Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Mándli Anna

Korlátos fokú gráfok konvergenciája

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Frenkel Péter

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2013

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozok Frenkel Péternek a kedves, türelmes és precíz témavezetésért.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Nagy hálózatokról

Számsorozatok, függénysorozatok, pontsorozatok konvergenciájával régóta foglalkozik a matematika. Ebben a dolgozatban viszont gráfsorozatok konvergenciájáról lesz szó, ami egy egészen új keletű fogalom. Maga a gráfelmélet sem annyira régi tudományterület, csak a múlt század közepén indult igazán fejlődésnek. Az utóbbi évtizedekben talán ez a matematika leggyorsabban fejlődő ága. Mostanában divatos téma a nagy hálózatok kutatása, hiszen nagyon sok a valós életben előforduló struktúra elképzelhető, mint hálózat, ezért a hálózatokkal kapcsolatos matematikai eredmények a tudomány nagyon sok területén hasznosíthatóak.

Az egyik legtöbbet tanulmányozott ilyen hálózat a világháló, ami valószínűleg több, mint egymilliárd összekapcsolt eszközből áll. Szerkezetének megismerése segíthet abban, hogy megállapítsák, milyen kommunikációs protokollokat kell kialakítani, vagy hogy milyen gyorsan fog terjedni egy vírus.

Ennél is nagyobb az emberek közötti szociális hálózat. Kutatása hasznos több tudományterület számára is, például amikor járványok, hírek, találmányok vagy vallások terjedési sebességéről szeretnének megtudni valamit.

A statisztikus fizikában az atomok közti kapcsolatokat, például kristályszerkezeteket vizsgálnak gráfelméleti módszerekkel. Ezenkívül nagyon sokat kutatják újabban a sejtjeink által alkotott hálózat működését.

Az itt említett hálózatok folyamatosan változnak, nőnek. Bár kialakulásukban nagyban szerepet játszik a véletlen is, valamilyen szabályt mégis követnek. Ez lehetett a motiváció, hogy növekvő csúcsszámú gráfsorozatokkal kezdjünk foglalkozni, és definiáljuk ezek konvergenciáját, határértékét. A gráfsorozatok határértékét reprezentáló objektumok bevezetése szintén segíthet a nagyon nagy gráfok megismerésében, megértésében.

A való életben előforduló hálózatokkal az a fő probléma, hogy semmiképp sem tudjuk őket teljes egészében feltérképezni. Egyrészt, mert folyamatosan változnak, másrészt annyira nagyok, hogy reménytelen lenne bármi efféle próbálkozás. Valahogy mégis szeretnénk megállapítani ezeknek a hálózatoknak a különböző paramétereit. Tehetjük ezt például úgy, hogy nyomon követünk bennük lejátszódó folyamatokat, vagy vehetünk mintát belőlük, azaz vizsgálhatunk néhány pont által feszített részgráfokat, vagy mondjuk pontok valamilyen sugarú környezeteit. Ebben a dolgozatban is esik például szó arról, hogy mely gráfparaméterek becsülhetőek ilyenformán, melyek nem, és ehhez is szükség lesz a gráfsorozatok konvergenciájának fogalmára.

A sűrű és a ritka hálózatok elérő viselkedést mutatnak, így a kutatásuk is kettéválik. A konvergencia definíciója is eltér a két esetben. Jelenleg a sűrű gráfok elmélete a teljesebb, sok fogalomnak, tételnek még nincsen megfelelője a ritka esetben. Pedig gyakorlati szempontból a ritkák lennének a fontosabbak, mivel a valós hálózatok is inkább ilyenek. Ebben a szakdolgozatban ritka, azaz korlátos fokú gráfokról esik szó.

1.2. Miről esik szó a dolgozatban?

Először is ismertetetem a korlátos fokú gráfok Benjamini-Schramm konvergenciájának fogalmát, a konvergenciafogalom különböző megközelítéseit, ekvivalens definícióit. Ez később még hasznunkra válik tételek bizonyításakor.

Lesz szó arról, hogy hogyan képzelhetjük el egy konvergens gráfsorozat határértékét. Ezt példákkal is megkísérlem illusztrálni.

Ezek után gráfparaméterekről és ezek tesztelhetőségéről, majd gráfpolinomokról esik szó, a kromatikus polinomról részletesebben.

Végül összefutnak a szálak: Egy gráfpolinomok gyökmomentumainak folytonosságáról szóló tételt és bizonyítását ismertetek.

2. fejezet

Benjamini-Schramm konvergencia

A konvergencia fogalmát korlátos fokú gráfok esetén Itai Benjamini és Oded Schramm vezették be egy 2001-ben írt cikkükben [7]. Ők véletlen felületek háromszögeléseinek kapcsán kezdtek el foglalkozni gráfok konvergenciájával, végül kiderült, hogy a megállapításaik általánosabban a korlátos fokú gráfokra is igazak.

2.1. A Benjamini-Schramm konvergencia definíciója és ekvivalens megfogalmazásai

Egy nagyon nagy méretű gráfról megpróbálhatunk információt szerezni úgy, hogy egy véletlenszerűen választott csúcsának valamilyen sugarú környezetét vizsgáljuk, és megpróbáljuk megbecsülni, hogy a gráf csúcsai közt milyen arányban fordulnak elő olyanok, amiknek ilyen a környezete. Ezek alapján definiálhatjuk úgy egy gráfsorozat konvergenciáját, hogy azt mondjuk, hogy a gráfsorozat konvergens, ha az ilyen arányokból kapott számsorozatok konvergensek.

Vizsgálhatjuk azt is egy nagy gráf esetén, hogy egy bizonyos gráf hányszor fordul elő benne részgráfként (vagy feszített részgráfként). Ha $H(G)$ jelöli a G gráf H-val izomorf részgráfjainak számát, akkor definiálható úgy a konvergencia, hogy a (G_n) gráfsorozat konvergens, ha a $\dfrac{H(G_n)}{|V(G)|}$ hányadosokból álló számsorozatok konvergensek minden összefüggő H-ra.

Ebben a részben ezeket a definíciókat írom le precízen, illetve bizonyítom, hogy ekvivalensek.

Most is, és a dolgozat folyamán mindenhol egyszerű gráfokról lesz szó, ezt nem fogom minden egyes esetben külön közölni.

2.1.1. Definíció. *(G, o) gyökeres gráf, ha G összefüggő, o pedig G egy kijelölt csúcsa (a gyökér).*

2.1.2. Definíció. *A (G, o) és (G', o') gyökeres gráfok izomorfak, ha létezik $G \to G'$ gráfizomorfizmus, ami o-t o'-be viszi.*

2.1.3. Definíció. *Legyen G véges gráf, α gyökeres gráf, $R > 0$ egész. $P(G, \alpha, R)$ annak a valószínűsége, hogy G véletlenszerűen választott pontjának R sugarú környezete izomorf α-val.*

2.1.4. Definíció. *(G_n) gráfsorozat korlátos fokú, ha $\exists\ \Delta$ egész, hogy minden csúcs fokszáma legfeljebb Δ.*

2.1.5. Definíció. *(G_n) korlátos fokú gráfsorozat **Benjamini-Schramm konvergens**, ha $P(G_n, \alpha, R)$ konvergens $\forall \alpha$ gyökeres gráfra és $R > 0$ egészre.*

Azaz nagy n-re és n'-re nem tudjuk megkülönböztetni statisztikailag G_n-t és $G_{n'}$-t véletlenszerűen választott pont körüli fix sugarú minta alapján.

2.1.6. Definíció. *$\varphi : H \to G$ gráfhomomorfizmus, ha olyan $V(H) \to V(G)$ leképezés, amire ha $v_1v_2 \in E(H)$,akkor $\varphi(v_1)\varphi(v_2) \in E(G)$.*

2.1.7. Definíció. *A $\varphi : H \to G$ gráfhomomorfizmus gráfizomorfizmus, ha bijektív (a csúcsokon és az éleken is).*

2.1.8. Definíció. *A $G \to G$ gráfizomorfizmusokat hívjuk gráfautomorfizmusnak.*

2.1.9. Definíció. $\hom(H, G)$ *jelölje a $H \to G$ gráfhomomorfizmusok,*
$\mathrm{inj}(H, G)$ *a $H \to G$ injektív gráfhomomorfizmusok,*
$\mathrm{ind}(H, G)$ *a H G-be feszített részgráfként való beágyazásainak,*
$\mathrm{aut}(G)$ *pedig G gráfautomorfizmusainak a számát.*

2.1.10. Definíció. *$H(G)$ jelölje a G gráf H-val izomorf részgráfjainak a számát.*

2.1.11. Definíció. *$H^*(G)$ jelölje a G gráf H-val izomorf feszített részgráfjainak a számát.*

2.1.12. Megjegyzés. $H(G) = \dfrac{\mathrm{inj}(H,G)}{\mathrm{aut}(H)}$, illetve $H^*(G) = \dfrac{\mathrm{ind}(H,G)}{\mathrm{aut}(H)}$ (G minden H-val izomorf részgráfjához $\mathrm{aut}(H)$ darab $H \to G$ leképezés van, ami H-t pont arra a részgráfra képezi.)

$\mathrm{inj}(F,G)$ megkapható valamilyen $\mathrm{ind}(F',G)$-k lineáris kombinációjaként, és fordítva, $\mathrm{ind}(F,G)$ is megkapható valamilyen $\mathrm{inj}(F',G)$-k lineáris kombinációjaként:

2.1.13. Állítás. $\mathrm{inj}(F,G) = \sum_{F' \supseteq F} \mathrm{ind}(F',G)$, *ahol F'-t élek hozzávevésével kapjuk F-ből.*

2.1.14. Állítás. $\mathrm{ind}(F,G) = \sum_{F' \supseteq F} (-1)^{|E(F')|-|E(F)|} \mathrm{inj}(F',G)$, *ahol F'-t élek hozzávevésével kapjuk F-ből.*

Bizonyítás. A szitaformulából adódik. □

2.1.15. Állítás. *Ha G korlátos fokú gráf (Δ maximális fokszámmal), akkor*

(a) $\dfrac{\mathrm{ind}(F,G)}{|V(G)|}$ kifejezhető $P(G,\alpha,R)$-ek lineáris kombinációjaként, úgy, hogy az együtthatók nem függnek G-től. ($R = |V(F)| - 1$)

(b) Minden $R \geq 0$-hoz létezik $F_1, ...F_m$ véges számú összefüggő egyszerű gráf, hogy a $P(G,\alpha,R)$-ek kifejezhetők $\dfrac{\mathrm{ind}(F_i,G)}{|V(G)|}$-k lineáris kombinációjaként, ahol ez együtthatók nem függnek G-től.

Bizonyítás. (a) Legyen $\mathrm{ind}_{u\to v}(F,G)$ az F-nek G-be feszített részgráfként való olyan beágyazásainak a száma, amik F egy kijelölt u csúcsához G v csúcsát rendelik. Ha v-t G csúcsai közül véletlenszerűen választjuk, akkor $\mathrm{ind}_{u\to v}(F,G)$ várható értéke pont $\dfrac{\mathrm{ind}(F,G)}{|V(G)|}$ lesz. És $\mathrm{ind}_{u\to v}(F,G) = \mathrm{ind}_{u\to v}(F,\alpha)$, ahol α a v pont $|V(F)|-1$ sugarú környezete. És ha a v csúcsot véletlenszerűen választjuk G-ből, akkor $\mathrm{ind}_{u\to v}(F,\alpha)$ várható értéke $P(G,\alpha,R)$ definíciója miatt pont $\sum_{\alpha} P(G,\alpha,|V(F)|-1)\, \mathrm{ind}_{u\to v}(F,\alpha)$. Tehát $\dfrac{\mathrm{ind}(F,G)}{|V(G)|}$ ilyenformán kifejezhető $P(G,\alpha,R)$-k lineáris kombinációjaként.

(b) Legyen $\delta : V(F) \to \{0, 1, ..., \Delta\}$ tetsz?leges függvény. Jelölje $\mathrm{ind}(F,\delta,G)$ az F olyan feszített részgráfként való φ beágyazásait G-be, ahol $\varphi(v)$ foka $\delta(v)$. (Tehát F pontjainak a előírjuk a G-beli fokszámát.) És az $\mathrm{ind}(F,\delta,G)$ számok kifejezhetők valamilyen $\mathrm{ind}(F',G)$-kkel. Mégpedig azokkal, ahol az F'-ket úgy kapjuk, hogy F-et kiegészítjük az olyan egy sugarú környezeteivel, ahol a $v \in F$ csúcs fokszáma $\delta(v)$. Ez véges sok gráfot jelent a fokszámkorlát miatt.

És ha B egy adott R sugarú gyökeres gráf, $P(G, B, R) = \sum_{\delta} \frac{\text{ind}(B, \delta, G)}{|V(G)| \text{aut}(B)}$, ahol δ azokon a hozzárendeléseken fut végig, amik B a gyökértől legfeljebb $R-1$ távolságban levő pontjaihoz a B-beli fokszámot rendelik, az R távolságban levőkhöz meg valami önkényes számot $\{0, 1, ..., \Delta\}$-ből, mert $\frac{\text{ind}(B, \delta, G)}{\text{aut}(B)}$ pont azoknak a csúcsoknak a száma, amiknek az R sugarú környezete B-vel izomorf. □

Ezek alapján adódnak a Benjamini-Schramm konvergenciára az alábbi ekvivalens definíciók:

2.1.16. Állítás. *Legyen (G_n) korlátos fokú gráfsorozat. Ekkor (G_n) akkor és csak akkor Benjamini-Schramm konvergens, ha minden (véges, nem üres) összefüggő H-ra a $\frac{H^*(G_n)}{|V(G_n)|}$ sorozat konvergens.*

Bizonyítás. Az előző állításból következik:

Ha a gráfsorozat konvergens, a $P(G_n, \alpha, R)$ sorozatok konvergensek. Mivel $H^*(G_n) = \frac{\text{ind}(H, G_n)}{\text{aut}(H)}$, és $\text{ind}(H, G_n)$ felírható valamilyen $P(G_n, \alpha, R)$-k lineáris kombinációjaként, $\frac{H^*(G_n)}{|V(G_n)|}$ is konvergens lesz.

Másik irányban, ha az $\frac{H^*(G_n)}{|V(G_n)|}$-ek konvergensek minden összefüggő H-ra, akkor az $\text{ind}(H, G_n)$-ek is azok, és a $P(G_n, \alpha, R)$-ek is, mivel előállnak ezek lineáris kombinációiként. □

2.1.17. Állítás. *Legyen (G_n) korlátos fokú gráfsorozat. Ekkor (G_n) akkor és csak akkor Benjamini-Schramm konvergens, ha minden (véges, nem üres) összefüggő H-ra a $\frac{H(G_n)}{|V(G_n)|}$ sorozat konvergens.*

Bizonyítás. Az előző állításból adódik, és abból, hogy $H(G_n) = \frac{\text{inj}(H, G_n)}{\text{aut}(H)}$, és az $\text{inj}(H, G_n)$-k felírhatók valamilyen $\text{ind}(H'_n, G)$-k lineáris kombinációjaként, és viszont. □

Ezek alapján úgy tűnik, hogy egy gráfsorozat határértéke nem egy konkrét gráf lesz, hanem egy valószínűségi eloszlás a legfeljebb Δ fokszámú gyökeres gráfokon.

2.2. Konvergens gráfsorozatok határértéke

Benjamini és Schramm cikkükben másképp vezették be a konvergencia fogalmát [7], mint ahogy az előző fejezetben szerepel. Az ő megközelítésükkel jobban látszik, hogy mi lesz egy gráfsorozat határértéke, ezért ismertetjük ezt a definíciót is:

Legyen $\mathcal{X}$ az összefüggő gyökeres gráfok izomorfizmusosztályainak a tere. Ezen definiálhatunk egy metrikát a következőképpen: Jelölje $B_G(o,r)$ a (G,o) gyökeres gráfban az o gyökér r sugarú környezetét. Tekintsük (G,o),$(G',o') \in \mathcal{X}$ gyökeres gráfokat. Legyen k azon r-eknek a szuprémuma, amelyekre a $(B_G(o,r),o)$ és a $(B_{G'}(o',r),o')$ gyökeres gráfok izomorfak. Ekkor legyen $d((G,o),(G',o')) = 2^{-k}$. (Vegyük úgy, hogy $2^{-\infty} = 0$.)

Ez a d tényleg metrika:

Triviálisan teljesül, hogy $d((G,o),(G',o')) = 0$ pontosan akkor, ha G és G' izomorfak; illetve hogy $d((G,o),(G',o')) = d((G',o'),(G,o))$.

A háromszög-egyenlőtlenség is teljesül: Legyen $d((G,o),(G'',o'')) = 2^{-k}$, $d((G,o),(G',o')) = 2^{-l}$, és $d((G',o'),(G'',o'')) = 2^{-m}$. Tegyük fel, hogy $l \leq m$. Ekkor teljesül, hogy $(B_G(o,l),o)$ és a $(B_{G''}(o'',l),o'')$ gyökeres gráfok izomorfak. Emiatt $k \geq l$, tehát $d((G,o),(G'',o'')) = 2^{-k} \leq 2^{-l} \leq 2^{-l}+2^{-m} = d((G,o),(G',o'))+d((G',o'),(G'',o''))$.

Legyen $\Delta < \infty$ egész. Ekkor $\mathcal{X}_\Delta$ jelölje azon $\mathcal{X}$-beli korlátos fokú gráfok halmazát, amikben a csúcsok fokszáma legfeljebb Δ. Igazolható, hogy $\mathcal{X}_\Delta$ kompakt tér eszerint a topológia szerint. Ezt azért hasznos tudni, mert ekkor minden $\mathcal{X}_\Delta$-beli sorozatnak lesz konvergens részsorozata, és ezt sokhelyütt fel lehet használni.

Így már értelmezhetünk konvergenciát a gyökeres gráfokon. Ezt szeretnénk általánosítani összefüggő, egyszerű gráfokra. Legyen H ilyen. Válasszunk egy csúcsot H csúcsai közül egyenlő valószínűséggel, mint gyökeret. Így a H gráf megfeleltethető egy μ_H valószínűségi eloszlásnak $\mathcal{X}$-n. Egy $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ Borel-részhalmazra $\mu_H(\mathcal{A})$ annak a valószínűsége, hogy ha H-ban véletlenszerűen választunk egy o csúcsot, akkor $(H,o) \in \mathcal{A}$.

Ezek alapján adhatunk egy, az előző fejezetben szereplővel ekvivalens definíciót a Benjamini-Schramm konvergenciára:

2.2.1. Definíció. *Egy (G_n) korlátos fokú, összefüggő gráfokból álló gráfsorozat Benjamini-Schramm konvergens, ha a (fenti módon definiált) μ_{G_n} mértékek gyengén konvergálnak. A gráfsorozat határértéke a $\lim(\mu_{G_n})$ mérték által meghatározott véletlen gyökeres gráf lesz.*

2.2.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a μ_n mértéksorozat gyengén konvergál a μ mértékhez, ha minden f folytonos, korlátos függvényre $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$, ha $n \to \infty$.*

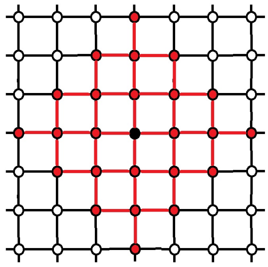
Ez alapján jobban látszik, hogy mi lesz egy-egy gráfsorozat határértéke.

2.2.3. Definíció. *Egy G gráf csúcstranzitív, ha minden $v_1, v_2 \in V(G)$-hez létezik f gráfautomorfizmus, amire $f(v_1) = v_2$.*

Egyszerű esetben a korlátos fokú gráfsorozat határértéke egy csúcstranzitív gráfra koncentrált Dirac-mérték. Erre látunk itt pár példát:

2.2.4. Példa. (Körök) Legyen C_n az n hosszú kör. (C_n) határértéke a mindkét irányban végtelen út lesz. (Aminek mindegy, melyik pontja a gyökér.)

2.2.5. Példa. (Négyzetrácsok) Legyen (G_n) az $n \times n$-es négyzetrácsokból álló gráfsorozat. Ekkor a rács szélétől $R-1$-nél távolabb levő csúcsok R sugarú környezete ugyanolyan lesz. (Az ábrán a fekete csúcs 3 sugarú környezete van kiszínezve.) Az összesen n^2 darab pontból $(n-2R)^2$-nek ilyen a környezete, tehát ha $n \to \infty$, akkor majdnem minden pont környezete ilyen. A határérték tehát a végtelen négyzetrács, bárhol kijelölt gyökérrel.



2.2.6. Példa. (Nagy derékbőségű gráfok) Legyen (G_n) D-reguláris gráfsorozat, ahol a gráfok derékbősége (azaz a gráfban található legrövidebb kör hossza) végtelenhez tart. (Tudjuk, hogy létezik ilyen gráfsorozat.) Minden $R > 0$-ra és elég nagy n-re (G_n) bármely pontjának az R sugarú környezete az R mélységű gyökeres fával lesz izomorf, amiben a gyökérhez R-nél közelebbi csúcsok fokszáma D. A sorozat határértéke a D-reguláris végtelen fa. (Amiben szintén nem számít, hogy hol a gyökér.)

Felmerülhet a kérdés, hogy milyen gráfok állhatnak elő határértékként. A csúcstranzitív gráfok például előállhatnak, de a téma bővebb tárgyalásába nem megyek bele.

2.2.7. Definíció. *F legyen G részgráfja. ∂F az F azon v csúcsainak halmaza, amikhez létezik $u \in V(G)$, $u \notin V(F)$, hogy $uv \in E(G)$.*

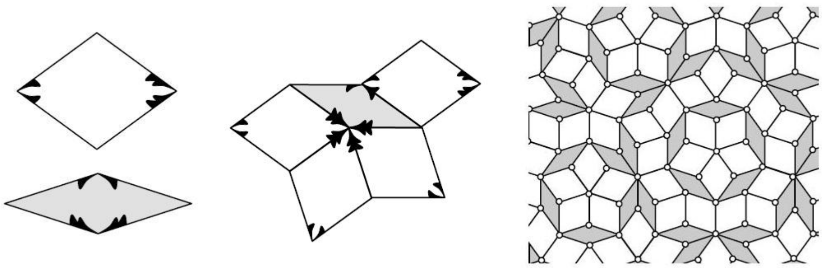
2.2.8. Definíció. *G gráf F_n részgráfsorozatát Følner-sorozatnak hívjuk, ha* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|\partial F_n|}{|V(F_n)|} = 0$

2.2.9. Állítás. *Minden összefüggő, korlátos fokú, csúcstranzitív gráf a Følner sorozatainak a Benjamini-Schramm határértéke.*

Bizonyítás. Mivel a gráf csúcstranzitív, minden csúcs R sugarú környezete izomorf egymással. Az F_n Følner-sorozatban is ilyen minden ∂F-től $R-1$-nél távolabbi csúcs R sugarú környezete. A Følner-sorozat tulajdonságai miatt a más környezetű pontok száma tart nullához, ha $n \to \infty$. □

Lássunk egy olyan példát is, amikor nem egy gráf a határérték:

2.2.10. Példa. (Penrose-csempézések) Az ábrán látható két rombusszal (a kövérebb szögei 108 és 72 fok, a soványéi 144 és 36) kell lefedni a síkot úgy, hogy az oldalakon levő jeleknek megfelelően kell illeszkedniük (ld. ábra).



2.1. ábra. A kétféle csempe, összeillesztési szabályuk, és egy lehetséges csempézés. Forrás:[3]

Így kontinuum sokféleképpen lefedhető a sík, és csupa nem periodikus csempézést kapunk. A Penrose csempézésekre tekinthetünk gráfként is.

Érdekes tény, hogy az összes ilyen csempézésben azonos gyakorisággal fordul elő mindkét rombusz. Sőt ez igaz véges sok rombusz összeillesztésére is: ha egy F véges összeillesztés kiegészíthető a sík fedésévé, akkor minden Penrose-csempézésben azonos gyakorisággal fordul elő. Szóval ha nézzük az origó körüli $K \times K$-s négyzetet, és megszámoljuk, F hányszor fordul elő benne, akkor ez a szám osztva K^2-tel konvergens lesz, ha $K \to \infty$, és minden Penrose-csempézésre ugyanaz lesz a határérték.

Legyen (G_n) az a gráfsorozat, amit egy Penrose-csempézés az origó körüli $n \times n$-es négyzetre vett megszorításaiból kapunk. A fenti tulajdonság miatt ez a gráfsorozat konvergens, és akkor is az marad, ha összefésüljük egy másik csempézésből hasonlóan kapott sorozattal. A határérték tehát nem az eredeti csempézés lesz, hanem egy valószínűségi eloszlás az összes csempézésen.

2.3. Graphing

A határérték leírásának másik módja az úgynevezett "graphing". Ez tulajdonképpen egy korlátos fokú gráf egy végtelen (tipikusan megszámlálhatatlan) halmazon. Graphingokról, mint gráfsorozat határértékét reprezentáló objektumokról először Aldous és Lyons, illetve Elek Gábor írt [6].

A graphingokat amúgy a csoportelméletben vezették be előbb. Érdekes tény, hogy ezek az objektumok végesen generált csoportok, és korlátos fokú gráfsorozatok határértékének ábrázolására is alkalmasak.

Ezeknek a graphingoknak nem precíz ismertetetésére teszek kísérletet ebben a részben:

Legyen X mérhető tér, egy μ valószínűségi mértékkel. Legyenek $A_1, A_2, ...A_k$ X mérhető részhalmazai. Legyen $T_i : A_i \to A_i$. Ha $T_1, T_2, ..., T_k$ mérhető leképezések, amik mértéktartóak, és involúciók (tehát önmaguk az inverzük), akkor a $\mathcal{G} = \{X, T_1, ..., T_k, \mu\}$ halmazt mérhető graphingnak hívjuk.

$\mathcal{G}$ meghatároz egy ekvivalenciarelációt X-en. $x, y \in X$ ekvivalensek, ha léteznek $\{x_1, ..., x_m\} \subset X$ pontok úgy, hogy $x_1 = x, x_m = y$, és $x_{i+1} = T_j(x_i)$ valamilyen $1 \le j \le k$-ra, minden $i = 1..m$-re.

Ha $\mathcal{G}$-re mint gráfra tekintünk, ezek az ekvivalenciaosztályok lesznek a gráf összefüggő komponensei. x és y szomszédos csúcsok, ha $T_j(x) = y$ valamilyen $1 \le j \le k$-ra.

Legyen α gyökeres gráf, $R > 0$ egész. Ekkor $P(\mathcal{G}, \alpha, R)$ jelentse azon $x \in X$ pontok μ mértékét, amiknek az R sugarú környezete α-val izomorf.

Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{G}$ graphing a (G_n) korlátos fokú konvergens gráfsorozat határértéke, ha minden α gyökeres gráfra és $R > 0$ egészre $\lim_{n\to\infty} P(G_n, \alpha, R) = P(\mathcal{G}, \alpha, R)$.

$\mathcal{G} = \{X, T_1, T_2, ..., \mu\}$ -t topologikus graphingnak hívjuk, ha X kompakt metrikus tér a μ Borel-mértékkel, és $T_1, T_2..., T_k$ folytonos, mértéktartó involúciók. Elek Gábor egy cikkében [6] mondja ki a következő tételt:

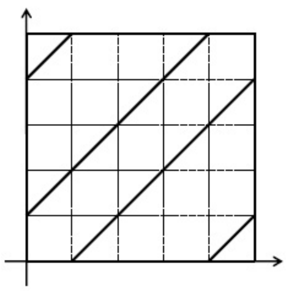
2.3.1. Tétel. *Minden (G_n) Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozathoz létezik olyan $\mathcal{G}$ topologikus graphing, hogy minden α gyökeres gráfra és $R > 0$ egészre $\lim_{n\to\infty} P(G_n, \alpha, R) = P(\mathcal{G}, \alpha, R)$.*

Minden Benjamini-Schramm konvergens sorozat határértéke reprezentálható tehát graphinggal, egy sorozat határértékét azonban több graphing is reprezentálhatja, erre lesz alább példa is.

2.3.2. Példa. Tekintsük a $[0, 1]$ intervallumot. Legyen $0 \le a \le \frac{1}{2}$ valós szám. Konstruáljuk meg a C_a gráfot a következőképpen:

Kösse össze él az x és y pontot, ha $|x - y| = a \pmod 1$. Úgy is vehetjük, hogy a $[0, 1)$ intervallum két végét összeregasztjuk, és minden x pontot összekötünk $x + a$-val és $x - a$-val.

Ha a racionális szám, akkor C_a végtelen sok véges hosszú kör uniója. Az $a = \frac{1}{5}$ esetén kapott gráfot az alábbi ábrával szemléltethetjük. Mindkét koordinátatengelyen felvesszük a $[0, 1]$ intervallumot, és egy (x, y) koordinátájú pont be van színezve, ha x és y szomszédos csúcsai a gráfnak.



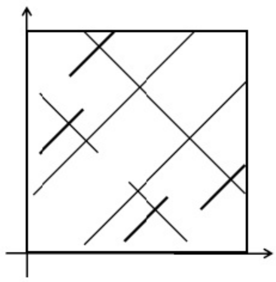
2.2. ábra. A C_a graphing $a = \frac{1}{5}$ esetén. Forrás:[6]

Ha viszont a irracionális, akkor a C_a gráf összefüggő komponensei mindkét irányban végtelen utak. A gráfra graphingként tekinthetünk, ha ellátjuk $[0, 1]$-et a μ Lebesgue-mértékkel. A graphing megadható három involúció segítségével: Az egyik párosítsa össze x-et $x + a$-val (azaz rendelje x-hez $x + a$-t, és $x + a$-hoz x-et), ha $0 < x \le 1 - a$ és $x \in (2ka, (2k + 1)a]$ valamilyen $k \in \mathbb{N}$-re. A másik párosítsa össze x-et $x + a$-val, ha $0 < x \le 1 - a$ és $x \in ((2k + 1)a, (2k + 2)a]$ valamilyen $k \in \mathbb{N}$-re. A harmadik pedig párosítsa össze x-et $x + a - 1$-gyel, ha $1 - a < x \le 1$.

Bármilyen a irracionális számot veszünk, a graphing reprezentálni fogja a (C_n) n hosszú körökből álló konvergens gráfsorozat határértékét.

Belátható, hogy két involúció segítségével nem adható meg olyan graphing, ami a C_a gráfnak felel meg. Mert indirekt tegyük fel, hogy φ_1 és φ_2 definiálja C_a-t. Minden $x \in [0,1]$ pont $x+a \pmod 1$-gyel és $x-a \pmod 1$-gyel van összepárosítva. Legyen A_1 azon pontok halmaza, amikhez φ_1 rendeli $x+a \pmod 1$-et, és φ_2 rendeli $x-a \pmod 1$-et. A_2 legyen a többi pont, amiknél ez fordítva van. Ekkor $A_1 \cup A_2 = [0,1]$, és $A_1 + a = A_2$, mert ha $x \in A_1$, akkor $\varphi(x) = x + a$, és mivel involúciókról van szó, $\varphi_1(x+a) = x = (x+a) - a$, emiatt $x + a \in A_2$. És be lehet bizonyítani, hogy ilyen tulajdonságú A_1 és A_2 halmazok nem létezhetnek.

2.3.3. Megjegyzés. Minden az alább láthatóhoz hasonló ábrával definiálható egy graphing: ami véges sok ± 1 meredekségű szakasz uniója, és az $x = y$ egyenesre szimmetrikus. A szimmetria a graphingot definiáló függvények involutív tulajdonsága miatt szükséges, a ± 1-es meredekség felel meg annak, hogy a graphingot definiáló involúciók mértéktartóak.



2.3. ábra. Minden ilyen ábra definiál egy graphingot. Forrás:[6]

3. fejezet

Gráfparaméterek

Képzeljük el, hogy van egy nagyon nagy gráfunk, amit semmiképp sem vagyunk képesek teljes egészében megismerni, csak mintát tudunk venni belőle (azaz nézzük néhány kiválasztott pont környezetét például). Ennek a gráfnak szeretnénk valamelyik paraméterét megállapítani. Pontosan persze biztos nem tudjuk meghatározni, legfeljebb remélhetjük, hogy elegendő nagy mintát tekintve jó becslést tudunk adni rá. Nagyjából ekkor mondjuk, hogy egy gráfparaméter tesztelhető.

A fejezetben megemlítek néhány népszerű gráfparamétert, és egy-két gráfparaméterek tesztelhetőségéről szóló tételt.

3.0.4. Definíció. *Egya gráfparaméter a gráfok izomorfizmusosztályain értelmezett (általában valós értékű) függvény.*

3.0.5. Definíció. *Az f gráfparaméter*

- *additív, ha $f(G) = f(G_1) + f(G_2)$,*
- *multiplikatív, ha $f(G) = f(G_1)f(G_2)$,*
- *maxing, ha $f(G) = max\{f(G_1), f(G_2)\}$,*

valahányszor a G gráf G_1 és G_2 diszjunkt uniója.

3.0.6. Példa. $\alpha(G)$ a maximális független csúcshalmaz mérete. (additív)

3.0.7. Példa. $\nu(G)$ a maximális független élhalmaz mérete. (additív)

3.0.8. Példa. $pm(G)$ a teljes párosítások száma G-ben. (multiplikatív)

3.0.9. Példa. $\tau(G)$ a feszítőfák száma G-ben. (multiplikatív)

3.0.10. Példa. $ch(G, q)$ G a q-színezéseinek száma. (multiplikatív)

3.0.11. Példa. $\chi(G)$ a kromatikus szám (maxing)

3.0.12. Definíció. *Az f gráfparaméter tesztelhető (vagy lokális), ha minden Benjamini-Schramm konvergens (G_n) gráfsorozatra az $f(G_n)$ sorozat is konvergens.*

Példák:

3.0.13. Állítás. $\frac{|E(G)|}{|V(G)|}$ *tesztelhető.*

Bizonyítás. $E(G)$ ugyanis éppen a csak egy élből álló gráffal izomorf részgráfok száma, tehát a 2.1.17-esből következik ez az állítás. □

3.0.14. Tétel. (Elek-Lippner, Nguyen-Onak) $\frac{\nu(G)}{|V(G)|}$ *tesztelhető.*

3.0.15. Állítás. $\frac{\alpha(G)}{|V(G)|}$ *nem tesztelhető.*

3.0.16. Tétel. (Lyons) $\frac{\log \tau(G_n)}{|V(G_n)|}$ *konvergens, ha (G_n) összefüggő gráfokból álló Benjamini-Schramm konvergens sorozat.*

3.0.17. Megjegyzés. Az előbbi állítás feszítő erdőkre megoldatlan.

3.0.18. Tétel. (Borgs-Chayes-Kahn-Lovász) $\frac{\log ch(G, q)}{|V(G)|}$ *tesztelhető, ha $q > 2\Delta$ egész (Δ a gráf csúcsainak maximális fokszáma).*

3.0.19. Állítás. $\frac{c(G)}{|V(G)|}$ *tesztelhető, ahol $c(G)$ a gráf összefüggő komponenseinek a száma.*

Bizonyítás. Legyenek a G gráf összefüggő komponensei $H_1, H_2, ...$

$$\frac{c(G)}{|V(G)|} = \sum_{i=1}^{c(G)} \frac{1}{|V(G)|} = \sum_{i=1}^{c(G)} \frac{|V(H_i)|}{|V(G)|} \frac{1}{|V(H_i)|} = \sum_{k=1}^{|V(G)|} \frac{1}{k} \sum_{i:|V(H_i)|=k} \frac{|V(H_i)|}{|V(G)|}$$

És ha elég nagy R-re nézzük,

$$\sum_{\alpha:|V(\alpha)|=k} P(G, \alpha, R) = \sum_{i:|V(H_i)|=k} \frac{|V(H_i)|}{|V(G)|}$$

. Az $R = k$ választás jó lesz, mert ekkor azt nézzük, hogy a csúcsok hányadának a k sugarú környezete k méretű, azaz a csúcsok hányad része van k méretű komponensben.

Tehát a

$$\frac{c(G_n)}{|V(G_n)|} = \sum_{k=1}^{|V(G_n)|} \frac{1}{k} \sum_{\alpha:|V(\alpha)|=k} P(G_n, \alpha, k)$$

sorozat konvergenciáját kell vizsgálnunk.

Legyen G_n Benjamini-Schramm-konvergens korlátos fokú gráfsorozat. Ekkor a $P(G_n, \alpha, R)$ sorozatok is konvergensek minden α gyökeres gráfra és $R > 0$ egészre. Tehát ha az összeget csak rögzített K-ig nézzük, a $\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k} \sum_{\alpha:|V(\alpha)|=k} P(G_n, \alpha, k)$ sorozatok is konvergensek lesznek.

Ráadásul $\sum_{k=1}^{|V(G_n)|} \frac{1}{k} \sum_{\alpha:|V(\alpha)|=k} P(G_n, \alpha, k) - \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k} \sum_{\alpha:|V(\alpha)|=k} P(G_n, \alpha, k) =$
$= \sum_{k=K+1}^{|V(G_n)|} \frac{1}{k} \sum_{\alpha:|V(\alpha)|=k} P(G_n, \alpha, k) \leq \frac{1}{K+1}$, mert legrosszabb esetben az összes csúcs $K+1$ méretű komponensben van, és ekkor $\frac{c(G_n)}{|V(G_n)|} = \frac{1}{K+1}$. Tehát az eredeti sorozat is konvergens, mert konvergens sorozatok egyenletes limesze is konvergens. $\square$

4. fejezet

Gráfpolinomok

4.0.20. Definíció. *A gráfpolinom egy hozzárendelés, ami minden véges G gráfhoz hozzárendel egy $f(G,x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomot.*

4.0.21. Definíció. *Egy gráfpolinom normált, ha $f(G,x)$ normált és n-ed fokú minden G gráfra.* $(n = |V(G)|)$

4.0.22. Definíció. *f izomorfizmus invariáns, ha G_1, G_2 izomorf gráfokra $f(G_1,x) = f(G_2,x)$.*

4.0.23. Definíció. *Az f gráfpolinom exponenciális típusú, ha $f(\emptyset,x) = 1$, és minden G gráfra*
$\sum\limits_{S \subseteq V(G)} f(S,x)f(G-S,y) = f(G,x+y)$, ahol $f(S,x)$ az S, $f(G-S,y)$ a $V(G) \setminus S$ csúcshalmaz által feszített részgráf kromatikus polinomja.

4.0.24. Definíció. *f multiplikatív, ha $f(G,x) = f(G_1,x)f(G_2,x)$ teljesül, valahányszor G a G_1 és G_2 gráfok diszjunkt uniója.*

4.1. Néhány gráfpolinom

4.1.1. Példa. (Kromatikus polinom) $ch(G,q)$ a G gráf q színnel történő jó színezéseinek a száma.

4.1.2. Példa. (Tutte-polinom)

$$T_G(x,y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{c(A)-c(E)}(y-1)^{c(A)+|A|-|V|}$$

, ahol $c(A)$ a (V,A) gráf komponenseinek száma.

Néhány speciális pontban felvett értékei a gráf különböző paramétereit adják meg:

- $T_G(2,1)$ a G-beli erdők száma
- $T_G(1,1)$ a G feszítő erdőinek száma
- $T_G(1,2)$ a G feszítő részgráfjainak száma
- $T_G(2,0)$ a G aciklikus irányításainak száma

Statisztikus fizikában gyakran az alábbi formát használják:

$$Z_G(q,v) = \sum_{A \subseteq E} q^{c(A)} v^{|A|}$$

A két forma lényegében ekvivalens:

$$T(G,x,y) = (x-1)^{-c(E)}(y-1)^{-|V|} Z_G((x-1)(y-1), y-1)$$

Ezt a polinomot Tutte vezette be, dikromatikus polinom néven, mint a kromatikus polinom általánosítását. Eredetileg színezésekkel és folyamokkal kapcsolatos problémák kapcsán tanulmányozták. De speciális esetei előkerülnek csomóelméletben és statisztikus fizikában is.

4.1.3. Megjegyzés. $ch(G,x) = Z_G(x,-1)$

4.1.4. Példa. ((Módosított) párosítási polinom)

$$M(G,x) = x^n - m_1(G)x^{n-1} + m_2(G)x^{n-2} - ...$$

, ahol $m_k(G)$ a k méretű párosítások száma G-ben.

4.1.5. Példa. (Függetlenségi polinom)

$$I(G,x) = \sum_{k=0} (-1)^k i_k(G) x^k$$

, ahol $i_k(G)$ az, ahányféleképpen ki lehet választani a G gráf k darab független csúcsát.

4.1.6. Példa. (A Laplace-mátrix karakterisztikus polinomja) A G gráf Laplace-mátrixa $L(G) = D(G) - A(G)$, ahol $A(G)$ az adjacenciamátrix, amelyben $A(G)_{ij} = 1$, ha $v_i v_j \in E(G)$, a többi elem 0, $D(G)$ pedig az a diagonális mátrix, melyre $D(G)_{ii} = d_i$, ami a v_i csúcs foka. $L(G,x) = det(xI - L(G))$

4.2. A kromatikus polinom és tulajdonságai

A kromatikus polinom fogalmát síkgráfokra Birkhoff vezette be 1912-ben, mert ennek a segítségével akarta bizonyítani a négyszín-tételt. (Azt akarta megmutatni algebrai módszerekkel, hogy $ch(G,4) > 0$ minden síkgráfra.)

1932-ben általánosította Hassler Whitney a polinomot nem csak síkgráfokra. 1968-ban Read felvetette a kérdést, hogy melyik polinomok álhatnak elő kromatikus polinomként. A kérdés ma is nyitott.

4.2.1. Definíció. *Egy $f : V(G) \to \{1, 2, ..., q\}$ hozzárendelés G jó színezése, ha $\forall\ uv \in E(G)$-re $f(u) \neq f(v)$.*

4.2.2. Definíció. *Jelölje $ch(G,q)$ a G gráf q színnel történő jó színezéseinek a számát.*

4.2.3. Állítás. *Ez tényleg q polinomja: $ch(G,q) = \sum\limits_P q(q-1)...(q-|P|+1)$ Ahol P a $V(G)$ független nem üres csúcshalmazokra történő felosztásain fut végig.*

Bizonyítás. G minden jó színezésében a színosztályok a $V(G)$ független csúcshalmazokra történő felosztását adják. És egy ilyen P felosztást $q(q-1)...(q-|P|+1)$ féleképpen színezhetünk ki q színnel. (Az első színosztálynak választhatunk q féle színt, a következőnek $q-1$ félét, stb.) $\square$

4.2.4. Megjegyzés. A kromatikus polinom normált, mivel n-ed fokú tag csak az egyelemű csúcshalmazokra történő felosztáskor keletkezhet.

4.2.5. Állítás. $ch(G,q) = \sum\limits_{T \subseteq E(G)} (-1)^{|T|} q^{c(T)}$, *ahol $c(T)$ a T összefüggő komponenseinek a száma.*

Bizonyítás. $q^{c(T)}$ azon színezések száma, ahol a T beli komponenseken ugyanolyan színűek a csúcsok. (Ezek rossz színezések.) Innen szitaformulával adódik az állítás. $\square$

4.2.6. Állítás. $ch(G,q) = ch(G-e,q) - ch(G/e,q)$, *ahol $G-e$ a G-ből az e él kihagyásával, G/e az e összehúzásával (végeinek összeragasztásával és az él törlésével) kapott gráf.*

Bizonyítás. Átrendezve: $ch(G/e,q) = ch(G-e,q) - ch(G,q)$. Ha $G-e$ jó színezései közül kihagyjuk azokat, amik G-nek is jó színezései lennének, azok maradnak, amikben e

két vége ugyanolyan színű. Ezek pedig pont megfeleltethetők G/e jó színezéseinek, úgy, hogy az e él két végpontját összeragasztjuk. $\square$

Ez az állítás hasznunkra lesz különböző gráftípusok kromatikus polinomjának a meghatározásakor:

4.2.7. Példa. (Üres gráf) $ch(G_n, q) = q^n$

4.2.8. Példa. (Teljes gráf) $ch(K_n, q) = q(q-1)...(q-n+1)$, mivel minden csúcsát más színűre kell színezni.

4.2.9. Példa. (Fa,út) $ch(F, q) = q(q-1)^{n-1}$. Teljes indukcióval: Egy pontra igaz az állítás. Tegyük fel, hogy egy $n-1$ pontú fát $q(q-1)^{n-2}$ féleképpen színezhetünk ki q színnel. Ha hozzáveszünk még egy csúcsot, az mindenféle színű lehet, kivéve amilyen színű a szomszédja. Tehát az n csúcsú fát $ch(F, q) = q(q-1)^{n-1}$ féleképpen színezhetjük ki. (Az út is fa, ugyanez a kromatikus polinomja.)

4.2.10. Példa. (Kör) Teljes indukcióval: $C_3 = K_3$-ra tudjuk, hogy $ch(K_3, q) = q(q-1)(q-2) = (q-1)^3 - (q-1)$. Tegyük fel, hogy $n-1$ pontú körre igaz az állítás. Ekkor: $ch(C_n - e, q) = q(q-1)^{n-1}$, mert ez egy út, és $ch(C_n/e, q) = (-1)^{n-1}(q-1) + (q-1)^{n-1}$, mert ez meg az $n-1$ pontú kör. Tehát: $ch(C_n, q) = ch(C_n - e, q) - ch(C_n/e, q) = q(q-1)^{n-1} - ((-1)^{n-1}(q-1) + (q-1)^{n-1}) = (-1)^n(q-1) + (q-1)^n$

4.2.11. Állítás. *A kromatikus polinom exponenciális típusú.*

Bizonyítás. Kell: $\sum\limits_{S \subseteq V(G)} ch(S, x) ch(G - S, y) = ch(G, x + y)$, ami $x, y \in \mathbb{N}$-re igaz, mert G $x + y$ színnel történő jó színezései megkaphatók úgy, hogy minden lehetséges módon kiválasztjuk $V(G)$-ből az S részhalmazt, és az S által feszített részgráfot x, a $G - S$ által feszítettet pedig y színnel színezzük. És abból, hogy a két polinom pozitív egész helyeken felvett értékei megegyeznek pedig következik, hogy polinomként is egyenlő a két oldal. $\square$

4.2.1. A kromatikus polinom gyökei és együtthatói

Legyen ezentúl

$$ch(G, x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - ... + (-1)^{n-1}a_1 x$$

.

4.2.12. Állítás. *Ha G összefüggő, akkor $a_i > 0$ $i = 1..n-1$-re, és G kromatikus polinomjának a konstans tagja 0.*

Bizonyítás. Az élek száma szerinti teljes indukcióval. Az n csúcsú fára teljesül az állítás:

$$ch(F,x) = x(x-1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-k}(-1)^k$$

Legyen G összefüggő, és tegyük fel, hogy a nála kevesebb élű összefüggő gráfokra teljesül az állítás. Ha G nem fa, törölhetünk belőle élet úgy, hogy összefüggő marad.

Legyen

$$ch(G-e,x) = x^n - a'_{n-1}x^{n-1} + a'_{n-2}x^{n-2} - ... + (-1)^{n-1}a'_1 x$$

és

$$ch(G/e,x) = x^{n-1} - a''_{n-2}x^{n-2} + a''_{n-3}x^{n-3} - ... + (-1)^{n-2}a''_1 x$$

, ahol $a'_i > 0$ $i = 1..n-1$-re, és $a''_i > 0$ $i = 1..n-2$-re.

$ch(G,x) = ch(G-e,x) - ch(G/e,x) = x^n - (a'_{n-1}+1)x^{n-1} + (a'_{n-2}+a''_{n-2})x^{n-2} - ... + (-1)^{n-1}(a'_1 + a''_1)x$, az állítás erre is teljesül, a konstans tag továbbra is 0, és $(a'_{n-1}+1)$ illetve $(a'_i + a''_i)$ $i = 1..n-2$-re pozitív. □

4.2.13. Megjegyzés. Emiatt ha G összefüggő, akkor $ch(G,x)$-nek pontosan egyszeres gyöke a 0.

4.2.14. Állítás. *$ch(G,x)$-ben x^{n-1} együtthatója $-|E(G)|$. ($a_{n-1} = |E(G)|$)*

Bizonyítás. Az élek száma szerinti teljes indukcióval. Az n pontú üres gráfra igaz az állítás. Tfh. G-nél kisebb élszámú gráfokra igaz az állítás. $ch(G-e,x)$ -ben x^{n-1} együtthatója $-(|E(G)|-1)$, mivel eggyel kevesebb éle van, mint G-nek, $ch(G/e,x)$-ban pedig 1 x^{n-1} együtthatója, mert ez egy $n-1$ pontú gráf. $ch(G,x) = ch(G-e,x) - ch(G/e,x)$ miatt $ch(G,x)$-ban x^{n-1} együtthatója pont $-|E(G)|$ lesz. □

4.2.15. Állítás. *Ha G összefüggő komponensei $G_1, G_2, ..., G_k$, akkor $ch(G,x) = ch(G_1,x)ch(G_2,x)...ch(G_k,x)$.*

Bizonyítás. Az egész gráf x színnel való jó színezéseinek a száma a komponensek jó színezési számának a szorzata. □

4.2.16. Állítás. *Ha G k darab összefüggő komponensből áll, akkor $a_0 = a_1 = ... = a_{k-1} = 0$, azaz a 0 k-szoros gyöke $ch(G,x)$-nek.*

Bizonyítás. G összefüggő komponenseire $ch(G_i,x)$-nek egyszeres gyöke a 0. $ch(G,x) = ch(G_1,x)ch(G_2,x)...ch(G_k,x)$ miatt $ch(G,x)$-nek k-szoros gyöke a 0. □

4.2.17. Megjegyzés. Egy k természetes szám pontosan akkor gyöke a G gráf kromatikus polinomjának, ha $k < \chi(G)$. Ekkor lesz ugyanis a gráf k színnel történő jó színezéseinek száma 0.

4.2.18. Állítás. *A kromatikus polinom legnagyobb valós gyöke legfeljebb $n-1$.*

Bizonyítás. $ch(G,q) = \sum\limits_P q(q-1)...(q-|P|+1)$, ahol $1 \le |P| \le n$, és ha $q > n-1$, akkor $q(q-1)...(q-|P|+1)$ minden P-re pozitív, tehát q nem gyök. □

4.2.19. Állítás. *A kromatikus polinomnak nincs negatív valós gyöke.*

Bizonyítás. Legyen $q < 0$, ekkor $(-1)^n q^n > 0$, és $(-1)^n((-1)^{n-m} a_m q^m) = a_m(-q)^m > 0$ $\forall m = 1..n-1$-ra, tehát $(-1)^n ch(G,q) > 0$, szóval q nem lehet gyök. □

4.2.20. Állítás. *A kromatikus polinomnak nincs valós gyöke $(0,1)$-ben.*

Bizonyítás. Elég csak összefüggő gráfokkal foglalkozni. Ugyanis egy nem összefüggő gráf kromatikus polinomjának pontosan akkor nincs gyöke $(0,1)$-ben, ha egyik komponensének a kromatikus polinomjának sincs.

Az élek száma szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $(-1)^n ch(G,q) < 0$ $\forall q \in (0,1)$. Fára igaz az állítás, $(-1)^n q(q-1)^{n-1} < 0$ $\forall q \in (0,1)$. Az indukciós feltevés miatt $(-1)^n ch(G-e,q) < 0$ és $(-1)^{n-1} ch(G/e,q) < 0$ Ezért $(-1)^n ch(G,q) = (-1)^n(ch(G-e,q) - ch(G/e,q)) = (-1)^n ch(G-e,q) + (-1)^{n-1} ch(G/e,q) < 0$. □

Végül egy nem ennyire egyszerű tétel a kromatikus gyökökről:

4.2.21. Tétel. (Sokal) *Legyen G korlátos fokú gráf Δ maximális fokszámmal. Ekkor minden kromatikus gyök abszolútértéke legfeljebb $C\Delta$, ahol C egy 8-nál kisebb konstans.*

Bizonyítás. Megtalálható Sokal cikkében: [8] □

5. fejezet

Gráfpolinomok gyökmomentumainak Benjamini-Schramm folytonossága

Végül ismertetek egy tételt bizonyításostul, ami a Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozatok kromatikus vagy egyéb polinomjainak a gyökeit vizsgálja.

Egy véges egyszerű gráf kromatikus mértékén a kromatikus gyökökön vett egyenletes eloszlás által megadott μ_G valószínűségi mértéket értjük.

A tétel a következő:

5.0.22. Tétel. *Legyen f izomorfizmus-invariáns, normált, multiplikatív, exponenciális típusú gráfpolinom. Tegyük fel, hogy f gyökei korlátosak.*

Legyen (G_n) Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozat. Legyen $K \subset \mathbb{C}$ kompakt halmaz, ami tartalmazza $f(G_n, x)$ gyökeit minden n-re, úgy, hogy $\mathbb{C} \setminus K$ összefüggő.

Legyen minden G gráfhoz μ_G az $f(G, x)$ gyökein adott egyenletes eloszlás.

(a) Ekkor minden folytonos $g : K \to R$ függvényre, ami harmonikus K belsején, az $\int\limits_K g(z) d\mu_{G_n}(z)$ sorozat konvergens.

(b) $\xi \in \mathbb{C} \setminus K$-ra legyen $t_n(\xi) = \dfrac{\log |f(G_n, \xi)|}{|V(G_n)|}$. Ekkor $t_n(\xi)$ lokálisan egyenletesen konvergál egy harmonikus függvényhez $\mathbb{C} \setminus K$-n.

Ezek alapján akár azt is remélhetnénk, hogy a μ_{G_n} mértékek gyengén konvergensek lesznek. (Azaz a tétel a, része minden K-n értelmezett folytonos valós függvényre igaz.) De erre könnyű találni ellenpéldát: Az n hosszú utakból (P_n), és az n hosszú körökből (C_n) álló gráfsorozatok ugyanoda konvergálnak: a végtelen gyökeres úthoz. Szóval az összefésülésük is konvergens, a kromatikus gyökök által megadott mértékek mégse ugyanoda konvergálnak. $ch(P_n, q) = q(q-1)^{n-1}$, tehát μ_{P_n} gyenge határértéke az 1 pontba koncentrált Dirac-mérték. $ch(C_n, q) = (-1)^n(q-1) + (q-1)^n$, tehát μ_{C_n} az 1 középpontú egységkörre koncentrált normált Lebesgue-mérték.

De például ha $T_n = C_4 \times P_n$-et, azaz a $4 \times n$-es csöveket nézzük, erre igaz, hogy μ_{T_n} gyengén konvergens. (Ennek bizonyítása megtalálható Abért Miklós és Hubai Tamás cikkében. [2])

A dolgozat hátralévő részében a tétel (a) részének a bizonyítását közlöm Frenkel Péter és Csikvári Péter cikke alapján [1]. A (b) részt csak az érdekesség kedvéért közöltem. Ez a $t(z) = \dfrac{\log |ch(G,z)|}{|V(G)|}$ mennyiség ugyanis statisztikus mechanikában fordul elő, és egy pontra jutó entrópiának hívják. A $\dfrac{\log |ch(G_n, q)|}{|V(G_n)|}$ konvergenciáját Borgs, Chayes, Kahn és Lovász bizonyította $q > 2\Delta$ egészekre, ahol (G_n) Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozat lefeljebb Δ fokszámmal.

Lényegében ugyanerre a tételre Abért Miklós és Hubai Tamás adott egy bizonyítást [2], bár ők csak a kromatikus polinom gyökeit vizsgálták. Bizonyításukban megmutatják, hogy a kromatikus gyökök hatványösszegei kifejezhetők valamilyen összefüggő H gráfokból G-be menő homomorfizmusok számának lineáris kombinációjaként.

Ez a bizonyítás is hasonló, de itt H-ból G-be menő homomorfizmusok számolása helyett G H-val izomorf részgráfjait számoljuk. Ami lényegében ugynaz, mint ahogy az a Benjamini-Schramm konvergencia különböző definícióit taglaló fejezetben is kiderült. És ahelyett, hogy megadnánk a a $p_k(G)$ hatványösszegek pontos kifejezését a $H(G)$-kkel, a gráfpolinomok multiplikativitását kihasználva bizonyítjuk, hogy $H(G)$ együtthatója nem összefüggő H gráfokra 0 lesz.

A tételben szerepel egy feltétel, miszerint szükséges, hogy a polinom gyökei korlátosak legyenek.

5.0.23. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f gráfpolinomnak korlátosak a gyökei, ha létezik olyan $\overline{R} : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ függvény, hogy minden $\Delta \in \mathbb{N}$-re és minden G gráfra, amiben a csúcsok maximális fokszáma Δ, az $f(G, x)$ polinom gyökeinek abszolútértéke legfeljebb $\overline{R}(\Delta)$.*

Ez teljesül a kromatikus polinomra a Sokal-tétel (4.2.21) miatt. Tehát az 5.0.22. tétel teljesül a kromatikus polinomra.

5.0.24. Definíció. *Legyen $f(G, x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(G)x^k$ exponenciális típusú gráfpolinom. Tegyük fel, hogy létezik olyan $R : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ G-től független függvény, hogy minden legfel-*

jebb Δ fokszámú gráfra és minden $v \in V(G)$-re és minden $t \geq 1$-re $\sum\limits_{v \in S \subseteq V(G), |S|=t} |a_1(S)| \leq R(\Delta)^{t-1}$ *. Ekkor azt mondjuk, hogy a gráfpolinom korlátos exponenciális típusú.*

Ilyen például a kromatikus polinom, a Tutte-polinom, a (módosított) párosítási polinom, a függetlenségi polinom és a Laplace-mátrix karakterisztikus polinomja. (Szóval az összes gráfpolinom, amiről egyeltalán szó esett.) Ezekre a polinomokra teljesül továbbá, hogy izomorfizmus invariánsak, normáltak és multiplikatívak. A következő tétel miatt a gyökeik is korlátosak, tehát teljesülni fog rájuk az 5.0.22. tétel.

5.0.25. Tétel. *Legyen $f(G,x)$ korlátos exponenciális típusú gráfpolinom $R > 0$ korlátozó függvénnyel. Legyen G korlátos fokú gráf legfeljebb Δ fokszámmal. Ekkor $f(G,x)$ gyökeinek abszolútértéke legfeljebb $cR(\Delta)$, ahol $c < 7.04$.*

Ennek a bizonyítására nem térek ki, de megtalálható a Frenkel-Csikvári cikkben [1].

5.1. A részgráfszámolásról

A következőképpen értelmezhetünk $\mathbb{C}$ feletti vektortereket:

$\mathbb{C}\mathcal{H} = \{\sum\limits_{H \in \mathcal{H}} c_H H(.) | c_H \in \mathbb{C}\}$, illetve $\mathbb{C}\mathcal{H}^* = \{\sum\limits_{H \in \mathcal{H}} c_H H^*(.) | c_H \in \mathbb{C}\}$, ahol az összeg véges.

5.1.1. Definíció. *Gráfok egy $\mathcal{H}$ halmaza felszálló, ha zárt az új élek hozzáadására.*

5.1.2. Állítás. *Ha $\mathcal{H}$ felszálló, akkor $\mathbb{C}\mathcal{H} = \mathbb{C}\mathcal{H}^*$.*

Bizonyítás. Ha $p \in \mathbb{C}\mathcal{H}$, akkor $p \in \mathbb{C}\mathcal{H}^*$. Ehhez elég belátni, hogy $H(.) \in \mathbb{C}\mathcal{H}^*$ minden $H \in \mathcal{H}$-ra. A 2.1.13. állítás szerint az $\mathrm{inj}(H,G)$ felírható valamilyen $\mathrm{ind}(H',G)$-k lineáris kombinációjaként,ahol a H' gráfokat H-ból kapjuk élek hozzávevésével. Tehát a H'-k is $\mathcal{H}$-beliek. Mivel $H(G) = \dfrac{\mathrm{inj}(H,G)}{\mathrm{aut}(H)}$, és $H^*(G) = \dfrac{\mathrm{ind}(H,G)}{\mathrm{aut}(H)}$, az állítás tejesül.

Ha $p \in \mathbb{C}\mathcal{H}^*$, akkor $p \in \mathbb{C}\mathcal{H}$. Ez is ugyanúgy látható be, mint a másik irány, csak a 2.1.14. állítás felhasználásával, mely szerint $\mathrm{ind}(H,G)$ felírható valamilyen $\mathrm{inj}(H',G)$-k lineáris kombinációjaként,ahol a H' gráfokat H-ból kapjuk élek hozzávevésével. $\square$

5.1.3. Állítás. $H_1(G)H_2(G) = \sum\limits_{H} c^H_{H_1,H_2} H(G)$, *ahol a $c^H_{H_1,H_2}$ együttható a H felbontásainak száma H_1 és H_2 (nem feltétlenül diszjunkt) uniójára.*

Bizonyítás. Az olvasóra hagyjuk. $\square$

5.1.4. Következmény. Ha $\mathcal{H}$ zárt az unióra, akkor $\mathbb{C}\mathcal{H}$ gyűrű.

5.2. Multiplikatív lemma

Jelölje $\mathcal{G}$ a gráfok, $\mathcal{C}$ az összefüggő gráfok osztályát.

5.2.1. Lemma. (Additív lemma) *Egy $p \in \mathbb{C}\mathcal{G}$ függvény akkor és csak akkor additív, ha $p \in \mathbb{C}\mathcal{C}$.*

Bizonyítás. Ha $p \in \mathbb{C}\mathcal{C}$, akkor p additív, mivel $H(G)$ addditív összefüggő H-kra.

Másik irány: Legyen $p(G) = \sum_H c_H H(G)$ minden G gráfra. Tudjuk, hogy p additív, kell, hogy $c_H = 0$ minden nem összefüggő gráfra. Feltehetjük, hogy összefüggő gráfokra $c_H = 0$. (Magyarán tekinthetjük $p(G)$ helyett a $p(G) - \sum_{H \in \mathcal{C}} c_H H$ gráfparamétert, ami szintén additív.)

Ha H nem összefüggő, akkor előáll H_1 és H_2 legalább egy csúcsú gráfok diszjunkt uniójaként. Indukcióval tegyük fel, hogy $c_{H'} = 0$ a H minden H' valódi részgráfjára. Ekkor $p(H_i) = \sum_{H'} c_{H'} H'(H_i) = 0$ $i = 1, 2$-re, és $p(H) = \sum_{H'} c_{H'} H'(H) = c_H H(H) = c_H$. És az additivitás miatt $c_H = p(H) = p(H_1) + p(H_2) = 0$. $\square$

5.2.2. Lemma. (Multiplikatív lemma) *Legyen f multiplikatív gráfpolinom úgy, hogy $f(G, x)$ semmilyen G gráfra sem a 0 polinom. Legyenek $f(G, x)$ gyökei $\lambda_1(G), ..., \lambda_n(G)$, ahol n a polinom foka. Tegyük fel, hogy $p_k \in \mathbb{C}\mathcal{G}$, azaz léteznek $c_k(H)$ konstansok, amik csak véges sok H gráfra nem nullák, hogy $p_k(G) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(G)^k = \sum_H c_k(H) H(G)$ minden G-re. Ekkor $p_k \in \mathbb{C}\mathcal{C}$.*

Bizonyítás. Ha $G = G_1 \uplus G_2$, akkor f multiplikativitása miatt $f(G, x) = f(G_1, x) f(G_2, x)$, tehát $f(G, x)$ gyökeinek halmaza $f(G_1, x)$ és $f(G_2, x)$ gyökei halmazainak az uniója. Emiatt $p_k(G) = p_k(G_1) + p_k(G_2)$. Mivel $p_k(G)$ additív, az állítás az előző lemmából következik. $\square$

5.2.3. Állítás. *Legyen (G_n) korlátos fokú gráfsorozat. (G_n) akkor és csak akkor Benjamini-Schramm konvergens, ha minden $p \in \mathbb{C}\mathcal{C}$-re a $\frac{p(G_n)}{|V(G_n)|}$ sorozat konvergens.*

Bizonyítás. A konvergencia ekvivalens azzal, hogy a $\frac{H(G_n)}{|V(G_n)|}$ sorozat konvergens minden összefüggő H-ra. Mivel $p(G_n)$ ilyen $H(G_n)$-ek lineáris kombinációja, a $\frac{p(G_n)}{|V(G_n)|}$ pont ugyanilyenkor konvergens. $\square$

5.2.4. Tétel. *Legyen f multiplikatív normált gráfpolinom korlátos gyökökkel. $f(G,x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k(G)x^{n-k}$, ahol $n = |V(G)|$ és $e_k \in \mathbb{C}\mathcal{G}$ minden együtthatóra. Legyen (G_n) Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozat. Legyen $K \subset \mathbb{C}$ kompakt halmaz, amire $\mathbb{C} \setminus K$ összefüggő, és K tartalmazza $f(G_n,x)$ gyökeit minden n-re. Ekkor az $\int_K g(z)d\mu_{G_n}(z)$ sorozat konvergens.*

Bizonyítás. Ismert, hogy minden p_k kifejezhető e_i-k polinomjaként. (Newton-Girard-Waring formulák). Emiatt a $H(.)$ függvények polinomjaként is kifejezhetőek. Mivel $\mathbb{C}\mathcal{G}$ gyűrű, ez a $H(.)$-k lineáris kombinációjaként is írható. A multiplikatív lemma miatt ebben a lineáris kombinációban csak összefüggő H-k szerepelnek. Tehát $p_k \in \mathbb{C}\mathcal{C}$.

Legyen $g(z)$ folytonos K-n, és harmonikus K belsején. Kell, hogy a $\int_K g(z)d\mu_{G_n}(z)$ sorozat konvergens.

A Mergelyan-tétel miatt $\forall\varepsilon > 0$-ra létezik $h(z) = \sum_{k=0}^{M} a_k z^k$ polinom úgy, hogy $|g(z) - \Re h(z)| \leq \varepsilon$ minden $z \in K$-ra.

Tehát $|\int_K g(z)d\mu_G(z) - \int_K \Re h(z)d\mu_G(z)| \leq \varepsilon$ minden G gráfra.

A h polinomra $\int_K h(z)d\mu_G(z) = \sum_{k=0}^{M} a_k \int_K z^k d\mu_G(z) = \sum_{k=0}^{M} a_k \frac{p_k(G)}{|V(G)|}$. Ha (G_n) Benjamini-Schramm konvergens, akkor tudjuk, hogy $\frac{p_k(G)}{|V(G)|}$ is konvergens minden k-ra, tehát $\int_K h(z)d\mu_{G_n}(z)$ is az.

Emiatt $\limsup \int_K \Re h(z)d\mu_{G_n}(z) = \liminf \int_K \Re h(z)d\mu_{G_n}(z)$.

$$|\limsup \int_K g(z)d\mu_{G_n}(z) - \liminf \int_K g(z)d\mu_{G_n}(z)| = |\limsup \int_K g(z)d\mu_{G_n}(z) -$$
$$- \limsup \int_K \Re h(z)d\mu_{G_n}(z) + \liminf \int_K \Re h(z)d\mu_{G_n}(z) - \liminf \int_K g(z)d\mu_{G_n}(z)| \leq$$
$$\leq \limsup |\int_K g(z)d\mu_{G_n}(z) - \int_K \Re h(z)d\mu_{G_n}(z)| + \limsup |\int_K \Re h(z)d\mu_{G_n}(z) - \int_K g(z)d\mu_{G_n}(z)| \leq$$

$\leq 2\varepsilon$ minden $\varepsilon > 0$-ra, tehát az integrál konvergens. □

A 5.0.22 tétel bizonyításához már csak az kell, hogy $e_k \in \mathbb{C}\mathcal{G}$, ha f izomorfizmus-invariáns és exponenciális típusú.

5.3. Exponenciális típusú gráfpolinomok tulajdonságairól

Mint már szerepelt, az f gráfpolinom exponenciális típusú, ha $f(\emptyset, x) = 1$ és minden G gráfra $\sum\limits_{S \subseteq V(G)} f(S,x)f(G-S,y) = f(G,x+y)$, ahol $f(S,x)$, illetve $f(G-S,y)$ az S, illetve $V(G) \setminus S$ csúcshalmazok által feszített részgráfok kromatikus polinomjai.

5.3.1. Tétel. *Legyen b a nem üres csúcshalmazú gráfokon értelmezett komplex értékű függvény. f_b legyen a következőképpen definiált gráfpolinom:*
Legyen $a_k(G) = \sum\limits_{\{S_1,S_2,\ldots,S_k\} \in \mathcal{P}_k} b(S_1)b(S_2)\ldots b(S_k)$, ahol $\mathcal{P}_k$ a $V(G)$ csúcshalmaz pontosan k nem üres halmazra történő felosztásainak halmazát jelöli.

Legyen $f_b(G,x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(G)x^k$, ahol $n = |V(G)|$.

Ekkor:

(a) $f_b(G,x)$ minden b függvényre exponenciális típusú.

(b) Minden exponenciális típusú f gráfpolinomhoz létezik olyan b függvény, amire $f(G,x) = f_b(G,x)$. Precízebben, ha $b(G) = a_1(G)$ az x együtthatója $f(G,x)$-ben, akkor $f = f_b$.

Bizonyítás. (a) $\sum\limits_{S_1 \uplus S_2 = V(G)} f_b(S_1,x)f_b(S_2,y) = \sum\limits_{S_1 \uplus S_2 = V(G)} \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(S_1)x^k\Big)\Big(\sum\limits_{l=1}^{n} a_l(S_2)y^l\Big) =$

$$= \sum_{S_1 \uplus S_2 = V(G)} \Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\{R_1,R_2,..,R_k\} \in \mathcal{P}_k(S_1)} b(R_1)b(R_2)\ldots b(R_k)\Big)x^k\Big)$$
$$\Big(\sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{\{T_1,T_2,..,T_l\} \in \mathcal{P}_l(S_2)} b(T_1)b(T_2)\ldots b(T_l)\Big)y^l\Big) =$$
$$= \sum_{r=1}^{n}\Big(\sum_{\{Q_1,Q_2,..,Q_r\} \in \mathcal{P}_r(G)} b(Q_1)b(Q_2)\ldots b(Q_r)\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r}\binom{r}{i}x^i y^{r-i}\Big) = \sum_{r=1}^{n} a_r(G)(x+y)^r =$$
$$= f_b(G,x+y)$$

Tehát $f_b(G,x+y)$ exponenciális típusú.

(b) A csúcsok száma szerinti teljes indukcióval. Az üres gráfra triviális az állítás.

$f(G,x+y) - f(G,x) - f(G,y) = \sum\limits_{S_1 \uplus S_2 = V(G); S_1,S_2 \neq \emptyset} f(S_1,x)f(S_2,y)$, mivel $f(G,x) = f(S_1,x)$, ha $S_2 = \emptyset$, ugyanígy $f(G,y) = f(S_2,y)$, ha $S_1 = \emptyset$.

$\sum\limits_{S_1 \uplus S_2 = V(G); S_1,S_2 \neq \emptyset} f(S_1,x)f(S_2,y) = \sum\limits_{S_1 \uplus S_2 = V(G); S_1,S_2 \neq \emptyset} f_b(S_1,x)f_b(S_2,y)$ az indukció miatt, ugyanis ekkor S_1 és S_2 kevesebb, mint n pontúak.

Tehát: $f(G,x+y) - f(G,x) - f(G,y) = f_b(G,x+y) - f_b(G,x) - f_b(G,y)$.

A $g(x) = f(G,x) - f_b(G,x)$ polinomra ezek szerint igaz, hogy $g(x+y) = g(x) + g(y)$, tehát $g(x)$ lineáris, $g(x) = cx$. Másrészt $a_1(G) = b(G)$ az x együtthatója $f(G,x)$-ben is, tehát $c = 0$. Ezzel bizonyítottuk az állítást. $\square$

5.3.2. Tétel. *Legyen* $f(G,x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e_k(G) x^{n-k}$ *izomorfizmus-invariáns, normált, exponenciális típusú gráfpolinom* ($n = |V(G)|$)*. Ekkor* $e_k \in \mathbb{C}\mathcal{G}$.

Bizonyítás. $e_k(G) = (-1)^k a_{n-k}(G)$.

Az előző tétel alapján $a_{n-k}(G) = \sum_{\{S_1,S_2,\dots,S_{n-k}\}\in\mathcal{P}_{n-k}} b(S_1)...b(S_{n-k})$, ahol $\mathcal{P}_{n-k}$ a $V(G)$ pontosan $n-k$ nem üres halmazra való felosztásainak halmaza. Tekintsük a $\pi = \{S_1, ..., S_{n-k}\}$ felosztást. Legyen ebben $n-l$ egy pontból álló halmaz, és $l-k$ nagyobb rész. Ezeknek az uniója l pontból áll, és $k+1 \le l \le 2k$. Ezek alapján:

$a_{n-k}(G) = \sum_{k+1\le|V(H)|\le 2k} H^*(G) \sum_{\overline{\pi}=\{S_1,S_2,\dots,S_{|H|-k}\}} b(S_1)...b(S_{|H|-k})$, ahol $\overline{\pi}$ végigfut $V(H)$ $|H|-k$ darab, legalább 2 elemű halmazra történő felosztásain.

Mivel láttuk, hogy $\mathbb{C}\mathcal{G} = \mathbb{C}\mathcal{G}^*$, ez így is írható: $a_{n-k}(G) = \sum_{k+1\le|V(H)|\le 2k} c_k(H)H(G)$, ahol $c_k(H) \in \mathbb{C}$. Tehát az is igaz, hogy $e_k \in \mathbb{C}\mathcal{G}$. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] Csikvári Péter és Frenkel Péter: *Benjamini-Schramm continuity of root moments of graph polynomials*, 2012, http://arxiv.org/abs/1204.0463v1

[2] Abért Miklós és Hubai Tamás: *Benjamini-Schramm convergence and the distribution of chromatic roots for sparse graphs*, 2012, http://arxiv.org/abs/1201.3861

[3] Lovász László: *Large networks and graph limits*, AMS Colloquium Publications 60, 2012, 18. és 19. fejezet

[4] Lovász László: *Combinatorial problems and exercises*, North-Holland Pub. Co., 1993, 9. fejezet

[5] Abért Miklós: *Groups and Graph Limits*, preprint, 2012

[6] Elek Gábor: *On limits of finite graphs*, 2005, http://arxiv.org/abs/math/0505335

[7] Itai Benjamini és Oded Schramm: *Recurrence of Distributional Limits of Finite Planar Graphs*, 2001, http://arxiv.org/abs/math/0011019

[8] A. D. Sokal: Bounds on the complex zeros of (di)chromatic polynomials and Potts-model partition functions, Combinatorics, Probability and Computing 10 (2001), No. 1, pp. 41-77