Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Ferenczi Dóra

Sorbanállási problémák

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Arató Miklós
egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

"Az élet egy folyamatos sorban állás, várakozva a következő nagy ugrásra."

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Arató Miklósnak, hogy figyelemmel kísérte a szakdolgozatom készülését, és hasznos tanácsokkal látott el közös munkánk során.
Köszönöm családomnak és barátaimnak, hogy mellettem álltak, támogatásukra és biztatásukra mindig számíthattam.
Végül,de nem utolsó sorban hálával tartozom gimnáziumi tanáromnak, Fonyó Lajosnak, hogy megszerettette velem a matematikát.

Bevezető

A sorbanálláselmélet több tudományterület határán fekvő, az alkalmazott matematikához tartozó viszonylag fiatal tudományág, amely a hétköznapokban is gyakran előforduló problémával, a várokozás vizsgálatával foglalkozik. Segítségével kiszámíthatjuk, hogy meddig kell várakoznunk a bankban vagy a postán, illetve mikor kerülünk sorra a boltban a pénztárnál. Módszerei hatékonyan alkalmazhatók az operációkutatás, hírközlési és telekommunikációs, valamint számítógép rendszerek területén felmerülő problémák matematikai modellezésére. Az elmélet a telefonhálózatok fejlesztésével párhuzamosan fejlődött es lényegi elemévé vált a klasszikus távközlési hálózatok tervezésének. Bármilyen szolgáltatást vizsgálva nagyon fontos tényezőként jelenik meg a hozzá kapcsolódó várakozás, ugyanis az ezzel töltött idő mértéke a felhasználók elégedettségét nagy mértékben befolyásolja, kedvezőtlen esetben pedig negatív képet adhat az adott kiszolgálóegységről. Ugyanakkor a szolgáltatók számára is fontos a szolgáltatás egyensúlyi állapotának vizsgálata. A kiszolgálórendszer nem megfelelő méretezése ugyanis a szolgáltatók számára is felesleges kiadásokat generálhat. A számítógéprendszerek rohamos fejlődésének hatására, egyre nagyobb figyelem irányult a bonyolult rendszerek elemzését lehetővé tevő sztochasztikus folyamatok egyre szélesebb körben történő alkalmazására. Manapság, az óriási információáradat korában észrevehetően nagy igény mutatkozik mind komplexebb matematikai megközelítések bevezetésére, melynek következtében a leíró véletlen folyamatok is egyre összetettebbek lesznek. Célunk tehát a kiszolgálási idők és szabályok ismeretében olyan módszerek bemutatása, melyek segítségével csökkenthetőek a várokozási idők.A felhasználók egy sztochasztikus folyamat szerint érkeznek a kiszolgálókhoz, várakozási idejüket pedig egy valószínűségi változó határozza meg. Ezen sztochasztikus folyamatok alapján alakul ki a várakozási sor, melynek átfutási ideje egy minél hatékonyabb kiszolgálást biztosító rendszerrel nagy mértékben csökkenthető. Látható tehát, hogy a sorbanállási elmélet nem csak a hétköznapokban, de különböző tudományterületeken is tág környezetben alkalmazható, segítségével hasznos információkhoz juthatunk a minél hatékonyabb kiszolgálási rendszerek kialakításához.

1. fejezet

Sorbanállási rendszerek jellemzése

1.1. Jelölések bevezetése

Egy sorbanállási rendszer megfelelő jellemzéséhez azonosítanunk kell egy sztochasztikus folyamatot, amely megadja számunkra a beérkező igényekről szóló információkat.

Definíció Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és egy tetszőleges T (index)halmaz. Egy sztochasztikus folyamat minden $t \in T$ indexhez hozzárendel egy valószínűségi változót.

megjegyzés: A dolgozatom folyamán végig Sztrik János egyetemi jegyzetében található jelöléseket alkalmazom. [1], [2], [3] .

1.1.1. A sorbanállási rendszerek jellemzői

Egy sorbanállási rendszer leírásához ismernünk kell a kiszolgálás szabályait, illetve struktúráját, melyeket az alábbi mennyiségek írnak le:

- *kiszolgálási idő*: az igény kiszolgálóegységben töltött időtartamának hossza, melyek független, azonos eloszlású valószínűségi változók
- *befogadóképesség*: a várakozó sor maximális hossza
- *rendszeridő*: a várakozással és a kiszolgálással töltött együttes idő
- *csatornák száma*: a rendelkezésre álló kiszolgálóegységek
- *kiszolgálási sorrend*: az a szabály, amely szerint a várakozók sorra kerülnek A leggyakrabban használt kiszolgálási formák a következők:

1. *First Come First Served*, azaz az érkezés sorrendjében történő kiszolgálás
2. *Last Come First Served*: az a kiszolgálási sorrend, amikor az utolsónak érkezőt szolgálják ki először.

- *prioritás*: a beérkező igények esetleges csoportokba sorolása, melyeken a kiszolgálás sorrendje múlik

1.1.2. Hatékonyság mérőszámai

A sorbanállási rendszerek hatékonyságának és teljesítményének vizsgálatához az alábbi rendszerjellemzőket kell meghatároznunk:

- *igények várakozási ideje*
- *várakozó igények száma*
- *foglaltsági intervallum*,amely megmutatja a csatorna időegységre eső kihasználtságát
- *pillanatnyi munkahátralék*

Ezek mindegyike egy valószínűségi változó, így a vizsgálatok során ezek eloszlásfüggvényét igyekszünk meghatározni. A teljesítmény mérésének legalapvetőbb eszköze a *torlódás* vizsgálata. Jelölje ϱ a forgalmi intenzitást, amelyet az átlagos kiszolgálási idő és az átlagos beérkezési idő hányadosaként számolhatunk ki. Ha ez a mennyiség nagyobb, mint 1, akkor arra a következtetésre juthatunk, hogy az igények gyorsabban érkeznek, mint ahogy az adott csatorna ki tudná szolgálni őket. Egy másik gyakran használt teljesítménymérő eszköz a rendszer *átbocsátóképessége*. Ez nem más, mint az időegység alatt átlagosan kiszolgált igények száma.

1.1.3. Kendall jelölésrendszere

A sorbanállási rendszerek könnyebb osztályozhatósága érdekében vezessünk be néhány, a vizsgálatok során gyakran használt jelölést.

$$A/B/m/K/N/D,$$

ahol

A a beérkezési időközök eloszlásfüggvénye,azaz

$$A(t) = \mathrm{P}(\text{beérkező igények között eltelt idő} \leqslant t)$$

B a kiszolgálási idők eloszlásfüggvénye, vagyis

$$B(t) = \mathrm{P}(\text{kiszolgálási idő} \leqslant t),$$

m a kiszolgálók száma, K a rendszer befogadóképessége, azaz az igények maximális száma, N az igények számossága,továbbá D a kiszolgálás elve.

Amennyiben a fent említett eloszlások exponenciálisak, az M jelölés használatos.Továbbá, ha a befogadóképesség és az igényforrás számossága végtelen, akkor ezeket a jelöléseket elhagyjuk. Így például az M/M/1 szimbólum, egy egy kiszolgálós Poisson beérkezéssel és exponenciális kiszolgálási idővel jellemzett rendszert jelöl.

1.2. Születési-halálozási folyamatok

A sorbanállási rendszerek modellezésére a születési-halálozási folyamatok hatékonyan használhatók. A folyamatban a születések megfelelnek az érkező igényeknek, míg a halálozást a rendszerben lévő igények kiszolgálása jelenti. A sorbanállási példákban nagy hangsúlyt fektetünk arra, hogy az $X(t)$ (vagyis a sor hossza a t pillanatban) mely pillanatokban ugrik egyet, mintsem magára az $X(t)$ értékére [4]. Példának okáért tekintsünk egy orvosi rendelőt,mint kiszolgálóegységet. Minden egyes időpontot, amikor egy páciens belép az utcáról a várószobába, úgy tekintünk, mint egy igény beérkezését a sorbanállási rendszerbe; másrészt ezt a beérkezést úgy is fel lehet fogni, mint egy populáció új tagjának születését, ahol a populációt a jelenlevő páciensek alkotják. Hasonlóképpen, amikor egy páciens elhagyja a rendelőt, ezt mint a sorbanállási rendszerből való távozást tekintjük, a születési-halálozási folyamatban ez a populáció egy tagjának halálával ekvivalens.

Definíció A születési-halálozási folyamat egy olyan Markov-folyamat, melyben minden állapotból csak a szomszédos állapotokba valósulhat meg átmenet. Tehát ha a folyamat a t pillanatban az n állapotban van, akkor véletlen hosszúságú várakozási idő után vagy az $n+1$ vagy az $n-1$ állapotok valamelyikébe megy át.

Ahhoz, hogy egy $X(t)$ Markov-folyamat, melynek állapotterét a 0,1,2,... számok alkotják születési-halálozási folyamat legyen, ki kell elégíteni a következő feltételeket:

1. $P(X(t+h) = k+1 | X(t) = k) = \lambda_k h + o(h)$;

2. $P(X(t+h) = k-1 | X(t) = k) = \mu_k h + o(h)$;

3. $P(X(t+h)=k|X(t)=k)=1-(\lambda_k+\mu_k)h+o(h)$;

4. $P(X(t+h)=m|X(t)=k)=o(h)$ $|m-k|>1$

5. $\mu_0=0, \lambda_0>0, \mu_i, \lambda_i>0, i=1,2,....$

A h egy tetszőleges intervallumot jelöl, míg $o(h)$ egy olyan mennyiség, amelyre $h \to 0$ esetén $\frac{o(h)}{h} \to 0$.A λ_k mennyiségek a születési-intenzitások, μ_k számok pedig halálozási-intenzitások, melyek függetlenek az időtől. Annak valószínűsége, hogy a rendszer a t időpillanatban a k állapotban van: $P_k(t)=P(X_t=k)$ A $t+h$ időpillanatban a $X(t)$ k állapotban van akkor és csak akkor, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

1. t időpillanatban a folyamat a k állapotban van és a $(t,t+h)$ időintervallumban változás nem következik be;

2. t időpillanatban a folyamat a $k-1$ állapotban volt és a k-ba történt átmenet;

3. t időpillanatban a folyamat a $k+1$ állapotban volt és a k-ba történt átmenet;

4. $(t,t+h)$ alatt 2 vagy több átmenet történt.

Az első három feltétel egymást kizáró, míg a negyedik eset valószínűsége $o(h)$. Mivel a $P_k(t)$ mennyiségek valószínűségek, teljesül, hogy $P_k(t) \geq 0$, továbbá $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(t)=1$.

A konstans λ születési intenzitással rendelkező folyamatokban előforduló születések sorozatát Poisson-folyamatnak nevezzük. A Poisson-folyamat központi szerepet tölt be a sorbanállási rendszerek vizsgálatában. A folyamatot, mint igények beérkezését tekintjük valamilyen kiszolgálási rendszerbe, tehát a λ paraméter az érkező igények átlagos intenzitását fogja jelenteni.[3]

Tegyük fel, hogy a rendszer, a 0 állapotból indul a $t=0$ időpillanatban:

$$P_k(0)=\begin{cases} 1 & \text{,ha } k=0 \\ 0 & \text{,ha } k \neq 0 \end{cases}$$

Ez a feltétel lesz a kezdeti feltételünk, $P_k(t)$ mennyiségek pedig annak a valószínűségét jelentik, hogy k igény érkezik a rendszerbe a $(0,t)$ időintervallumban. Mivel átlagosan λ igény érkezik be egységnyi idő alatt, ezért egy t hosszúságú intervallum alatt szükségképpen átlagosan λt igénynek kell beérkeznie, ami azt is jelenti egyben, hogy a t idő alatt beérkező igények várható értéke λt. Ez a megállapítás könnyen igazolható. Jelöljük egy pillanatra K-val a t hosszúságú intervallum alatt beérkező igények számát. Ekkor:

$$E(K)=\sum_{k=0}^{\infty} kP_k(t)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!}=e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!}=e^{-\lambda t}\lambda t\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Mivel tudjuk, hogy $e^x = 1 + x + x^2 + ...$, azt kapjuk, hogy $E(K) = \lambda t$ [3]

Vegyük sorra, hogy melyek azok a fontos tulajdonságok, melyek miatt a Poisson-folyamat alkalmazható a sorbanállás elméletében.[5]

1. A Poisson-folyamat homogén, vagyis $X(s, s+t)$-vel jelölve a t hosszúságú $(s, s+t)$ intervallum alatt történő beérkezések számát,

$$P(X(s, s+t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

   nem függ attól, hogy hol helyezkedik el az intervallum, azaz független az intervallum s kezdőpontjától.

2. A beérkezések számára vonatkozó szórás és várható érték megegyezik, mindkettő a λt képlettel számolható.

3. Ha tekintünk két Poisson-folyamatot λ_1 és λ_2 paraméterekkel, akkor a két folyamat összeolvasztásával nyert folyamat szintén Poisson-folyamat lesz, méghozzá $\lambda_1 + \lambda_2$ paraméterrel.

4. Poisson-folyamat esetén a beérkezési időközök független exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

5. Az exponenciális eloszlás esetén a beérkezés valószínűsége független attól, hogy a legutolsó beérkezéstől számítva mennyi idő telt már el. Tehát egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó jövője független a múltbeli viselkedésétől, az eloszlás időben állandó marad.

Sajnos a születési-halálozási folyamatok időtől függő megoldása nehezen kezelhető, amint bonyolultabb születési-halálozási λ_k, μ_k intenzitásokat veszünk. Továbbá, még ha a $P_k(t)$ függvényeket meg is tudnánk határozni, nem világos, mennyire segít minket ez a függvényhalmaz abban, hogy jobban át tudjuk tekinteni a sorbanállási rendszer viselkedését. Ezért természetes, hogy azt kérdezzük, vajon a $P_k(t)$ valószínűségek t növekedésével megállapodnak-e végül, megszűnik-e időbeli változásuk, beáll-e stacionárius állapot. Egy születési-halálozási folyamat egyensúlyi eloszlása a következő zárt alakban írható:

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}.$$

Vizsgáljuk meg a P_k stacionárius valószínűségek létezésének feltételeit. Azt kell megnézni, hogy ezek a mennyiségek valóban valószínűségeloszlást alkotnak-e. Ehhez szükséges, hogy a $P_0 > 0$ legyen. Ez az egyenletekben szereplő születési és halálozási együtthatókra ró ki feltételt. Megköveteljük, hogy a rendszer alkalomadtán üres is legyen. Az, hogy ez feltétele a stabilitásnak rögtön ésszerűnek látszik. A felmerülő lehetőségek osztályozásához definiáljuk az alábbi két összeget:

$$S_1 := \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}},$$

$$S_2 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}.$$

Ekkor három eset lehetséges. Azt mondjuk, hogy a születési-halálozási folyamat minden állapota

1. ergodikus, ha $S_1 < \infty$, $S_2 = \infty$;
2. rekurrens nulla, ha $S_1 = \infty$, $S_2 = \infty$;
3. átmeneti, ha $S_1 = \infty$, $S_2 < \infty$.

A sorbanállási rendszerek vizsgálata során szükségünk lesz egyensúlyi állapotban valamely születési-halálozási folyamat állapotára a születési és halálozási pillanatokban. Jelölje N_{sz} a születés és N_h a halálozás időpontjában a rendszer állapotát, továbbá legyen $\Pi_k = P(N_{sz} = k)$ és $D_k = P(N_h = k) \qquad k = 0, 1, 2, ...$
Ekkor:

$$\Pi_k = \lim_{h \to 0} \frac{(\lambda_k h + o(h))P_k}{\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j h + o(h))P_j} = \frac{\lambda_k P_k}{\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j P_j}$$

továbbá

$$D_k = \lim_{h \to 0} \frac{(\mu_{k+1} h + o(h))P_{k+1}}{\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j h + o(h))P_j} = \frac{\mu_{k+1} P_{k+1}}{\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j P_j}.$$

Mivel teljesül, hogy $P_{k+1} = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} P_k \qquad k = 0, 1, ...$
ezért

$$D_k = \frac{\lambda_k P_k}{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i P_i} \qquad k = 0, 1, ...$$

Teljesül továbbá, hogy egyensúlyi állapotban az átlagos születési intenzitás egyenlő az átlagos kihalási intenzitással, ugyanis

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i P_i = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_{i+1} P_{i+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k P_k = \bar{\mu}.$$

2. fejezet

Az M/M/1 típusú sorbanállási rendszer

Az $M/M/1$ rendszer a legegyszerűbb, nemtriviális végtelen-forrású rendszer, azaz olyan rendszer, melyben végtelen hosszúságú sorok is létrejöhetnek, feltesszük továbbá, hogy az igényeket az érkezés sorrendjében szolgálják ki. Az $M/M/1$ típusú rendszerben a beérkezési folyamat λ paraméterű Poisson folyamat, vagyis az igények λ paraméterű exponenciális eloszlás szerint érkeznek a rendszerbe, a kiszolgálási idők pedig μ paraméterű,szintén exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Feltesszük, hogy a beérkezési időközök valamint a kiszolgálási idők függetlenek egymástól. A továbbiakban jelölje $X(t)$ a rendszerben tartózkodó igények számát. Azt mondjuk, hogy a rendszerünk a k állapotban van, ha $X(t) = k$. Mivel a fellépő valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak, vagyis emlékezet nélküliek, az $X(t)$ folytonos idejű Markov-lánc lesz. Vizsgáljuk meg a rendszer állapotváltozásainak valószínűségeit egy adott h időtartam alatt:

$$p_{k,k+1}(h) = (\lambda h+o(h))(1-(\mu(h)+o(h)))+\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda h+o(h))^k(\mu(h)+o(h))^{k-1} \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Az összeg első tagja annak a valószínűsége, hogy a rendszerben egy igény érkezett, és nem szolgáltak ki egyet sem. Az összeg második tagja pedig annak a valószínűségét adja, hogy a rendszerbe 2 vagy több igény érkezett, és a beérkezettnél eggyel kevesebb került kiszolgálásra. Ez a valószínűség azonban $o(h)$-val egyenlő, így eredményül kapjuk, hogy:

$$p_{k,k+1}(h) = \lambda h + o(h).$$

Annak valószínűsége, hogy a rendszer a k állapotból a $k-1$ állapotba lépett h időtartam után, a következő módon számolható:

$$p_{k,k-1}(h) = (\mu h + o(h))(1 - (\lambda(h) + o(h))) + \sum_{k=2}^{\infty}(\lambda h + o(h))^{k-1}(\mu(h) + o(h))^k = \mu h + o(h)$$

Észrevehetjük tehát, hogy egy olyan születési-halálozási folyamattal van dolgunk, amit a születési és halálozási intenzitások alábbi megválasztásával jellemezhetünk:

$$\lambda_k = \lambda, \qquad k = 0, 1, 2, ...,$$

$$\mu_k = \mu, \qquad k = 1, 2, 3....$$

Ez azt jelenti, hogy esetünkben az összes születési intenzitás λ, valamint az összes halálozási intenzitás μ. Az így nyert intenzitásokat behelyettesítve a születési-halálozási folyamat egyensúlyi állapotára vonatkozó képletbe, a következőt kapjuk:

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu},$$

azaz,

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \qquad k \geq 0.$$

Az ergodikusság feltétele általánosságban (és így annak is, hogy egy $P_k > 0$ stacionárius megoldást kapjunk) $S_1 < \infty$ és $S_2 = \infty$; esetünkben az első feltétel:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k}{P_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k < \infty.$$

Ez a sor akkor és csak akkor lesz konvergens, ha

$$\lambda/\mu < 1.$$

A második feltétel jelen esetben az alábbi alakba írható:

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(\frac{P_k}{P_0})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda}(\frac{\mu}{\lambda})^k = \infty$$

Ez akkor teljesül, ha $\lambda/\mu \leq 1$. Tehát arra a megállapításra juthatunk, hogy az ergodikusság szükséges és elégséges feltétele az M/M/1 sor esetén egyszerűen $\lambda < \mu$. Ez alapján P_0 valószínűségek kiszámolhatóak a következő képlet segítségével:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}.$$

Mivel a fenti számolás alapján az ergodikusság feltétele $\lambda < \mu$ volt, ezért a fenti sor konvergens, azaz:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}.$$

A kihasználtsági tényező $\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$ vagy 1. A stabilitás feltétele miatt a $0 \leq \varrho < 1$ egyenlőséget meg kell követelni. Ez biztosítja, hogy $P_0 > 0$ legyen. Így

$$P_k = (1-\varrho)\varrho^k, \qquad k = 0, 1, 2, ...,$$

amely valóban valószínűségi eloszlás, nevezetesen a geometriai eloszlás.

Ahhoz, hogy alkalmazni tudjuk a sorbanállás elméletet a gyakorlatban is, nézzük meg, hogy tudjuk kiszámolni a rendszer legfőbb jellemzőit.

A rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = (1-\varrho)\varrho \sum_{k=1}^{\infty} k\varrho^{k-1} =$$

$$= (1-\varrho)\varrho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \varrho^k}{\partial \varrho} = (1-\varrho)\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{1-\varrho} = \frac{\varrho}{1-\varrho}$$

A rendszerben eltöltött átlagos idő

A rendszerben töltött átlagos idő meghatározásához a rendszerben tartózkodó igények száma közvetlenül felhasználható:

$$\overline{T} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = (\frac{\varrho}{1-\varrho})(\frac{1}{\lambda}) = \frac{1/\mu}{1-\varrho}$$

A T idő függ a ϱ kihasználtsági tényezőtől. T értéke $\varrho = 0$ esetén egyetlen igény átlagos kiszolgálási ideje, azaz ha a sorbanállással nem telik el idő, akkor átlagosan $1/\mu$ lesz a tejesen rendszeridő. Azonban ha ϱ közeledik 1-hez, a rendszerben tartózkodó igények száma és az igények rendszerben töltött átlagos ideje is meredeken nő. Vegyük észre, hogy $\varrho = 1$ esetén a rendszer instabilan viselkedik, ugyanis $\varrho < 0$ volt az ergodikusság feltétele. Meglepő azonban, hogy a rendszerbeli igények átlagos száma és az átlagos rendszerben töltött idő megromlik, ha $\varrho \to 1$ alulról. $M/M/1$ sor esetén azt tapasztalhatjuk, hogy nagy ára van annak, ha ki akarjuk használni a rendszer kapacitását. Ezen jelenség magyarázta, hogy a folyamat véletlen jellegének következtében időnként a forgalom jelentősen megugorhat, és ilyenkor időlegesen túlterhelődik a kiszolgálócsatorna. Igaz marad azonban, hogy a kiszolgálócsatorna az idő P_0 hányadában üres, de ez az átlagos üresjárati idő nincs egyenletesen elosztva kicsiny időintervallumokra, csupán a hosszú működési szakaszokon érvényesül. Tehát a beérkezési időköz és a kiszolgálási idő változékonysága okozza a rossz viselkedést $\varrho = 1$ közelében.

A várakozó igények átlagos száma

A kiszolgálási folyamat egy igényre nézve két fő részből áll. Először az igény arra vár, hogy sorra kerüljön(addig nyilván az előtte lévőeket szolgálják ki), majd az ő kiszolgálása következik.

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P_k = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k - \sum_{k=1}^{\infty} P_k = \overline{N} - \varrho = \frac{\varrho^2}{1-\varrho}$$

A szerver kihasználtsága

$$U_s = 1 - P_0 = \frac{\lambda}{\mu} = \varrho,$$

ahol

$$P_0 = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + E\delta},$$

a képletben $E\delta$ a kiszolgáló átlagos foglaltsági periódushossza, $\frac{1}{\lambda}$ a tétlenségi idő várható értéke. Mivel a szerver addig tétlen, amíg igény nem érkezik, az pedig exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Így

$$1 - \varrho = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + E\delta},$$

melyből

$$E\delta = \frac{1}{\lambda}\frac{\varrho}{1-\varrho} = \frac{1}{\lambda}\overline{N} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Egy igény várakozási idejének eloszlása

Jelölje $P_k(t)$ - mint korábban is - annak valószínűségét, hogy a t pillanatban a rendszer a k állapotban van, $R_k(t))$ pedig annak valószínűségét, hogy egy a t pillanatban érkező igény a rendszert a k állapotban találja. Megmutatjuk, hogy olyan sorbanállási rendszernél, amelybe az igények Poisson-folyamat szerint érkeznek,

$$P_k(t) = R_k(t)$$

Legyen $A(t, t+\Delta t)$ az az esemény, hogy egy beérkezés történik a $(t, t+\Delta t)$ időintervallumban. Ekkor:

$$R_k(t) := \lim_{\Delta t \to 0} P\left(X(t) = k | A(t, t+\Delta t)\right),$$

ahol $X(t)$ jelöli a rendszerbeli igények számát a t időpontban. Használjuk fel a feltételes valószínűség definícióját. Ez alapján kapjuk, hogy:

$$R_k(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X(t), A(t, t+\Delta t))}{P(A(t, t+\Delta t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(A(t, t+\Delta t)|X(t) = k)P(X(t) = k)}{P(A(t, t+\Delta t)}$$

korábban láttuk, hogy Poisson-folyamat esetén (az emlékezetnélküliség miatt) az $A(t, t+\Delta t)$ esemény nem függ a t pillanatban a rendszerben tartózkodó igények számától (és magától a t időtől sem), ezért

$$P\left(A(t, t+\Delta t)|X(t)=k\right) = P\left(A(t, t+\Delta t)\right),$$

így

$$R_k(t) = P(X(t)=k).$$

Azt kaptuk tehát, hogy annak valószínűsége, hogy egy beérkező igény a rendszert a k állapotban találja, megegyezik azzal a valószínűséggel , hogy a rendszer a k állapotban van.

Világos, hogy ha egy tetszőleges pillanatban egy igény érkezik, P_0 lesz annak a valószínűsége, hogy nem kell várakoznia, hisz ekkor a rendszer üres. Minden más esetben várakozni kényszerül. Tegyük fel, hogy az érkezés pillanatában n igény tartózkodik a rendszerben. Ekkor az érkező igénynek meg kell várnia, míg a kiszolgálás alatt álló igény kiszolgálása befejeződik és az előtte álló $n-1$ igény elhagyja a rendszert. Feltettük, hogy a kiszolgálások egymástól függetlenek és μ paraméterű exponenciális eloszlásúak. Köztudott, hogy az exponenciális eloszlás emlékezetnélküli, így a kiszolgálás alatt levő igény eloszlása független attól mióta folyik a kiszolgálás, ezért a várakozási idő Γ vagy Erlang - eloszlású μ és n paraméterrel. Az Erlang-eolszlás sűrűségfüggvénye a következő alakot ölti:

$$f_n(x) = \frac{\mu(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\mu x}, \qquad x \geq 0.$$

Ha f_W-vel jelöljük egy tetszőleges igény várakozási idejének sűrűségfüggvényét, akkor a teljes valószínűség tételét felhasználva az alábbi összefüggés adódik:

$$f_W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}\mu e^{-\mu x}\varrho^n(1-\varrho) = (1-\varrho)\varrho\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu x \varrho)^k}{k!}e^{-\mu x} = (1-\varrho)\varrho\mu e^{-\mu(1-\varrho)x}$$

Tehát

$$f_W(0) = 1-\varrho \qquad x = 0 f_W(x) = (1-\varrho)\varrho\mu e^{-\mu(1-\varrho)x} \qquad x > 0$$

Ez alapján felírható a várakozási igény eloszlásfüggvénye:

$$F_W(x) = 1-\varrho+\varrho\left(1-e^{-\mu(1-\varrho)x}\right) = 1-\varrho e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

Melyből az átlagos várakozási idő:

$$\overline{W} = \int_0^{\infty} x f_W(x)dx = \frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)} = \varrho E\delta = \overline{N}\frac{1}{\mu}.$$

Rendszerben való tartózkodási idő eloszlása

Az előzőhöz hasonló számolással kaphatjuk a megfelelő eloszlást, azonban ebben az esetben egy igény akkor hagyja el a rendszert, ha őt kiszolgálták, vagyis az Erlang-eloszlásunk paraméterei most μ és $n+1$ lesznek. A sűrűségfüggvény:

$$f_T(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\varrho)\varrho^n \frac{(\mu x)^n}{n!}\mu e^{-\mu x} = \mu(1-\varrho)e^{-\mu x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varrho\mu x)^n}{n!} = \mu(1-\varrho)e^{-\mu(1-\varrho)x}$$

Az eloszlásfüggvény pedig:

$$F_T(x) = 1 - e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

Látható tehát, hogy a tartózkodási idő exponenciális eloszlású, méghozzá $\mu(1-\varrho) = \mu - \lambda$ paraméterrel. Ezért az átlagos rendszerbeli tartózkodási idő:

$$\overline{T} = \frac{1}{\mu(1-\varrho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}.$$

Megállapítható néhány összefüggés a meghatározott mennyiségek között:

$$\overline{T} = \overline{W} + \frac{1}{\mu} = \frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\varrho)} = \frac{1}{\mu-\lambda} = E\delta.$$

Vegyük észre továbbá, hogy:

(*)
$$\lambda\overline{T} = \lambda\frac{1}{\mu(1-\varrho)} = \frac{\varrho}{1-\varrho} = \overline{N}.$$

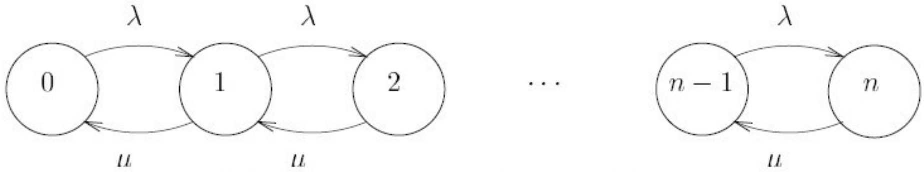
valamint

(**)
$$\lambda\overline{W} = \lambda\frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)} = \frac{\varrho^2}{1-\varrho} = \overline{Q}.$$

A (*) és a (**) összefüggéseket Little-formuláknak nevezzük.

Érdemes kiszámolni annak valószínűségét is, hogy legalább k igény tartózkodik a rendszerben:

$$P[\text{rendszerben lévő igények száma} \geqslant k] = \sum_{i=k}^{\infty} p_i = \sum_{i=k}^{\infty}(1-\varrho)\varrho^i = \varrho^k$$



Az M/M/1 modell állapotátemeneti diagrammja

A Little-törvényről

A rendszerben tartózkodó igények átlagos száma, és az általuk a rendszerben töltött átlagos idő fontos mennyiségek a sorbanállás szempontjából. A Little-törvény összekapcsolja ezeket a mennyiségeket a beérkezési intenzitás segítségével. A törvény bizonyítása John Dutton Conant Little, amerikai matematikustól származik, melyet 1961-ben publikál [6]. A Little - törvény azt mondja, hogy állandó körülmények között, a sorbanállási rendszerben tarózkodó igények átlagos száma, megegyezik a beérkezési intenzitás és az átlagos rendszerben eltöltött idő szorzatával [7]. Tehát a már korábban bevezetett jelöléseket felhasználva:

$$\overline{N} = \lambda\overline{T}$$

Megköveteljük a háttérben rejtőző sztochasztikus folyamat stacionárius voltát, azonban nem vesszük figyelembe, hogy hány kiszolgálóegységünk van, egy sorban, esetleg több sorban várakoznak az igények, milyen a kiszolgálási idő vagy várakozási idő eloszlása. Ebből adódóan ez a képlet rendkívül egyszerű és hasznos. A képlet legalább két mennyiségét általában könnyű meghatározni (becslésekkel, megfigyelésekkel), és a harmadik paraméter ezekből már egyszerűen adódik.

Tekintsük a következő példát [7]: Meg szeretnénk határozni, hogy egy kórház szülészetén hány ágyra van szükség, hogy az ott dolgozók megfelelően el tudják látni a munkájukat.Korábbi évek tapasztatai alapján tudjuk, hogy a vizsgált városban átlagosan öt gyerek születik naponta. Az esetek 90 százalékában az újszülöttek két nap után hazamehetnek, a fennmaradó 10 százalékban, azonban valamiféle komplikáció következtében kénytelenek egy hétig a kórházban maradni. Tehát átlagosan $0,9 \cdot 2 + 0,1 \cdot 7 = 2,5$ napot maradnak a gyerekek a kórházban. A Little-törvény segítségével az adatok alapján megjósolható, hogy átlagosan hány anyuka tartózkodik a szülészeten naponta.
A beérkezési intenzitás most $\lambda = 5$ (naponta), a rendszerben töltött várakozási idő $2,5$ nap.
Ebből következően a "várakozó sor" átlagos hossza: $\overline{N} = 12,5$.
Azt kaptuk, hogy átlagosan 12.5 anyuka tartózkodik a kórházban, tehát legalább 13 ágyra szüksége van az adott kórháznak ahhoz, hogy mindenkit el tudjanak látni.

3. fejezet

Prioritásos M/M/1 rendszer

A prioritásos M/M/1 rendszer,az M/M/1 rendszer egy olyan módosítása, amelyben a beérkező igényeknek többféle típusát különböztetjük meg. Az egyszerűség kedvéért olyan rendszerrel foglalkozunk, melyben a beérkező igényeknek két típusa lehetséges, de a modell kiterjeszthető több különböző típusú igény esetére is. Általában az alacsonyabb sorszámú igények élveznek prioritást a magasabb sorszámú igényekkel szemben. Az igények továbbra is független Poisson-eloszlás szerint érkeznek, az egyes típusú λ_1, míg a kettes típusú λ_2 paraméterrel. Tegyük fel, hogy az egyes típusuktól eltekintve a kiszolgálási intenzitás paramétere μ. Jelölje a továbbiakban ρ_i a λ_i/μ mennyiséget.
Ekkor a prioritásoknak két különböző fajtáját különböztethetjük meg ([2],[5]).

3.1. A megszakításos rendszer

Megszakításos rendszer esetén az egyes típusú igények abszolút prioritást élveznek a kettes típusú igényekkel szemben. Ez azt jelenti, hogy egy egyes típusú igény érkezésekor, a kettes típusú igény kiszolgálása azonnal megszakad, és a művelet az egyes típus kiszolgálásával folytatódik. Kettes típusú igény már csak akkor kerül újra kiszolgálásra, ha nincs a rendszerben több egyes típusú. Ekkor a kettes típusú igények kiszolgálása ott folytatódik, ahol megszakításra került.
Jelöljük most N_i-vel az i típusú igények számát, továbbá T_i-vel az i típusú igények rendszerben tartózkodásának idejét. Határozzuk meg ezen mennyiségek várható értékét.
Mivel az egyes típusú igények abszolút prioritással bírnak, ezért

$$E(T_1) = \frac{1/\mu}{1-\rho_i}$$

továbbá

$$E(N_1) = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

Ez azért lehetséges, mert a prioritás miatt az egyes típusú igények kiszolgálását a rendszerben lévő kettes típusú igények nem befolyásolják.
Mivel típustól függetlenül a kiszolgálási intenzitás megegyezik, így a rendszerben tartózkodó igények a kiszolgálás sorrendjétől független. Így ez az érték megegyezik azzal, amikor az érkezési sorrend szerint történik a kiszolgálás. Az M/M/1 rendszernél levezetett képletek felhasználásával:

$$E(N_1) + E(N_2) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{1 - \rho_1 - \rho_2}$$

Használjuk fel az egyes típusú igényekre kapott képletet.Ekkor:

$$E(N_2) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{1 - \rho_1 - \rho_2} - \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} = \frac{\rho_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

A Little-törvény alkalmazásával adódik, hogy:

$$E(T_2) = \frac{E(N_2)}{\lambda_2} = \frac{1/\mu}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

3.2. A kivárásos rendszer

A prioritások második típusa az úgynevezett relatív prioritás. Ebben az esetben az egyes típusú igényeknek majdnem abszolút prioritása van, ami azt jelenti, hogy az egyes típusú igény érkezésekor a kettes típusú igény kiszolgálása nem szakad meg, de ahogy annak kiszolgálása befejeződik,az egyes típusúak kiszolgálása következik függetlenül attól, hogy a soron következő igény kettes típusú volt.
Az egyes típusú igények átlagos tartózkodási idejére a következő képlet írható fel:

$$E(T_1) = E(N_1)\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} + \rho_2\frac{1}{\mu}$$

Az utolsó tag azt jelöli, hogy amikor egy érkező egyes típusú igény kettest típusút talál kiszolgálás közben, akkor mindaddig várnia kell, amíg annak kiszolgálása be nem fejezodik. A Poisson-folyamat szerinti érkezésnek köszönhetően annak a valószínűsége, hogy az egyes típusú beérkező igény kettes típusút talál megegyezik a kettes típusú igényekre vonatkozó kihasználtsággal, amely ρ_2. Alkalmazzuk a Little-törvényt, azaz:

$$E(N_1) = \lambda_1 E(T_1),$$

amiből:

$$E(T_1) = \frac{(1 + \rho_2)/\mu}{1 - \rho_1}$$

$$E(N_1) = \frac{(1 + \rho_2)/\rho_1}{1 - \rho_1}$$

4. fejezet

Az M/M/1/K rendszer

AZ M/M/1/K rendszer egy véges befogadóképességű rendszer. Ez azt jelenti, hogy a várakozó igények száma korlátozva van, méghozzá oly módon, hogy ha a rendszerbe érkező igények száma meghaladja a meghatározott maximumot, akkor az ezen felül érkező igények kiszolgálás nélkül kénytelenek távozni.
Tegyük fel, hogy a rendszerben egyszerre K igény tartózkodhat, melybe beleszámoljuk az éppen kiszolgálandó igényt is.
Az igények érkezése továbbra is Poisson-folyamat szerint történik. A változás abban rejlik, hogy csak azok az igények léphetnek be a rendszerbe, amelyek érkezésekor kevesebb, mint K igény van ott.
Egy telefonközpont esetében például megoldást jelent a "várakozó üzemmód", amikor a beérkező igények korlátos várakozó sort alkotnak ([3]).
Mivel a bemenő igények száma korlátozott, ezért a beérkezéseket leíró Poisson-folyamatot is korlátoznunk kell. Ekkor a beérkezési intenzitások a következő alakot öltik:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{,ha } k < K \\ 0 & \text{,ha } k \geqslant K \end{cases}$$

A kiszolgálási intenzitást leíró paraméter pedig változatlan marad:

$$\mu_k = \mu, \qquad k = 1, 2, ..., K.$$

Mivel a rendszer állapottere véges, ez garanciát ad arra, hogy mindig ergodikus. Továbbá teljesül, hogy:

$$P_k = P_0 \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \qquad \text{ha } k \leq K.$$

Természetesen az is igaz, hogy:

$$P_k = 0, \text{ ha } k > K,$$

hiszen csak K igény tartózkodhat a rendszerben.

Már csak a P_0 valószínűség kiszámítására van szükség:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda}{\mu}^k \right]^{-1} = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}$$

A két eredmény összevetésével végül azt kapjuk, hogy:

$$P_k = \begin{cases} \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}} (\frac{\lambda}{\mu})^k & \text{,ha } 0 \leqslant k \leqslant K \\ 0 & \text{,egyébként} \end{cases}$$

Látható, hogy ha $K = 1$, akkor egy $M/M/1/1$ rendszert kapunk, ahol tehát nincs várakozás ([3]). Ekkor:

$$P_k = \begin{cases} \frac{1}{1+\lambda/\mu} & \text{,ha } k = 0 \\ \frac{\lambda/\mu}{1+\lambda/\mu} & \text{,ha } k = 1 = K \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

AZ $M/M/1$ rendszer vizsgálatakor már láttuk, hogy a rendszer kihasználtsága, azaz $U_s = 1 - P_0$, továbbá $E\delta$ az a mennyiség, amely megmutatja, hogy átlagosan mennyi ideig foglalt az adott kiszolgálóegység.

4.1. A rendszer főbb jellemzői

A rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$$\overline{N} = \frac{\lambda/\mu(1-(K+1)(\lambda/\mu)^K + K(\lambda/\mu)^{K+1})}{(1-(\lambda/\mu)(1-(\lambda/\mu)^{K+1})}$$

A várakozó igények átlagos száma

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{K} (k-1)P_k = \sum_{k=1}^{K} kP_k - \sum_{k=1}^{K} P_k = \overline{N} - U_s$$

A tartózkodási és várakozási idő jellemzőinek meghatározásához azt kell tudni, hogy beérkező igény milyen állapotban találja a rendszert. A Bayes-formula felhasználásával látható, hogy:

$$\Pi_k = \frac{\lambda P_k}{\sum\limits_{i=0}^{K-1} \lambda P_i} = \frac{P_k}{1 - P_k}$$

Az M/M/1 rendszer vizsgálatakor már láttuk, hogy a feltételes tartózkodási és várakozási idők Erlang-eloszlást követnek, ebben az esetben $(k+1, \mu)$ és (k, μ) paraméterrel, amennyiben a rendszerben k igény tartózkodott az új igény rendszerbe érkezésének pillanatában. Azt kapjuk, hogy:

$$\overline{T} = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{k+1}{\mu} \Pi_k = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{k+1}{\mu} \frac{\rho^k P_0}{1 - P_k} = \frac{1}{\lambda(1 - P_K)} \sum_{k=0}^{K-1} (k+1) P_{k+1} = \frac{\overline{N}}{\lambda(1 - P_K)}$$

Amiből következik, hogy

$$\overline{W} = \overline{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{\overline{N}}{\lambda(1 - P_K)} - \frac{1}{\mu}$$

Nézzük meg, hogy ebben az esetben is teljesül-e a Little formula? A rendszerbe történő átlagos beérkezés $\overline{\lambda} = \lambda(1 - P_K)$, éppen ezért:

$$\overline{\lambda T} = \lambda(1 - P_K) \frac{\overline{N}}{\lambda(1 - P_K)} = \overline{N}$$

$$\overline{\lambda W} = \overline{\lambda} \frac{\overline{N}}{\lambda(1 - P_K)} - \frac{1}{\mu} = \overline{N} - \frac{\overline{\lambda}}{\mu} = \overline{N} - \rho(1 - P_K) = \overline{N} - U_S = \overline{Q}$$

A tartózkodási idő sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye

A teljes valószínűség tételéből adódik, hogy

$$f_T(x) = \sum_{k=0}^{K-1} \mu \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} \frac{P_k}{1 - P_K}$$

Ez alapján az eloszlásfüggvényt a sűrűségfüggvény integrálásával tudjuk kiszámítani:

$$F_T(x) = \sum_{k=0}^{K-1} \left(\int_1^x \mu \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} dt \right) \frac{P_k}{1 - P_K} = \sum_{k=0}^{K-1} \left(1 - \sum_{i=0}^{k} \frac{(\mu x)^i}{i!} e^{-\mu x} \right) \frac{P_k}{1 - P_K} =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{K-1} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{(\mu x)^i}{i!} e^{-\mu x} \right) \frac{P_k}{1 - P_K}$$

Bonyolultabb formulákkal kellett számolnunk, mint az $M/M/1$ rendszer esetében, azonban ha $K \to \infty$, akkor

$$f_T(x) = \mu(1 - \rho) e^{-\mu(1-\rho)x}$$

Most vizsgáljuk meg a várakozási idő sűrűségfüggvényét is:

$$f_W(0) = \frac{P_0}{1 - P_K}$$

$$f_W(x) = \sum_{k=0}^{K-1} \mu \frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu x} \frac{P_k}{1 - P_K}$$

Ez alapján az eloszlásfüggvény:

$$F_W(x) = \frac{P_0}{1 - P_K} + \sum_{k=0}^{K-1} \left(1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu x)^i}{i!} e^{-\mu x}\right) \frac{P_k}{1 - P_K} =$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{K-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu x)^i}{i!} e^{-\mu x}\right) \frac{P_k}{1 - P_K}$$

Vegyük észre, hogy P_K valószínűségek kitüntetett szereppel bírnak az egyes képletekben. Mit is jelent ez a valószínűség? P_K nem más, mint annak az esélye,hogy a rendszerhez érkező igény nem tud csatlakozni a sorhoz, mert nincs hely.

Ezt a valószínűséget a szakirodalom igényvesztési valószínűségnek nevezi, és általában P_B-vel jelöli. A Bayes-formulát felhasználva tudjuk kiszámítani, hogy:

$$P_B = \frac{\lambda P_K}{\sum\limits_{k=0}^{K} \lambda P_K}$$

Ha jobban megvizsgáljuk ezt az összefüggést, látható, hogy P_B valószínűség függ ρ-tól is, tehát

$$P_B(K, \rho) = \frac{\rho^K}{\sum\limits_{k=0}^{K} \rho^k}$$

A fenti képletet átalakítva adódik, hogy

$$P_B(K, \rho) = \frac{\rho \rho^{K-1}}{\sum\limits_{k=0}^{K-1} \rho^k + \rho \rho^{K-1}} = \frac{\rho P_B(K-1, \rho)}{1 + \rho P_B(K-1, \rho)}$$

Induljunk ki a $P_B(1, \rho) = \dfrac{1}{1 + \rho}$ kezdeti valószínűségből. Ekkor az igényvesztés többi valószínűségét meghatározhatjuk rekurzív módon. Mivel ez a sorozat $\rho < 1$ esetén 0-hoz tart, ezért rekurzióval biztosan található olyan K, melyre

$$P_B(K, \rho) < P^*,$$

ahol P^* egy előre megadott korlát az igényvesztés valószínűségére.

K meghatározásához azonban a $\frac{\rho^K(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} < P^*$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk, ami bonyolult feladat. Ehelyett azonban választhatunk egy közelítő megoldást, melynek lényege, hogy egy $M/M/1$ rendszer esetén kiszámítjuk, hogy mi lesz annak a valószínűsége, hogy a rendszerben legalább K igény tartózkodik, majd ennek segítségével közelítjük a szükséges értéket.

Mivel

$$P_B(K,\rho) = \frac{\rho^K(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} < \sum_{k=K}^{\infty} \rho^k(1-\rho) = \rho^K,$$

vagyis

$$\rho^K < P^*$$

Amennyiben a fenti egyenlőtlenség teljesül, igaz lesz az is, hogy $P_B(K,\rho) < P^*$ K érték megtalálásához logaritmizáljuk mindkét oldalt:

$$K ln\rho < lnP^*$$

$$K > \frac{lnP^*}{ln\rho}$$

Tehát tényleg találhatunk megfelelő K-t a közelítő módszer segítségével.

5. fejezet

Sorbanállási rendszerek alkalmazásai

A sorbanállási rendszereknél leggyakrabban feltett kérdések a következők:

- Az idő mekkora hányadában szabad a kiszolgálóhely?
- Mennyi a sorbanálló ügyfelek átlagos száma?
- Mennyi az ügyfél sorban eltöltött idejének várható értéke?
- Mennyi a rendszerben eltöltött átlagos időtartam?
- Hány új kiszolgálóhelyet kell létesíteni ahhoz, hogy az átlagos várakozási idő bizonyos arányban lerövidüljön?
- Hogyan lehet a rendszer hatékonyságát javítani?

5.1. Egyszerűbb feladatok megoldása

Néhány feladaton keresztül vizsgáljuk meg, hogy a tárgyalt sorbanállási rendszerek mellett ezek a mennyiségek hogyan is számíthatóak ki.

1. feladat

Egy postán egyetlen ablaknál történik az ügyintézés. Az ügyfelek Poisson-folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan tízen, a kiszolgálási idő pedig exponenciális eloszlású 5 perc várható értékkel.

a) Átlagosan hány ügyfél tartózkodik a hivatalban?

b) Átlagosan mennyi időt tölt el egy ügyfél a hivatalban a várakozással és kiszolgálással együtt?

c) Átlagosan mennyi idő telik várakozással?

d) Ha véletlen időpontban érkezünk a postára, mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb ketten állnak előttünk?

Megoldás

Az érkezési intenzitás 10 ügyfél óránként, a kiszolgálási pedig 12 ügyfél óránként, azaz a paramétereink most $\lambda = 10$ és $\mu = 12$.

a) $E(N) = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{10}{12 - 10} = 5$, azaz átlagosan 5 ügyfél tartózkodik a postán.

b) $E(T) = \dfrac{1}{\mu - \lambda} = \dfrac{1}{12 - 10} = 0{,}5$, azaz átlagosan fél órát tartózkodnak az egyes ügyfelek a postán.

c) $E(W) = \dfrac{\lambda}{\mu}\dfrac{1}{\mu - \lambda} = \dfrac{10}{12}\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{12}$, azaz átlagosan 25 percet kell várakozással tölteniük.

d) $P(\text{legfeljebb ketten állnak előttünk}) = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu} + (1 - \dfrac{\lambda}{\mu})\dfrac{\lambda}{\mu} + (1 - \dfrac{\lambda}{\mu})\dfrac{\lambda}{\mu}^2 \approx 0,4213$.

2. feladat

Tekintsük az előző feladatunkat azzal a módosítással, hogy most három ablak is nyitva van, a kiszolgálás ideje pedig 6 perc várható értékű.

a) Tegyük fel, hogy véletlenszerűen érkezünk meg a postára. Mekkora a valószínűsége, hogy sorba kell állnunk?

b) Átlagosan hány ügyfél tartózkodik a hivatalban?

c) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a hivatalban?

d) Átlagosan mennyi időt kell az ügyfeleknek várakozással töltenie?

e) Mi történne, ha az egyik ablak bezárna? És ha két ablak zárna be?

Megjegyzésként megemlítem, hogy most az $M/M/n$ rendszer használatára van szükségünk, amelyben a a beérkezési intenzitásλ paraméterű és állandó, viszont ebben az esetben n darab kiszolgálóegység áll rendelkezésre.

Megoldás

a) Akkor kell sorba állnunk, ha mind a három ablak foglalt. Ez akkor fordul elő, ha legalább három ügyfél van a hivatalban. Ennek valószínűsége:

$$1-(\pi_0+\pi_1+\pi_2)=1-(\tfrac{5}{17}+\tfrac{6}{17}+\tfrac{18}{85})\approx 0,1411$$

b) Ebben az esetben nem használható az $M/M/1$ rendszerre levezetett formula, azonban kis módosítással már alkalmazhatóvá válik:
$E(N)=\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\pi_k=\pi_1+\sum_{k=2}^{\infty}k\pi_k=\frac{\lambda}{\mu}\pi_0+\sum_{k=2}^{\infty}k\frac{9}{2}\left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)\pi_0=\frac{6}{17}+\sum_{k=2}^{\infty}k\frac{9}{2}\left(\frac{12}{30}\right)^k\frac{5}{17}=\frac{6}{17}+$
$\frac{9}{2}\frac{5}{17}\frac{12}{30}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{12}{30}\right)^{k-1}=\frac{6}{17}+\frac{9}{17}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{12}{30}\right)^{k-1}-1\right]=\frac{6}{17}+\frac{9}{17}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{12}{30}\right)}^2-1\right]=\frac{22}{17}$

c) A postán eltöltött átlagos idő meghatározásához felhasználhatjuk a Little-formulát:

$$E(N)=\lambda\, E(T)\Rightarrow E(T)=\frac{1}{\lambda}\,E(N)=\frac{1}{12}\,\frac{22}{17}\approx 6,47\text{ perc}$$

d) A várakozással eltöltött átlagos idő meghatározásához ismét felhasználhatjuk a Little-formulát:
$E(N_\omega)=\lambda\, E(T_\omega)\Rightarrow E(T_\omega)=\frac{1}{\lambda}\,E(N_\omega)=\frac{1}{12}\,\frac{8}{85}\approx 0,47$ perc
Megfigyelhetjük, hogy a várakozási idő, és a postán töltött összidő különbsége éppen 6 perc, ami pont az átlagos kiszolgálási idő, tehát jól számoltunk.

e) Ha az egyik ablak bezárna, akkor a rendszer maximális teljesítőképessége 2μ azaz 20 fő/óra lenne,vagyis a 12 fő/óra érkezési intenzitás mellett még működőképes maradna. Ha két ablak zárna be, akkor a maximális teljesítőképesség 10 fő/óra lenne, ami kevesebb, mint az érkezési intenzitás, tehát a rendszer összeomlana.

3. feladat

Tekintsünk egy $M/M/1$ típusú rendszert,és tegyük fel, hogy a beérkező igényeknek két különböző típusa lehet. A kiszolgálási idő exponenciális eloszlású 5 perc várható értékkel minden ügyfél esetében. Az 1. típusú ügyfelek közül óránként 4, míg a 2. típusú ügyfelek közül óránként 5 érkezik a kiszolgálóegységbe. Tegyük fel továbbá, hogy az 1. típusú ügyfelek prioritást élveznek a 2. típusú ügyfelekkel szemben.

a) Átlagosan mennyi időt töltenek az egyes ügyfelek a rendszerben, ha az 1. típusú igények abszolút prioritást élveznek a 2. típusú igényekkel szemben?

b) Átlagosan mennyi időt töltenek az egyes ügyfelek a rendszerben, ha az 1. típusú igények relatív prioritást élveznek a 2. típusú igényekkel szemben?

Megoldás

A feladat alapján a rendszerünk paraméterei most: $\lambda_1=4$, $\lambda_2=5$ valamint $\mu=12$.

a)

A rendszerben tartózkodó 1. típusú ügyfelek átlagos száma:
$E(N_1)=\frac{\rho_1}{1-\rho_1}=\frac{4/12}{1-4/12}=\frac{1}{2}$

Az 1. típusú ügyfelek rendszerben töltött átlagos ideje:

$E(T_1)=\frac{1/\mu}{1-\rho_1}=\frac{1}{\mu-\lambda_1}=\frac{1}{12-4}=7{,}5$ perc

A rendszerben tartózkodó 2. típusú ügyfelek átlagos száma:

$E(N_2)=\frac{\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}=\frac{5/12}{(1-4/12)(1-4/12-5/12)}=\frac{5}{2}$

A 2. típusú ügyfelek rendszerben töltött átlagos idejének kiszámításához használható a Little - formula:
$E(T_2)=\frac{E(N_2)}{\lambda_2}=\frac{5/2}{5}=\frac{1}{2}$, azaz 30 perc.

b)

Ebben az esetben, ha az érkező 1.típusú igény 2. típusút talál kiszolgálás közben, akkor meg kell várnia, hogy a kiszolgálás befejeződjön. A rendszerben tartózkodó 1. típusú ügyfelek átlagos száma:
$E(N_1)=\frac{(1+\rho_2)\rho_1}{1-\rho_1}=\frac{17}{24}$
Az 1. típusú ügyfelek rendszerben töltött átlagos ideje:
$E(T_1)=\frac{E(N_1)}{\lambda_1}=\frac{17}{96}$, azaz 10,625 perc.
A 2. típusú ügyfelek rendszerben töltött átlagos ideje:
$E(T_2)=\frac{(1-\rho_1(1-\rho_q-\rho_2))/\mu}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}=\frac{1-4(1-9)}{(1-4)(1-9)}=\frac{11}{24}$, azaz 27,5 perc.

Szeretnék említést tenni a dolgozatban ugyan részletesen nem tárgyalt rendszerről, nevezetesen az $M/G/1$ sorbanállási rendszerről. Az $M/G/1$ rendszerben szintén egy kiszolgálóegység van, a beérkezési folyamat Poisson-típusú, azonban a kiszolgálási idő eloszlása tetszőleges lehet [3].
A formulák levezetése nélkül nézzük meg a rendszer jellemzőinek kiszámítási módját.
A sorban tartózkodó igények átlagos száma:

$$E(Q)=\frac{\lambda^2\sigma^2+(\lambda/\mu)^2}{2\cdot(1-\lambda/\mu)}$$

A rendszerben tartózkodó igények átlagos száma:

$$E(N)=E(Q)+\frac{\lambda}{\mu}$$

A várakozással töltött átlagos idő:

$$E(W) = \frac{E(Q)}{\lambda}$$

A rendszerben eltöltött átlagos idő:

$$E(T) = E(W) + \frac{1}{\mu}$$

Ezeket a formulákat felhasználva tekintsük a következő feladatot:

4. feladat

Egy $M/M/1$ modellel leírható sorbanállási rendszert alkotó gép esetében, a készülő munkadarabok átlagosan 30 percig várakoznak a rendszerben. A gép idejének 25 százalékában nem dolgozik, mert az egyes munkadarabok megérkezésére vár. Mennyivel csökkenne a munkadarabok rendszerben töltött átlagos várakozási ideje, ha a kiszolgálási idő szórását a jelenlegi érték negyedére csökkentenénk?

Megoldás Tekintsük először a jelenlegi rendszert és számoljuk ki a szükséges paramétereket a megadott információkból!
Annak valószínűsége, hogy a rendszer üres:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 0,25$$

A rendszerben töltött átlagos idő:

$$E(T) = \frac{1}{\mu - \lambda} = 30 \text{ perc.}$$

Továbbá:

$$E(T) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1/\mu}{\mu/\mu - \lambda/\mu} = \frac{1/\mu}{1 - \lambda/\mu} = \frac{1}{P_0} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \text{ óra}$$

Ekkor

$$\frac{1/\mu}{0,25} = \frac{1}{2}, \text{ melyből } \frac{1}{\mu} = \frac{1}{8}, \text{ azaz } \mu = 8.$$

Tehát a gépek 8 munkadarabot készítenek el óránként.
Ezt az eredményt felhasználva:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{\lambda}{8} = 0,25 \text{ miatt } \lambda = 6.$$

Azaz óránként 6 munkadarab érkezik a rendszerbe.
Az exponenciális eloszlás tulajdonsága, hogy szórása és várható értéke megegyezik. Mivel a feladatban a kiszolgálási időnek csak a szórása csökken, ezért ez a feltétel a továbbiakban

nem teljesül, azaz a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású. A kiszolgálási idő várható értékének és szórásának ismeretében azonban alkalmazható az $/M/G/1$ rendszer.
Jelen esetben $\mu = \frac{1}{4\mu} = \frac{1}{32}$. Ekkor:
A várakozó igények átlagos száma

$$E(Q) = \frac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2 \cdot (1 - \lambda/\mu)} = \frac{6^2\left(\frac{1}{32}\right)^2 + \left(\frac{6}{8}\right)^2}{2 \cdot (1 - \frac{6}{8})} = \frac{153}{128}.$$

A sorban eltöltött átlagos idő:

$$E(W) = \frac{E(Q)}{\lambda} = \frac{153/128}{6} = \frac{51}{256}$$

A rendszerben töltött átlagos idő:

$$E(T) = E(W) + \frac{1}{\mu} = \frac{51}{256} + \frac{1}{8} = \frac{83}{256} \text{ óra, azaz } 19,45 \text{ perc.}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a rendszerben eltöltött várakozási idő $10,54$ perccel csökkenne.

5.2. Kórházi sorok vizsgálata

A sorbanállás megjelenik az egészségügyben is. A betegek számára az egészségügyi ellátás egyik igen fontos tényezője a szolgáltatás nyújtásához kapcsolódó várakozás. A várakozással töltött, elvesző idő mértéke a betegnek az ellátással kapcsolatos elégedettségét jelentősen befolyásolja, és kedvezőtlen esetben az ellátóról negatív kép alakulhat ki.A kiszolgálórendszer nem megfelelő méretezése ugyan akkor a szolgáltató számára felesleges többletköltséget generálhat, amely tovább rontja az intézmény pénzügyi helyzetét. Miért kell sorokban várakoznunk? Tekintsünk egy kórházi várótermet, amely óránként átlagosan ötven beteget képes befogadni, de még akkor is kialakulhat várakozó sor, ha az szám óránként harmincötre csökken. A rendszer kulcsszava az átlagos. A valóságban ugyanis a páciensek véletlenszerű időpontokban érkeznek, és egyesek ellátási ideje tovább tarthat, mint másoké. Más szóval az érkezési és kiszolgálási időkben változékonyság figyelhető meg. Ebből adódik, hogy a várótermek időlegesen telítetté válhatnak, és a páciensek várakozni kényszerülnek, de előfordulhat olyan eset is, amikor a váróterem üresjáratba kerül, azaz épp nincs ellátásra váró beteg.

Az egészségügyi ellátást leíró sorbanállási modell megalkotásához a következő jellemzőket kell sorra vennünk, amelyek karakterizálják a rendszerünket. Figyelembe kell venni a beérkezési folyamatot, az érkezések egyediségét, a sorok jellemzőit, a kiszolgálás szabályait, a kiszolgálási és távozási folyamat jellemzőit.

Az egészségügyi ellátás vizsgálatakor az egyszerűség kedvéért végtelen forrású sorbanállási rendszereket tekintünk, azaz olyan modellt, amelyben a betegek száma nincs korlátozva. Így könnyebben kezelhetővé válik a sor hosszával és a rendszer kapacitásával kapcsolatos esetlegesen felmerülő problémák megoldása.

Minden egyes kiszolgálóegységre adott egy kapacitás, amely meghatározza, hogy hány pácienst képes ellátni az adott kiszolgálóegység.A kórházakat tehát az $M/M/1/K$ rendszer segítségével reprezentálhatjuk.

Az egyik legfontosabb jellemző a beérkező beteg száma és annak időbeli eloszlása. Felmerülhet a kérdés, hogy az elméletből ismert eloszlásokkal tudjuk-e jellemezni a kórházi ellátás beérkezési és kiszolgálási időit. A valóságban bonyolultnak tűnik a helyzet, hiszen az érkezési intenzitások a nap különböző szakaszaiban eltérőek lehetnek. Előfordulhatnak napszaki ingadozások, reggel általában több beteggel találkozhatunk a várótermekben, mint egy késő délutáni időpontban, ezek azonban a betegek orvoshoz fordulási szokásainak ismeretében becsülhetők. Mind az elméleti megfontolások, mind a valós adatsorokon végzett vizsgálatok([8]) azt igazolják, hogy a betegek érkezése Poisson-folyamatot követ, vagyis az adott beteg érkezési ideje nem függ az előzőektől.

A kórházi menedzsment célja, hogy az egyes napszakokra a legmegfelelőbb megoldást találja esetleg elcsúsztatott munkarenddel, vagy forgalmasabb időszakokban beállított többlet személyzet segítségével. Az elemzéshez meg kell határozni azokat a beérkezési időszakokat, amelyekben a beérkezési folyamat jellemzői azonosak.Így az egyes időtartamokon belül feltételezzük a beérkezési időközök exponenciális eloszlását. Első körben tegyük fel tehát, hogy az igények λ paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek a rendszerbe úgy, hogy minden igény prioritása azonos, kiszolgálásuk során a FIFO elv érvényesül. A kiszolgálás történjen μ paraméterű Poisson-folyamat szerint, és tegyük fel, hogy egyszerre legfeljebb K igény tartózkodhat a rendszerben. Ekkor a stacionárius megoldás a következő módon írható fel:

$$P_0 = \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}$$

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

Kórházak összevonásának vizsgálata

A számolások elvégzéséhez az ötletet a 2007-es norvég kórházreform szolgáltatta [11].

Tekintsünk most két kórházat λ paraméterű Poisson-folyamat szerinti beérkezési és μ paraméterű Poisson-folyamat szerinti kiszolgálási időkkel.

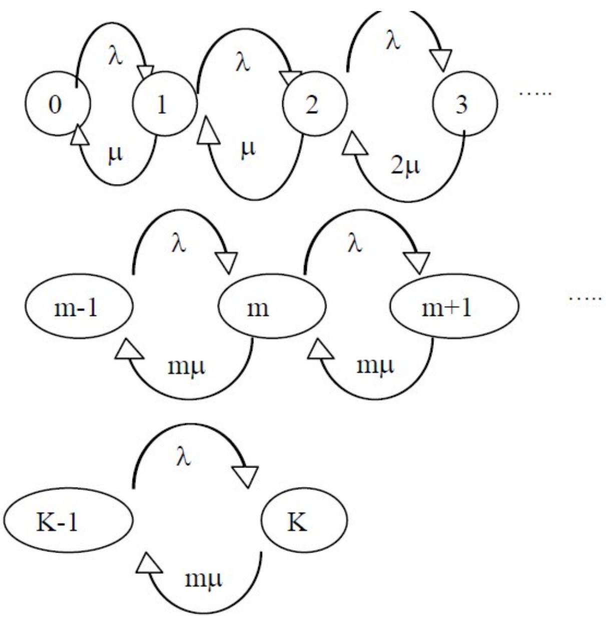
Kérdés: Mikor lenne hatékonyabb megoldás a két kórház összevonása?

A két kórház összevonásával a beérkezések Poisson-folyamatának paramétere: $\lambda_1+\lambda_2$, a kiszolgálás Poisson folyamatának paramétere pedig $\mu_1+\mu_2$ és így egy $M/M/2/2K$ rendszert kapunk.
Ekkor:

$$P_0=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{K}2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$$

$$P_k=2P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

Egy M/M/m/K rendszer állapotgiagrammja:



Számoljunk ki néhány valószínűséget az egyes kórházak esetén külön-külön, majd az összevont kórházak paramétereit használva. Tekintsünk két kórházat, ahol időegység alatt átlagosan 4 beteg érkezik, azaz $\lambda=4$. A kórházak maximális sorhossza legyen 5, és tegyük fel, hogy mindkét kórházban egy rendelő üzemel. A kiszolgálás szintén Poisson-folyamat szerint történik, $\mu=5$ paraméterrel.

Először tekintsük a kórházakat külön-külön, ekkor az $M/M/1/K$ jellemzői alapján kell a számításokat végezni. Tehát:

$$P_0 = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}} = \frac{1-4/5}{1-(4/5)^6} = 0,27105$$

$$P_1 = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \frac{1-4/5}{1-(4/5)^6}\frac{4}{5} = 0,21684$$

$$P_2 = \frac{1-4/5}{1-(4/5)^6} \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,17347$$

$$P_3 = \frac{1-4/5}{1-(4/5)^6} \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0,13878$$

$$P_4 = \frac{1-4/5}{1-(4/5)^6} \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 0,11102$$

$$P_5 = \frac{1-4/5}{1-(4/5)^6} \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 0,08881$$

Vizsgáljuk meg az eredményeket az összevonás után. Most az $M/M/2/2K$ rendszerrel számolunk, azaz az érkezési intenzitás $\lambda' = \lambda_1 + \lambda_2 = 8$, a kiszolgálás paramétere $\mu' = \mu_1 + \mu_2 = 10$, továbbá a sor maximális hossza 10.Ekkor:

$$P_0 = \frac{1}{1 + 2\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{8}{10}\right)^k} = 0,12283$$

$$P_1 = 2P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 2 \cdot 0,12283 \cdot \left(\frac{8}{10}\right) = 0,19653$$

$$P_2 = 2 \cdot 0,12283 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^2 = 0,15722$$

$$P_3 = 2 \cdot 0,12283 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^3 = 0,12578$$

$$P_4 = 2 \cdot 0,12283 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^4 = 0,10062$$

$$P_5 = 2 \cdot 0,12283 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^5 = 0,08050$$

$$P_6 = 2 \cdot 0,12283 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^6 = 0,06440$$

$$P_7 = 2 \cdot 0,12283 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^7 = 0,05152$$

$$P_8 = 2 \cdot 0,12283 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^8 = 0,04121$$

$$P_9 = 2 \cdot 0,12283 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^9 = 0,03297$$

$$P_{10} = 2 \cdot 0,12283 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{10} = 0,02637$$

Little tételének segítségével felírhatjuk az átlagos várakozási időt, és a sorban tartózkodó betegek átlagos számát. A sorban tartózkodó igények száma ugyanis egyenlő a beérkezési intenzitás és az átlagos várakozási idő szorzatával.

$$E(N) = \lambda E(T), \text{ ahol}$$

$$E(N) = \sum_{i=1}^{K} iP_i$$

Ez alapján külön tekintve a kórházakat:

$$E(N) = 0,21684 + 2 \cdot 0,17347 + 3 \cdot 0,13878 + 4 \cdot 0,11102 + 5 \cdot 0,08881 = 1,86825$$

$$E(T) = \frac{1,86825}{4} = 0,46706$$

Az összevont kórházak esetén is hasonló számolással adódik, hogy:

$$E(N) = 0,19653 + 2 \cdot 0,15722 + 3 \cdot 0,12578 + 4 \cdot 0,10062 + 5 \cdot 0,08050 + 6 \cdot 0,06440+$$

$$+7 \cdot 0,05152 + 8 \cdot 0,04121 + 9 \cdot 0,03297 + 10 \cdot 0,02637 = 3,33044$$

$$E(T) = \frac{3,33044}{8} = 0,416305$$

A számítások során fiktív adatokat használtam. Habár messzire menő következtetések nem vonhatóak le a kapott eredményekből, látható, hogy az összevont kórház esetén a várakozási idő valamelyest lecsökkent, tehát ha a két kórházba azonos számú beteg érkezik naponta, akkor érdemes a két kórház helyett egy összevont kórházat működtetni. Hasonló meggondoláshoz vezethet az a probléma is, ha az orvosok nem külön-külön fogadják a betegeket, hanem egyetlen várakozó sor kerül kialakításra. Azaz, ha nem kellene szakorvoshoz bejelentkezni, bizonyos mértékben csökkenhetne a várakozási idő a kórházakban.

Mi is az igazság?

A szakdolgozatom célja az volt, hogy betekintést nyújtson a sorbanállás matematikai hátterébe. Láthattuk, hogy a különféle rendszerek jól leírhatóak a valószínűségszámítás eszközeivel. Felmerülhet azonban a kérdés, hogy a valóságban mennyire alkalmazhatóak a kapott eredmények.

A sorbanállást mindenki gyűlöli, de senki sem úszhatja meg. Ejtsünk néhány szót a mindennapokban leggyakrabban előforduló jelenségről, a pénztáraknál való sorbanállásról. A pénztárakhoz véletlenszerűen érkeznek a vevők és ott szintén nem pontosan meghatározott időt töltenek. Ez függ a vásárolt áruk jellegétől és mennyiségétől, a kért számlától, a fizetési módtól, és jelentősen befolyásolhatja egy leesett vonalkód vagy a nyilvántartási rendszer pontossága. A probléma kézenfekvő: az egyes napszakokban hány pénztárt kell nyitva tartanunk ahhoz, hogy a kialakuló várakozási sorok elfogadható méretűek legyenek. A kiszolgálás gyorsítására adódik még egy lehetőség, az úgynevezett expressz sorok bevezetése. Ez azt jelenti, hogy a kevesebb tételt vásárlók számára külön pénztárakat jelölünk ki, itt a kiszolgálás várhatóan gyorsabban zajlik. Kérdés, hogy legyenek-e ilyen pénztárak, ha igen akkor hány. Amint látható, a fizikai probléma jól megfogalmazható, de megoldása sok véletlen tényezőtől függ. Több matematikus is foglalkozott a problémával,s legideálisabb megoldásnak az úgynevezett amerikai sort találták ([9],[10]). Itt a vevők nem több külön sorba állnak be, hanem egyetlen hosszúba - ahonnan szétosztják őket a soron következő szabad pénztárhoz. Ez a rendszer már Németországban is megszokott a reptereken, pályaudvarokon és postákon. A várakozási idő igazságosabb elosztásához vezet a vevők között. Még ha az amerikai sor hosszabbnak is tűnik és pár embert elriaszt: általában mégis gyorsabban halad. Ezzel a rendszerrel nem fordulhat elő, hogy az egyik áruházi dolgozó az egyik kasszánál unatkozik, míg a következőnél harman várják, hogy az elöl álló vevő kihalássza a pénz a pénztárcájából. Összességében igazságosabb a kiszolgálás és kevesebb az elpazarolt munkaidő. Alexander Herzog német matematikus szerint az áruházi sorok két szempontból is bosszantóak. Először is érdekes a kérdés, hogyan állhatunk a legintelligensebben sorba. A nem túl kielégítő válasza: két

hosszabb sor esetén majdhogynem mindegy, melyik mellett döntünk, ugyanis a kiszolgálási folyamat egyenetlenségei sokkal fontosabbak mint a sorok hosszának különbsége. A rövidebb sorban is csak az esetek felében szolgálnak ki valóban gyorsabban. Le kell szögezni, hogy az amerikai sor csak az ésszerűen méretezett rendszerekben megoldás.Ha túl sok vevő jönne, ezzel a rendszerrel is sokáig kellene várniuk.
Mindent összevetve, lehetőség lenne olyan módszert találni, amivel lecsökkenthetnénk a várakozó sorok hosszát. A probléma azonban abból adódik, hogy szupermarketeket kevésbé foglalkoztatja a bosszankodó vásárlók lelki világa, ugyanis a vevők várakozással töltött ideje a vállalkozásoknak elvben nem kerül pénzébe. Amikor a hosszabb várakozást vagy egy újabb pénztár nyitását veszik fontolóra, az üzemeltetők többnyire a vevő ellenében és az alacsonyabb személyi kiadások mellett döntenek - mert a vevők bosszúságát nem lehet csak úgy veszteségre átszámítani.
A vásárlók a pénztárhoz érve tehát próbálkozhatnak különböző taktikák bevetésével a gyors kiszolgálás reményében, ám a rengeteg külső tényező jelentősen megnehezítheti a dolgukat.

Irodalomjegyzék

[1] Sztrik János, *Bevezetés a sorbanállási elméletbe és alkalmazásaiba*, *Debreceni Egyetem* (2004) *http://irh.inf.unideb.hu/ jsztrik/education/08/index.html*

[2] Sztrik János, *A sorbanállási elmélet alapjai Debreceni Egyetem* (2004)

[3] L. Kleinrock, *Sorbanállás, kiszolgálás - Bevezetés a tömegkiszolgálási rendszerek elméletébe*, *Műszaki könyvkiadó, Budapest* (1979)

[4] Samuel Karlin - Howard M. Taylor, *Sztochasztikus folyamatok*, *Gondolat,Budapest* (1985)

[5] Ivo Adan,Jacques Resing, *Queueing Theory Department of Mathematics and Computing Science Eindhoven University of Technology* 2001

[6] John D.C. Little, *A Proof of the Queuing Formula*, *Operational Research, Volume 9, Issue 3* (1961) 383-387

[7] John D.C. Little and Stephen C. Graves, *Little's Law*, *Massachusetts Institute of Technology*, *http://web.mit.edu/sgraves/www/papers/Little's20Law-Published.pdf*

[8] Kim-Horvitz-Young-Buckley, *Analysis of capacity management of the intensive care unit in a hospital*, *European Journal of Opertional Research* **115** (1999) 41-46.

[9] Rafael Hassin, *To Queue or not to queue*, *Tel Aviv University*, *http://www.math.tau.ac.il/ hassin/main.pdf* (2006)

[10] Alexander Herzog, *Wartenschlagen Theorie*, *Technischen Universität Clausthal, Spiegel* (2008)

[11] Magnussen-Hagen-Kaarboe, *Centralized or decentralized? A case study of Norwegian hospital reform* , *Social Science Medicine* (2007)