Mátrix kiegészítési problémák kombinatorikus vizsgálata

BSc Szakdolgozat

Írta:

Csikós Mónika

Matematika BSc, Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Jordán Tibor, egyetemi tanár

Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem,

Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Merevségelméleti alapok **4**

3. Mátrixok kiegészíthetősége **8**
3.1. Gram-mátrixok 8
3.2. A kiegészíthetőségi mátrix és lokális kiegészíthetőség 10
3.3. Általános, alacsony rangú, nem négyzetes mátrixok 12
3.3.1. Alapmodell és stressz mátrix 12
3.3.2. Páros gráfok kiegészíthetősége 14

4. A lokális és globális kiegészíthetőség kombinatorikus megközelítése **17**
4.1. Lokális Gram-kiegészíthetőségre vonatkozó állítások 17
4.2. Induktív konstrukciók 17
4.3. A k-függetlenséget megőrző műveletek 20
4.3.1. Dupla 1-kiterjesztés 20
4.3.2. Csúcsfelosztás 22

5. Klaszter gráfok **25**
5.1. Lokális kiegészíthetőség 25
5.2. Globális kiegészíthetőség 27

6. Síkgráfok lokális kiegészíthetősége $\mathbb{R}^2$-ben **28**
6.1. Páros síkgráfok 28
6.2. Síkgráfok 28

7. Elégséges feltételek a globális kiegészíthetőségre **29**
7.1. A kiegészíthetőségi stressz és a globális kiegészíthetőség 29
7.2. A globális kiegészíthetőséget megőrző műveletek 32
7.3. Csúcs redundancia 32

8. Geometriai megfigyelések **33**

9. Sűrű mátrixok kiegészíhetősége **34**

10. Nyitott kérdések **36**

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Jordán Tibornak, hogy előadóként felkeltette érdeklődésemet a gráfok merevsége iránt, majd a konzultációk során iránymutatásával, tanácsaival nagy mértékben segítette a dolgozat elkészítését.

Köszönettel tartozom még családomnak és barátaimnak, hogy sok türelemmel és szeretettel segítettek előre tanulmányaim során.

1. Bevezetés

A hiányosan megadott mátrixok kiegészítése egy, a gyakorlati életben is sokszor felmerülő matematikai probléma. Alacsony rangú, hiányos mátrixok kiegészíthetőségével gyakran találkozhatunk, ha nem teljes adathalmazok kiegészítése a feladat. Erre egy példa a *Netflix* probléma, amelyben a felhasználók a rendelkezésre álló filmek egy részét értékelik, majd ez alapján próbálunk nekik tetsző, még nem értékelt filmeket ajánlani. Általában feltételezhetünk bizonyos összefüggéseket a felhasználó által preferált filmek között, ezért az értékeléseivel megadott mátrix alacsony rangúnak tekinthető.

Az *Netflix* probléma esetében egy hiányosan megadott mátrix egy bizonyos elemére vagyunk kíváncsiak. Természetesen merül fel a kérdés, hogy vajon megadhatók-e olyan feltételek, például a hiányzó elemek számára, vagy elhelyezkedésére, amelyekből meg tudjuk állapítani, hogy egyértelműen kiegészíthető-e a mátrix.

A mátrix kiegészíthetőségi probléma és a merevségelmélet kapcsolatát először Singer és Cucuringu [16] mutatta meg 2009-ben, majd ennek segítségével hatékony randomizált algoritmusokat is adtak, amelyek a lokális kiegészíthetőség szükséges és elégséges feltételeit, illetve a globális merevség elégséges feltételeit tesztelik.

Dolgozatom célja ezen dinamikusan fejlődő téma eddigi kombinatorikus eredményeinek összefoglalása.
A második fejezetben a szükséges merevségelméleti fogalmak összegzése található.
A harmadik fejezetben Gram-mátrixok, majd általános, alacsony rangú, nem négyezetes mátrixok kiegészíthetőségének modellezését mutatom be. Bemutatom, hogyan konstuálhatunk egy gráfot a mátrixunkhoz és definiálom egy gráf kiegészíthetőségét.
A negyedik fejezetben a kiegészítendő mátrix ismert elemei számának segítségével adok elégséges feltételeket arra, hogy egyértelműen kiegészíthető-e a mátrix, majd olyan gráfműveleteket ismertetek, melyek végrehajtása során a gráf valamely, a probléma szempontjából lényeges tulajdonsága (pl. kiegészíthetősége) megőrződik.

Ezután speciális gráfok kiegészíthetőségét vizsgálom. Az ötödik fejezetben a klaszter gráfok lokális és globális kiegészíthetőségéről szóló eredményeket mutatom be részletesen, majd a hatodik fejezetben a síkgráfok lokális kiegészíthetőségére térek ki. A hatodik fejezetben definiálom a kiegészíthetőségi stressz fogalmát, majd ennek segítségével elégséges feltételt adok a generikus globális kiegészíthetőségre. Ezután megmutatom, hogy a 0-kiterjeszés és a dupla 1-kiterjesztés megőrzi a globális kiegészíthetőséget, majd azt is, hogy segítségükkel megadható az 1-dimenzióban globálisan kiegészíthető gráfok egy kombinatorikus jellemzése. Ezt követően összegzem a különböző geometriai, illetve gráfelméleti megfigyelések alapján kapott elégséges feltételeket. Az utolsó fejezetben néhány nyitott kérdést fogalmazok meg.

2. Merevségelméleti alapok

Egy d-dimenziós *szerkezeten* egy (G,p) pár értünk, ahol $G=(V,E)$ egy irányítatlan gráf és p a gráf csúcsainak egy realizációja, azaz egy $V \to \mathbb{R}^d$ leképezés. Két szerkezet, (G,p) és (G,q) *ekvivalens*, ha $\|p(u)-p(v)\|=\|q(u)-q(v)\|$ teljesül minden olyan u, v csúcspárra, melyre $uv \in E$, illetve *kongruens*, ha $\|p(u)-p(v)\|=\|q(u)-q(v)\|$ minden u, $v \in V$ pontpárra fennáll.

Egy (G,p) szerkezet *merev* $\mathbb{R}^d$-ben, ha p-nek van egy olyan U_p környezete az $\mathbb{R}^d$-beli realizációk terében, melyre ha (G,p) ekvivalens (G,q)-val és $q \in U_p$, akkor (G,p) kongruens (G,q)-val.

A merevség még nem jelenti azt, hogy a szerkezetet egybevágóság erejéig egyértelműen tudjuk realizálni. Azt mondjuk, hogy a (G,p) szerkezet *globálisan merev* $\mathbb{R}^d$-ben, ha minden d-dimenziós szerkezet, amely ekvivalens (G,p)-vel, kongruens is vele.

Egy $\dot{p} : v \in V \mapsto \dot{p}_v \in \mathbb{R}^d$ leképezést (G,p) *infinitezimális mozgásának* nevezünk, ha

$$\left\langle p_{v_i} - p_{v_j}, \dot{p}_{v_i} - \dot{p}_{v_j} \right\rangle = 0, \text{ minden } v_i v_j \in E \text{ élre.}$$

Azt mondjuk, hogy az S mátrix *ferdén szimmetrikus,* ha $S^T = -S$ teljesül. Legyen $S \in \mathbb{R}^{d \times d}$ egy ferdén szimmetrikus mátrix, $t \in \mathbb{R}^d$ egy vektor és vegyük a $\dot{p}(v_i) = \dot{p}_{v_i} = = Sp_{v_i} + t$ leképezést. Ekkor felhasználva azt, hogy $\langle x, Sx \rangle = 0$ bármely $x \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén:

$$\left\langle p_{v_i} - p_{v_j}, (Sp_{v_i} + t) - (Sp_{v_j} + t) \right\rangle = \left\langle p_{v_i} - p_{v_j}, S(p_{v_i} - p_{v_j}) \right\rangle = 0.$$

Tehát az így előállított $\dot{p}$ egy infinitezimális mozgás. Ekkor S egy ortogonális transzformációnak, t pedig egy eltolásnak feleltethető meg.

Azt mondjuk, hogy $\dot{p}$ *triviális infinitezimális mozgás*, vagy másnéven *merevségi mozgás,* ha létezik olyan $S \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ferdén szimmetrikus mátrix, illetve $t \in \mathbb{R}^d$ vektor, hogy $\dot{p}$ előáll $\dot{p}_{v_i} = Sp_{v_i} + t$ alakban.

A triviális infinitezimális mozgások bármely szerkezetnek infinitezimális mozgásai, ebből adódóan az infinitezimális mozgások tere legalább $\binom{d+1}{2}$ dimenziós.

Jelöljük G csúcsainak számát n-nel, illetve éleinek számát m-mel. Egy (G,p) szerkezethez rendelt $R(G,p)$ *merevségi mátrixon* azt az $m \times dn$-es mátrixot értük, melyben a $v_i v_j$ élhez tartozó sorban a v_i csúcshoz tartozó d elemet $p(v_i) - p(v_j)$ vektor koordinátái, a v_j csúcshoz tartozókat pedig a $p(v_j) - p(v_i)$ vektor koordinátái adják, az összes többi elem pedig nulla.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{v_i} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{v_j} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-6}
v_iv_j & 0 \ \ldots \ 0 & p(v_i)-p(v_j) & 0 \ \ldots \ 0 & p(v_j)-p(v_i) & 0 \ \ldots \ 0 \\ \cline{2-6}
\end{array}$$

Egy (G,p) szerkezet *infinitezimálisan (vagy lokálisan) merev,* ha minden infinitezimális mozgása triviális. Vegyük észre, hogy a merevségi mátrix nullterében lévő vektorok éppen az infinitezimális mozgások! Ez alapján a (G,p) szerkezet pontosan akkor infinitezimálisan merev, ha

$$r(R(G,p)) = \begin{cases} dn - \binom{d+1}{2} & \text{ha } n \geq d+2, \\ \binom{n}{2} & \text{ha } n \leq d+1 \end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy a (G,p) szerkezet *generikus*, ha a $p(v_i)$ vektorok koordinátái algebrailag függetlenek $\mathbb{Q}$ felett. A generikus szerkezetek halmaza nem nyílt, de sűrű az $\mathbb{R}^d$-beli realizációk terében, emellett majdnem minden szerkezet generikus.

Ha egy szerkezet nem merev, akkor létezik nem triviális infinitezimális mozgása, így infinitezimálisan merev se lehet. Azaz egy szerkezet infinitezimális merevségéből már következik, hogy a szerkezet merev. Az állítás megfordítása viszont csak generikus realizáció esetén igaz. Ezt 1975-ben Gluck [7] bizonyította, majd 1978-ban tőle függetlenül Asimow és Roth [1] is belátta.

1. Tétel (Asimow és Roth; Gluck)**.** *Legyen G egy legalább $d+1$ csúcsú gráf és (G,p) egy generikus szerkezet, amely merev $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor a szerkezet infinitezimálisan merev.*

Mivel $R(G,p)$ rangja maximális minden generikus p realizációra, (G,p) pontosan akkor infinitezimálisan merev egy p generikus realizációra, ha (G,p) infinitezimálisan merev minden p generikus realizációra. Ezáltal generikus realizáció esetén az infinitezimális merevség csak a G gráftól függ. Ezen észrevétel motiválja a következő definíciót. A G gráf *generikusan merev* (illetve *generikusan globálisan merev*) $\mathbb{R}^d$-ben, ha minden d-dimenziós generikus p realizációra a (G,p) szerkezet merev (illetve globálisan merev). Mivel a merevségi mátrix nullterének dimenziója ugyanaz minden generikus realizáció esetén, a generikus merevség csak a G gráftól függ.

Mivel a generikus merevség egy kombinatorikus tulajdonsága a gráfnak, szeretnénk kombinatorikusan jellemezni az ilyen gráfokat. Laman volt az első, aki [15] cikkében a síkbeli merev szerkezetekre pontos kombinatorikus jellemzést tudott adni.

Azt mondjuk, hogy egy gráf *minimálisan merev* hívunk, ha generikusan merev, de bármely élét eltávolítva már nem az. Egy gráf *redundánsan merev*, ha generikusan merev és bármely él eltávolítása után is az marad. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $X \subseteq V$, ekkor jelöljük $i_G(X)$-szel az X által kifeszített élek számát.

2. Tétel (Laman)**.** *Egy G gráf pontosan akkor minimálisan merev $\mathbb{R}^2$-ben, ha $|E| = 2|V| - 3$ és $i_G(X) \leq 2|X| - 3$ teljesül bármely $X \subseteq V$ esetén.*

Egy n csúcsú és m élű gráf *(k,l)-ritka*, ha minden $n' \leq n$ csúcsú részgráfja legfeljebb $kn' - l$ élt feszít ki. Továbbá, ha $m = kn - l$, akkor azt mondjuk, hogy a gráf *(k,l)-feszes.*

3. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ gráf, melyre $|V| \geq 2$ és $|E| = 2|V| - 3$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

i) $\exists p$, melyre $R(G, p)$ sorai függetlenek;

ii) G (2,3)-feszes;

iii) $G + e$ két éldiszjunkt feszítőfa uniója minden $e \in E$ élre.

Generikus esetben a redundáns merevség segítségével szükséges feltételeket adhatunk egy szerkezet globális merevségére. Ezt Hendrickson [9] fogalmazta meg.

4. Tétel (Hendrickson)**.** *Ha egy, szimplextől különböző, (G, p) szerkezet globálisan merev egy adott p generikus $\mathbb{R}^d$-beli realizációra, akkor*

- *G $(d+1)$-szeresen összefüggő,*
- *(G, p) redundánsan merev.*

Ismert, hogy egy gráf pontosan akkor globálisan merev $\mathbb{R}^1$-ben, ha kétszeresen összefüggő. Hasonló feltételt adott Jackson és Jordán [10] az $\mathbb{R}^2$-beli globális merevségre.

5. Tétel (Jackson és Jordán)**.** *Legyen $G = (V, E)$ egy legalább 4 pontú gráf. Ekkor G pontosan akkor globálisan merev $\mathbb{R}^2$-ben, ha G 3-összefüggő és redundánsan merev $\mathbb{R}^2$-ben.*

Így azt kaptuk, hogy a 4. tétel feltételei 1 és 2 dimenzióban nem csak szükségesek, de elégségesek is. Azonban 3 dimenzióban már nem elégségesek. Connelly [5] mutatta meg, hogy a $K_{5,5}$ redundánsan merev a 3 dimenziós térben és 5-összefüggő, de nem generikusan globálisan merev.

Legyen (G, p) egy d-dimenziós szerkezet, ekkor azt mondjuk, hogy az $\omega : E \to \mathbb{R}$ leképezés *egyensúlyi stressz,* vagy röviden *stressz,* ha

$$\sum_{j | v_i v_j \in E} \omega_{ij}(p(v_i) - p(v_j)) = 0$$

fenn áll minden $v_i \in V$ csúcsra. Az egyensúlyi stressz tehát egy ω vektor a merevségi mátrix bal nullterében: $R(G,p)^T\omega = 0$.

Az egyes élekhez rendelt stresszeket egy Ω *stressz mátrixba* rendezhetjük az alábbi módon:

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} -\omega_{ij} & \text{ha } v_i v_j \in E, \\ \sum\limits_{i \neq j} \omega_{ij} & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az így kapott $|V| \times |V|$-es szimmetrikus mátrixnak minden sor, illetve oszlopösszege nulla. Könnyen belátható, hogy a csupa egyes vektor $(1\ 1 \ldots 1)^T$ és a p összes koordinátavektora az Ω nullterében vannak, így ennek rangja legfeljebb $|V| - d - 1$. Azt mondjuk, hogy Ω maximális rangú, ha rangja pontosan $|V| - d - 1$.

Connelly [6] megmutatta, hogy az egyensúlyi stressz segítségével elégséges feltétel adható az $\mathbb{R}^d$-beli globális merevségre.

6. Tétel (Connelly)**.** *Ha p egy generikus realizáció $\mathbb{R}^d$-ben és létezik egy olyan stressz, melyhez rendelt Ω stressz mátrix maximális rangú, akkor (G,p) globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben.*

Sokáig nyitott kérdés volt annak eldöntése, hogy a globális merevség generikus tulajdonság-e. Végül Connelly sejtését bizonyítva Gortler, Healy és Thurston [8] adták meg erre a választ közös cikkükben .

7. Tétel (Gortler, Healy és Thurston)**.** *Legyen p egy generikus realizáció $\mathbb{R}^d$-ben, úgy, hogy (G,p) globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor (G,p) vagy egy szimplex, vagy létezik egy olyan stressz, melyhez rendelt Ω mátrix rangja maximális.*

3. Mátrixok kiegészíthetősége

Az alapfeladat az, hogy egy hiányosan megadott mátrixot kiegészítsünk. Természetesen további feltételek nélkül a mátrix végtelen sokféleképpen kiegészíthető tetszőleges elemekkel. Annak érdekében, hogy egzakt feladatot kapjunk, érdemes csak egy adott mátrixosztály elemeit elfogadnunk megoldásként. Ezt van, hogy egyértelműen megtehetjük, valamikor véges vagy éppen végtelen sok megoldás létezik, és természesen megadható olyan feladat is, amely nem megoldható. A gyakorlatban sokszor felmerülnek ilyen típusú feladatok, amikor egy hiányos adathalmazt szeretnénk kiegészíteni úgy, hogy a teljes halmaz egy kívánt tulajdonságú legyen.

Most először az alacsony rangú, pozitív szemidefinit Gram-mátrixok kiegészíthetőségének kérdését járjuk körbe.

3.1. Gram-mátrixok

Legyenek $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $\mathbb{R}^d$-beli vektorok, ezeknek megfeleltethetünk egy $n \times n$-es J Gram-mátrixot, melynek elemei az alábbi módon állnak elő:

$$J_{ij} = p_i^T p_j\,;\; i, j = 1, \ldots, n.$$

J definíciójából adódóan legfeljebb d rangú, pozitív szemidefinit és könnyedén meghatározhatjuk Cholesky felbontását is: $J = P^T P$, ahol $P = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$, egy $d \times n$-es mátrix. Emellett ismert, hogy bármely M szimmetrikus, pozitív-szemidefinit mátrixhoz létezik olyan Q mátrix, hogy $M = Q^T Q$.

Vegyünk egy hiányosan megadott J Gram-mátrixot. Ekkor J-hez, kihasználva J szimmetrikusságát, hozzárendelhetünk egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot, ahol $|V| = n$ és $ij \in E$ pontosan akkor teljesül, ha $J_{ij} = p_i^T p_j$ a mátrix egy ismert eleme. Így a csúcsokat a p_i vektoroknak feleltethetjük meg, mely megfeleltetést tekinthetjük egy $p : V \to \mathbb{R}^d$ realizációnak. Azt mondjuk, hogy a (G, p) szerkezet *Gram-ekvivalens* a (G, q) szerkezettel, ha létezik egy olyan $q : V \to \mathbb{R}^d$ leképezés, melyre $\langle q_i, q_j \rangle = \langle p_i, p_j \rangle$ teljesül minden $ij \in E$ esetén. Azt mondjuk, hogy egy (G, p) szerkezet *Gram-kongruens* egy (G, q) szerkezettel, ha $\langle q_i, q_j \rangle = \langle p_i, p_j \rangle$ bármely $i, j \in V$ pontpárra fenáll.

Láthatjuk, hogy ha a J-hez rendelt (G, p) szerkezetre teljesül az, hogy bármely olyan (G, q) szerkezet, amely Gram-ekvivalens (G, p)-vel az kongruens is vele, akkor J egyértelműen kiegészíthető.

Azt mondjuk, hogy a (G, p) szerkezet *lokálisan kiegészíthető* $\mathbb{R}^d$-ben, ha p-nek létezik olyan U_p környezete az $\mathbb{R}^d$-beli realizációk terében, amelyre teljesül, hogy bármely $q \in U_p$-re (G,q) csak akkor lehet Gram-ekvivalens (G,p)-vel, ha kongruens is vele.

Generikus esetben a lokális kiegészíthetőségből következik, hogy a realizációnak nincs olyan folytonos mozgása, amely megtartaná a skaláris szorzatokat. Viszont a lokális kiegészíthetőség nem zárja ki az olyan nemtriviális (azaz ebben az esetben nem ortogonális), nem folytonos mozgások létezésének lehetőségét, amelyek kielégítik a skaláris szorzatokkal megadott feltételeket.

Azt mondjuk, hogy egy d-dimenziós (G,p) szerkezet *globálisan kiegészíthető* $\mathbb{R}^d$-ben, ha bármely d-dimenziós (G,q) szerkezet, amely Gram-ekvivalens (G,p)-vel Gram-kongruens is vele. Ekkor csakis a triviális ortogonális transzformációk (forgatások és tükrözések) olyan mozgások, melyek megőrzik a skaláris szorzatokat.

Míg valamely J mátrixhoz rendelt szerkezet lokális kiegészíthetősége esetén előfordulhat, hogy J-t véges sok lehetséges módon is ki lehet egészíteni, addig a globális kiegészíthetőség egy erősebb tulajdonság, melyből már következik, hogy a hiányzó elemek egyértelműen megadhatók.

Valamely J Gram-mátrixhoz rendelt G gráf nem tartalmaz párhuzamos éleket, azonban hurokélt igen, ha az adott csúcshoz tartozó diagonálelem ismert. Ha az összes diagonálelem ismert, azaz a gráfunkban minden csúcsban van egy hurokél, akkor a gráf pontosan akkor lokálisan kiegészíthető, ha merev.

Vegyünk egy példát, ahol $p_i \in \mathbb{R}^2$

$$p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

az ezek segítségével létrehozott 3×3-as 2 rangú Gram-mátrix

$$J = P^T P = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 4 \\ 10 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

Az alábbi három hiányosan megadott mátrix azt hivatott szemléltetni, hogy olykor nem csak a hiányzó elemek száma, de elhelyezkedése is lényegesen befolyásolhatja a kiegészíthetőség egyértelműségét.

$$A' = \begin{pmatrix} * & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 4 \\ 10 & 4 & 20 \end{pmatrix}, A'' = \begin{pmatrix} 5 & * & 10 \\ * & 4 & 4 \\ 10 & 4 & 20 \end{pmatrix}, A''' = \begin{pmatrix} * & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 4 \\ 10 & 4 & * \end{pmatrix}.$$

Mivel $r(J) = 2$, a J determinánsa 0 lesz. A hiányzó elemeket ismeretlenekkel helyettesítve megoldjuk a $detJ=0$ egyenletet, majd leellenőrizzük, hogy az így kapott eredményekkel kiegészített mátrix pozitív szemidefinit-e.

Az A' mátrix esetén egy egyváltozós, elsőfokú egyenletet kapunk, melynek egyetlen megoldása létezik, az $x=5$. Ezzel a kiegészítéssel visszakapjuk a J mátrixot, amely nyilván pozitív szemidefinit.

Az A'' mátrix esetén a J szimmetriája miatt újból egy egyváltozós, de már másodfokú egyenletet kapunk, melynek a 0 és a 2 a gyökei. A 2 behelyettesítése után természetesen a feltételeknek megfelelő mátrixot kapunk, azonban a

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 4 \\ 10 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

mátrix nem pozitív szemidefinit, így az A''-t is csak egyféleképpen tudjuk Gram-mátrixszá kiegészíteni.

Az A''' mátrix esetén egy kétváltozós, mindkét változójában elsőfokú egyenletet kapunk, melynek alulhatározottsága miatt végtelen sok megoldása van.

3.2. A kiegészíthetőségi mátrix és lokális kiegészíthetőség

Legyen J a $p_1,p_2,\dots,p_n$ $\mathbb{R}^d$-beli vektorokkal meghatározott Gram-mátrix. Ekkor az olyan $\dot{p}:V\rightarrow\mathbb{R}^d$ leképezéseket, melyekre

$$p_i^T\dot{p}_j+p_j^T\dot{p}_i=0 \tag{1}$$

teljesül minden $ij\in E$ él esetén, a (G,p) szerkezet *infinitezimális kiegészíthetőségi-mozgásainak* hívjuk. Az (1) egyenletrendszer együtthatóit egy $C_G(p)$ $m\times dn$-es mátrixba rendezhetjük, ekkor tehát a fenti m egyenletetből álló egyenletrendszer ekvivalens alakja: $C_G(p)\dot{p}=0$. Az így defninált $C_G(p)$-t *kiegészíthetőségi mátrixnak* nevezzük. A kiegészíthetőségi mátrix ritka, minden sorában csupán legfeljebb $2d$ nemnulla eleme van, ezek elhelyezkedését a G gráf, értékét pedig a konkrét p realizáció határozza meg. Az (1) megoldásainak tere legalább $\binom{d}{2}$ dimenziós, mivel az ortogonális transzformációk mind megőrzik a skaláris szorzatot. Legyen S egy rögzített $d\times d$-es mátrix és legyen $\dot{p}_i=Sp_i$ minden $i=1,\dots,n$ csúcsra. Ezt (1)-be behelyettesítve a $p_i^T(S+S^T)p_j=0$ egyenletet kapjuk, amely bármely S ferdén szimmetrikus mátrix esetén triviálisan teljesül. Az ilyen alakban megadható $\dot{p}_i$ mozgásokat a (G,p) szerkezet *triviális k-mozgásainak* hívjuk. A triviális k-mozgások száma $\binom{d}{2}$, amely eltér a merevségelméletben az infinitezimális mozgásokra kapott $\binom{d+1}{2}$ számtól. E különbség annak tudható be, hogy az eltolások bár a távolságokat megtartják, de a skaláris szorzatokat nem.

A kiegészíthetőségi mátrix rangja segíthet annak eldöntésében, hogy a J egyértelműen kiegészíthető-e. Ugyanis, ha

$$\dim ker(C_G(p)) > \binom{d}{2},$$

azaz a $C_G(p)$ nulltere több, mint $\binom{d}{2}$ dimenziós, akkor (1)-nek létezik nemtriviális megoldása, azaz létezik olyan nemtriviális infinitezimális mozgás, amely megőrzi a skaláris szorzatot.

Azt mondjuk, hogy a (G,p) szerkezet *infinitezimálisan kiegészíthető*, ha $r(C_G(p)) = dn - \binom{d}{2}$, illetve *k-független*, ha $r(C_G(p)) = m$, azaz ha a $C_G(p)$ mátrix sorfüggetlen.

Megjegyezzük, hogy ha a (G,p) szerkezet nem lokálisan kiegészíthető, akkor az

$$f_G(p) = (\dots, \langle p_u, p_v \rangle, \dots), \ \left(p \in \mathbb{R}^{d|V|}\right).$$

módon definiált $f_G : \mathbb{R}^{d|V|} \to \mathbb{R}^{|E|}$, úgynevezett *kiegészíthetőségi függvényhez* tartozó Jacobi-mátrix megad egy infinitezimális k-mozgás, azaz a szerkezet ekkor nem infinitezimálisan kiegészíthető. Így azt kapjuk, hogy az infinitezimális kiegészíthetőség erősebb tulajdonság a lokális kiegészíthetősénél.

Ezentúl

A kiegészíthetőségi mátrix rangja egyenlő a legnagyobb nemnulla főminorjának méretével. Ezek a főminorok a konfiguráció koordinátáinak egész együtthatós polinomjai. Ez alapján minden generikus p esetén ugyanaz lesz a kiegészíthetőségi mátrix rangja. Így a generikus lokális kiegészíthetőség magának a gráfnak és nem az éppen adott realizációnak a tulajdonsága.

Azt mondjuk, hogy a G gráf *kiegészíthető*, vagy *k-független* $\mathbb{R}^d$-ben, ha (G,p) kiegészíthető, vagy k-független valamely/bármely $\mathbb{R}^d$-beli generikus p realizációra.

Mivel majdnem minden realizáció generikus, egy random realizáció segítségével elkészített a kiegészíthetőségi mátrix nullterének dimenziója egy valószínűséggel azonos lesz az eredeti mátrix nullterének dimenziójával, ebből pedig megállapítható, hogy a gráfunk generikusan lokálisan kiegészíthető-e, vagy sem. Ezt kihasználva Singer és Cucuringu [16] hatékony randomizált algoritmusokat adtak a globális, illetve lokális kiegészíthetőség tesztelésére.

Ha G egy páros gráf, melynek csúcsosztályai V_1, V_2, akkor bármely $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mátrixok esetén, melyekre $B = -A^T$, ha $\dot{p}_i = Ap_i$ minden $i \in V_1$ csúcsra, illetve $\dot{p}_j = Bp_j$ minden $j \in V_2$ csúcsra teljesül, akkor $\dot{p}$ a (G,p) egy k-mozgása lesz. Így ebben az eseben

$$r(C_G(p)) \leq dn - d^2.$$

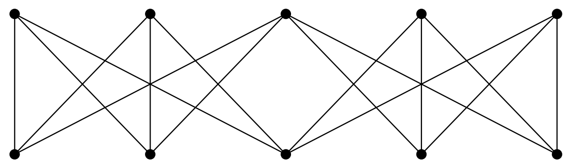
Ha G egy páros gráf és $min(|V_1|, |V_2|) \geq d+1$, akkor a $C_G(p)$ rangjára kapott két felső becslésből egy szükséges feltételt kaphatunk a G k-függetlenségére.

1. Lemma. [12] *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Ha G k-független $\mathbb{R}^d$-ben, akkor*

– $i_G(X) \leq d|X| - \binom{d}{2}$ *minden $X \subseteq V$ csúcshalmazra, melyre $|X| \geq d$,*

– $i_H(X) \leq d|X| - d^2$ *minden olyan $H \subseteq G$ páros részgráfra, melyre $V(H) = X$ teljesül.*

Singer és Cucuringu [16] megmutatták, hogy ez a feltételpár egy dimenzióban nem csak szükséges, hanem elégséges feltétele is a k-függetlenségnek. Az 1. ábrán lévő gráf egy példa arra, hogy ez két dimenzióban már nem teljesül.



1. ábra. Ez a gráf teljesíti az 1. lemma feltételeit, mégsem k-független $\mathbb{R}^2$-ben.

3.3. Általános, alacsony rangú, nem négyzetes mátrixok

3.3.1. Alapmodell és stressz mátrix

Egy általános $n_1 \times n_2$-es, d-rangú A mátrix felbontható $A = UV^T$ alakban, ahol $U \in \mathbb{R}^{n_1 \times d}$, $V \in \mathbb{R}^{n_2 \times d}$. Az U és V mátrixokat felírhatjuk $U = [u_1 u_2 \dots u_{n_1}]^T$, illetve $V = [v_1 v_2 \dots v_{n_2}]^T$ alakban, ahol $u_1, \dots, u_{n_1}, v_1, \dots, v_{n_2}$ $\mathbb{R}^d$-beli vektorok. Így A elemeit megkaphatjuk $A_{ij} = u_i^T v_j$ skaláris szorzatokként.

Megjegyezzük, hogy az $A = UV^T$ felbontás nem egyértelmű, hiszen, ha veszünk egy $W \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertálható mátrixot, akkor az $U_W = UW$ és $V_W = V(W^{-1})^T$ mátrixok szintén előállítják A-t az $A = U_W V_W^T$ alakban. Az invertálható mátrixok sűrű, nyílt halmazt alkotnak a $d \times d$-es mátrixok d^2-dimenziós terében.

Az alapfeladat egy hiányosan megadott, nem négyzetes mátrix kiegészítése. Az A mátrixhoz konstruálhatunk egy $G = (U_G, V_G; E)$ segédgráfot. A G csúcsait az $u_1, \dots, u_{n_1}$, illetve $v_1, \dots, v_{n_2}$ vektoroknak feleltetjük meg, így $|U_G| = n_1$ és $|V_G| = n_2$. A G éleit az A ismert elemeinek feleltetjük meg, azaz a segédgráfban az u_i és v_j vektoroknak megfelelő csúcsok között pontosan akkor halad él, ha A_{ij} az A egy ismert eleme. Ez az általános nem négyzetes mátrix modell azon speciális esete a Gram-mátrix modellnek, amelynél a mátrixhoz konstruált gráf páros.

Legyen G egy nem négyzetes mátrixhoz segédgráfként konstruált páros gráf és $p : V \to \mathbb{R}^d$ a G egy realizációja. Ekkor a Gram-mátrix modellhez hasonlóan azt mondjuk, hogy (G,p) és (G,q) szerkezetek *biekvivalensek,* ha $\langle p_i,p_j\rangle=\langle q_i,q_j\rangle$ teljesül minden $ij\in E$ élre, illetve *bikongruensek,* ha $\langle p_i,p_j\rangle=\langle q_i,q_j\rangle$ teljesül minden $(i,j)\in$ $\in U_G\times V_G$ pontpárra.

Ha létezik olyan $A\in\mathbb{R}^{d\times d}$ invertálható mátrix, melyre $q_i=A^Tp_i$ és $q_j=A^{-1}p_j$ minden $i\in U_G$, $j\in V_G$ pontokra, akkor

$$\langle q_i,q_j\rangle=\langle A^Tp_i,A^{-1}p_j\rangle=\langle p_i,AA^{-1}p_j\rangle=\langle p_i,p_j\rangle$$

minden $(i,j)\in U_G\times V_G$ pontpárra, azaz (G,p) bikongruens (G,q)-val. Azt mondjuk, hogy a (G,p) szerkezet *globálisan bikiegészíthető,* ha bármely d-dimenziós q realizáció esetén a (G,q) és a (G,p) biekvivalenciájából következik a két szerkezet bikongruenciája. A (G,p) szerkezet *lokálisan bikiegészíthető,* ha p-nek van egy olyan $N(p)$ nyílt környezete a d-dimenziós realizációk terében, hogy bármely olyan $q\in N(p)$ realizáció esetén, amelyre a (G,q) szerkezet biekvivalens (G,p)-vel teljesül az is, hogy (G,q) bikongruens (G,p)-vel.

Legyen a $\dot p: U_G\cup V_G\to\mathbb{R}^d$ egy olyan leképezés, melyre

$$u_i^T\dot p_j+v_j^T\dot p_i=0,\text{ minden } u_iv_j\in E \text{ élre.} \tag{2}$$

A (2) egyenletrendszer együtthatóit egy $C_G(p)$ mátrixba rendezhetjük úgy, hogy $C_G(p)^T\dot p=0$ teljesüljön. A $C_G(p)$ kiegészíthetőségi mátrixnak $|E|=m$ sora és $d(n_1+$ $+n_2)$ oszlopa, de soronként csupán $2d$ nemnulla eleme van.

Legyenek B, C mátrixok olyanok, hogy $\dot u_i=Bu_i$ minden $i=1,\dots,n_1$ csúcsra és $\dot v_j=Cv_j$ minden $j=1,\dots,n_2$ csúcsra. Ekkor a (2) egyenletrendszer $u_i^T(B+C^T)v_j=0$ alakba írható, mely új egyenlet mindig teljesül, ha $B=-C^T$.

Azt mondjuk, hogy a $\dot p: V_G\cup U_G\to\mathbb{R}^d$ leképezés egy triviális k-mozgás, ha létezik olyan $A\in\mathbb{R}^{d\times d}$ mátrix, hogy $\dot p_i=Ap_i$ és $\dot p_j=-A^Tp_j$ teljesül bármely $i\in U_G$ és $j\in V_G$ esetén.

Ez alapján a triviális k-mozgások egy d^2 dimenziós alteret feszítenek ki, így a $C_G(p)$ kiegészíthetőségi mátrix magjára $kerC_G(p)\geq d^2$ teljesül. Ha a kiegészíthetőségi mátrix magterének dimenziója nagyobb, mint d^2, akkor létezik olyan nemtriviális mozgás, amely megőrzi a mátrix vizsgált elemeit (itt a triviális mozgásokon az $\mathbb{R}^d$-beli invertálható transzformációkat értjük). A $C_G(p)$ kiegészíthetőségi mátrix rangjára $r(C_G(p))\leq\min\{|U_G||V_G|,d|V|-d^2\}$ teljesül. Azt mondjuk, hogy a G *infinitezimálisan bikiegészíthető,* ha

$$r(C_G(p))=\begin{cases}d|V|-d^2,\text{ ha } \min\{|U_G|,|V_G|\}\geq d\\ |U_G||V_G|,\text{ ha } \min\{|U_G|,|V_G|\}<d.\end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy generikus p realizáció esetén a (G,p) szerkezet infinitezimális bikiegészíthetősége ekvivalens a lokális bikiegészíthetőségével. Ennek következtében azt mondjuk, hogy egy G páros gráf *lokálisan bikiegészíthető* $\mathbb{R}^d$*-ben,* ha a (G,p) szerkezet lokálisan bikiegészíthető valamely d-dimenziós generikus p realizációra. Ebben az esetben is érvényes, hogy ha van egy olyan generikus realizáció, melyre az előbbi feltétel teljesül, akkor az minden generikus realizációra teljesülni fog.

Azonban a generikus bikiegészíthetőség nem generikus tulajdonság. Azt mondjuk, hogy egy G gráf *globálisan bikiegészíthető,* ha minden generikus p realizációra (G,p) globálisan bikiegészíthető.

A Gram-mátrixok esetéhez hasonlóan a lokális bikiegészíthetőségből nem következik a globális eset.

3.3.2. Páros gráfok kiegészíthetősége

Ebben a fejezetben a G páros gráfunkhoz különböző segédgráfokat konstruálunk, melyek segítségével szükséges és elégséges feltételeket adhatunk a (G,p) szerkezet globális bikiegészíthetőségére.

Azt mondjuk, hogy G *félig-egyszerű,* ha hurokélt igen, de többszörös élt nem tartalmaz. Legyen $G=(U_G,V_G;E)$ egy páros gráf, (G,p) egy d-dimenziós szerkezet és legyenek az $u_1,\dots,u_d \in U_G$ olyan pontjai a gráfnak, melyekre a $p(u_1),\dots,p(u_d)$ vektorok az $\mathbb{R}^d$ tér egy bázisát alkotják. Jelölje G^+ azt a gráfot, melyet úgy kapunk G-ből, hogy hozzáadunk egy teljes, d csúcsú, félig egyszerű gráfot, melynek csúcsai az $\{u_1,\dots,u_d\}$ pontok.

2. Lemma. [11] *Legyen $C'_G(p)$ az a mátrix, melyet úgy kapunk $C_G(p)$-ből, hogy kitöröljük belőle az $u_1,\dots,u_d$ csúcsokhoz tartozó oszlopokat. Ekkor*

$$r(C'_G(p)) = r(C_G(p)) = r(C_{G^+}(p)) - \binom{d+1}{2}.$$

Bizonyítás. Legyen T a triviális k-mozgások halmaza és legyen F az olyan infinitezimális k-mozgások halmaza, melyek helyben hagyják az $u_1,\dots,u_d$ pontokat, azaz $\dot{p}(u_i)=0$ bármely $0\le i\le d$ indexre. Ekkor $\ker C_G(p)=T\oplus F$ és $\dim T=d^2$. F valójában izomorf $kerC'_G(p)$-vel, így $r(C'_G(p)) = r(C_G(p))$. Emellett a $C_{G^+}(p)$ kiegészíthetőségi mátrixra $C_{G^+}(p) = \begin{pmatrix} C_{K_d{}^\circ}(p) & 0 \\ * & C'_G(p) \end{pmatrix}$, ahol $K_d{}^\circ$ egy félig egyszerű teljes gráf az $u_1,\dots,u_d$ pontokon. Így

$$r(C_{G^+}(p)) = r(C'_G(p)) + r(C_{K_d{}^\circ}(p)) = r(C_G(p)) - \binom{d+1}{2}. \qquad \square$$

Ebből az következik, hogy (G,p) pontosan akkor infinitezimálisan bikiegészíthető, ha (G^+,p) infinitezimálisan kiegészíthető. Így generikus p esetén azt kapjuk, hogy G akkor és csak akkor lokálisan bikiegészíthető, ha G^+ lokálisan kiegészíthető.

Vegyünk egy $G=(U_G,V_G;E)$ páros gráfot és d darab $u_1,\dots,u_d$, a G egyazon csúcsosztályába tartozó csúcsot, ekkor azt mondjuk, hogy a (G,p) d-dimenziós szerkezet *standard pozícióban van az* $u_1,\dots,u_d$ *pontokra nézve,* ha a $p(u_1),\dots,p(u_d)$ vektorok az $\mathbb{R}^d$ tér standard bázisát alkotják. Ha a (G,p) szerkezet olyan, melyben G-nek léteznek olyan $u_1,\dots,u_d\in U_G$ csúcsai, melyekre a $p(u_1),\dots,p(u_d)$ vektorok az $\mathbb{R}^d$ tér egy bázisát alkotják, akkor egyértelműen létezik egy olyan $(G,\tilde{p})$ szerkezet, amely standard pozícióban van az $u_1,\dots,u_d$ pontokra nézve és bikongruens (G,p)-vel.

3. Lemma. [11] *Az alábbiak ekvivalensek:*

i) (G,p) *globálisan bikiegészíthető*

ii) $(G,\tilde{p})$ *globálisan bikiegészíthető*

iii) $(G^+,\tilde{p})$ *globálisan kiegészíthető.*

Bizonyítás. Az i) és ii) állítások ekvivalenciája következik a (G,p) és $(G,\tilde{p})$ bikongruenciájából, és abból, hogy a bikongruencia egy ekvivalencia reláció.

Először megmutatjuk, hogy ii)-ből következik iii). Tegyük fel, hogy $(G,\tilde{p})$ globálisan kiegészíthető és vegyük a G^+ két ekvivalens realizációját, $(G^+,\tilde{p})$-ot és $(G^+$ $+,q)$-t. Mivel $(K^\circ{}_d,p)$ globálisan kiegészíthető, feltehetjük, hogy $\tilde{p}(u_i){=}q(u_i)$ teljesül minden $1\le i\le d$ indexre. Így (G^+,q) standard pozícióban van. Abból, hogy $(G,\tilde{p})$ globálisan bikiegészíthető következik, hogy $q=\tilde{p}$. Ebből azt kaptuk, hogy bármely $(G^+,\tilde{p})$ szerkezettel ekvivalens szerkezet kongruens is vele, így $(G^+,\tilde{p})$ globálisan kiegészíthető.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy iii) teljesül, azaz $(G^+,\tilde{p})$ globálisan kiegészíthető és legyen (G,q) egy $(G,\tilde{p})$-vel biekvivalens szerkezet. Legyen $(G,\tilde{q})$ egy (G,q)-val bikongruens, standard pozícióban lévő szerkezet. Ekkor a $(G^+,\tilde{p})$ és $(G^+$ $+,\tilde{q})$ szerkezetek ekvivalensek, így (G^+,p) globális kiegészíthetősége miatt $\tilde{p}=\tilde{q}$. Ebből azt kaptuk, hogy (G,p) globálisan bikiegészíthető. □

Megjegyezzük, hogy a 3. lemmából még nem következik G bikiegészíthetőségének és G^+ kiegészíthetőségének ekvivalenciája, hiszen bár a (G,p) szerkezet bikongruens $(G,\tilde{p})$-vel, (G^+,p) és $(G^+,\tilde{p})$ kongruenciája már nem teljesül, ha p generikus. Más módszerrel viszont be lehet bizonyítani a két állítás ekivivalenciáját.

4. Lemma. [11] *Legyen* $G = (U_G, V_G; E)$ *egy olyan páros gráf, melyre* $|U_G|, |V_G| \geq$ $\geq d$. *Ekkor* G *pontosan akkor globálisan bikiegészíthető* $\mathbb{R}^d$*-ben, ha* G^+ *globálisan kiegészíthető* $\mathbb{R}^d$*-ben.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy G globálisan bikiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben. Legyen G^* az a gráf, melyet úgy kapunk G^+-ból, hogy hozzávesszük az összes U_G és V_G közt haladó élt is. Vegyünk egy (G^+, p) generikus szerkezetet és egy vele ekvivalens (G^+, q) szerkezetet. Mivel G globálisan bikiegészíthető, ezért (G^*, p) ekvivalens (G^*, q)-val. Mivel G^* megkapható $K^{\circ}{}_d$-ből 0-kiterjesztések és élhozzávételek sorozatával, G^* globálisan kiegészíthető, így $p = q$. Ebből azt kapjuk, hogy G^+ globálisan kiegészíthető.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy G nem globálisan bikiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor léteznek olyan (G, p) és (G, q) biekvivalens szerkezetek, hogy $\langle p(a), p(b)\rangle \neq \langle q(a), q(b)\rangle$ teljesül valamely $a \in U_G$, $b \in V_G$ pontokra. G^+ infinitezimálisan kiegészíthető, hiszen, ha nem lenne az, akkor globálisan kiegészíthető sem lehetne. Így a 2. lemma szerint G infinitezimálisan bikiegészíthető. Mivel p generikus, ezért a $q(V)$ vektorok általános helyzetűek, azaz az $\{u_1, \ldots, u_d\}$ vektorok kifeszítik az $\mathbb{R}^d$ teret. Jelöljük P-vel, illetve Q-val azokat a $d \times d$-es mátrixokat, melyek i-edik oszlopai megegyeznek a $p(u_i)$, illetve $q(u_i)$ oszlopvektorokkal. Legyen

$$q'(v) = \begin{cases} PQ^{-1}q(v), \text{ ha } v \in U_G \\ (P^{-1})^T Q^T q(v), \text{ ha } v \in V_G \end{cases}.$$

Belátjuk, hogy (G^+, q') ekvivalens, de nem kongruens (G^+, p)-vel. A q' definíciójából adódóan $q'(u_i) = p(u_i)$ teljesül minden $1 \leq i \leq d$ indexre, így bármely $1 \leq i, j \leq d$ indexpár esetén $\langle p(u_i), p(u_j)\rangle = \langle q'(u_i), q'(u_j)\rangle$ is fennáll. A definíció alapján bármely $u \in U_G$ és $v \in V_G$ esetén $\langle q'(u), q'(v)\rangle = \langle q(u), q(v)\rangle$. Ebből azt kapjuk, hogy $\langle q'(u), q'(v)\rangle =$ $= \langle p(u), p(v)\rangle$ minden $uv \in E(G^+)$ esetén, de $\langle q'(a), q'(b)\rangle \neq \langle p(a), p(b)\rangle$. Tehát azt kaptuk, hogy a (G^+, q') szerkezet ekvivalens a (G^+, p) szerkezettel, de nem kongruens bele. Így G^+ nem globálisan kiegészíthető. $\square$

4. A lokális és globális kiegészíthetőség kombinatorikus megközelítése

4.1. Lokális Gram-kiegészíthetőségre vonatkozó állítások

Az alábbi állításokat Singer és Cucuringu [16] bizonyították.

1. Állítás. *Bármely lokálisan kiegészíthető, d rangú, $n \times n$-es J Gram-mátrixból ki lehet törölni további elemeket úgy, hogy lokálisan kiegészíthető maradjon, és csupán $dn - \binom{d}{2}$ ismert eleme legyen.*

Bizonyítás. A kiegészíthetőségi mátrixnak szükségszerűen $dn - \binom{d}{2}$ rangúnak kell lennie, így mindaddig elhagyhatunk egy tetszőleges, a többitől lineárisan függő egyenletet, ameddig pontosan $dn - \binom{d}{2}$ egyenlet nem marad. □

2. Állítás. *Legyen J egy lokálisan kiegészíthető, d rangú, $n \times n$-es Gram-mátrix, melyhez konstruált G_J gráf élszámára $|E(G_J)| = dn - \binom{d}{2}$ teljesül. Ekkor bármely $d \leq$ $\leq n' \leq n$ szám esetén J bármely $J' \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$ részmátrixához rendelt $G_{J'}$ gráf élszámára $|E(G_{J'})| \leq dn' - \binom{d}{2}$ teljesül.*

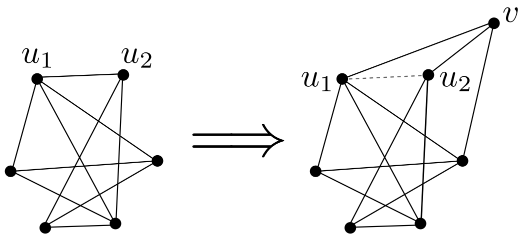
Bizonyítás. Minden $(i, j) \in E(G_J)$ élhez tartozik egy $p_i^T \dot{p}_j + p_j^T \dot{p}_i = 0$ egyenlet. A lokális kiegészíthetőségre adott feltételből és az első állításunkból adódóan ezek az egyenletek lineárisan függetlenek. Indirekt tegyük fel, hogy egy $J' \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$ részmátrixra $|E(G_{J'})| > dn' - \binom{d}{2}$ teljesül, ekkor az első állítás szerint a részmátrix által meghatározott egyenletek összefüggők lennének, ami ellentmondás. □

8. Tétel. *Egy G gráf pontosan akkor minimálisan lokálisan Gram kiegészíthető egy dimenzióban, ha G minden összefüggő komponense előáll egy fa és egy él összegeként, amely hozzávett él egy páratlan kört határoz meg.*

4.2. Induktív konstrukciók

A legismertebb induktív műveletek az úgynevezett Henneberg műveletek, a 0-kiterjesztés és az 1-kiterjesztés. Egy adott $G = (V, E)$ gráfra alkalmazva az $\mathbb{R}^d$-beli *0-kiterjesztés* egy új v csúcsot ad a gráfhoz és azt egy-egy éllel összeköti d darab tetszőleges eredeti csúccsal. Az $\mathbb{R}^d$-beli *1-kiterjesztés*, kitöröl egy meglévő $u_1 u_2 \in E$ élt, új csúcsként hozzáadja v-t és a belőle induló $u_1 v, u_2 v, u_3 v \ldots, u_{d+1} v$ éleket, ahol $u_3, \ldots, u_{d+1} \in V \backslash \{u_1, u_2\}$ különböző csúcsok.

Ezek az induktív műveletek sokszor hasznosak merevségi kérdések vizsgálatában, ugyanis pár tulajdonság invariáns ezekre nézve. Ismert, hogy a 0-kiterjesztés és az



2. ábra. Példa a két dimenziós 1-kiterjesztésre.

1-kiterjesztés is megőrzi egy gráf merevségét, mint ahogy az is, hogy a Laman tételben szereplő (2,3)-feszes gráfok mind előállíthatók K_2-ből a Henneberg műveletek segítségével. Továbbá Connelly eredménye az, hogy az 1-kiterjesztés megőrzi a globális merevséget $\mathbb{R}^2$-ben. Az 5. tételben szereplő gráfok is mind megkaphatók K_4-ből 1-kiterjesztések és élek hozzávételének ismétléseivel. Ismert, hogy az 1-kiterjesztés megtartja egy gráf globális merevségét $\mathbb{R}^d$-ben, a 0-kiterjesztés viszont nem, hiszen a d-dimenziós globális merevségnek szükséges feltétele a $(d+1)$-összefüggőség. Könnyen belátható az is, hogy a 0-kiterjesztés megőrzi a lokális kiegészíthetőséget. Ezzel szemben az 1-kiterjesztés nem őrzi meg a lokális kiegészíthetőséget, például $d = 1$ esetén a lokálisan kiegészíthető C_3-ból 1-kiterjesztéssel kapott C_4 már nem lokálisan kiegészíthető.

3. Állítás. [12] *Legyenek (G,p) és (G',p') olyan d-dimenziós szerkezetek, melyekre*

i) G' a G-ből 0-kiterjesztéssel (a v csúcs és az $u_1v,\dots,u_dv$ élek hozzávételével) kapott gráf,

ii) $p(u) = p'(u)$ minden $u \in V(G)$ csúcsra,

továbbá tegyük fel, hogy a (G,p) szerkezet k-független és a $0, p(u_1),\dots,p(u_d)$ pontok általános helyzetűek $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor a (G',p') szerkezet is k-független.

Legyen G egy hurokél mentes gráf és jelöljük G°-vel azt a gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy G minden csúcsához hozzáadunk még egy hurokélt is. A $G*\{v\}$ jelölje a G-hez rendelt *kúp-gráfot,* melyet úgy kapunk, hogy G-hez hozzáadunk egy új v csúcsot, majd ezt G minden eredeti csúcsával összekötjük. Egy (G,p) szerkezet esetén jelölje p^* a p $V(G)\cup v$-re vett kiterjesztését úgy, hogy $p^*(v) = 0$ legyen.

A továbbiakban ezen műveletek a segítségével olyan állításokat és következményeket fogalmazunk meg, melyek tovább erősítik a merevségelmélet és a kiegészíthetőségi probléma kapcsolatát. A következő tulajdonságot Singer és Cucuringu [16] figyelte meg.

4. Állítás. *Legyen $G = (V,E)$ egy egyszerű gráf és (G,p) egy d-dimenziós szerkezet úgy, hogy $p(v) \neq 0$ teljesüljön minden $v \in V$ csúcsra. Ekkor (G°,p) pontosan akkor* *infinitezimálisan, illetve globálisan kiegészíthető* $\mathbb{R}^d$*-ben, ha* $(G*\{v\}, p^*)$ *infinitezimálisan, illetve globálisan merev* $\mathbb{R}^d$*-ben.*

Whiteley eredménye [18], hogy G pontosan akkor merev $\mathbb{R}^{d-1}$-ben, ha $G*\{v\}$ merev $\mathbb{R}^d$-ben.

1. Következmény. *Legyen* G *egy hurokélmentes gráf, ekkor* G° *pontosan akkor kiegészíthető* $\mathbb{R}^d$*-ben, ha* G *merev* $\mathbb{R}^{d-1}$*-ben.*

Connelly és Whiteley eredeménye [4], hogy egy G gráf pontosan akkor globálisan merev $\mathbb{R}^{d-1}$-ben, ha $G*\{v\}$ globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben. Ebből az észrevételből és az előbbi állításból együtt az alábbi következmény adódik.

2. Következmény. *Legyen* G *egy hurokélmentes gráf, ekkor* G° *pontosan akkor globálisan kiegészíthető* $\mathbb{R}^d$*-ben, ha* G *globálisan merev* $\mathbb{R}^{d-1}$*-ben*

Ez alapján bármely $n \geq 1$-re K_n° globálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben. A 2. következményből láthatjuk, hogy egy G° alakú gráf globális kiegészíthetősége egy generikus tulajdonság.

3. Következmény. [12] *Legyen* G *egy gráf. Ekkor*

i) Ha G *lokálisan kiegészíthető* $\mathbb{R}^d$*-ben, akkor vagy* G $(d-1)$*-szeresen pontösszefüggő, vagy* G *egy legfeljebb* $d-1$ *csúcsú félig-egyszerű teljes gráf,*

ii) Ha G *globálisan kiegészíthető* $\mathbb{R}^d$*-ben, akkor vagy* G d*-szeresen pontösszefüggő, vagy* G *egy legfeljebb* d *csúcsú félig-egyszerű teljes gráf.*

Legyen $G=(V,E)$ egy félig-egyszerű gráf. Azt mondjuk, hogy $G \circ v$ a G-ből *hurkos kúp kiterjesztéssel* kapott gráf, ha $V(G \circ v) = V \cup v$ és $E(G \circ v) = E \cup \{uv : u \in V(G \circ v)\}$.

5. Lemma. G *pontosan akkor lokálisan kiegészíthető* $\mathbb{R}^d$*-ben, ha* $G \circ v$ *lokálisan kiegészíthető* $\mathbb{R}^{d+1}$*-ben.*

Bizonyítás. Egy szerkezet pontosan akkor infinitezimálisan kiegészíthető, ha minden infinitezimális k-mozgása egy origó körüli forgatás. Legyen $(G \circ v, p)$ egy $\mathbb{R}^{d+1}$-beli generikus szerkezet. Ezt a szerkezetet egy alkalmas forgatással átvihetjük egy olyan $(G \circ v, q)$ szerkezetbe, melyben $q(v) = (t, 0, \ldots, 0)$, valamely $t \in \mathbb{R}$ számra. Ekkor $(G \circ v, p)$ pontosan akkor infinitezimálisan kiegészíthető, ha $(G \circ v, q)$ infinitezimálisan kiegészíthető. Legyen $\dot{q}$ a $(G \circ v, q)$ szerkezet egy infinitezimális k-mozgása. Mivel $G \circ v$ tartalmaz egy v-hez tartozó hurokélt, $\dot{q}(v) = (0, \ldots, 0)$. Mivel minden $u \in V$ csúcsra $uv \in E(G \circ v)$, a $\dot{q}(u)$ első komponense 0 minden $u \in G \circ v$ csúcs esetén.

Legyen $q' : V \to \mathbb{R}^d$ a $\dot{q}$ vetülete az utolsó d koordinátájára, azaz legyen $q'(u) = (\dot{q}_2(u), \ldots, \dot{q}_{d+1}(u))$ minden $u \in V$ csúcsra. Ekkor q' infinitezimális k-mozgása lesz a $(G, \tilde{q})$ szerkezetnek, ahol $\tilde{q}(u) = (q_2(u), \ldots, q_{d+1}(u)) \in \mathbb{R}^d$ minden $u \in V$ csúcsra.

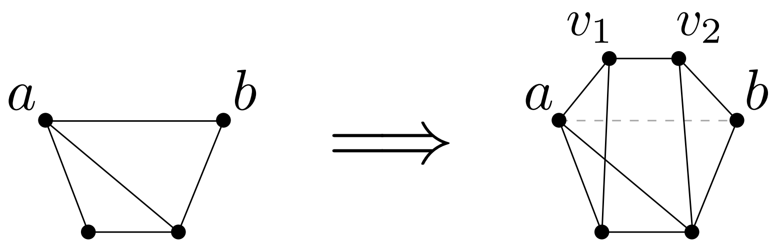
Hasonlóan a $(G, \tilde{q})$ szerkezet bármely q' infinitezimális k-mozgását kiterjesztjük úgy egy $\dot{q} : V \cup \{v\} \to \mathbb{R}^{d+1}$ mozgássá, hogy $\dot{q}(v) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$ legyen, az $u \in V$ csúcsokra pedig $\dot{q}(u) = [0, q'(u)]$ teljesüljön, akkor $\dot{q}$ a $(G \circ v, q)$ szerkezet egy infinitezimális k-mozgása lesz.

Így bijekciót létesíthetünk $(G \circ v, q)$ és $(G, \tilde{q})$ infinitezimális k-mozgásai között. Ezt felhasználva, ha $G \circ v$ nem lenne lokálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^{d+1}$-ben, akkor G se lehetne az $\mathbb{R}^d$-ben. □

4.3. A k-függetlenséget megőrző műveletek

4.3.1. Dupla 1-kiterjesztés

Legyen $G = (V, E)$ egy félig-egyszerű gráf. A *d-dimenziós dupla 1-kiterjesztés* során kitörlünk egy meglévő $ab \in E$ élt és hozzáadunk két új csúcsot v_1-et és v_2-t és $2d+1$ darab új, belőlük kiinduló élt, az av_1, v_1v_2, v_2b éleket, emellett v_1-hez még a $v_1u_1^1, \ldots, v_1v_1^{d-1}$ éleket és v_2-höz a $v_2u_2^1, \ldots, v_2v_2^{d-1}$ éleket, ahol $\{u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^{d-1}\}$ illetve $\{u_2^1, u_2^2, \ldots, u_2^{d-1}\}$ $d-1$ különböző csúcs $(V \cup \{v_1\}) \setminus \{a\}$-ban, illetve $(V \cup \cup \{v_2\}) \setminus \{b\}$-ben. A művelet során az eredeti élek közül egy hurokélt is elhagyhatunk, ekkor nyilván $a = b$.



3. ábra. Példa az $\mathbb{R}^2$-beli dupla 1-kiterjesztésre.

6. Lemma. [12] *Legyen $G = (V, E)$ egy félig-egyszerű gráf és $G' = (V', E')$ a G-ből d-dimenziós dupla 1-kiterjesztéssel kapott gráf. Ekkor ha G k-független $\mathbb{R}^d$-ben, akkor G' is k-független lesz $\mathbb{R}^d$-ben.*

Bizonyítás. A bizonyítás során a definícióban szereplő jelöléseket használjuk. Mivel G k-független, létezik olyan $p : V \to \mathbb{R}^d$ realizációja, melyhez rendelt $C_G(p)$ kiegészíthetőségi mátrix sorfüggetlen. Legyen $p' : V \to \mathbb{R}^d$ az alábbi:

$$p'(u) = \begin{cases} p(b), \text{ ha } u = v_1 \\ p(a), \text{ ha } u = v_2 \\ p(u) \text{ különben} \end{cases} .$$

Belátjuk, hogy $C_{G'}(p')$ is sorfüggetlen.

Először tekintsük azt az esetet, amikor $a \neq b$. Ekkor $C_{G'}(p')$ av_1, v_1v_2, v_2b élekhez tartozó sorai:

	v_1	v_2	a	b	$V' \setminus \{a, b, v_1, v_2\}$
av_1	p_a	0	p_b	0	0
v_2b	0	p_b	0	p_a	0
v_1v_2	p_a	p_b	0	0	0

Ha vesszük az av_1 és v_2b sorok összegét, majd ebből kivonjuk a v_1v_2 sort, akkor az alábbi eredményt kapjuk:

v_1	v_2	a	b	$V' \setminus \{a, b, v_1, v_2\}$
0	0	p_b	p_a	0

amely megegyezik $C_G(p)$ ab élhez tartozó sorával. Így $C_{G'}(p')$ az alábbi alakba írható:

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 & v_1 & v_2 & V' \setminus \{v_1, v_2\} \\ \cline{2-4}
av_1 & p_a & 0 & * \\ \cline{2-4}
v_1u_1^1 & p_{u_1^1} & & \\
\vdots & \vdots & 0 & * \\
v_1u_1^{d-1} & p_{u_1^{d-1}} & & \\ \cline{2-4}
v_2b & 0 & p_b & * \\ \cline{2-4}
v_2u_2^1 & & p_{u_2^1} & \\
\vdots & 0 & \vdots & * \\
v_2u_2^{d-1} & & p_{u_2^{d-1}} & \\ \cline{2-4}
 & 0 & 0 & C_G(p) \\ \cline{2-4}
\end{array}$$

Ebből láthatjuk, hogy $C_{G'}(p')$ is sorfüggetlen. Hasonlóan igazolhatjuk az $a = b$ esetet is. $\square$

E lemma segítségével megadhatjuk az 1 dimenziós lokálisan kiegészíthető gráfok egy jellemzését. Azt mondjuk, hogy egy G gráf *minimálisan lokálisan kiegészíthető,* ha G lokálisan kiegészíthető, de bármely $e \in E(G)$ él esetén $G - e$ már nem lokálisan kiegészíthető. A következő tételben szereplő *i*) és *ii*) részek ekvivalenciáját már

Singer és Cucuringu is bizonyította [16] cikkében.

9. Tétel. [12] *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

i) G minimálisan lokálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^1$-ben;

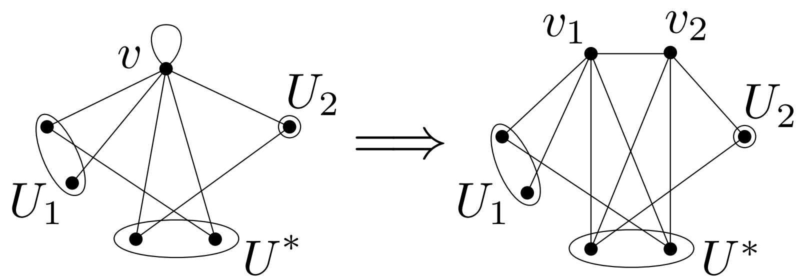
ii) G minden összefüggő komponense pontosan egy kört tartalmaz, amely páratlan;

iii) G-t 0-kiterjesztések és dupla 1-kiterjesztések sorozatával megkaphatjuk egy olyan gráfból, amely csak egy csúcsból és egy hurokélből áll.

4.3.2. Csúcsfelosztás

Legyen $G = (V, E)$ egy félig-egyszerű gráf. A *d-dimenziós csúcsfelosztás* művelet során egy kiválasztott v csúcs szomszédainak vesszük egy $\{U_1, U^*, U_2\}$ partícióját, ahol $d - 1 \leq |U^*| \leq d$, majd végrehajtjuk az alábbi lépéseket:

- a gráfból kitöröljük v-t, majd hozzáveszünk két új csúcsot, v_1-et és v_2-t és a $v_i u$ éleket, ahol $u \in U_i \cup U^*$ és $i = 1, 2$,
- ha G-ben van egy v-hez tartozó hurokél, akkor a $v_1 v_2$ élt is hozzáadjuk az új gráfhoz,
- ha $|U^*| = d - 1$, akkor v_1-hez hozzáadunk egy hurokélt.



4. ábra. Példa a 2 dimenziós csúcsfelosztásra, az $|U^*| = 2$ esetre.

Whiteley [19] mutatta meg, hogy ha G merev $\mathbb{R}^d$-ben, akkor egy G-ből d-dimenzós csúcsfelosztással (feltéve, hogy az új csúcsok mindegyike legalább $d+1$ fokú) kapott gráf is merev. Jordán és Szabadka [13] eredménye, hogy a csúcsfelosztás, feltéve, hogy az új csúcsok legalább 3 fokúak, a globális merevséget is megőrzi $\mathbb{R}^2$-ben, emellett Connelly és Whiteley [4] sejtése, hogy ez magasabb dimenzióban is teljesül.

7. Lemma. [12] *Legyen $G = (V, E)$ egy félig-egyszerű gráf és $G' = (V', E')$ a G-ből d-dimenziós csúcsfelosztással kapott gráf. Ekkor ha G k-független $\mathbb{R}^d$-ben, akkor G' is k-független lesz $\mathbb{R}^d$-ben.*

Bizonyítás. Legyen $\{U_1, U^*, U_2\}$ a v csúcs azon partíciója, melyet a csúcsfelosztás során alapul veszünk.

Vegyük először azt az esetet, ahol feltesszük, hogy $|U^*| = d$ és a gráfban nincs hurokél a v csúcsnál! Mivel G k-független, létezik olyan generikus $p:V \to \mathbb{R}^d$ realizáció, hogy $C_G(p)$ sorai függetlenek legyenek. Legyen $p' : V' \to \mathbb{R}^d$ az alábbi módon definiált leképezés

$$p'(u) = \begin{cases} p(v), \text{ ha } u \in \{v_1, v_2\} \\ p(u) \text{ különben} \end{cases} .$$

Belátjuk, hogy ekkor $C_{G'}(p')$ sorfüggetlen.

Legyen $u \in U^*$ és tekintsük a $v_1 u$ illetve $v_2 u$ élekhez tartozó $C_{G'}(p')$-beli sorokat:

	v_1	v_2	u	$V(G') \setminus \{u, v_1, v_2\}$
$v_1 u$	p_u	0	p_v	0
$v_2 u$	0	p_u	p_v	0

Először adjuk hozzá a v_1 oszlopot a v_2 oszlopból, majd vonjuk ki a $v_2 u$ sort a $v_1 u$ sorból, így a

	v_1	v_2	u	$V' \setminus \{u, v_1, v_2\}$
$v_1 u$	p_u	0	0	0
$v_2 u$	0	p_u	p_v	0

mátrixot kapjuk, ahol a $v_2 u$-hoz tartozó sor megegyezik a $C_G(p)$-ben vu-hoz tartozó sorral. Így ha minden $u \in U^*$ esetén a $v_2 u$ sort kivonjuk a $v_1 u$ sorból, akkor az így kapott $C_{G'}(p')$-ben a v_2-höz tartozó oszlop megegyezik a $C_G(p)$-ben a v-hez tartozó oszloppal. A sorok átrendezésével $C_{G'}(p')$-t az alábbi alakba írhatjuk:

$$\begin{array}{r|c|c|} & v_1 & V' \setminus \{v_1\} \\ \cline{2-3} v_1 u_1 & p_{u_1} & \\ \vdots & \vdots & 0 \\ v_1 u_d & p_{u_d} & \\ \cline{2-3} E' \setminus \{v_1 u_1, \dots, v_1 u_d\} & * & C_G(p) \\ \cline{2-3} \end{array}$$

ahol $U^* = \{u_1, \dots, u_d\}$. Mivel p generikus, ezért a bal felső $d \times d$-es blokk sorfüggetlen, a feltevésünk szerint $C_G(p)$ is sorfüggetlen, így $C_{G'}(p')$ is sorfüggetlen.

Következőnek tekintsük azt az esetet, amikor $|U^*| = d$ és G-ben van egy v-hez tartozó hurokél, melyet most ν-vel jelölünk. Ekkor a csúcsfelosztás során ν-t egy új $v_1 v_2$ éllel helyettesítjük. A fent definiált p' leképezéshez tartozó $C_{G'}(p')$ kiegészíthetőségi mátrix v_1v_2-vel indexelt sora az alábbi alakba írható:

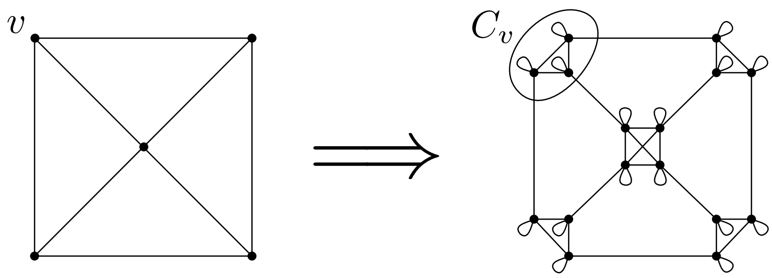
$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 & v_1 & v_2 & V'\setminus\{v_1,v_2\} \\
\cline{2-4}
v_1v_2 & p_v & p_v & 0 \\
\cline{2-4}
\end{array}$$

E sornak az első elemét elhagyva pont megkapjuk a $C_G(p)$-ben a ν hurokélhez tartozó sort. Így a fenti műveleteket erre a sorra is végrehajtva a $C_{G'}(p')$ mátrix most is ugyanolyan alakra hozható, mint az előző esetben.

Végül belátjuk arra az esetre, amikor $|U^*| = d-1$. Ekkor is alkalmazhatjuk az első esetben bemutatott módszert azzal a különbséggel, hogy ebben az esetben a $C_{G'}(p')$ bal felső $d\times d$-es részmátrixának sorai a v_1-hez tartozó hurokélhez és a v_1u, $u \in U^*$ élekhez tartoznak. $\square$

5. Klaszter gráfok

Egy H gráfot *multigráfnak* nevezünk, ha H-ban előfordulhatnak többszörös élek. Legyen $H=(V,E)$ egy hurokmentes multigráf. A H-ból készített *klaszter gráfon* egy olyan G_H° gráfot értünk, melyet úgy kapunk H-ból, hogy minden $v \in V$ csúcsot $d(v)$ csúcsú teljes gráffal helyettesítünk, melynek csúcsaihoz még hozzáadunk egy-egy hurokélt (egy v csúcsnak így megfeleltetett teljes gráfot klaszternek hívjuk és C_v-vel jelöljük). Ezután minden eredeti uv élt helyettesítünk egy C_u és C_v klaszterek közt haladó éllel úgy, hogy ezek a köztes élek páronként diszjunktak legyenek. Ebben a fejezetben a klaszter gráfok lokális és globális kiegészíthetőségével foglalkozunk.



5. ábra. Példa a klaszterezésre.

5.1. Lokális kiegészíthetőség

Legyen G egy klaszter gráf és jelöljük G'-vel azt a gráfot, melyet úgy kapunk G-ből, hogy G összes hurokélét elhagyjuk. A merevségelméletben egy ilyen hurokmentes G' klaszter gráf segítségével készített (G,p) szerkezetet *test-rúd szerkezetnek* hívunk. A test-rúd szerkezetek merevségének létezik kombinatorikus jellemzése, melyet Tay [17] adott meg.

Legyen $H=(V,E)$ egy multigráf és P a V csúcsok egy partíciója. Ekkor jelöljük a P különböző tagjai között haladó H-beli élek halmazát $E_H(P)$-vel és legyen $e_H(P)= |E_H(P)|$. Azt mondjuk, hogy H *m-fa-összefüggő,* ha $e_H(P) \geq m(t-1)$ teljesül V bármely $P=\{X_1,\dots,X_t\}$ partíciójára. Megjegyezzük, hogy H pontosan akkor m-fa-összefüggő, ha tartalmaz m darab éldiszjunkt feszítőfát.

8. Lemma. [12] *Legyen $H=(V,E)$ egy multigráf és tegyük fel, hogy a H-ból konstruált G_H° klaszter-gráf lokálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor H $\binom{d}{2}$-fa-összefüggő.*

Bizonyítás. Ha G_H°-nak kevesebb, mint d csúcsa van, akkor szükségszerűen egy félig-egyszerű teljes gráf. Ekkor $|V|=1$, így a lemma triviálisan teljesül. Ezáltal feltehetjük, hogy G_H°-nak legalább d csúcsa van.

Indirekten tegyük fel, hogy $e_H(P) \le \binom{d}{2}(t-1)-1$ teljesül V valamely $P = \{X_1, \dots, X_t\}$, $t \ge 2$ partíciójára. Legyen $Y_i = \cup\{V(C_v) : v \in X_I\}$ minden $1 \le i \le t$ indexre, ekkor a $Q = \{Y_1, \dots, Y_t\}$ a $V(G_H^\circ)$ egy partícióját adja. Ekkor a klaszter gráf definíciójából adódóan $e_{G_H}(Q) = e_H(P)$ teljesül.

Legyen $S \subseteq E(G_H^\circ)$ egy maximális független élhalmaz. Mivel G_H° lokálisan kiegészíthető és legalább d éle van $|S| = d|V(G_H^\circ)| - \binom{d}{2}$ teljesül. Felhasználva azt az állítást, miszerint egy legalább d csúcsú lokálisan kiegészíthető félig-egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább d, azt kapjuk, hogy minden $Y \subseteq V(G_H^\circ)$ részhalmazra $|Y| \ge d-1$. Így alkalmazhatjuk 1. lemmát, melyből az adódik, hogy Y-nak legfeljebb $d|Y| - \binom{d}{2}$ S-beli éle van. A fentiekből azt kapjuk, hogy

$$d|V(G_H^\circ)| - \binom{d}{2} = |S| \le \sum_{i=1}^{t} (d|Y_i| - \binom{d}{2}) + e_{G_H^\circ}(Q)) =$$

$$= d|V(G_H^\circ)| - \binom{d}{2} t + e_H(P) \le d|V(G_H^\circ)| - \binom{d}{2} - 1.$$

Ellentmondáshoz jutottunk, így H $\binom{d}{2}$-fa-összefüggő. □

10. Tétel. [12] *Legyen H egy multigráf. Ekkor G_H° pontosan akkor lokálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben, ha H $\binom{d}{2}$-fa-összefüggő.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége az előző lemmából adódik. Az elégségesség bizonyítása során megmutatjuk, hogy G_H°-nak létezik egy olyan d-dimenziós (G_H°, p) realizációja, amely inifinitezimálisan kiegészíthető. Realizáljuk G_H° csúcsait úgy, hogy az origótól 1 távolságra, tetszőleges koordinátatengelyeken feküdjenek. Ezáltal egy klaszter csúcsaihoz tartozó pontok legalább $d-1$ különböző tengelyre esnek, így minden klaszter egy lokálisan kiegészíthető részgráfot eredményez.

Rögzítsünk $\binom{d}{2}$ darab $T_{i,j}$, $(1 \ge i < j \ge d)$ éldiszjunkt feszítőfát, emellett rögzítsük ezek gyökerét is, az r csúcsot. Irányítsuk meg a fák éleit r-ből kifelé, így r gyökerű feszítőfenyőket kapunk.

Vegyük valamely $T_{i,j}$ feszítőfa egy st élét és tegyük fel, hogy ez az él s-ből t-be mutat. Ez az él a G_H° gráfban egy C_s és C_t klasztereket összekötő uv élt definiál (ahol $u \in C_s$ és $v \in C_t$). Legyenek az u és v csúcsok realizációi:

$$p(u) = e_i, \text{ és } p(v) = e_j,$$

valamely e_i, e_j standard bázisvektorokra. Ezzel minden csúcsra definiáltuk p-t.

Legyen m a (G_H°, p) egy infinitezimális k-mozgása. Mivel a klaszterek infinitezimálisan lokálisan kiegészíthetők, minden C_w klaszterhez létezik olyan $A_w \in \mathbb{R}^{d \times d}$

ferdén szimmetrikus mátrix, hogy $m(x)=A_w p(x)$ teljesül minden $x\in V(C_w)$ esetén. A k-mozgás definícióját és az A_w mátrixok ferde szimmetrikusságát kihasználva

$$0=\langle m(u),p(v)\rangle+\langle m(v),p(u)\rangle=\langle A_s p(u),p(v)\rangle+\langle A_t p(v),m(u)\rangle=$$

$$=A_s[j,i]+A_t[i,j]=A_t[i,j]-A_s[i,j]$$

adódik, melyből $A_t[i,j]=A_s[i,j]$. Ezt bármely fa bármely élére végrehajthatjuk, így azt kapjuk, hogy $A_w=A_r$ minden $w\in V(H)$ esetén, azaz $m(x)=A_r p(x)$ minden $x\in$ $\in V(G_H^\circ)$ csúcsra. Így m egy triviális infinitezimális k-mozgás és (G_H°,p) infinitezimálisan lokálisan kiegészíthető. Ezáltal megmutattuk, hogy G_H° lokálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben. $\square$

5.2. Globális kiegészíthetőség

Azt mondjuk, hogy a H multigráf *erősen m-fa-összefüggő,* ha bármely élének elhagyásával is m-fa-összefüggő marad. Az alábbi tételt Connelly, Jordán és Whiteley fogalmazták meg közös cikkükben [3].

11. Tétel. *Legyen $H=(V,E)$ egy legalább 2 csúcsú és legalább 2 élű multigráf illetve legyen G_H a H-ból készített test-rúd gráf. Legyen $d\geq 1$ egy egész szám. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

i) G_H generikusan globálisan merev $\mathbb{R}^d$-ben;

ii) H erősen $\binom{d+1}{2}$-fa-összefüggő.

Erre a 2. következményt alkalmazva kapjuk a következő tételt.

12. Tétel. [12] *Legyen $H=(V,E)$ egy legalább 2 csúcsú és legalább 2 élű multigráf illetve legyen G_H° a H-ból készített klaszter-gráf. Legyen $d\geq 1$ egy egész szám. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

i) G_H° generikusan globálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben;

ii) H erősen $\binom{d}{2}$-fa-összefüggő.

6. Síkgráfok lokális kiegészíthetősége $\mathbb{R}^2$-ben

Az 1. lemma szerint ha egy $G=(V,E)$ gráf k-független $\mathbb{R}^2$-ben, akkor $i(X) \leq 2|X|-1$ teljesül minden nem üres $X \subseteq V$ csúcshalmazra és $|E(H)| \leq 2|V(H)|-4$ teljesül minden H páros részgráfra, melyre $|V(H)| \geq 3$.

6.1. Páros síkgráfok

Legyen $G = (V,E)$ egy páros síkgráf. Feltehető, hogy G egy maximális páros síkgráf. Ekkor G k-függetlenségét megkaphatjuk a csúcsainak számára vett indukcióval és Batagelj [2] eredményének felhasználásával, miszerint minden maximális páros síkgráf előáll egy kettő hosszú útból 2 dimenziós csúcsfelosztások ismételt alkalmazásával (ahol $|U^*| = d = 2$). Ehhez a 7. lemmát hozzávéve adódik a következő tétel.

13. Tétel. [12] *Minden páros síkgráf k-független* $\mathbb{R}^2$*-ben.*

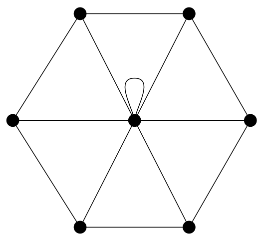
Ennek segítségével megkaphatjuk a nem négyzetes mátrix modellben lokálisan kiegészíthető páros síkgráfok egy karakterizációját. Az alábbi eredményt, más kontextusban már Kalai, Nevo és Novik [14] is megadták.

14. Tétel. [12] *Egy páros síkgráf pontosan akkor lokálisan bikiegészíthető* $\mathbb{R}^2$*-ben, ha az egy maximális páros síkgráf.*

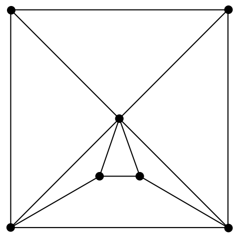
6.2. Síkgráfok

Az 1. lemmából tudjuk, hogy a (2,1)-ritkaság szükséges feltétele az $\mathbb{R}^2$-beli k-függetlenségnek. Mivel minden páros síkgráf k-független, természetesen merül fel a kérdés, hogy általános síkgráfok k-függetlenségére a (2,1)-ritkaság vajon elégséges feltétel-e. A válasz viszont az, hogy nem elégséges.

Legyen W_n' egy *hurkos kerék,* azaz egy olyan W_n n csúcsú kerék, melyhez a középső, centrális pontjában hozzáadtunk egy hurokélt. Ekkor a 9. tétel és a 5. lemma szerint W_n' pontosan akkor k-független $\mathbb{R}^2$-ben, ha n páros. Így azt kapjuk, hogy a W_n' egy olyan (2,1)-ritka síkgráf, amely bármely páratlan n esetén nem k-független. Megadhatunk síkba rajzolható, egyszerű gráfot is ellenpéldaként (7. ábra).



6. ábra. A W_7' hurkos kerék.



7. ábra. Egy olyan (2,1)-ritka síkgráf, amely nem k-független $\mathbb{R}^2$-ben, hiszen megkapható W_5'-ből dupla 1-kiterjesztéssel.

7. Elégséges feltételek a globális kiegészíthetőségre

Ebben a fejezetben a gráfok globális kiegészíthetőségét vizsgáljuk. Emlékeztetőül egy G akkor globálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben, ha (G, p) globálisan kiegészíthető bármely p d-dimenziós generikus realizáció estén.

7.1. A kiegészíthetőségi stressz és a globális kiegészíthetőség

Egy szerkezethez rendelt ω *kiegészíthetőségi stresszen* az éleknek egy olyan ω_{ij} súlyozását értjük, melyre

$$\sum_{j|ij\in E} \omega_{ij} p_j = 0$$

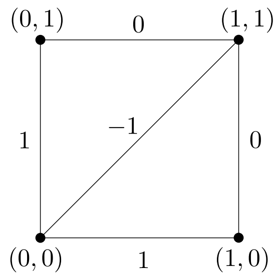
minden $i \in V$ esetén teljesül. Ha ω-t mint $\mathbb{R}^{|E|}$-beli vektort tekintjük, akkor a fenti egyenletek azt adják, hogy ω pontosan akkor kiegészíthetőségi stressz, ha a $C_G(p)$ kiegészíthetőségi mátrix bal nullterében van, azaz $C_G(p)^T\omega = 0$. Ezeket az ω_{ij} skalárokat egy Ω $n \times n$-es szimmetrikus *stressz mátrixba* rendezhetjük az alábbi módon:

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij} & \text{ha } v_i v_j \in E, \\ 0 & \text{ha } v_i v_j \notin E \end{cases}.$$

A p által megadott d darab koordinátavektor és azok lineáris kombinációi benne vannak az Ω stressz mátrix nullterében, így azt kapjuk, hogy $\dim ker(\Omega) \geq d$.

Egy elégséges feltétel megadása viszont nem ilyen egyszerű. Ismert példa olyan generikus globálisan kiegészíhető szerkezetre és hozzárendelt stresszre, melyekre $\dim ker\Omega >$ $> d$.

Példa:



8. ábra. Ez az élsúlyozás egy kiegészíthetőségi stressz.

Ezen kiegészíthetőségi stresszhez konstruált Ω kiegészíthetőségi stresszmátrix:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Megjegyezzük, hogy nem minden hiányosan ismert mátrixot lehet pozitív szemidefinit mátrixszá kiegészíteni. Például, ha egy mátrixnak adottak a főátlóbeli elemei és ezek mind negatívak, akkor bármely kiegészítés esetén a mátrix nyoma negatív lesz, így biztosan lesz egy negatív sajátértéke, és ennek következtében nem lehet a kapott mátrix pozitív szemidefinit. Másrészről ha a Gram-mátrix összes diagonális elemét ismerjük, akkor a lokális, illetve globális kiegészíthetőségi probléma ekvivalens a merevségi, illetve a globális merevségi problémával.

Emlékeztetőül, azon $d \times n$-es mátrixot, melynek i. oszlopa p_i $P(p)$-vel jelöltük.

5. Állítás. [16] *Legyen $G = (V, E)$ egy grá f és (G, p) egy d-dime nziós sze rkez et ú gy, hogy a $p(V)$ vektorok kifeszítsék az $\mathbb{R}^d$ teret. Ekkor (G, p) bármely $\omega : E \to \mathbb{R}$ kiegészíthetőségi stresszéből konstruált Ω stressz mátrixára:*

$$P(p)\Omega = 0.$$

Azaz Ω rangja maximum $n - d$.

A 6. tétel átfogalmazható úgy, hogy a globális kiegészíthetőség egy szükséges feltételét kapjuk.

15. Tétel. [12] *Legyen $G = (V, E)$ egy véges gráf, $p : V \to \mathbb{R}^d$ generikus realizáció. Ekkor ha (G, p)-hez létezik olyan ω kiegészíthetőségi stressz, melyhez rendelt Ω rangja* *maximális, akkor G globálisan kiegészíthető.*

A merevségelméletben láttuk, hogy egy gráf globális merevségének szükséges és elégséges feltétele is az, hogy valamely egyensúlyi stresszből konstruált stressz mátrix rangja maximális legyen.A kiegészíthetőségi probléma viszont összetettebb. A fő különbséget az adhatja, hogy csupán a skaláris szorzatok rözgítésével nem tudjuk megakadályozni, hogy a csúcsok tetszőlegesen távol kerülhessenek egymástól és ez nyilvánvalóan különbözik attól az esettől, amikor a csúcsok egymástól mért távolságát rögzítettük. A gráfok kiegészíthetőségénél azt kapjuk, hogy a 15. tétel megfordítása már nem igaz.

Azt mondjuk, hogy a (G,q) (vagy q) *lineáris képe* (G,p)-nek, (vagy p-nek,) ha létezik egy olyan $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mátrix, melyre $q(v)=Ap(v)$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra.

Azt mondjuk, hogy a $p: V \to \mathbb{R}^d$ *egy végtelen távoli kúpszeleten fekszik,* ha létezik olyan nem nulla, szimmetrikus $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mátrix, melyre

$$p(u)^T Bp(v) = 0, \text{ minden } uv \in E \text{ élre.}$$

6. Állítás. [12] *Legyen (G,p) egy d-dimenziós szerkezet és tegyük fel, hogy p nem fekszik végtelen távoli kúpszeleten. Ekkor, ha (G,q) lineáris képe (G,p)-nek és Gram-ekvivalens is vele, akkor (G,q) Gram-kongruens (G,p)-vel.*

Bizonyítás. A feltevésünk szerint létezik egy olyan $d \times d$-es A mátrix, hogy $q(v) = Ap(v)$ minden $v \in V(G)$ csúcsra. Mivel (G,p) és (G,q) Gram-ekvivalensek, minden $uv \in E(G)$ élre:

$$0 = \langle p(u), p(v)\rangle - \langle q(u), q(v)\rangle = p(u)^T (A^T A - I_d))p(v).$$

Mivel p nem fekszik végtelen távoli kúpszeleten, $A^T A - I_d = 0$, azaz A egy ortogonális mátrix. Így azt kaptuk, hogy (G,p) és (G,q) Gram-kongruensek. □

A 6. állítás fontos feltétele, hogy a p nem fekszik végtelen távoli kúpszeleten. E tulajdonság ellenőrzését könnyíti meg a következő állítás azzal, hogy a legalább d fokú gráfokból konstruált szerkezetek esetén egy elégséges feltételt ad .

7. Állítás. [12] *Legyen G egy olyan gráf, melyben minden csúcs foka legalább d és legyen (G,p) egy d-dimenziós szerkezet. Ekkor, ha p generikus, akkor p nem fekszik végtelen távoli kúpszeleten.*

7.2. A globális kiegészíthetőséget megőrző műveletek

Jackson, Jordán és Tanigawa [12] bizonyították először, hogy a 0-kiterjesztés megőrzi a globális kiegészíthetőséget.

16. Tétel. *Legyen G egy $\mathbb{R}^d$-ben generikusan globálisan kiegészíthető gráf és legyen G' a G-ből 0-kiterjesztéssel kapott gráf. Ekkor G' is generikusan globálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben.*

Hasonlóan, a dupla 1-kiterjesztés is megőrzi a globális kiegészíhetőséget, sőt a kapott szerkezetnek létezik olyan realizációja, melyhez létezik olyan kiegészíthetőségi stressz, melyhez rendelt stresszmátrix rangja maximális.

17. Tétel. [12] *Legyen $G=(V,E)$ egy gráf és legyen $G'=(V',E')$ a G-ből dupla 1-kiterjesztéssel kapott gráf. Legyen $p:V\to\mathbb{R}^d$ egy generikus realizáció és ω egy olyan kiegészíthetőségi stressze (G,p)-nek, hogy $r(\Omega)=|V|-d$ teljesüljön. Ekkor létezik olyan generikus $p':V'\to\mathbb{R}^d$ és $\omega':E'\to\mathbb{R}$ kiegészíthetőségi stressze (G',p')-nek, hogy a hozzá konstruált Ω' stressz mátrix rangja $|V'|-d$ legyen. Azaz G' globálisan kiegészíthető.*

A 18. tétel az egy dimenziós globálisan kiegészíthető gráfok egy jellemzését adja. Az *i)* és *ii)* részek ekvivalenciáját már Singer és Cucuringu [16] is megmutatta. Jackson, Jordán és Tanigawa [12] figyelte meg, hogy az induktív műveletek segítségével egy másik ekvivalens jellemzés is adható (*iii)* rész).

18. Tétel. *Legyen G egy gráf. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

i) G globálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^1$-ben;

ii) G összefüggő és tartalmaz egy páratlan kört;

iii) G-t (1 dimenziós) 0-kiterjesztések, dupla 1-kiterjesztések és élhozzáadások sorozatával megkaphatjuk egy olyan gráfból, amely csak egy csúcsból és egy hurokélből áll.

7.3. Csúcs redundancia

Azt mondjuk, hogy *G lokálisan redundánsan kiegészíthető*, ha $G-v$ lokálisan kiegészíthető bármely $v\in V(G)$ esetén.

19. Tétel. [11] *Legyen $d\geq 2$ és G egy legalább $d+1$ csúcsú gráf. Ekkor ha G lokálisan redundánsan kiegészíthető, akkor G globálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben.*

8. Geometriai megfigyelések

Legyen (G, p) és (G, q) két d-dimenziós szerkezet és legyen v a G-nek egy olyan csúcsa, melyre $\{1, 2, \ldots, d+1\} \subseteq N_G(v)$. Tegyük fel, hogy $\langle p_v, p_i \rangle = \langle q_v, q_i \rangle$ fennáll bármely $1 \leq i \leq d$ esetén. Ekkor, ha $\langle p_v, p_{d+1} \rangle = \langle q_v, q_{d+1} \rangle$ is teljesül, akkor

$$\det \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_{d+1} \\ \langle p_v, p_1 \rangle & \langle p_v, p_2 \rangle & \ldots & \langle p_v, p_{d+1} \rangle \end{bmatrix} = 0$$

Azt mondjuk, hogy egy szerkezet *standard,* ha valamely d pontjára nézve standard pozícióban van. Legyen (G, p) standard és $(G - v, p)$ lokálisan kiegészíthető. Ekkor bármely olyan (G, q) szerkezet esetén, mely ekvivalens a (G, p) szerkezettel fennáll, hogy $\{q_1, \ldots, q_{d+1}\}$ lineáris képe $\{p_1, \ldots, p_{d+1}\}$-nek.

Azt mondjuk, hogy az $i, j \in V$ csúcsok *globálisan linkeltek G-ben,* ha $\langle p_i, p_j \rangle = \langle q_i, q_j \rangle$ teljesül bármely (G, p) standard szerkezet és bármely vele ekvivalens (G, q) szerkezet esetén.

Két csúcs globális linkeltsége elég erős megkötés, melyet a 4. és az 5. következményekben ki is használunk. Előtte viszont meg kell mutatnunk, hogy bizonyos gráfoknak mindig léteznek globálisan linkelt csúcsai.

20. Tétel. [11] *Legyen G egy gráf és uv a G egy nem hurok éle, melynek végpontjaira $|N(u)| > d$ és $|N(v)| > d$ teljesül, emellett tegyük fel, hogy $G - v$ és $G - u$ lokálisan kiegészíthetők $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor bármely $i \in N_G(u)$ és $j \in N_G(v)$ csúcsok i és j globálisan linkeltek G-ben.*

4. Következmény. [11] *Legyen G egy gráf és uv a G egy nem hurok éle, melynek végpontjaira $|N(u)| > d$ és $|N(v)| > d$ teljesül. Tegyük fel, hogy $G - v$ és $G - u$ lokálisan kiegészíthetők $\mathbb{R}^d$-ben, valamint azt, hogy az a $\tilde{G}$ gráf, melyre $V(\tilde{G}) = V(G) \backslash \{u\} \backslash \{v\}$ és $E(\tilde{G}) = E(G) \cup \{ij | i \ N_G(u), j \in N_G(v)\}$ globálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben.*

Ekkor G globálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben.

Hasonló állítás teljesül, ha egy v-hez tartozó hurokélt tekintünk.

21. Tétel. [11] *Legyen G egy gráf és $v \in V(G)$ egy olyan csúcsa, melyhez tartozik hurokél és $|N(v)| \geq d$. Tegyük fel, hogy $G - v$ lokálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben, ekkor bármely $i, j \in N_G(v)$ csúcspár globálisan linkelt.*

5. Következmény. [11] *Legyen G egy gráf és $v \in V(G)$ egy olyan csúcsa, melyhez tartozik hurokél és $|N(v)| \geq d$. Tegyük fel, hogy $G - v$ lokálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben, illetve, hogy a $\tilde{G}$ gráf, melyre $V(\tilde{G}) = V(G) \backslash \{v\}$ és $E(\tilde{G}) = E(G) \cup \{ij | i, j \in N_G(v)\}$ globálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben.*

Ekkor G globálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^d$-ben.

9. Sűrű mátrixok kiegészíhetősége

Ha egy hiányosan megadott mátrix ismert elemeinek számára akarunk alsó korlátot megadni, akkor az a G segédgráfunkban egy minimális fokszámra adott feltételként jelenik meg. Az alábbiakban a G minimális fokszámának segítségével adunk elégséges feltételeket G globális, illetve lokális kiegészíthetőségére. Jelöljük $\delta(G)$-vel a G minimális fokszámát.
A következő lemma a 2-dimenziós lokális kiegészíthetőség egy elégséges feltételét adja meg, melyet majd alkalmazunk is a 22. tétel bizonyításánál.

9. Lemma. *Legyen $G=(V,E)$ egy gráf, ekkor ha V-nek létezik olyan $\{V_1, V_2, \dots, V_t\}$ partíciója, hogy $G[V_i]$ lokálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^1$-ben bármely $1 \le i \le t$ esetén emellett $G - \bigcup_{i=1}^{t} E(G[V_i])$ összefüggő, akkor G lokálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^2$-ben.*

22. Tétel. [11] *Legyen $G = (V,E)$ egy legalább 8 csúcsú egyszerű gráf, melynek minimális fokszámára*

$$\delta(G) \ge \frac{3n}{4} + 1 \tag{3}$$

teljesül. Ekkor G lokálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^2$-ben.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $n=4m$ valamely egész m számra. Az (3) alapján a Dirac tételből azt kapjuk, hogy G-ben van egy C Hamilton-kör. Tudjuk, hogy C páros hosszú, így e kör alapján kettéoszthatjuk a G csúcsait, jelöljük az így kapott két csúcsosztályt A-val és B-vel. Ekkor $|A| = |B| = 2m$. Tekintsük az A által kifeszített részgráfot, $H = G[A]$-t, melyreől tudjuk, hogy $|V(H)| = 2m$. (3)-ból következik, hogy H-ban minden csúcs foka legalább $m-1$, melyből az, hogy H összefüggő, illetve, hogy H nem lehet páros gráf. Ennélfogva H lokálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^1$-ben. Hasonlóan a B által kifeszített részgráf is lokálisan kiegészíhető $\mathbb{R}^1$-ben. Eszerint a $V=\{A,B\}$ felosztás teljesíti az 9. lemma feltételeit, miszerint $G[A]$ és $G[B]$ lokálisan kiegészíhetők $\mathbb{R}^1$-ben, illetve $G - E(G[A]) - E(G[B])$ összefüggő (mivel tartalmazza a C Hamilton-kört. Így az 9 lemma alapján G lokálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^2$-ben. $\square$

23. Tétel. [11] *Legyen $G = (V,E)$ egy legalább 10 csúcsú egyszerű gráf, melynek minimális fokszámára*

$$\delta(G) \ge \frac{3n}{4} + 3$$

teljesül. Ekkor G globálisan kiegészíthető $\mathbb{R}^2$-ben.

A fenti tételekből az következik, hogy, ha egy hiányosan kiegészített Gram mátrix minden sorában az elemeknek legalább háromnegyedét ismerjük, akkor a mátrix egyértelműen kiegészíthető.

24. Tétel. [11] *Legyen* $G = (V, E)$ *egy legalább 8 csúcsú egyszerű gráf, melynek maximum* $|V| - 3$ *éle nincs behúzva. Ekkor* G *lokálisan kiegészíthető* $\mathbb{R}^2$*-ben.*

25. Tétel. [11] *Legyen* $G = (V, E)$ *egy legalább 10 csúcsú egyszerű gráf, melynek maximum* $|V| - 3$ *éle nincs behúzva. Ekkor* G *globálisan kiegészíthető* $\mathbb{R}^2$*-ben.*

10. Nyitott kérdések

Megmutattuk, hogy az $\mathbb{R}^d$-beli lokális kiegészíthetőség egy generikus tulajdonság. Az általános, lokálisan kiegészíthető gráfok kombinatorikus jellemzése $d \geq 2$ esetén még nem ismert.

Láttuk, hogy a globális kiegészíthetőség nem generikus tulajdonság.
A globális kiegészíthetőség eldöntésének bonyolultsága még nem ismert.

Egy adott (G, p) szerkezet globális kiegészíthetőségének eldöntése még $\mathbb{R}^1$-ben is nyitott.

A sűrű mátrixokra a 22. tételben adott alsó korlát tovább élesíthető, a pontos konstans egy $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{4}$ közötti szám.

Hivatkozások

[1] L. Asimow and B. Roth. The rigidity of graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 245:279–289, 1978.

[2] Vladimir Batagelj. An inductive definition of the class of 3-connected quadrangulations of the plane. *Discrete Math.*, 78(1-2):45–53, 1989.

[3] R. Connelly, T. Jordán, and W. Whiteley. Generic global rigidity of body-bar frameworks. *J. Combin. Theory Ser. B*, 103(6):689–705, 2013.

[4] R. Connelly and W. J. Whiteley. Global rigidity: the effect of coning. *Discrete Comput. Geom.*, 43(4):717–735, 2010.

[5] Robert Connelly. On generic global rigidity. In *Applied geometry and discrete mathematics*, volume 4 of *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, pages 147–155. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[6] Robert Connelly. Generic global rigidity. *Discrete Comput. Geom.*, 33(4):549–563, 2005.

[7] Herman Gluck. Almost all simply connected closed surfaces are rigid. In *Geometric topology (Proc. Conf., Park City, Utah, 1974)*, pages 225–239. Lecture Notes in Math., Vol. 438. Springer, Berlin, 1975.

[8] Steven J. Gortler, Alexander D. Healy, and Dylan P. Thurston. Characterizing generic global rigidity. *Amer. J. Math.*, 132(4):897–939, 2010.

[9] Bruce Hendrickson. Conditions for unique graph realizations. *SIAM J. Comput.*, 21(1):65–84, 1992.

[10] Bill Jackson and Tibor Jordán. Connected rigidity matroids and unique realizations of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 94(1):1–29, 2005.

[11] Bill Jackson, Tibor Jordán, and Shin-ichi Tanigawa. Combinatorial conditions for the unique completability of low rank matrices II. *kézirat*, 2014.

[12] Bill Jackson, Tibor Jordán, and Shin-ichi Tanigawa. Combinatorial conditions for the unique completability of low rank matrices. *Egerváry Research Group, Budapest*, Technical report TR-2014-01, *(közlésre benyújtva)*.

[13] Tibor Jordán and Zoltán Szabadka. Operations preserving the global rigidity of graphs and frameworks in the plane. *Comput. Geom.*, 42(6-7):511–521, 2009.

[14] G. Kalai, E. Nevo, and I. Novik. Bipartite rigidity. arXiv:1312.0209, December 2013.

[15] G. Laman. On graphs and rigidity of plane skeletal structures. *Journal of Engineering Mathematics*, 4(4):331–340, October 1970.

[16] Amit Singer and Mihai Cucuringu. Uniqueness of low-rank matrix completion by rigidity theory. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 31(4):1621–1641, 2009/10.

[17] Tiong-Seng Tay. Rigidity of multigraphs. I. Linking rigid bodies in n-space. *J. Combin. Theory Ser. B*, 36(1):95–112, 1984.

[18] Walter Whiteley. Cones, infinity and 1-story buildings. *Structural Topology*, (8):53–70, 1983. With a French translation.

[19] Walter Whiteley. La division de sommet dans les charpentes isostatiques. *Structural Topology*, (16):23–30, 1990. Dual French-English text.