

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Bósz Péter

SOKK-MODELLEK

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Móri Tamás

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Budapest, 2014

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Móri Tamásnak, hogy elvállalta a konzulensi teendőket. Köszönöm, hogy mindig rendelkezésemre állt és szakmai tanácsaival hozzájárult a szakdolgozatom elkészüléséhez.

Valamint köszönöm családomnak és barátaimnak, hogy mindig mellettem álltak és segítettek a munkámat.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
1. Élettartam-vizsgálat	5
1.1. Alapdefiníciók	5
1.2. Öregedő eloszláscsaládok	6
1.3. Sokk-modellek	8
1.4. Koherens rendszer	12
2. Sokk-modellek többváltozós esetben	15
2.1. Kétváltozós IFR	15
2.2. Kétváltozós DMRL	18
2.3. Többváltozós IFRA	22
3. További osztályok	29
Irodalomjegyzék	32

Bevezetés

Sokk-modellek alatt olyan rendszereket értünk, amelyeket sokkok érnek valamilyen Poisson-folyamat szerint (ez lehet más potfolyamat is), és ezen rendszerek élettartamát vizsgáljuk abból kiindulva, hogy hányadik sokk után megy tönkre. Feltesszük, hogy ez véges időn belül bekövetkezik.

Az első fejezetben bevezetünk néhány alapvető fogalmat, ami szükséges lesz a sokk-modellek vizsgálatához. Ilyen például a túlélésfüggvény, néhány öregedő eloszláscsalád és a koherens rendszer fogalma. Láthatunk tételeket is a különböző osztályokkal kapcsolatban.

A második fejezetben sokk-modelleket vizsgálunk két, illetve többváltozós esetben. Ez azt jelenti, hogy nem csak egy rendszert érnek sokkok, hanem kettőt vagy akár többet is. Meghatározzuk a rendszerek együttes túlélésfüggvényét a első fejezethez hasonló módon. Ezt három öregedő eloszláscsalád esetén vizsgáljuk. Feltételeket adunk, amelyek elegendőek ahhoz, hogy a rendszereinket besoroljuk egy többváltozós öregedő osztályba. Néhány ilyen tétel bizonyítását is bemutatjuk.

A harmadik és egyben utolsó fejezetben néhány mondatban említést teszünk a dolgozatban nem vizsgált osztályokról is. Áttekintjük a teljesség igénye nélkül, hogy mely kutatók foglalkoztak ezzel a témával és milyen cikkek, könyvek jelentek meg.

1. fejezet

Élettartam-vizsgálat

Ebben a fejezetben az élettartam-eloszlások vizsgálatához szükséges alapfogalmakat tekintjük át, [10] és [8] alapján. Az élettartam adatok nemnegatív valószínűségi változók. Sokféle alkalmazást találhatunk, például klinikai esetben a betegség diagnosztizálásától a halálig, tünetmentessé válástól a betegség kiújulásáig eltelt idő. Megbízhatóságelméleti modellekben bonyolult rendszerek hibamentes működését tekinthetjük, nem feltétlen valódi időben, pl. egy gép esetén csak a használati időt (kumulatív terhelési idő) vesszük figyelembe, személygépkocsinál a már megtett kilométert, vagy a repülőgépek futóművei leggyakrabban landolásnál hibásodnak meg, ezért a landolások számát tekintjük az élettartam-vizsgálatnál.

1.1. Alapdefiníciók

Az élettartam-változókat T -vel jelöljük. $H(t) = P(T < t)$ jelöli T eloszlásfüggvényét, legyen $\bar{H}(t) = 1 - H(t) = P(T \geq t)$ a túlélésfüggvény. Amennyiben az eloszlás folytonos, $h(t)$ a sűrűségfüggvény. Az eloszlás felső végpontja $\omega_H = \sup\{t : H(t) < 1\}$. Legyen $R(t) = -\log \bar{H}(t)$ a hazardfüggvény, $R(t) = +\infty$, ha $\bar{H}(t) = 0$, pl. $t > \omega_H$ esetén). Abszolút folytonos eloszlás hazardfüggvénye is abszolút folytonos. Hazardráta vagy meghibásodási tényező az $r(t) = \frac{h(t)}{\bar{H}(t)}$ mennyiség. Ekkor majdnem minden t -re $r(t) = R'(t)$.

A Lebesgue-tétel szerint m.m. t -re igaz, hogy

$$P(T < t + \varepsilon | T \geq t) = r(t)\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (1.1)$$

azaz feltételes valószínűsége annak, hogy a $(t, t + \varepsilon)$ időintervallumban a rendszer

meghibásodik, feltéve, hogy a t időpillanatban még működött, arányos ε -nal és az arányossági tényező $r(t)$.

1.1.1. Tétel. *Legyenek T_1, T_2, \dots, T_n függetlenek rendre r_1, \dots, r_n hazárdrátával és $T_{\min} = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$. Ekkor a következő állítások igazak:*

- (i) T_{\min} hazárdrátája $r_1 + \dots + r_n$,
- (ii) $P(T_{\min} = T_1 \mid T_{\min} = t) = \frac{r_1(t)}{r_1(t) + \dots + r_n(t)}$.

Ha változóink diszkrét eloszlásúak, a lehetséges értékek $0 \leq a_1 < a_2 < \dots$ rendre p_1, p_2, \dots valószínűségekkkel, akkor a hazárdrata megfelelője

$$P(T = a_i \mid T \geq a_i) = \frac{p_i}{p_i + p_{i+1} + \dots} \quad (1.2)$$

1.2. Öregedő eloszláscsaládok

Az öregedés fogalmának sok matematikai megközelítése ismeretes. Ezeknek a modelleknek az adja meg a jelentőségét, hogy bizonyos öregedési tulajdonságok feltételezésével az általánosnál jobb becslést tudunk adni pl. a túlélésfüggvényre, a momentumokra vagy a felújítási függvényre. Három ilyen osztály ismertetünk, ezek nevét az angol rövidítésből vesszük át.

IFR (Increasing Failure Rate, azaz növekedő meghibásodási tényező)

1.2.1. Definíció. $H \in IFR$, ha $\forall s > 0$ -ra $t \rightarrow \frac{\bar{H}(t+s)}{\bar{H}(s)}$ monoton csökkenő $\forall 0 \leq t < \omega_H$ esetén.

Mivel definíció szerint $\frac{\bar{H}(t+s)}{\bar{H}(s)} = P(T \geq t+s \mid T \geq t)$, tehát azt mondhatjuk, hogy minél idősebb az egyed, annál rosszabbak az életkilátásai.

1.2.2. Tétel.

- (i) $H \in IFR \Leftrightarrow R(t)$ konvex,
- (ii) Ha van sűrűségfüggvény, akkor $H \in IFR \Leftrightarrow r(t)$ monoton növekvő,
- (iii) $H \in IFR \Rightarrow H$ abszolút folytonos $t < \omega_H$ -ra.

Definiálhatjuk az ún, „fiatalodó” eloszlások osztályát. A különbség annyi, hogy a $t \mapsto \frac{\overline{H}(t+s)}{\overline{H}(s)} \forall s > 0$ -ra monoton növő, azaz R konkáv. Ekkor $\omega_H = \infty$ és az eloszlás abszolút folytonos, valamint a meghibásodási tényező monoton fogyó. Ezt DFR -nek nevezzük (Decreasing Failure Rate).

Vizsgáljunk meg néhány nevezetese eloszlást, hogy a DFR vagy az IFR osztályba tartoznak-e.

Exponenciális eloszlás: természetesen mindkét osztályba beletartoznak, ezek képezik a két osztály metszetét.

Gamma-eloszlás: Ebben az esetben a rendtől függ, segítségképpen tekintsük a következő lemmát.

1.2.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy a sűrűségfüggvény létezik, ekkor*

(i) *ha $t \mapsto \frac{h(t+s)}{h(s)} \forall s > 0$ -ra monoton fogyó, akkor $H \in IFR$,*

(ii) *ha $t \mapsto \frac{h(t+s)}{h(s)} \forall s > 0$ -ra monoton növő, akkor $H \in DFR$.*

Gamma eloszlás esetén $\frac{h(t+s)}{h(s)} = \left(1 + \frac{s}{t}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda s}$, ez monoton nő, ha $\alpha \leq 1$ és monoton fogy, ha $\alpha \geq 1$.

1.2.4. Következmény. Az α rendű gamma-eloszlás IFR , ha $\alpha \geq 1$ és DFR , ha $\alpha \leq 1$.

IFRA (Increasing Failure Rate Average)

1.2.5. Definíció. $H \in IFRA$, ha $(\overline{H}(s))^{1/t}$ monoton fogyó függvénye t -nek.

1.2.6. Tétel. *A következő állítások ekvivalensek:*

(i) $H \in IFRA$,

(ii) $\frac{R(t)}{t}$ monoton fogyó függvénye t -nek,

(iii) $\forall 0 < \alpha < 1$ és $t > 0$ esetén $\overline{H}(\alpha t) \geq (\overline{H}(t))^\alpha$,

(iv) Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív, monoton növény, jobbról folytonos, korlátos függvény, amelyre $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ (nevezzük az ilyen függvényeket megengedettnek). Ekkor tetszőleges $0 < \alpha < 1$ számra $E^\alpha(g(T)) \leq E(g(T/\alpha)^\alpha)$,

(v) $\forall \lambda > 0$ esetén $\overline{H}(t) - e^{-\lambda t}$ legfeljebb egyszer vált előjelet, mégpedig pozitívól negatívba.

Ha van sűrűségfüggvény, akkor $R(t)/t = \frac{1}{t} \int_0^t r(s) ds$, ez a meghibásodási tényező integrálközepe a $(0, t)$ intervallumon és ez (ii) szerint monoton növény. Innen az osztály elnevezése.

DMRL (Decreasing Mean Residual Life)

1.2.7. Definíció. $H \in DMRL$, ha

$$m(t) = \int_0^\infty \overline{H}_t(x) dx \quad (1.3)$$

csökkenő $\forall t \geq 0$ -ra, ahol $\overline{H}_t(x) = P(T - t \geq x | T \geq t) = \overline{H}(x + t)/\overline{H}(t)$. Itt $m(t) = E(T - t | T \geq t)$, ezt nevezik átlagos hátralevő élettartamnak.

Ugyanígy definiálható az *IMRL* (Increasing Mean Residual Life), ekkor $m(t)$ növekvő $t \geq 0$ -ra.

1.2.8. Állítás. Ha $H \in IFR$, akkor $H \in DMRL$ és $H \in IFRA$, de az *IFRA* és a *DMRL* osztály egyike sem tartalmazza a másikat.

1.3. Sokk-modellek

Egy rendszert sokkok érnek, a sokkok érkezése λ paraméterű Poisson-folyamat szerint történik. Jelölje $\overline{P}(k)$ azt a valószínűséget, hogy a k -edik sokkot túléli a rendszer. Ekkor $1 := \overline{P}(0) \geq \overline{P}(1) \geq \dots \geq 0$. Tegyük fel, hogy a rendszer véges időn belül tönkremegy, tehát $\overline{P}(n) \rightarrow 0$. Mit mondhatunk az élettartamról?

Ennek a modellnek egy speciális esete a *víztározó modell*. Egy x kapacitású víztartályt esőzések érnek, méghozzá Poisson-folyamat szerint. Az esőzések alkalmával lehulló csapadékmennyiség független és azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, G eloszlásfüggvényvel. Jelölje G^{*k} a G -nek önmagával való k -szoros konvolúcióját és legyen $G^{*0} \equiv 1$, ekkor annak a valószínűsége, hogy a k -edik esőzésnél csordul túl, $G^{*k}(x)$. A rendszer élettartama a túlcordulásig eltelt idő.

A rendszer élettartamának eloszlásfüggvényét jelölje H . A t időpontig bekövetkezett sokkok száma λt paraméterű Poisson-eloszlású. Ennek az értékei szerint írjuk fel a teljes valószínűség tételét:

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}(k) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (1.4)$$

Jelölje $q_k = \bar{P}(k-1) - \bar{P}(k)$, ez az a valószínűség, hogy a rendszer éppen a k -adik sokknál hibásodik meg. Ezek a számok diszkrét valószínűségi eloszlást alkotnak, tehát az összegük 1. A sokkok között eltelt idők függetlenek és exponenciális eloszlásúak, így a rendszer élettartama független exponenciálisok véletlen tagszámú összege, de felfogható gamma-eloszlások keverékeként is, hisz a k -adik sokk időpontja $\Gamma_{k,\lambda}$ eloszlású. Tehát van sűrűségfüggvény, ami így áll elő:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} q_{k+1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (1.5)$$

A következőkben úgynevezett megőrződési tételeket mutatunk be, ezek közös alakja, hogy ha a (q_k) eloszlás valamelyik öregedő tulajdonság diszkrét megfelelőjével rendelkezik, akkor a rendszer élettartama az adott öregedő osztályba esik.

Ezeknek a tételeknek a bizonyítása megtalálható [10]-ban. Most az 1.3.2, 1.3.5 és 1.3.4 Tételekre mutatunk bizonyítást, a legelső kicsit különbözik a [10]-ban leírtaktól.

1.3.1. Definíció. $(q_k) \in dIFR$ (diszkrét IFR), ha a $\bar{P}(k) = q_{k+1} + q_{k+2} + \dots$ túlélési valószínűségekre $\frac{\bar{P}(k)}{\bar{P}(k-1)}$ monoton fogyó, azaz, ha az $r_k = \frac{q_k}{\bar{P}(k-1)}$ diszkrét meghibásodási tényező monoton nő.

1.3.2. Tétel. Ha $(q_k) \in dIFR$, akkor $H \in IFR$.

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy $\forall x \geq 0$ esetén $\forall t$ -re, amelyre a $\bar{H}(t) > 0$, a $\bar{H}(x+t)/\bar{H}(t)$ függvény nem növekvő t -ben, $\forall x \geq 0$ -ra. Megmutatjuk, hogy $t' > t$ esetén

$$\bar{H}(x+t)\bar{H}(t') - \bar{H}(x+t')\bar{H}(t) \geq 0. \quad (1.6)$$

Írjunk $z_k(t)$ -t a $P(N(t) = k)$ helyett és jelölje k a t , illetve k' a t' időpillanatig

beérkező sokkok számát, ekkor (1.6) bal oldala

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} z_k(x+t) \bar{P}(k) \sum_{k'=0}^{\infty} z_{k'}(t') \bar{P}(k') - \sum_{k=0}^{\infty} z_k(x+t') \bar{P}(k) \sum_{k'=0}^{\infty} z_{k'}(t) \bar{P}(k') \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k z_j(x) z_{k-j}(t) \bar{P}(k) \sum_{k'=0}^{\infty} z_{k'}(t') \bar{P}(k') \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k z_j(x) z_{k-j}(t') \bar{P}(k) \sum_{k'=0}^{\infty} z_{k'}(t) \bar{P}(k'),
\end{aligned}$$

hiszen felbontjuk a $z_k(x+t)$ -t és a $z_k(x+t')$ -t aszerint, hogy hány sokk van x -ig (ezt jelöljük j -vel). Ezek után egy egyszerű kiemelést teszünk:

$$= \sum_{j=0}^k z_j(x) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} [z_k(t) z_{k'}(t') - z_k(t') z_{k'}(t)] \bar{P}(k+j) \bar{P}(k').$$

A továbbiakban elegendő $k < k'$ -re nézni az összeget, hisz a $k' < k$ eset a szummációs változók felcserélésével hasonlóképpen megkapható és a $k < k'$ összeg (-1) -szerese adódik, míg a $k = k'$ részösszeg 0-val egyenlő.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^k z_j(x) \sum_{k < k'} [z_k(t) z_{k'}(t') - z_k(t') z_{k'}(t)] [\bar{P}(k+j) \bar{P}(k') - \bar{P}(k'+j) \bar{P}(k)] \\
&= \sum_{j=0}^k z_j(x) \sum_{k < k'} [z_k(t) z_{k'}(t') - z_k(t') z_{k'}(t)] \times \\
&\quad \times [\{\bar{P}(k')/\bar{P}(k'+j)\} - \{\bar{P}(k)/\bar{P}(k+j)\}] \bar{P}(k+j) \bar{P}(k'+j).
\end{aligned}$$

Ez a tétel feltételei szerint ≥ 0 . \square

1.3.3. Definíció. $(q_k) \in dIFRA$ (diszkrét) $IFRA$, ha $\bar{P}(k)^{1/k}$ monoton fogyó.

1.3.4. Tétel. Ha $(q_k) \in dIFRA$, akkor $H \in IFRA$.

Bizonyítás. A 1.2.6 Tétel (v) pontjából kiindulva lássuk be, hogy minden $\alpha > 0$ esetén a $\bar{H}(t) - e^{-\alpha t}$ legfeljebb egyszer vált előjelet, méghozzá pozitívból negatívba.

A (1.3.1) szerint $\bar{H}(t) \geq e^{-\lambda t}$, így $\alpha \geq \lambda$ esetén a vizsgált függvény nem negatív, tehát nem vált előjelet. Legyen ezért $\alpha < \lambda$, tehát $\alpha = (1-z)\lambda$ valamilyen $0 < z < 1$ -re. Ekkor

$$\bar{H}(t) - e^{-(1-z)\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{P}(k) - z^k) \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Legyen $a_k = \bar{P}(k) - z^k$ együtthatók sorozata, ez a (q_k) sorozat *dIFRA* tulajdonsága miatt csak egyszer válthat előjelet, akkor is pozitívból negatívba. Belátjuk, hogy ezen feltételek mellett a

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad t \geq 0$$

függvényre is teljesül ez a tulajdonság.

Ha mindegyik a_k nemnegatív, vagy mindegyik nem pozitív, akkor $h(t)$ is állandó előjelű. Ezért tegyük fel, hogy $a_0, \dots, a_{m-1} \geq 0$ és $a_m, a_{m+1} \dots \leq 0$. Az m értéke szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. $m=0$ -ra már láttuk. Az indukciós lépés abból következik, hogy

$$h(t) = a_0 + \lambda \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \right) ds.$$

Itt az integrandusra alkalmazható az indukciós feltevés, tehát egy ideig nemnegatív, aztán nempozitív. Így $h(t)$ nő, azután (esetleg) csökken. Legfeljebb egyszer válthat előjelet (pozitívból negatívba), ugyanis $h(0) \geq 0$. \square

1.3.5. Tétel. $\bar{P}(k) = G^{*k}(x)$ esetén $(q_k) \in \text{dIFRA}$.

Bizonyítás. Belátjuk k szerinti teljes indukcióval, hogy $[G^{*k}(x)]^{k+1} \geq [G^{*(k+1)}(x)]^k$. Az egyenlőtlenség igaz $k = 1$ -re:

$$G^{*2}(x) = \int_0^x G(x-z) dG(z) \leq \int_0^x G(x) dG(z) = G^2(x).$$

Tehát feltesszük, hogy

$$[G^{*(k-1)}(x)]^k \geq [G^{*k}(x)]^{k-1} \tag{1.7}$$

teljesül. Így megkapjuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} [G^{*k}(x)]^{k+1} &= G^{*k}(x) \left[\int_0^x G^{*(k-1)}(x-z) dG(z) \right]^k \geq \\ &\geq G^{*k}(x) \left[\int_0^x [G^{*(k)}(x-z)]^{\frac{k-1}{k}} dG(z) \right]^k = \\ &= \left[\int_0^x [G^{*k}(x)]^{\frac{1}{k}} [G^{*k}(x-z)]^{1-\frac{1}{k}} dG(z) \right]^k \geq \\ &\geq \left[\int_0^x G^{*k}(x-z) dG(z) \right]^k = [G^{*(k+1)}(x)]^k. \end{aligned}$$

A (1.7)-beli indukciós feltevést a második egyenlőtlenségnél használtuk fel.

\square

1.3.6. Következmény. A víztározó-modellben a rendszer élettartama *IFRA* eloszlású.

1.4. Koherens rendszer

Tekintsünk egy rendszert, pl. egy készüléket, amely n alkatrészből áll. Ezeknek két állapota van, vagy működik (1) vagy hibás (0). A készülék attól függően működik, hogy melyik alkatrész (más néven elem) milyen tulajdonságú. Ez egy n -változós Boole-függvénnyel leírható, ezt a rendszer *struktúrafüggvényének* nevezzük: $\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Jelöljük vastag betűkkel az n dimenziós vektorokat. Így az $\mathbf{1}$ és a $\mathbf{0}$ azok a vektorok, amelyeknek a koordinátái csak 1-esekből illetve 0-ból állnak. Amikor a vektorokra skalárműveleteket alkalmazunk, koordinátánként értjük. Például $(x_1, \dots, x_n)^\alpha = x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha$ vagy $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$. Vezessük be a *produktum* és *koproduktum* operátorokat:

$$\prod x_i = x_1 x_2 \dots x_n, \quad \coprod x_i = 1 - \prod (1 - x_i).$$

A következő jelöléseket behelyettesítésre alkalmazhatjuk: legyen $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$, akkor

$$(1_i, \mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$(0_i, \mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$(\bullet_i, \mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \bullet, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Nézzünk példát néhány egyszerű rendszerre:

soros kapcsolás: $\varphi(x) = \min x_1, \dots, x_n = \prod x_i,$

párhuzamos kapcsolás: $\varphi(x) = \max x_1, \dots, x_n = \coprod x_i,$

„n-ből k” struktúra: $\varphi(x) = \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\prod_{j=1}^k x_{i_j} \right)$

(a rendszer akkor működik, ha a legalább k alkatrész működik).

1.4.1. Definíció. A rendszer i -edik eleme nem lényeges, ha $\forall \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$ esetén $\varphi(1_i, \mathbf{x}) = \varphi(0_i, \mathbf{x})$, egyébként lényeges.

φ monoton rendszer, ha a struktúrafüggvény minden változójában monoton növekvő: $\varphi(0_i, \mathbf{x}) \leq \varphi(1_i, \mathbf{x})$, tehát egy jól működő rendszer nem romolhat el, ha egy alkatrész

megjavul, vagy egy rosszul működő rendszer nem javulhat meg, ha egy alkatrész elromlik.

Ha egy monoton rendszerben minden elem lényeges, akkor koherens rendszernek nevezzük.

1.4.2. Definíció. A φ rendszer duálisa a $\varphi^D(\mathbf{x}) = 1 - \varphi(\mathbf{1} - \mathbf{x})$ struktúrafüggvényű rendszer.

Világos, hogy duális duálisa az eredeti rendszer, valamint, hogy monoton rendszer duálisa is monoton. Például a soros és a párhuzamos rendszerek duálisok.

1.4.3. Tétel. A következő állítások nyilvánvalóak:

$$(i) \quad \varphi(\mathbf{x}) = x_i \varphi(1_i, \mathbf{x}) + (1 - x_i) \varphi(0_i, \mathbf{x}).$$

$$(ii) \quad \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \{0,1\}^n} \varphi(\mathbf{y}) \prod x_i^{y_i} (1 - x_i)^{1-y_i}.$$

$$(iii) \quad \text{Koherens rendszer esetén } \prod x_i \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq \coprod x_i.$$

$$(iv) \quad \text{Monoton rendszer esetén } \varphi(\mathbf{x} \coprod \mathbf{y}) \leq \varphi(\mathbf{x}) \prod \varphi(\mathbf{y}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \prod \varphi(\mathbf{y}) \geq \varphi(\mathbf{x} \prod \mathbf{y}).$$

1.4.4. Definíció. Független elemekből álló rendszer megbízhatósága.

A rendszer alkatrészei egymástól függetlenül, véletlenszerűen működnek. Az i -edik elem működésének indikátora legyen X_i , az alkatrész megbízhatósága a működés valószínűsége: $p_i = EX_i$. Ekkor a rendszer megbízhatósága: $\varphi(\mathbf{p}) = E\varphi(\mathbf{X})$. Így φ -t kiterjesztettük egy $[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ függvényre.

Ha $\mathbf{p} = (p, p, \dots, p)$, akkor $\varphi(\mathbf{p})$ helyett írjunk $\varphi(p)$ -t.

Nézzük a korábban megadott egyszerű példák megbízhatóságát. Soros rendszer esetén $\varphi(\mathbf{p}) = \prod x_i$, $\varphi(p) = p^n$, párhuzamos rendszer esetén $\varphi(\mathbf{p}) = \coprod x_i$, $\varphi(p) = 1 - (1 - p)^n$, míg „ n -ből k ” rendszerre $\varphi(p) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$.

1.4.5. Tétel. A kiterjesztett $\varphi(\mathbf{p})$ függvényre is igazak a 1.4.3 tételhez hasonló állítások, ahol az eredeti struktúrafüggvényt tekintettük.

$$(i) \quad \varphi(\mathbf{p}) = p_i \varphi(1_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i) \varphi(0_i, \mathbf{p}).$$

(ii) $\varphi(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{y} \in \{0,1\}^n} \varphi(\mathbf{y}) \prod p_i^{y_i} (1-p_i)^{1-y_i}$, tehát φ egy n -változós polinom.

(iii) Koherens rendszer esetén $\varphi(\mathbf{p})$ minden változójában szigorúan monoton nő, ha $\mathbf{p} \in (0, 1)^n$.

(iv) Monoton rendszer esetén $\varphi(\mathbf{p} \prod \mathbf{p}') \leq \varphi(\mathbf{p}) \prod \varphi(\mathbf{p}')$, $\varphi(\mathbf{p} \sqcup \mathbf{p}') \geq \varphi(\mathbf{p}) \sqcup \varphi(\mathbf{p}')$.

1.4.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy az S eloszlásosztály zárt a koherens rendszer-képzésre, ha minden olyan koherens rendszer élettartama S -beli, amelynek az elemei függetlenek és S -beli élettartamúak.

1.4.7. Tétel. Az IFRA osztály zárt a koherens rendszer-képzésre.

2. fejezet

Sokk-modellek többváltozós esetben

Ebben a fejezetben a korábban definiált eloszláscsaládokat vizsgáljuk két- vagy több változóban a [5], [11] és [9] cikkek alapján.

2.1. Kétváltozós IFR

Marshall (1975) definiált néhány többváltozós modellt, amely analóg az *IFR*-rel (illetve a *DFR*-rel), ezek közül tekintsünk három speciális esetet két változóban.

Jelölje $\bar{H}(t_1, t_2)$ a T_1, T_2 nemnegatív valószínűségi változók együttes túlélésfüggvényét, azaz legyen $\bar{H}(t_1, t_2) = P(T_1 \geq t_1, T_2 \geq t_2)$.

2.1.1. Definíció.

- I. \bar{H} kétváltozós *IFR-1* (*BIFR-1*), ha bármely (t_1, t_2) -re, melyre teljesül $\bar{H}(t_1, t_2) > 0$, a $\bar{H}(t_1 + x_1, t_2 + x_2) / \bar{H}(t_1, t_2)$ hányados nem növekvő (t_1, t_2) -ben, $\forall x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ esetén.
- II. \bar{H} *BIFR-2*, ha bármely t -re, melyre teljesül $\bar{H}(t, t) > 0$, a $\bar{H}(t + x_1, t + x_2) / \bar{H}(t, t)$ hányados nem növekvő t -ben, $\forall x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ esetén.
- III. \bar{H} *BIFR-3*, ha bármely t -re, melyre teljesül $\bar{H}(t, t) > 0$, a $\bar{H}(t + x, t + x) / \bar{H}(t, t)$ hányados nem növekvő t -ben, $\forall x \geq 0$ esetén.

Ezekben a B a „bivariate” kezdőbetűje.

Világos, hogy ugyanezt megtehetjük több változóban, és így megkapjuk az *MIFR-1*, *MIFR-2*, *MIFR-3* osztályokat, valamint hasonlóképpen *MDFR-1*, *MDFR-2*, *MDFR-3* is megkapható, ha az I., II., III. pontokban a „nem növekvő” helyett, „nem csökkenőt” írunk (M, mint „multivariate”).

Tekintsünk két rendszert, amit egyidejűleg sokkoc érnek valamilyen véletlen időpontokban. A sokkok időpontját egy általános pontfolyamat írja le: $N = \{N(t), t \geq 0\}$, ez nem feltétlen Poisson. Legyen $\bar{P}(k_1, k_2)$ annak a valószínűsége, hogy a rendszereink túlélnek a k_1 -edik és a k_2 -edik sokkot, $k_1 = 0, 1, \dots$ és $k_2 = 0, 1, \dots$. Feltesszük, hogy $\bar{P}(0, 0) = 1$. Nézzük a együttes túlélésfüggvényt a bekövetkezett sokkok száma szerint bontva.

$$\begin{aligned}\bar{H}(t_1, t_2) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} P(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2) \bar{P}(k_1, k_1 + k_2), \text{ ha } t_1 < t_2; \\ \bar{H}(t_1, t_2) &= \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} P(N(t_2) = k_2, N(t_1) - N(t_2) = k_1) \bar{P}(k_1 + k_2, k_2), \text{ ha } t_2 < t_1;\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\bar{H}(t, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k) \bar{P}(k, k).$$

2.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy*

- (i) $\bar{P}(k+1, k+1)/\bar{P}(k, k)$ *nem növekvő (nem csökkenő) $k = 0, 1, \dots$;*
- (ii) $\bar{P}(k+1, 0)/\bar{P}(k, 0)$ *nem növekvő (nem csökkenő) $k = 0, 1, \dots$;*
- (iii) $\bar{P}(0, k+1)/\bar{P}(0, k)$ *nem növekvő (nem csökkenő) $k = 0, 1, \dots$;*

*és teljesül, hogy N egy Poisson-folyamat. Ekkor a (2.1)-ben megadott \bar{H} túlélésfüggvény *BIFR-3 (BDFR-3) tulajdonságú.**

Ezt a tételt nem bizonyítjuk.

2.1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy minden rögzített $m \geq 0, n \geq 0$ esetén*

- (i) $\bar{P}(k+m, k+n)/\bar{P}(k, k)$ *nem növekvő $k = 0, 1, \dots$;*
- (ii) $\bar{P}(k+m, 0)/\bar{P}(k, 0)$ *nem növekvő $k = 0, 1, \dots$;*

(iii) $\bar{P}(0, k+n)/\bar{P}(0, k)$ nem növekvő $k = 0, 1, \dots$

Ha N egy Poisson-folyamat, akkor a (2.1)-ben megadott \bar{H} túlélésfüggvény BIFR-2 tulajdonságú.

Bizonyítás. Azt a technikát alkalmazzuk, amit az 1.3.2 Tételnél láttunk. Tételünk bizonyításához be kell látni $\forall t' > t \geq 0$ -ra $\bar{H}(t', t') > 0$ esetén, hogy

$$\bar{H}(x_1 + t, x_2 + t)\bar{H}(t', t') - \bar{H}(x_1 + t', x_2 + t')\bar{H}(t, t) \geq 0, \quad (2.2)$$

ahol $x_1, x_2 \geq 0$. A bizonyításhoz csak az $x_1 > x_2$ esetet vesszük figyelembe, hiszen az $x_1 < x_2$ eset teljesen hasonlóképpen belátható, valamint az $x_1 = x_2$ eset a 2.1.2 Tétel miatt nyilvánvaló. A következőkben felhasználjuk az 1.3.2 Tétel bizonyítását és az (i)–(iii) feltételeket. Emlékeztetőül: $z_k(t)$ jelöli a $P(N(t) = k)$ valószínűséget. Ezekből következik, hogy $t' \geq t > 0$ -ra (2.2) bal oldala

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{\infty} z_j(x_2) \sum_{k_1=0}^{\infty} z_{k_1}(x_1 - x_2) \sum_{k_2 < k'_2} [z_{k_2}(t)z_{k'_2}(t') - z_{k_2}(t')z_{k'_2}(t)] \times \\ &\quad \times \bar{P}(k_1 + k_2 + j, k_2 + j)\bar{P}(k_1 + k'_2 + j, k'_2 + j) \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\bar{P}(k'_2, k'_2)}{\bar{P}(k_1 + k'_2 + j, k'_2 + j)} - \frac{\bar{P}(k, k_2)}{\bar{P}(k_1 + k_2 + j, k_2 + j)} \right\}, \end{aligned}$$

ami a feltételek szerint ≥ 0 , ugyanis

$$z_{k_2}(t)z_{k'_2}(t') - z_{k_2}(t')z_{k'_2}(t) = e^{-\lambda(t+t')} \frac{\lambda^{k_2+k'_2}}{k_2!k'_2!} (t^{k_2}(t')^{k'_2} - (t')^{k_2}t^{k'_2}) \geq 0.$$

□

Végül nézzünk meg egy olyan esetet, amikor a két rendszerünket két egymástól független véletlen folyamat szerint érkező sokkok érik. Ezeket a folyamatokat jelölje $N_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$ és $N_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$. A következőkben írjuk fel az együttes túlélésfüggvényt,

$$\bar{H}(t_1, t_2) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} z_{k_1}(t_1)z_{k_2}(t_2)\bar{P}(k_1, k_2), \quad t_1 \geq 0 \text{ és } t_2 \geq 0 \text{ esetén.} \quad (2.3)$$

A 2.1.3 Tétel mintájára az alábbi feltételt írhatjuk fel. Tegyük fel, hogy $0 \leq k_1 < k'_1$, $0 \leq k_2 < k'_2$ és $\forall j_1 \geq 0, j_2 \geq 0$ egészek esetén teljesül, hogy

$$\begin{aligned} &\bar{P}(k_1 + j_1, k_2 + j_2)\bar{P}(k'_1, k'_2) - \bar{P}(k'_1 + j_1, k_2 + j_2)\bar{P}(k_1, k'_2) \\ &\quad + \bar{P}(k_1 + j_1, k'_2 + j_2)\bar{P}(k'_1, k_2) - \bar{P}(k'_1 + j_1, k'_2 + j_2)\bar{P}(k_1, k_2) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.1.4. Tétel. *Ha N_1 és N_2 is Poisson-folyamat, valamint (2.4) is teljesül, akkor a (2.3)-ben felírt \bar{H} túlélésfüggvény BIFR-1 tulajdonságú.*

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy $0 \leq t_1 < t'_1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ és $t_2 \geq 0$ -ra a

$$\bar{H}(x_1 + t_1, x_2 + t_2)\bar{H}(t'_1, t_2) - \bar{H}(x_1 + t'_1, x_2 + t_2)\bar{H}(t_1, t_2) \geq 0, \quad (2.5)$$

továbbá $0 \leq t_2 < t'_2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ és $t_1 \geq 0$ -ra a

$$\bar{H}(x_1 + t_1, x_2 + t_2)\bar{H}(t_1, t'_2) - \bar{H}(x_1 + t_1, x_2 + t'_2)\bar{H}(t_1, t_2) \geq 0 \quad (2.6)$$

egyenlőtlenség teljesül.

Csak (2.5)-öt bizonyítjuk, hisz (2.6) teljesen hasonló. A (2.3) előállítás alapján könnyen megkapjuk az alábbi képletet.

$$\bar{H}(x_1 + t_1, x_2 + t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} z_{j_1}(x_1)z_{j_2}(x_2) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} z_{k_1}(t_1)z_{k_2}(t_2)\bar{P}(k_1 + j_1, k_2 + j_2). \quad (2.7)$$

Ezek után (3.0.10)-et felhasználva (2.5) bal oldala a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} z_{j_1}(x_1)z_{j_2}(x_2) \sum_{k_1 < k'_1} \sum_{k_2 < k'_2} z_{k_2}(t_2)z_{k_2}(t'_2) [z_{k_1}(t_1)z_{k_1}(t'_1) - z_{k_1}(t'_1)z_{k_1}(t_1)] \times \\ &\quad \times [\bar{P}(k_1 + j_1, k_2 + j_2)\bar{P}(k'_1, k'_2) - \bar{P}(k'_1 + j_1, k_2 + j_2)\bar{P}(k_1, k'_2) \\ &\quad + \bar{P}(k_1 + j_1, k'_2 + j_2)\bar{P}(k'_1, k_2)\bar{P}(k'_1 + j_1, k'_2 + j_2)\bar{P}(k_1, k_2)] \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

ahol az első tényező nemnegativitása a Poisson-eloszlás tulajdonságaiból jön, a másodiké a (2.4) feltételből. \square

Az *MDFR*-1 tulajdonságra a tétel hasonlóképpen belátható, a megfelelő változtatásokat alkalmazva.

2.2. Kétváltozós DMRL

Definiáljuk a *DMRL* osztály két speciális esetét két változóban.

2.2.1. Definíció.

- I. \bar{H} kétváltozós $DMRL - 1$ ($BDMRL - 1$), ha $\forall t \geq 0$ -ra, amelyre $\bar{H}(t, t) > 0$ teljesül, $\int_t^\infty \int_t^\infty \bar{H}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 / \bar{H}(t, t)$ nem növekvő.
- II. \bar{H} kétváltozós $DMRL - 2$ ($BDMRL - 2$), ha $\forall t \geq 0$ -ra, amelyre $\bar{H}(t, t) > 0$ teljesül, $\int_t^\infty \bar{H}(x, x) dx / \bar{H}(t, t)$ nem növekvő.

2.2.2. Megjegyzés. Definiálhatjuk a kétváltozós $IMRL-1$ és $IMRL-2$ osztályt is az I-es és II-es ponttal analóg módon úgy, hogy a „nem növekvő” helyett „nem csökkenőt” írunk.

Tekintsük a (2.1)-ben felírt \bar{H} túlélésfüggvényt, amikor a sokkok λ intenzitású Poisson-folyamat szerint érkeznek. Jelölje N_1 , illetve N_2 a két rendszer meghibásodásához szükséges sokkok (véletlen) számát, vagyis $P(N_1 > k_1, N_2 > k_2) = \bar{P}(k_1, k_2)$. Tegyük fel, hogy

$$N_1, N_2 \text{ és } \min(N_1, N_2) \text{ diszkrét } DMRL. \quad (2.9)$$

2.2.3. Tétel. Ha (2.9) teljesül, akkor a rendszer \bar{H} túlélésfüggvénye $BDMRL-2$ tulajdonságú.

2.2.4. Megjegyzés. A tétel a $BIMRL-2$ osztályra is érvényes, ha (2.9)-ben a $DMRL$ -t $IMRL$ -re cseréljük.

Ezeket a tételeket nem bizonyítjuk. A következőkben belátjuk, hogy a (2.1)-ben megadott \bar{H} túlélésfüggvény $BDMRL-1$, amikor a $\bar{P}(k_1, k_2)$ eleget tesz egy diszkrét $BDMRL-1$ tulajdonságnak. Tegyük fel, hogy $\forall j = 0, 1, \dots$ -re, amelyre igaz a $\bar{P}(j, j) > 0$ egyenlőtlenség, teljesül, hogy

$$\bar{P}(j + k_1, j + k_2) / \bar{P}(j, j) \text{ nem növekvő } j\text{-ben.} \quad (2.10)$$

2.2.5. Tétel. Tegyük fel, hogy (2.9) és (2.10) teljesül, továbbá $N(t)$ λ intenzitású Poisson-folyamat. Ekkor a (2.1)-beli \bar{H} $BDMRL-1$ tulajdonságú.

Bizonyítás. A tétel bizonyításához elegendő belátni azt, hogy $0 \leq t < t'$ -re teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\bar{H}(t', t') \int_t^\infty \int_t^\infty \bar{H}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \geq \bar{H}(t, t) \int_{t'}^\infty \int_{t'}^\infty \bar{H}(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (2.11)$$

Ennek belátásához számítsuk ki a kétszeres integrált.

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \int_t^\infty \bar{H}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ = \int_t^\infty \int_t^{t_2} \bar{H}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_t^\infty \int_t^{t_1} \bar{H}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

ahol az összeg első tagja a $t_1 < t_2$ eset, valamint a második tag a $t_2 < t_1$ eset. A bizonyítás további részében csak a $t_1 < t_2$ esettel foglalkozunk, nyilvánvalóan a másik eset teljesen analóg módon kiszámolható.

Tegyük fel, hogy $t < t_1 < t_2$.

Jelölje k a t ideig érkező sokkok számát, k_1 a $t_1 - t$ időintervallumon érkező sokkok számát, valamint k_2 a $t_2 - t_1$ időintervallumon érkező sokkok számát.

Ekkor

$$\begin{aligned} \bar{H}(t_1, t_2) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} P[\text{Poi}(\lambda t) = k] P[\text{Poi}(\lambda(t_1 - t)) = k_1] \times \\ &\times P[\text{Poi}(\lambda(t_2 - t_1)) = k_2] \bar{P}(k + k_1, k + k_2) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k e^{-\lambda(t_1 - t)} (\lambda(t_1 - t))^{k_1} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} (\lambda(t_2 - t_1))^{k_2}}{k! k_1! k_2!} \bar{P}(k + k_1, k + k_2) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t_2} (\lambda t)^k (\lambda(t_1 - t))^{k_1} (\lambda(t_2 - t_1))^{k_2}}{k! k_1! k_2!}. \end{aligned}$$

Tehát a (2.12)-ben szereplő egyenletet tekintve, a most megadott \bar{H} túlélésfüggvényt kell integrálnunk t_1 és t_2 változók szerint. Az első tag az alábbi módon számítható ki.

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \int_t^\infty \bar{H}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \int_t^\infty \frac{e^{-\lambda t_2} \lambda^{k+k_1+k_2} t^k}{k! k_1! k_2!} \int_t^{t_2} (t_1 - t)^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2} dt_1 \bar{P}(k + k_1, k + k_2) dt_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ezek után, ha az integrálban elvégezzük a $t_1 = t + (t_2 - t)y$ helyettesítést, akkor $dt_1 = (t_2 - t_1)dy$, és

$$\int_t^{t_2} (t_1 - t)^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2} dt_1 = (t_2 - t)^{k_1+k_2+1} \int_0^1 y^{k_1} (1 - y)^{k_2} dy. \quad (2.14)$$

Látszik, hogy $\int_0^1 y^{k_1}(1-y)^{k_2} dy$ egy speciális béta-integrál ($\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$). Ezt felhasználva a (2.14) egyenlet tovább alakítható, nevezetesen,

$$= (t_2 - t)^{k_1+k_2+1} \frac{k_1!k_2!}{(k_1 + k_2 + 1)!}.$$

Ezt a számítást helyettesítsük vissza a (2.13) összefüggésbe és akkor a következő egyenlőséget kapjuk meg.

$$\begin{aligned} & \int_t^\infty \int_t^\infty \bar{H}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty \sum_{k_1=0}^\infty \int_t^\infty \frac{e^{-\lambda t_2} \lambda^{k+k_1+k_2} t^k}{k! k_1! k_2!} (t_2 - t)^{k_1+k_2+1} \frac{k_1!k_2!}{(k_1 + k_2 + 1)!} \bar{P}(k + k_1, k + k_2) dt_2 \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty \sum_{k_1=0}^\infty \bar{P}(k + k_1, k + k_2) \frac{\lambda^{k+k_1+k_2} e^{-\lambda t} t^k}{(k_1 + k_2 + 1)!} \int_t^\infty e^{-\lambda(t_2-t)} (t_2 - t)^{k_1+k_2+1}. \end{aligned}$$

Ebben az esetben is helyettesítés integrálszámítással tudunk tovább haladni, még-hozzá úgy, hogy legyen $z = t_2 - t$. Ismeretes, hogy $\int_0^\infty z^a e^{-\lambda z} dz = \frac{a!}{\lambda^{a+1}}$. Ezzel a helyettesítéssel egy ehhez hasonló speciális integrált kapunk.

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty \sum_{k_1=0}^\infty \bar{P}(k + k_1, k + k_2) \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^k}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{k_2=0}^\infty \sum_{k_1=0}^\infty \bar{P}(k + k_1, k + k_2) \end{aligned}$$

Így a (2.12) pontbeli két esetre hivatkozva a \bar{H} túlélésfüggvénye kétszeresen integrálva a következő:

$$\int_t^\infty \int_t^\infty \bar{H}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{k_2=0}^\infty \sum_{k_1=0}^\infty \bar{P}(k + k_1, k + k_2). \quad (2.15)$$

A bizonyítás befejezéséhez térjünk vissza a (2.11)-hez. Tudjuk, hogy a $\bar{H}(t, t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \bar{P}(k, k)$. Rendezzük át az egyenlőtlenséget és helyettesítsük be, amit

idáig kiszámoltunk vagy ismertünk.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(\lambda t')^{k'}}{k'!} e^{-\lambda t'} \bar{P}(k', k') 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \bar{P}(k+k_1, k+k_2) - \\
& - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \bar{P}(k, k) 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(\lambda t')^{k'}}{k'!} e^{-\lambda t'} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \bar{P}(k+k_1, k+k_2) \\
& = 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k < k'} \sum_{k < k'} \frac{e^{-\lambda t - \lambda t'} \lambda^{k+k'}}{k!(k')!} t^k (t')^{k'} [\bar{P}(k', k') \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \bar{P}(k+k_1, k+k_2) - \\
& - \bar{P}(k, k) \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \bar{P}(k+k_1, k+k_2)] \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Ez a bizonyítás a [5] cikkben hibás, ugyanis a (2.15)-ben egy felesleges tag szerepel, szerencsére ez a gondolatmenet helyességén nem változtat. Az előbb leírt változat már a javított verzió.

2.2.6. Megjegyzés. A tétel igaz *BIMRL*-1-re is, ha (2.9)-ben *IMRL*-t írunk *DMRL* helyett és (2.10)-ban a „nem növekvőt” „nem csökkenőre” cseréljük.

2.2.7. Megjegyzés. A kétváltozós tételek többváltozós megfelelői is természetesen igazak, mind *MIFR*, mind *MDMRL* tulajdonságra.

2.3. Többváltozós IFRA

Az n elemű koherens rendszereket leíró φ n -változós Boole-függvényekről megmutatható, hogy mindig felírhatók a következő alakban:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in P_j} x_i, \tag{2.16}$$

ahol P_1, P_2, \dots, P_k az $\{1, 2, \dots, n\}$ részhalmazai. Mivel bináris változókra $\prod x_i = \min x_i$ és $\prod x_i = \max x_i$, ez úgy felírható, hogy

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq j \leq k} \min_{i \in P_j} x_i.$$

Hasonlóképpen, minden φ koherens struktúrafüggvény felírható

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min_{1 \leq j \leq k} \max_{i \in P_j} x_i$$

alakban is, természetesen a k szám és a P_j halmazok különböznek a (2.16)-beliektől.

Világos, hogy ha a rendszer elemeinek az élettartama T_1, T_2, \dots, T_n , akkor a rendszer τ élettartamára

$$\tau = \max_{1 \leq j \leq k} \min_{i \in P_j} T_i,$$

ugyanis $I(\cdot)$ -vel jelölve a zárójelben álló esemény indikátorát,

$$\begin{aligned} I(\tau \geq t) &= \varphi(I(T_1 \geq t), \dots, I(T_n \geq t)) = \\ &= \max_{1 \leq j \leq k} \min_{i \in P_j} I(T_i \geq t) = \\ &= \max_{1 \leq j \leq k} I(\min_{i \in P_j} T_i \geq t) = \\ &= I(\max_{1 \leq j \leq k} \min_{i \in P_j} T_i \geq t). \end{aligned}$$

A továbbiakban a

$$\tau(\mathbf{t}) = \max_{1 \leq j \leq k} \min_{i \in P_j} t_i \quad (2.17)$$

alakban felírható függvényeket n -ed rendű koherens függvénynek nevezzük. Minden ilyen függvény felírható

$$\tau(\mathbf{t}) = \min_{1 \leq j \leq m} \max_{i \in K_j} t_i$$

alakban is. Természetes módon definiálható a τ duálisa a (2.17) előállítás segítségével, az alábbi módon:

$$\tau^D(\mathbf{t}) = \min_{1 \leq j \leq p} \max_{i \in P_j} t_i. \quad (2.18)$$

Legyen T_1, \dots, T_n élettartamok. Vezessünk be az együttes eloszlásaikra néhány feltételt, amit a későbbi definíciókban is használni fogunk.

A feltétel: $R(\alpha \mathbf{t})/\alpha$ növekvő $\alpha > 0$ esetén, bármilyen $\mathbf{t} \geq 0$ -ra, ahol R jelöli az együttes (többváltozós) hazardfüggvényt.

B feltétel: minden τ koherens függvényre teljesül, hogy $\tau(T_1, \dots, T_n)$ eloszlása az *IFRA* osztályba tartozik.

C feltétel: az $\{1, 2, \dots, n\}$ minden nemüres B részhalmazára teljesül, hogy $\min_{i \in B} T_i$ *IFRA* tulajdonságú.

Vezessünk be néhány jelölést és fogalmat, továbbá vizsgáljuk meg a \overline{H} együttes túlélésfüggvény alaptulajdonságait.

2.3.1. Definíció. Egy (T_1, \dots, T_n) véletlen vektor több változós IFRA (MIFRA) eloszlású, ha minden folytonos, nem negatív növekvő h függvényre és $\forall 0 < \alpha \leq 1$ számra teljesül az

$$\mathbf{E}[h(T_1, \dots, T_n)] \leq \mathbf{E}^{1/\alpha}[h^\alpha(T_1/\alpha, \dots, T_n/\alpha)]$$

egyenlőtlenség.

Itt az M a „multivariate” kezdőbetűje.

Ebben a részben is olyan rendszereket tekintünk, amelyeket sokkok érnek. Ezek a sokkok mérhető károsodást okoznak, amely akkumulálódik. Megadunk küszöböket úgy, hogy az élettartam ezek átlépéséig eltelt idő lesz. Ehhez teljesen hasonló a 1.3 részben említett víztározó-modell.

Legyen az i -edik sokk által a j -edik rendszernek okozott kár X_{ij} , $i = 1, 2, \dots$ és $j = 1, 2, \dots, n$ esetén. Ekkor $S_j^{(k)} = \sum_{i=1}^k X_{ij}$ a összegzett kárnagyság a j -edik komponensre, k sokk esetén. Legyen

$$F^{[k_1, \dots, k_n]}(z_1, \dots, z_n) = P(S_j^{(k_j)} \leq z_j, j = 1, 2, \dots, n)$$

Az $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$ vektorok eloszlását jelölje F_i $i = 1, 2, \dots$ esetén. A továbbiakban olyan eseteket vizsgálunk, ahol ezek függetlenek és azonos eloszlásúak. Ha a természetes számokból álló \mathbf{k} és \mathbf{l} vektor egyformán rendezett (azaz $(k_\alpha - k_\beta)(l_\alpha - l_\beta) \geq 0$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n - re$), akkor

$$F^{[\mathbf{k}+\mathbf{l}]} = F^{[\mathbf{k}]} * F^{[\mathbf{l}]},$$

ahol a $*$ a konvolúciót jelöli.

Jelölje a küszöböket az $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ vektor, tehát $\overline{P}(\mathbf{k}) = F^{[\mathbf{k}]}(\mathbf{x})$, ezek segítségével két változóban a következőképpen tudjuk felírni a túlélésfüggvény kiszámítási

módját:

$$\begin{aligned}\bar{H}(t_1, t_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^k}{k!} e^{-\lambda(t_2-t_1)} \frac{[\lambda(t_2-t_1)]^l}{l!} F^{[k, k+l]}(x_1, x_2), \text{ ha } 0 \leq t_1 \leq t_2, \\ \bar{H}(t_1, t_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda t_2} \frac{(\lambda t_2)^k}{k!} e^{-\lambda(t_1-t_2)} \frac{[\lambda(t_1-t_2)]^l}{l!} F^{[k+l, k]}(x_1, x_2), \text{ ha } t_1 \geq t_2 \geq 0.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Az n -változós esetben tegyük fel, hogy $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, és $t_n > 0$, továbbá jelölje $\theta_j = \frac{t_j - t_{j-1}}{t_n}$, $j = 1, \dots, n$ esetén. Ezzel

$$\bar{H}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t_n} \frac{(\lambda t_n)^k}{k!} \bar{P}_k(\mathbf{x}),\tag{2.20}$$

ahol az $l_1 = 0$ és $l_n = k$ esetén

$$\begin{aligned}\bar{P}_k(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1=0}^k \sum_{l_2=l_1}^k \cdots \sum_{l_{n-1}=l_{n-2}}^k \binom{k}{l_1, l_2 - l_1, \dots, l_n - l_{n-1}} \\ &\times \prod_{j=1}^n \theta_j^{l_j - l_{j-1}} F^{[l_1, \dots, l_n]}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Itt $l_i - l_{i-1}$ jelöli a (t_{i-1}, t_i) időintervallumban érkező sokkok számát.

2.3.2. Tétel. *A fenti feltételek mellett (T_1, \dots, T_n) MIFRA tulajdonságú.*

Először mondjunk ki néhány lemmát, amelyek szükségesek lesznek a 2.3.2 Tétel bizonyításához. Az egyszerűség miatt ezeket a kétváltozós esetben mondjuk ki.

2.3.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy a (T_1, T_2) együttes túlélésfüggvénye felírható a (2.19)-ben megadott összefüggéssel. Jelöljön τ egy másodrendű koherens függvényt és legyen az $a_1 \geq a_2 > 0$ konstansok. Ekkor $t > 0$ -ra teljesül, hogy*

$$\begin{aligned}P\{\tau(a_1 T_1, a_2 T_2) > t\} &= \\ &= \sum_{k_1}^{\infty} \sum_{k_2=k_1}^{\infty} e^{-\lambda(t_1)} \cdot \frac{(t_1)^{k_1}}{(k_1)!} \cdot e^{-\lambda(t_2-t_1)} \cdot \frac{(t_2-t_1)^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!} \times \\ &\quad \times P\left\{\tau^D\left(\frac{S_1^{(k_1)}}{y_1}, \frac{S_2^{(k_2)}}{y_1}\right) \leq 1\right\},\end{aligned}\tag{2.21}$$

ahol $j = 1, 2$ esetén $t_j = t/a_j$ és τ^D a (2.18)-ban definiált duális koherens függvény.

2.3.4. Definíció. Legyen $0 \leq \theta_1 \leq 1$, $0 \leq \theta_2 \leq 1$, $\theta_1 + \theta_2 = 1$. Legyen továbbá $A \subset \mathbb{R}^n$ olyan Borel-halmaz, amelyre teljesül a következő: ha $\mathbf{x} \in A$ és $\mathbf{v} \leq \mathbf{u}$ (koordinátánként), akkor $\mathbf{v} \in A$.

Vezessük be a következő mennyiséget:

$$\bar{P}_k(A) = \sum_{l_1=0}^k \sum_{l_2=l_1}^k \binom{k}{l_1, l_2 - l_1} \theta_1^{l_1} \cdot \theta_2^{l_2 - l_1} \cdot P\{(S_1^{(l_1)}, S_2^{(l_2)}) \in A\}. \quad (2.22)$$

A következő lemmához feltesszük azt, amit a 2.3.2 Tételben is feltettünk, hogy az \mathbf{X}_i vektorok azonos eloszlásúak $\forall i$ -re.

2.3.5. Lemma. Ekkor teljesül az alábbi összefüggés:

$$(\bar{P}_k(A))^{1/k} \text{ csökkenő } k = 0, 1, \dots \quad (2.23)$$

Legyen m egy egész szám. A 2.3.2 Tétel bizonyításához tekintsük a korábban már megadott T_1, \dots, T_n élettartamokat, mégpedig úgy, hogy mindegyik változó m -szer szerepeljen.

$$\underbrace{T_1, \dots, T_1}_{m\text{-szer}}, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_{m\text{-szer}}, \dots, \underbrace{T_n, \dots, T_n}_{m\text{-szer}}.$$

2.3.6. Lemma. Legyen $N(t)$ Poisson-folyamat, az y_{jl} küszöbök pedig nemnegatív számok, $1 \leq j \leq n$ és $1 \leq l \leq m$. Továbbá legyen

$$T_{jl} = \inf\{t \geq 0 : S_j^{(N(t))} > y_{jl}\}.$$

Ekkor

$$P\{T_{jl} > t_{jl}, 1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq m\} = \bar{H}(t_{11}, \dots, t_{j1}, \dots, t_{nm}), \quad (2.24)$$

ahol a \bar{H} nm -dimenziós együttes túlélésfüggvény a (2.20) képlet szerint szerint számolható, és az nm -dimenziós károsodásvektor eloszlásfüggvénye

$$\tilde{F}(z_{11}, \dots, z_{j1}, \dots, z_{nm}) = F_i \left(\min_{1 \leq l \leq m} (z_{1l}), \dots, \min_{1 \leq l \leq m} (z_{nl}) \right). \quad (2.25)$$

Bizonyítás. (2.24) könnyen látható, ha felhasználjuk, hogy az nm -dimenziós

$$\underbrace{Y_{i1}, \dots, Y_{i1}}_{m\text{-szer}}, \underbrace{Y_{i2}, \dots, Y_{i2}}_{m\text{-szer}}, \dots, \underbrace{Y_{in}, \dots, Y_{in}}_{m\text{-szer}}.$$

véletlen vektor eloszlása éppen a (2.25) képlettel adható meg. \square

2.3.7. Megjegyzés. Most $y_{j1} = \dots = y_{jm} = y_j$, így a 2.3.6 Lemma segítségével felírható a

$$\underbrace{T_1, \dots, T_1}_{m\text{-szer}}, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_{m\text{-szer}}, \dots, \underbrace{T_n, \dots, T_n}_{m\text{-szer}}$$

vektor együttes túlélésfüggvénye a (2.24) képlet szerint.

Ezeknek a lemmáknak a bizonyítása megtalálható a [9] cikkben. Most csak a 2.3.6 Lemmát bizonyítottuk, mert az rövid és könnyen meggondolható. A 2.3.2 Tétel bizonyításához szükségünk lesz a lemmákra. A következőkben ezt a bizonyítást ismertetjük.

A 2.3.2 Tétel bizonyítása.

Először megmutatjuk, hogy minden $a_j \geq 0$ konstansra $1 \leq j \leq n$ esetén és minden τ n -edrendű koherens függvényre

$$T := \tau(a_1 T_1, \dots, a_n T_n) \text{ IFRA tulajdonságú.} \quad (2.26)$$

Feltehetjük, hogy $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, ez átszámozva elérhető. Feltehetjük azt is, hogy $a_n > 0$, hiszen ha egyenlő 0-val, akkor egy alacsonyabb dimenziós esethez jutunk. Legyen $A = \{z : \tau^D(z_1/y_1, \dots, z_n/y_n) \leq 1\}$. Ez teljesíti a (2.22) képlet előtt megkövetelt feltételt. A (2.21) képlet alapján némi számolás után következik, hogy

$$P(T > t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \bar{P}_k(A), \quad (2.27)$$

ahol $\bar{P}_k(A)$ adott a (2.22)-beli összefüggésből és $\theta_i = (a_i^{-1} - a_{i-1})/a_n^{-1}$ $i = 1, 2, \dots, n$ esetén, továbbá $t_n = t/a_n$. A (2.23) tulajdonság teljesül, ugyanis a feltételek itt is adottak. Az 1.3.4 Tétel és a (2.27)-beli egyenlőség miatt a (2.26)-ban megadott T élettartam IFRA tulajdonságú.

A fenti levezetés mutatja, hogy a (T_1, \dots, T_n) vektor \bar{H} túlélésfüggvényére is teljesül a (2.26) állítás. A 2.3.6 Lemma miatt a

$$\underbrace{T_1, \dots, T_1}_{m\text{-szer}}, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_{m\text{-szer}}, \dots, \underbrace{T_n, \dots, T_n}_{m\text{-szer}}$$

véletlen túlélésvektor is felírható ebben a formában. Ezért a (2.26)-beli állításból következik, hogy minden nm -ed rendű τ koherens függvényre és nemnegatív a_{jl} számra $1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq m$ esetén teljesül, hogy

$$\tau(a_{11} T_1, \dots, a_{jl} T_j, \dots, a_{nm} T_n) \in IFRA. \quad (2.28)$$

Erről pedig már Block és Savits a [3] cikkben belátta, hogy ekvivalens azzal, hogy (T_1, \dots, T_n) együttes túlélésfüggvénye *MIFRA* tulajdonságú. \square

3. fejezet

További osztályok

A vizsgált *DMRL*, *IFR* és *IFRA* osztályokon kívül természetesen számos mást is definiáltak, egy- és többdimenzióban egyaránt. Ilyen például az *NBU*, *NBUE* és a *HNBUE* osztály. Ezen osztályok részletes és pontos jellemzése a [2] és [6] cikkekben megtalálható. A továbbiakban kimondunk néhány definíciót és tételt (bizonyítás nélkül).

NBU (New Better Than Used, az új jobb a használtnál)

3.0.8. Definíció. $H \in NBU$, ha $\forall x \geq 0, y \geq 0$ esetén teljesül a $\overline{H}(x+y) \leq \overline{H}(x)\overline{H}(y)$ egyenlőtlenség.

NBUE (New Better Than Used in Expectation)

3.0.9. Definíció. A H eloszlásfüggvény *NBUE* tulajdonságú, ha a hozzá tartozó várható érték $\mu < \infty$, és minden $t \geq 0$ esetén

$$\int_t^\infty \overline{H}(x)dx \leq \mu\overline{H}(t).$$

Az elnevezés onnan ered, hogy a definiáló egyenlőtlenséget $\overline{H}(t)$ -vel leosztva a bal oldalon a t időpontot túlélő egyed várható élettartama áll.

Tegyük fel, hogy a sokkok egy $N(t)$ pontfolyamat szerint érkeznek. A korábbiakban alkalmazott $z_k(t) = P(N(t) = k)$ jelöléssel legyen $Z_k = \int_0^\infty z_k(t)dt$, ahol $k = 0, 1, \dots$. Ez éppen a k -adik és a $(k+1)$ -edik sokk között eltelt idő várható értéke. Jelölje ugyanis T_k a k -adik sokk beérkezésének idejét és U_{k+1} a k -adik és a

$(k + 1)$ -edik sokk közt eltelt időtartamot. Ekkor Fubini tételével

$$\begin{aligned} Z_k &= \int_0^\infty z_k(t) dt = \int_0^\infty P(N(t) = k) dt \\ &= \int_0^\infty P(T_k \leq t < T_{k+1}) dt = \int_0^\infty E(I_{[T_k, T_{k+1})}(t)) dt \\ &= E\left(\int_{T_k}^{T_{k+1}} dt\right) = E(T_{k+1} - T_k) = EU_{k+1}. \end{aligned}$$

3.0.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy*

$$\bar{P}(j) \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}(k) Z_k \geq \sum_{k=j}^{\infty} \bar{P}(k) Z_k, \quad j = 0, 1, \dots$$

továbbá

$$Z_k \sum_{j=0}^k z_j(t) \geq \int_t^\infty z_k(x) dx$$

tetszőleges $k = 0, 1, \dots$ és $t \geq 0$ mellett. Ekkor $H \in NBUE$.

A tétel bizonyítása megtalálható a [2] cikkben.

HNBUE (Harmonic New Better Than Used in Expectation)

3.0.11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $H \in HNBUE$, ha a $\mu = \int_0^\infty \bar{H}(t) dt$ várható érték véges, továbbá minden $t \geq 0$ esetén*

$$\int_t^\infty \bar{H}(x) dx \leq \mu \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right).$$

Mind a három osztály diszkrét megfelelője is definiálható, mégpedig az alábbi módon:

3.0.12. Definíció.

I. Diszkrét NBU. $(q_k) \in dNBU$, ha $\bar{P}(j+k) \leq \bar{P}(j)\bar{P}(k)$, minden j, k nemnegatív egész mellett.

II. Diszkrét NBUE. $(q_k) \in dNBUE$, ha $m = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}(j) < \infty$, és $\sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}(j) \leq m \bar{P}(k)$, $k = 0, 1, \dots$.

III. Diszkrét HNBUE. $(q_k) \in dHNBUE$, ha $m < \infty$, és $\sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}(j) \leq m(1 - (1/m))^k$, $k = 0, 1, \dots$.

3.0.13. Tétel. *Ha (q_k) rendelkezik a $dNBU$, $dNBUE$, illetve a $dHNBUE$ tulajdonsággal, és a sokkok homogén Poisson-folyamat szerint érkeznek, akkor rendre $H \in NBU$, $H \in NBUE$, illetve $H \in HNBUE$.*

Az NBU rész bizonyítása megtalálható a [10] könyvben, a $HNBUE$ a [6] cikkben. Az $NBUE$ osztályra vonatkozó állítás pedig a 3.0.10 Tétel közvetlen következménye.

Az itt felsorolt öregedő tulajdonságok közötti tartalmazási kapcsolatot a következő:

$$IFR \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} IFRA \\ DMRL \end{array} \right\} \Rightarrow NBU \Rightarrow NBUE \Rightarrow HNBUE.$$

Az NBU , $NBUE$ és $HNBUE$ osztályok fiatalodó megfelelői is felírhatók, úgy, ahogy pl. $DMRL$ helyett $IMRL$. Ezeket rendre így jelöljük: NWU (az új rosszabb mint a használt), $NWUE$, illetve $HNWUE$. (W az angol „worse” kezdőbetűje).

3.0.14. Megjegyzés. Az előző definícióknak, illetve tételeknek léteznek többdimenziós megfelelőik is, amikor tehát a túlélésfüggvény két- vagy többváltozós. Ilyenkor több rendszer együttes túlélésfüggvényét tekintjük. Pontos definíciókat a [9] és [1] cikkekben láthatunk.

Sok ehhez hasonló öregedő osztályt vezettek be egy, illetve több változóban is, és vizsgálták ezek tulajdonságait, a köztük lévő tartalmazási kapcsolatokat. Számos példa található Lai és Xie [7] könyvében. A dolgozatban szereplő osztályokkal kapcsolatban pedig a [4] cikkben található további tételeket, eredményeket.

Irodalomjegyzék

- [1] Basu, A. P., Ebrahimi, N., and Klefsjö, B., Multivariate Harmonic New Better than Used in Expectation Distributions *Scand. J. Statist.* **10** (1983), 19–25.
- [2] Block, H. W., and Savits, T. H., Shock models with NBUE survival. *J. Appl. Probab.* **15** (1978), 621–628.
- [3] Block, H. W., and Savits, T. H., Multivariate increasing failure rate distributions. *Ann. Probab.* **8** (1980), 703–801.
- [4] Esary, J. D., and Marshall, A. W., Shock models and wear processes *Ann. Probab.* **1** (1973), 627–649.
- [5] Ghosh, M., and Ebrahimi, N., Shock models leading to increasing failure rate and decreasing residual life survival. *J. Appl. Probab.* **19** (1982), 158–166.
- [6] Klefsjö, B., HNBUE survival under some shock models. *Scand. J. Statist.* **8** (1981), 9–47.
- [7] Lai, C., and Xie, M., *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*. Springer, New York, 2006.
- [8] Marshall, A. W., and Olkin, I., *Life Distributions*. Springer, New York, 2007.
- [9] Marshall, A. W., and Shaked, M., Multivariate shock models for distributions with increasing hazard rate average. *Ann. Probab.* **7** (1979), 343–358.
- [10] Móri Tamás, *Élettartam-adatok elemzése*. Typotex, Budapest, 2011.
- [11] Savits, T. H., and Shaked, M., Shock models and the MIFRA property. *Stoch. Proc. Appl.* **11** (1981), 273–283.