t : V\times V'\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ kompaktan fix homotópiával, ahol

$$H_t(x,y)=[(1-t)gfx+tgy,fx].$$

  Vegyük észre, hogy a $Fix(H_t)=\{(x,y)|(1-t)gfx+tgy=x,fx=y\}=\{(x,y)|gfx=x,fx=y\}$ halmaz kompakt.
  Most pedig induljunk el visszafele az ellenkező irányban:

- $I[(gy,fx),V\times V']=I[(gy,fgy),V\times V']$.
  Alkalmazzunk egy $\alpha_t : V\times V'\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ kompaktan fix homotópiát:

$$\alpha_t(x,y)=(gy,(1-t)fx+tfgy).$$

- $I[(gy, fgy), V \times V'] = I[(gy, fgy), \mathbb{R}^n \times V']$.
- $I[(gy, fgy), \mathbb{R}^n \times V'] = I[(0, fgy), \mathbb{R}^n \times V'] = I(fg, V')$.
  Ezzel véget is ért a bizonyításunk.

□

Mostmár készen állunk a következő alapvető tételünk megfogalmazására:

3.1.2. Tétel. *(Fix pont index $\mathbb{R}^n$-ben). Legyen U valamilyen nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, ekkor:*
(A) Az $f \mapsto I(f) = I(f, U)$ fixpont index függvény létezik minden $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n)$ esetén a fenti (I)-(VII) tulajdonságokkal.
(B) Az I: $\mathcal{F}(U, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{Z}$ függvényt egyértelműen meghatározzák az (I)-(III) tulajdonságok.

BIZONYÍTÁS: Az I függvény létezését már bebizonyítottuk. Az egyértelműséghez pedig elégséges a fokszám függvény egyértelműsége, mivel minden egyes $\hat{I}$ fixpont index függvény (vagyis azon függvények, melyek kielégítik (1)-(7)-et) meghatároz egy $D_{\hat{I}}$ fokszámot a $D_{\hat{I}}(f, U) = \hat{I}(id - f, U)$ formula szerint; vagyis ez következik a 2.7.3. tételből, mely szerint a normalizáció, az additivitás és a homotópia egyértelműen meghatározzák a fix pont index függvényt $\mathbb{R}^n$-ben.

□

3.2. Az Index axiómái

3.2.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{C}$ a topológikus terek és folytonos függvények halmaza, valamint legyen:*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{C}) \subset \{f \in \mathcal{F}(U, X) | X \in \mathcal{C}, U \ \textit{nyílt}\ X - ben\}$$

a kompaktan fix leképezések megkülönböztetett halmaza. Az $\mathcal{F}$-en értelmezett fixpont index egy egész értékű $f \mapsto I(f, U)$ hozzárendelés, ahol $f : U \to X$ $\mathcal{F}$-beli, és amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. *(Normalizáció)Ha* $f : U \to X$ *az* $u \mapsto u_0$ *konstans leképezés* $\mathcal{F}$*-ben, ahol* $u_0 \in U$*, akkor* $I(f, U) = 1$.

2. *(Additivitás) Minden diszjunkt, nyílt* $V_1, V_2 \subset U$ *halmaz és* $f \in \mathcal{F}$ *leképezés esetén, ha* $Fix(f) \subset V_1 \cup V_2$*, akkor* $I(f, U) = I(f, V_1) + I(f, V_2)$.

3. *(Homotópia) Legyen* $h_t : U \to X$ *egy kompaktan fix homotópia és* $h_t \in \mathcal{F}$ *minden* $t \in I$ *esetén, akkor* $I(h_0, U) = I(h_1, U)$.

4. *(Létezés) Ha* $I(f, U) \neq 0$ *és* $f \in \mathcal{F}$*, akkor* f*-nek létezik* U*-ban fixpontja.*

5. *(Kiválasztás) Ha* $f \in \mathcal{F}$*,* $V \subset U$ *nyílt, és* $Fix(f) \subset V$*, akkor* $f|V \in \mathcal{F}$ *és* $I(f, V) = I(f, U)$.

6. *(Multiplikativitás) Ha az* $f_1 : U_1 \to X_1$ *és* $f_2 : U_2 \to X_2$ *függvények* $\mathcal{F}$*-beliek, akkor a szorzatuk* $f_1 \times f_2 : U_1 \times U_2 \to X_1 \times X_2$ *és* $I(f_1 \times f_2, U_1 \times U_2) = I(f_1, U_1) I(f_2, U_2)$.

7. *(Kommutativitás) Legyenek* $U \subset X$*,* $U' \subset X'$ *nyílt halmazok, és* $f : U \to X'$*,* $g : U' \to X$ *a* $\mathcal{C}$ *halmazhoz tartozó leképezések. Ekkor*

$$gf : V = f^{-1}(U') \to X, \; fg : V' = g^{-1}(U) \to X'.$$

Ha gf *és* fg *is* $\mathcal{F}$*-ben vannak, akkor* $I(gf, V) = I(fg, V')$.

Most pedig terjesszük ki az indexet n-dimenziós normált terekre is, ezt jelöljük E^n-nel. Tegyük fel, hogy $U \subset E^n$ nyílt, valamint $f : U \to E^n$ kompaktan fix, ekkor bármilyen $h : \mathbb{R}^n \to E^n$ lineáris izomorfizmust választva definiáljuk:

$$(*) \; I(f, U) = I(h^{-1} f h, h^{-1}(U)).$$

Mivel az index $\mathbb{R}^n$-ben kommutatív, ezért $I(f, U)$ független a választott izomorfizmustól. Az (I)-(VII)-es tulajdonságok egyenesen következnek az $\mathbb{R}^n$-ben definiáltakból.

Igy jutunk el az index egy általánosabb formájához:

3.2.2. Tétel. *(Fix pont index E^n-ben). Jelölje most $\mathcal{C}$ a véges dimenziós normált terek halmazát, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{C})$ pedig a megfelelő kompaktan fix függvények halmazát. Ekkor a (*)-ban definiált I egész értékű függvény rendelkezik az (I)-(VII)-es tulajdonságokkal, valamint a kommutativitásból következik:*
*(VIII)(*Kontrakció*) Legyen $U \subset E^n$ nyílt, és $f : U \to E^n$ egy kompaktan fix leképezés, és $f(U) \subset L$,ahol L az E^n egy lineáris altere. Jelölje $f_{U \cap L} : U \cap L \to L$ az f kontrakcióját. Ekkor:*

$$I(f, U) = (f_{U \cap L}, U \cap L).$$

Bizonyítás: Legyen $i : L \to E^n$, ekkor a kommutativitásból kapjuk:

$$I(f, U) = I(if, U) = I(fi, i^{-1}(U)) = I(f_{U \cap L}, U \cap L).$$

□

Irodalomjegyzék

[1] Andrej Granas, James Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag New York, Inc. (2003)

[2] John L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand "University Series in Higher Mathematics" (1955)

[3] Laczkovich Miklós, T. Soós Vera, Simonovits Miklós *Analízis I.*, Nemezeti Tankönyvkiadó Zrt., Budapest (2006)

[4] Laczkovich Miklós, T. Soós Vera, *Analízis II.*, Nemezeti Tankönyvkiadó Zrt.,Budapest (2007)

[5] Freud Róbert, *Lineáris Algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest (2001)

[6] Kiss Emil, *Bevezetés az algebrába*, Typotex, Budapest (2007)

[7] Szűcs András, *Topológia*, ELTE egyetemi jegyzet

[8] *Polyhedra, Simplical complex, Simplex*, Wikipedia