Dobókockától a pénzügyekig

Írta: Gilinger Tamás

Matematika BSc szak

Témavezető:

Dr. Fullér Róbert, egyetemi docens

Óbudai Egyetem

Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

2014

Tartalomjegyzék

1.Mátrixjátékok **2**
1.1 Csempész probléma 2
1.2 Mátrixjátékok 2
1.3 Domináns stratégiák 3
2. Szimmetrikus mátrixjátékok **5**
2.1 Szimmetrikus példa kártyákkal 5
2.2 Nyeregpont 6
2.3 Iterált dominancia 7
3. Kevert stratégiák **9**
3.1 Morra játék 9
3.2 Ismételt játék, kevert stratégiák 9
3.3 Nyeregpontok létezése és egyértelműsége 10
4. A játékelmélet alaptétele **14**
5. Természet elleni játékok **16**
5.1 Befektetési probléma 16
5.2 Kritérium módszerek 17
5.2.1 Wald- vagy maximinkritérium 17
5.2.2 Maximax kritérium 17
5.2.3 Hurwitzα-kritériuma 17
5.2.4 Savagelegkissebb megbánás kritériuma 18
5.2.5 Laplace-kritérium 19
5.2.6 Bayes-kritérium 19
6. Bimátrixjátékok **21**
6.1 Piaci verseny 21
6.2 Tiszta egyensúlyi pontok 22
6.3 Bimátrixjátékok és egyensúlyi pont 23
6.4 Az egyensúlyi pontok megadása 24
7. Swap ügyletek **28**

1.Fejezet

Mátrixjátékok

1.1Csempész probléma

Kiindulásnak tekintsük az alábbi fogoly-dilemmához hasonló problémát: két csempész csereüzletet akar lebonyolítani, de egyikük sem tudja leellenőrizni, hogy a másik valóban elhozta az árut, csak a csere után. Tehát ha valamelyikük sikeresen becsapja a másikat nyílván sokkal jobban jár, mint ha cseréltek volna, azonban ha ezzel mindketten megpróbálkoznak, üres kézzel mennek haza és ezzel rosszabbul járnak, mintha cseréltek volna.

1.2Mátrixjátékok

A probléma megoldásához először is definiáljuk, pontosan mit nevezünk játéknak. Mivel a következőkben számértékű játékokkal fogok foglalkozni a normál formában megadott játékfogalmat definiálom, amit mátrixjátéknak is hívunk, de ahogy a fenti példában láttuk, általánosan elég csak azt tudni, hogy az eshetőségek közül a játékosok mit preferálnak, azaz elég egy reláció a lehetséges kimenetek között.

Definíció: I. Adottak a játékosok és számuk véges. N={1, ... ,n}

II. Adottak a játékosok lépései, vagy stratégiái.

$\forall$ i $\in$ N-re $\exists S_i = \{s_i^1, \ldots, s_i^n\}$ stratégia halmaz

III. $\forall$ i $\in$ N-re $\exists u_i$: $\prod_i S_i \to \mathbf{R}$ kifizető függvény.

Azaz feltételezzük, hogy bármely játékos, bármely stratégiát is választja, tudunk rendelni a végkimenthez egy számot.

Adjunk tehát számértékeket a feladatunk végkimeneteleihez:

Ha cserélnek, akkor mindketten jól járnak, legyen ez 2 érték mindkettőjüknek. Ha az egyik becsapja a másikat ő jobban jár, mert megmarad az áruja, legyen ez 3 érték a másiknak pedig -1. Ha egyikük sem cseré árut 0 értékkel mennek haza. Tehát játékunk mátrixa a következő:

1./2.	cserél	nem cserél
cserél	(2,2)	(-1,3)
nem cserél	(3,-1)	(0,0)

1.táblázat

1.3Domináns stratégiák

A feladat megoldásához tekintsük a következő választási elvet:

Ha egy játékosnak egy lépés jobb eredményeket hoz egy másik lépésnél, függetlenül attól, hogy ellenfele mit választ, akkor azt mondjuk, hogy az első lépés dominálja a másikat.

Definíció: az $i \in N$ játékos s_i stratégiája (erős értelemben) dominálja $r_i$stratégiát, ha $u_i(s_i,s_{-i}) > u_i(r_i,s_{-i})$ $\forall$ s_{-i} ellenséges stratégiára.

Definíció: Ha egy stratégia minden más stratégiát dominál, domináns, vagy nyerő stratégiának nevezzük.

Feladatunkban tehát a nem cserél stratégia, mindkét fél számára dominálni fogja a cserél stratégiát.

Ha feltételezzük, hogy nem tudnak összebeszélni és csak egy lehetőségük van dönteni, nem érdemes cserélniük és így nem termelnek profitot, holott a (2,2) lehetőség is elérhető lenne számukra.

2.Fejezet

Szimmetrikus mátrixjátékok

A következőkben egyszerűsítsük a játékot abból a szempontból, hogy a játékosok most egymásnak fizessenek, tehát az egyes végkimeneteleknél $u_1(s_i, s_{-i}) = -u_2(s_i, s_{-i})$, így elég csak az egyik játékos mátrixát feltüntetni. Feltételezzük azt is, (ahogy ezt már eddig is megtettük), hogy a játékosok logikusan lépnek, és ezt feltehetik ellenfelükről is.

2.1 Szimmetrikus példa kártyákkal

Tekintsük erre a következő példát: a játékosaink 4 lapból választanak, majd egyszerre felmutatják. A-nál legyenek a piros 1,2,3-as illetve a fekete 5-ös lapok, B-nél pedig a fekete 1,3,5-ös, illetve a piros 6-os lapok. Ha azonos színű lapot választanak A nyer, ha különbözőt B és az érték mindig legyen a két lap különbségének abszolút értéke. A játék mátrixa A szemszögéből tehát a következő:

A/B	F_1	F_3	F_5	P_6
P_1	0	-2	-4	5
P_2	-1	-1	-3	4
P_3	-2	0	-2	3
F_5	4	2	0	1

2. táblázat

Játékosaink a szabályok ismeretében a következőképp gondolkodhatnak:

Ha valamilyen stratégia alapján választok egy kártyát, akkor a másik játékos ezt kiismerve, a számomra legkedvezőtlenebb kártyát fogja választani, tehát nekem érdemes azt választanom, amivel a legnagyobb biztos nyeremény elérhető.

Ez A szempontjából a sorok minimumának a maximumát fogja jelenteni:

$$\max(-4, -3, -2, 0) = 0,$$

tehát, ha F_5-öt választja, 0-nál rosszabb eredménytől nem kell tartania, ellentétben a többi választásnál.

B szempontjából pedig az oszlopok maximumának minimumát kell megnézni:

$$\min(4, 2, 0, 5) = 0$$

lesz, tehát ha ő is F_5-öt választ, akkor A nyeresége nem mehet 0 fölé, tehát minimalizálta veszteségét.

Tehát ennél a játéknál mindkettőjük számára az F_5-ös kártya húzása lesz az optimális döntés, ha ettől eltérnek, a másik játékos tud ellenstratégiát mutatni. A kifizető függvény (mátrix) ilyen tulajdonságú lépéspárjait tiszta nyeregpontnak nevezzük, és a függvény értékét a játék értékének mondjuk.

2.2Nyeregpont

Definíció: Az 1. játékos biztos nyeresége: $v_1 = \max_{s1} \min_{s2} u(s_1, s_2)$

A 2. játékos biztos vesztesége: $v_2 = \min_{s2} \max_{s1} u(s_1, s_2)$

Ha $v_1 = v_2$, akkor ez a játék értéke, $u(s_{v1}, s_{v2})$, pedig a játék egynyeregpontja.

Állítás:Egy mátrixjátéknak nem biztos, hogy létezik tiszta nyeregpontja, míg az is előfordulhat, hogy több van (pl. egy azonosan 0 kifizető függvénynél), azonban ebben az esetben, a nyeregpontokban az érték megegyezik. Valamint, ha két pont $u(i_1, j_1)$ és $u(i_2, j_2)$ is tiszta nyeregpont, akkor az $u(i_2, j_1)$ és $u(i_1, j_2)$ is azok.

A tiszta nyeregpontok megkeresésére használhatjuk az úgynevezett iterált dominancia módszerét, amelyben azt használjuk ki, hogy ha egy stratégiát dominál egy másik, akkor azt az illető játékos nem fogja választani, sőt ezzel az ellenfele is tisztában van.

2.3 Iterált dominancia

Előző példánkban a következőket fedezhetjük fel: B játékosnak az F_5 választása dominálja P_6 stratégiát, így a P_6 oszlopot akár el is hagyhatjuk, ekkor azonban A játékosnak F_5 választása dominálja, bármely másik lap választását, így mátrixunk sormátrixra csökkent, amiből B játékosnak egyértelműen az F_5 választás lesz a domináns. Ezzel a módszerrel tehát eljutottunk a tiszta nyeregponthoz.

Definíció:Iterált dominancia

Legyen $S_i^0 = S_i$, ezután legyen

$S_i^{k+1} = \{\nexists s_i \in S_i^k \mid s_i' \in S_i^k : u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})\ \forall\ s_{-i}$ ellenséges stratégiára$\}$

Könnyen bizonyítható, hogy ha végre tudjuk hajtani az iterált dominancia módszerét, akkor a játék megoldható és értéke S_i^n lesz, ha n lépésben jutottunk el az 1x1-es mátrixig.

Érdekes kérdés, hogy mennyire romlik az algoritmus, ha a definícióban megengedünk egyenlőséget is, hiszen ezzel csak annyit engedünk a feltételeken, hogy nem csak az egyértelműen jobb stratégiát válasszuk, hanem a nem rosszabb stratégiával is megelégszünk. Erre a kérdésre a válasz, hogy ekkor már nem lesz egyértelmű a megoldás, számítani fog a sorrend, sőt nem is biztos, hogy nyeregpontba érkezünk.

A következő fejezetben olyan játékokkal fogunk foglalkozni, amelyekre nem lehet iterált dominanciát gyártani, sőt még csak domináns stratégia sem létezik, de továbbra is feltesszük, hogy a játékosoknak nincs lehetőségük kooperálni.

3. Fejezet

Kevert stratégiák

3.1Morra játék

Tekintsük a következő úgynevezett morra játék egy fajtáját. A játékosok két lehetőség közül választhatnak: egy vagy két ujjukat mutatják. Egyszerre döntenek, majd a következőképp pontoznak: ha páratlan ujj lett felmutatva, A fizet B-nek, ha páros B fizet A-nak, annyit amennyi ujjat mutattak. A játék mátrixa A szemszögéből tehát a következő:

A/B	1 ujj	2ujj
1 ujj	2	-3
2 ujj	-3	4

3.táblázat

Tisztán látszik, hogy nincs domináns stratégia, egyiküknek sem. Nyeregpont sem lesz, mivel nincs olyan érték, amely egyszerre sorának minimuma és oszlopának maximuma lenne.

Mit lehet tehát az ilyen fajta játékokról mondani?

3.2Ismételt játék, kevert stratégiák

Először is, mostantól tegyük fel, hogy a játékot nem csak egyszer, hanem többször játsszák le, így a játékosoknak van lehetősége több stratégiával is kísérletezni. Az eddig játszott játékokban ez a tény nem változtatná meg lényegesen a stratégiájukat, hiszen a nyeregpontot érdemes választani, akárhányszor is játsszák újra a játékot, ezt tiszta stratégiának hívjuk. Ilyen stratégia azonban ebben a játékban nem lesz. Ha A mindig 1 ujjat mutat, erre B rájön és ő 2 fog mutatni. Viszont ha A mindig 2 ujjat mutat, B ugyanúgy kifoghat rajta azzal, hogy mindig 1-et mutat. Tehát A-nak itt valami köztes stratégiát kell választania, amellyel jobban jön ki, mintha mindig 3-at fizetne.

Tegyük fel, hogy mivel A a második sort jobban preferálja, a nagyobb lehetséges nyeremény miatt, például az 1 ujjat ¼, míg a 2 ujjat ¾ eséllyel választja. Ekkor a nyereményének várhatóértékét tudjuk megmondani. Ha B mindig 1 ujjat választ, akkor A nyereményének várható értéke: $E_A(s_b^1)=¼·2+¾·(-3)= -7/4$, amivel A máris jobban járt, mintha tiszta stratégiát választ. Ráadásul, ha B mindig 2 ujjat mutat, akkor $E_A(s_b^2)= ¼·(-3)+ ¾·4=9/4$, amivel A nemhogy veszt, de még nyereségesen is jön ki.

Erre azonban B-nek is lehet válaszul egy kevert stratégiája, például úgy hogy az előzőket látva, az 1 ujjat többször választja, mint a 2 ujjat, mondjuk 3/4, ¼ arányban. Ekkor A nyereményére, mindkét stratégiát ismerve, már adott várható értéket tudunk mondani:

$$E_A=3/4·E_1(A)+1/4·E_2(A)=3/4·(-7/4)+1/4·(9/4)=-3/4$$

Ezzel tehát B hosszútávon nyerni fog, de ezt látva A megváltoztathatja stratégiáját, ezzel megfordítva a mérleget. Felmerül tehát a kérdés, hogy létezik-e olyan optimális kevert stratégia, amivel biztos nyereményt tudunk elérni függetlenül attól, hogy a másik játékos milyen, akár kevert stratégiát választ.

3.3Nyeregpont létezése és egyértelműsége

<u>Állítás</u>:2x2-es mátrixokra, nemcsak létezik, de bármely játékra biztosan mutatható is, ilyen egyensúlyi helyzet, vagyis úgynevezett kevert nyeregpont.

Bizonyítás: Vegyünk egy tetszőleges 2x2-es mátrixot:

A/B	s_b^1	s_b^2
s_a^1	a_{11}	a_{12}
s_a^2	a_{21}	a_{22}

4. táblázat

A és B kevert stratégiáik legyenek $P_{A:}$ (p, 1-p) és $Q_{B:}$ (q, 1-q). Ekkor A várható nyereménye, a fenti meggondolás alapján:

$$E_A(P_A,Q_B)= a_{11}.pq+a_{21}.(1-p)q+a_{12}.(1-q)p+a_{22}.(1-p)(1-q)$$

Egy stratégia pár akkor lesz nyeregpont, ha semelyik játékosnak sem éri meg, hogy eltérjen tőle.

$$E(P_A^0, Q_B^0) \geq E(P_A, Q_B^0) \ \forall\ P_A \text{ stratégiára, valamint}$$

$$-E(P_A^0, Q_B^0) \geq E(P_A^0, Q_B) \ \forall\ Q_B \text{ stratégiára,}$$

ebből tehát

$$E(P_A, Q_B^0) \leq E(P_A^0, Q_B^0) \leq E(P_A^0, Q_B) \ \forall\ P_A, Q_B \text{ stratégiára}$$

Ha ebbe az egyenlőtlenségbe tiszta stratégiákat helyettesítünk a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$a_{11}.p+a_{21}.(1-p) \geq E(P_A^0, Q_B^0), \text{ ha } q = 1$$
$$a_{12}.p+a_{22}.(1-p) \geq E(P_A^0, Q_B^0), \text{ ha } q = 0$$

Ezekből következtethetünk $E(P_A^0, Q_B^0)$ maximumára, hiszen, ha találunk olyan p-t, amely mindkét egyenlőtlenséget egyenlőséggel teljesíti, akkor az mindkét egyenletet maximalizálja.

Tehát

$$a_{11}.p+a_{21}.(1-p)= a_{12}.p+a_{22}.(1-p)$$

Ilyen p megoldás pedig csak egy lesz, mégpedig

$$p= a_{22}-a_{21}/a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}$$

Hasonlóan q-ra is felírhatunk egyenlőtlenségeket

$$a_{11}.q+a_{21}.(1-q) \leq E(P_A^0, Q_B^0), \text{ ha } p = 1$$
$$a_{12}.q+a_{22}.(1-q) \leq E(P_A^0, Q_B^0), \text{ ha } p = 0$$

Erre hasonló meggondolás alapján, következtethetünk $E(P_A^0, Q_B^0)$ minimumára és így

$$q= a_{22}-a_{21}/a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}$$

értéket kapunk, amiből

$$E(P_A^0, Q_B^0)= a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}/a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}$$

Vagyis a játék értéke konkrétan megadható, feltéve hogy $a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} \neq 0$. Azonban ebben az esetben sincs komoly baj, ugyanis ha $a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} = 0$, akkor a következő négy eshetőség állhat fenn:

1. $a_{11} \leq a_{21}$ és $a_{12} \leq a_{22}$, ekkor s_a^2 dominálja s_a^1-et, így a_{21}, vagy a_{22},vagy mindkettő tiszta nyeregpont

2. $a_{11} \geq a_{21}$ és $a_{12} \geq a_{22}$, ekkor s_a^1 dominálja s_a^2-et, így a_{11}, vagy a_{12},vagy mindkettő tiszta nyeregpont
3. $a_{11} \leq a_{21}$ és $a_{12} > a_{22}$, ekkor $a_{11} + a_{22} < a_{12} + a_{21}$, vagyis $a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} < 0$, ami nem lehet
4. $a_{11} > a_{21}$ és $a_{12} \leq a_{22}$, ekkor $a_{11} + a_{22} > a_{12} + a_{21}$, vagyis $a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21} > 0$, ami szintén nem lehet

Ezzel tehát beláttuk, hogy minden 2x2-es mátrixjátéknak van vagy kevert, vagy tiszta nyeregpontja.

Ez az állítás általánosítható nagyobb mátrixjátékokra is:

4. fejezet

A játékelmélet alaptétele

Tétel: Minden mátrixjátéknak van megoldása, azaz a játékosoknak van olyan kevert vagy tiszta stratégiájuk, amivel biztos nyereményt tudnak garantálni maguknak, az ellenfél stratégiájától függetlenül.

Bizonyítás: A bizonyításhoz operációkutatásból tanult segédtételeket fogok használni:

1. segédtétel: Ha $A \in \mathbf{R}^{nxm}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$, akkor a következő két egyenlőtlenség-rendszerből

$$Ax \leq 0,\ x \geq 0,\ x \neq 0$$
$$y^T A > 0,\ y \geq 0$$

csak az egyiknek lehet megoldása.

Valamint, ha x megoldás, akkor bármilyen λx $\lambda \geq 0$ is megoldás.

2. segédtétel: Legyen $A \in \mathbf{R}^{nxm}$, $x \in \mathbf{R}^n$. Ha A ferdén szimmetrikus, akkor

$$Ax \leq 0,\ x \geq 0,\ x \neq 0$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldható.

3. segédtétel: Egy $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ mátrixszal megadott játékhoz mindig megadható olyan $M \in \mathbf{R}^{(m+n+1) \times (m+n+1)}$ szimmetrikus mátrixszal megadott játék, ami ekvivalens az eredetivel, vagyis a kevert optimális stratégiákhoz M-ben egyértelműen hozzá rendelhető, kevert optimális stratégia A-ban.

M-et a következő képen lehet megadni:

$\mathbf{0}_{nxn}$	A	$-\mathbf{1}^T$
A^T	$\mathbf{0}_{mxm}$	$\mathbf{1}^T$
1	**-1**	0

5. táblázat

Ezeket a tételeket felhasználva a tétel pár lépéssel belátható:

Ha a játékunknak adott az A $\in \mathbf{R}^{nxm}$mátrixa, akkor valójában olyan P_A vektort keresünk, ami megoldja a 2. segédtételben megadott egyenlőtlenség-rendszert, és ezen kívül legyen $|P_A|=1$. A 3. segédtétellel pedig tudunk olyan M mátrixot generálni, amivel garantáljuk a megoldhatóságot. Az 1. segédtételben pedig kimondtuk,hogy ha van egy P_A megoldásunk, akkor λP_A is az lesz, így megfelelő λ-val$|\lambda P_A|=1$ is könnyenkonstruálható. Ez a λP_A tehát megoldása lesz az A mátrixszal megadott mátrixjátéknak.

Ezzel tehát általánosan megmondtuk, hogy a szimmetrikus mátrixjátékok megoldhatóak, azonban általánosan az értéküket még nem tudjuk kiszámítani. Erre majd egy későbbi fejezetben térek vissza.

Most azonban vázoljuk fel azt a szituációt, ha nem tudjuk feltételezni, hogy ellenfelünk logikusan gondolkodik, vagyis ha pl. a természet ellen játszunk, ami véletlenszerűen fog stratégiát választani.

Ezzel már közelítünk a valós pénzügyekhez, pontosabban a portfólió elemzés alapjaihoz.

5. Fejezet

Természet elleni játékok

5.1 Befektetési probléma

Tekintsük a következő problémát:

Befektetők vagyunk, akik magyar cégek részvénypapírjait szeretnénk megvásárolni, azonban hogy mennyit fognak érni az attól függ, hogy a következő választásnál melyik párt jut kormányra. Tételezzük fel, hogy 100 egységet fektetünk be és csak egyféle részvényt választhatunk. A következő nyereségeink, illetve veszteségeink lehetnek:

Rp./kormány	Fidesz	Jobbik	Együtt	LMP
A	10	-3	0	1
B	3	4	3	8
C	5	5	5	5
D	-7	2	4	14

6.táblázat

A probléma azért bonyolult, mert egy véletlenszerű játéknál több megfontolás is logikus és hogy melyiket választjuk az embertől, illetve itt a befektetőtől függ. Most bemutatok 6 kritérium-elvet, melyek alapján bármelyik részvénypapír kedvezőnek tűnhet.

5.2 Kritérium módszerek

5.2.1Wald- vagy maximin kritérium

Ez az elv gyakorlatilag az eddig használt elv. Feltételezzük, hogy bármit választunk a legrosszabb esemény fog bekövetkezni, ezért óvatosságból azt válasszuk, amely még ebben az esetben is a legjobb nyereséggel jár, magyarán a sorminimumok maximumát nézzük.

Ez jelen esetben: A:-3, B:3, C:5, D:-7. Tehát itt a döntés C részvényre fog esni.

5.2.2Maximax kritérium

Ez a legoptimistább ember kritériuma, azaz feltételezzük azt, hogy a maximum nyereséget fogjuk nyerni, bármit is választunk. Itt tehát egyszerűen a nyereségtáblázatunk maximumát keressük és a hozzá tartozó részvényt választjuk, tehát D-t.

5.2.3Hurwitzα-kritériuma

Ez a kritérium egy köztes megoldást próbál találni az előző két szélsőséges kritérium között. Bevezetünk egy α értéket, ami egy 0 és 1 közötti érték és azt próbálja leírni, hogy mennyire vagyunk optimisták, azaz mekkora a kockázatvállalással tudunk számolni. Ez az érték azt fogja megmutatni, hogy mekkora esélyt adunk a legjobb, illetve legrosszabb eshetőségnek. Ha pl. α=0,6, akkor a legjobb eset bekövetkezésére 60%-ot feltételezünk, még a legrosszabbéra 40-et. Ilyen α-val itt a következő értékeket kapjuk:

A: $0{,}6 \cdot 10 + 0{,}4 \cdot -3 = 4{,}8$

B: $0{,}6 \cdot 8 + 0{,}4 \cdot 3 = 6$

C: $0{,}6 \cdot 5 + 0{,}4 \cdot 5 = 5$

D: 0,6·14+0,4·-7=5,6

Tehát α=0,6 esetén a Hurwitzkritérium a B esetet választja.

5.2.4Savage legkisebb megbánás kritériuma

Itt aszerint fogunk választani, hogy melyik az az egyes pártok kormányra jutásával, mekkora nyereségtől eshetünk el az egyes részvények választásával és erre alkalmazzuk a minimax elvet.

Rp./kormány	Fidesz	Jobbik	Együtt	LMP
A	0	8	5	13
B	4	1	2	6
C	5	0	0	9
D	17	3	1	0

7. táblázat

A B részvény LMP-nél vett értéke tehát azért 6, mert ha a B helyett, a D-be fektettünk volna, akkor 6 egységgel több nyereségünk lenne. Ebben a táblázatban a sormaximumok tehát:

A: 13, B: 6, C: 9, D: 17

Vagyis, ha a veszteség-minimalizással gondolkodunk, a B részvény válik szimpatikussá.

5.2.5Laplace-kritérium

Laplace úgy gondolkodik, hogy ha semmit sem tudunk feltételezni a választások kimenetéről, akkor számolhatunk úgy, hogy bármelyik párt egyenlő eséllyel kerül hatalomra. Ekkor számolhatunk egyszerűen várható értéket, és amelyiknek legnagyobb lesz az az optimális döntés.

Jelen esetben:

$$A: 0{,}25\cdot10+0{,}25\cdot(-3)+0{,}25\cdot0+0{,}25\cdot1=2$$

$$B: 0{,}25\cdot3+0{,}25\cdot4+0{,}25\cdot3+0{,}25\cdot8=4{,}5$$

$$C: 0{,}25\cdot5+0{,}25\cdot5+0{,}25\cdot5+0{,}25\cdot5=5$$

$$D: 0{,}25\cdot (-7)+0{,}25\cdot2+0{,}25\cdot4+0{,}25\cdot14=3{,}25$$

Várható érték alapján, tehát a C részvény a legkedvezőbb.

5.2.6Bayes-kritérium

Ez a kritérium szintén várható értéket számol, azonban feltételezi, hogy a pártok nem ugyanolyan valószínűséggel fognak kormányra jutni. Ennek az a hátránya, hogy plusz információra van szükségünk, amit pl. közvélemény-kutatással, vagy kísérleti, tapasztalati úton kell megszereznünk. Jelen helyzetben feltételezzük, hogy a Fidesz 70% eséllyel, a Jobbik 15%-al, az Együtt 10%-al, az LMP pedig 5%-al fogja megnyerni a következő választásokat.

Ezzel a feltételezéssel:

$$A: 0{,}7\cdot10+0{,}15\cdot(-3)+0{,}1\cdot0+0{,}05\cdot1=6{,}6$$

$$B: 0{,}7\cdot3+0{,}15\cdot4+0{,}1\cdot3+0{,}05\cdot8=3{,}4$$

$$C: 0{,}7\cdot5+0{,}15\cdot5+0{,}1\cdot5+0{,}05\cdot5=5$$

$$D: 0{,}7\cdot (-7)+0{,}15\cdot2+0{,}1\cdot4+0{,}05\cdot14=-3{,}5$$

Tehát egyértelműen az A részvénypapírból kell vásárolnunk.

Látható tehát, hogy bármely cég választására találhatunk megfelelő kritériumot, matematikai megfontolást, ha megvannak a kellő háttérismereteink, így a feladat matematikailag nem megoldható, hogy melyik befektető, mi alapján dönt abszolút szubjektív.

6.Fejezet

Bimátrixjátékok

Az eddigi szimmetrikus játékokkal szemben, ebben a fejezetben azzal az esettel fogunk foglalkozni, amikor a két játékos kifizetési mátrixa nem feltétlenül egymás negáltja, mint ahogy azt az első példában láttuk.

Nézzük a következő, szintén pénzügyi háttér ihlette feladatot, 2x2-es mátrixokra:

6.1Piaci verseny

Adott egy kis cég K és egy nagy cég N, K be akar törni az N által uralt piacra, erre K-nak két féle lehetősége van: reklámhadjáratot indít N egyik piacán. Az egyik lehetőség reklámja kétszer annyiba kerül, de kétszer akkora nyereséggel is jár, ez legyen 1 és 2 érték. Azonban N is védelmi reklámhadjáratot indít valamelyik piacon, és ha eltalálja, K hol próbálkozik, akkor mivel ő a nagyobb cég megnyeri a háborút. K számára, ha elbukja a kisebb piacon a háborút, azzal gyakorlatilag csődbe megy, legyen értéke -10, ha pedig N megnyeri azt, ő 5 értékű nyereséget nyer.

Ekkor tehát érdemes a játékosok nyereségeit két mátrixba gyűjteni:

K mátrixa:

$$K = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

N mátrixa pedig:

$$N = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A K játékos a sorokból, még N az oszlopokból választhat.

Látszik, hogy a mátrixok majdnem egymás negáltjai, azonban mégsem használhatjuk az eddig bemutatott képleteket. A kérdés az, hogy lehet-e esetleg itt is valamiféle egyensúlyi pontot találni, amit ha a játékosok hosszan játszanak, biztos nyereményt termelnek? További kérdés, hogy megadható- e tiszta egyensúlyi pont, vagy szükséges-e a kevert stratégiák bevonása a játékba?

6.2Tiszta egyensúlyi pontok

A tiszta stratégiákkal a probléma az, hogy bimátrixjátékoknálkönnyen adható olyan példa, amire nulla, egy, vagy akár több tiszta egyensúlyi pont is adható. Észrevehető, hogy ezekben a játékokban, mivel a nyereséget már nem egymás rovására szerzik a játékosok, itt már elkezdhetnek egyezkedni a nagyobb, biztos nyeremény érdekében.

A következő példákban a tiszta egyensúlyi pont, egyszerű logika alapján kikövetkeztethető:

1. Példa:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

A szeretné a maximumot kihozni és 2 nyereséget keresni, erre pedig B-nek az a jó stratégia, ha a második oszlopot válassza, hisz az dominálja az elsőt, így A-nak az első sort lesz érdemes választani, tehát az (1,2) stratégiapár lesz az egyetlen tiszta egyensúlyi pont.

2. Példa:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

Ebben az esetben B-nek már nincs domináns stratégiája, így aszerint fog váltogatni, hogy A mit választ, azonban ez igaz lesz A-ra is, tehát ennek a feladatnak nem lesz tiszta egyensúlyi pontja.

3. Példa:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

Ennek a játéknak, könnyen látható, hogy bármely pontja tiszta egyensúlyi pont.

6.3Bimátrixjátékok és egyensúlyi pont

Ezeket a példákat látva, feltehetjük, hogy a tiszta egyensúlyi pontok keresésével nem érdemes foglalkozni. Térjünk át, tehát a kevert egyensúlyi pontok keresésére.

Ehhez azonban előbb definiáljuk előbb a bimátrixjáték feladatát:

Definíció: Legyenek adottak az alábbi halmazok:

Játékosok halmaza:

$$N=[A, B]$$

Tiszta stratégiák halmaza:

A stratégiái: $S=[s_1, s_2, \dots, s_m]$

B stratégiái: $R=[r_1, r_2, \dots, r_n]$

Kevert stratégiák halmaza:

A stratégiái: $P = [\, p \in \mathbf{R}^m \mid |p|=1, p_i \geq 0 \; i=1, 2, \dots, m]$

$$\text{B stratégiái: } Q = [\, q \in \mathbf{R}^n \mid |q|=1,\ q_i \geq 0\ i=1, 2, \ldots, n]$$

Legyen továbbá K kifizetőfüggvények és E nyereségfüggvények a következők:

$$K_A(i, j)=(a_{ij}),\ K_B(i,j)=(b_{ij}) \text{ és } E_A(p, q)=p^T Aq,\ E_B(p, q)=p^T Bq$$

Ekkor a

$$G=[S, R, A, B]$$

rendezett négyest tiszta bimátrixjátéknak, a

$$G=[P, Q, E_A, E_B]$$

rendezett négyest pedig G kevert bővítésének hívjuk.

Definíció: A (p_0,q_0) stratégiapárt egyensúlyi pontnak nevezzük, ha

$$E_A(p_0,q_0) \geq E_A(p,q_0)\ \forall p \text{ stratégiára}$$

$$E_B(p_0,q_0) \geq E_B(p_0,q)\ \forall q \text{ stratégiára}$$

Hasonlóan az eddigi egyensúlyi definícióhoz.

6.4Az egyensúlyi pontok megadása

Egy játék megoldásának az egyensúlyi pontok megtalálását tekintjük. Erre általános módszer azonban még nem létezik. A következőkben a 2x2-es bimátrixjátékok megoldását fogom ismertetni.

Legyen A kifizetési táblázata

A	s_b^1	s_b^2
s_a^1	a_{11}	a_{12}
s_a^2	a_{21}	a_{22}

8. táblázat

és B táblázata pedig

B	s_b^1	s_b^2
s_a^1	b_{11}	b_{12}
s_a^2	b_{21}	b_{22}

9. táblázat

Valamint legyenek p = (p, 1-p), $0 \leq p \leq 1$és q = (q, 1-q), $0 \leq q \leq 1$ a játékosok stratégiái. Ekkor nyereségfüggvényeik:

$$E_A(p, q) = (a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})p \cdot q + (a_{12}-a_{22})p + (a_{21}-a_{22})q + a_{22},$$
$$E_B(p, q) = (b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})p \cdot q + (b_{12}-b_{22})p + (b_{21}-b_{22})q + b_{22}.$$

Azelsőegyenletbe p=0 és p=1 helyettesítéssel, illetve az egyensúlyi pont definícióját használva a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})(1-p_0) + (a_{12}-a_{22})(1-p_0) \leq 0$$
$$(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})p_0q_0 + (a_{12}-a_{22})p_0 \geq 0$$

Ekkor tehát az A játékos egyensúlyi pontjait a fenti egyenlőtlenség-rendszer megoldásai adják, úgy hogy p_0 és q_0 is 0 és 1 közé essen.

Az egyszerűség kedvéért, vezessük be az

$$(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})=\alpha$$
$$(a_{12}-a_{22})=a$$

jelöléseket.

Ezután, ha $p_0=0$, akkor az első egyenlőtlenségből:

$$\alpha q_0 - a \leq 0$$

Ha $p_0=1$, akkor a második egyenlőtlenségből:

$$a q_0 - \alpha \geq 0$$

Ha $0<p_0< 1$, akkor egyszerűsíthetünk p_0-lal és $(1-p_0)$-lal, így:

$$\alpha q_0 - a = 0$$

Tehát az egyenlőtlenség-rendszerünk megoldásai:

$$(0, q_0), \text{ ha } \alpha q_0 - a < 0$$
$$(p_0, q_0), \text{ ha } 0 < p_0 < 1 \text{ és } \alpha q_0 - a = 0$$
$$(1, q_0), \text{ ha } \alpha q_0 - a > 0$$

Hogy milyen lesz a megoldás, tehát attól függ, hogy a és α milyen.

1. Ha $a = \alpha = 0$, akkor bármely p_0, q_0 megoldás lesz.
2. Ha $\alpha = 0$, $a \neq 0$, akkor attól függően, hogy $a<0$, vagy $a>0$, $p_0=0$ vagy $p_0=1$, és q_0 bármi lehet.
3. Ha $\alpha \neq 0$, akkor a megoldásokat, ha ábrázolnánk a $[0,1]x[0,1]$ négyzeten, akkor a $(0, a/\alpha)$ és $(1,a/\alpha)$ pontokat összekötő szakaszon, valamint ennek a szakasznak a végpontjait a csúcsokkal összekötő szakaszokon lesznek, attól függően, hogy α milyen előjelű. (de mindenképp egy töröttvonal lesz valamely két átlós csúcs között)

Tehát ezzel felvázoltuk, hogy A játékos egyensúlyi pontjai hol helyezkedhetnek el. Nyilván B játékosnál is hasonló megfontolással, ugyanilyen típusú megoldásokat kapunk. A bimátrixjáték megoldásai, tehát a két játékos egyensúlyi pontjainak metszete lesz, ami legalább egy pont, de lehet egy szakasz, vagy az egész egységnégyzet is. Azaz minden 2x2-es mátrixjátéknak létezik legalább egy megoldása. (Ez szintén kibővíthető nxm es mátrixokra is!)

Oldjuk meg tehát piaci verseny feladatunkat:

K játékosnál a = -3 és α = -14 lesz ($\alpha < 0$).

N játékosnál b = 2 és α = 9 lesz ($\alpha > 0$).

Az egyetlen egyensúlyi pont tehát a p_0=(2/9, 7/9), q_0=(3/14,11/14) lesz.A játékértékeit,pedig a $E_K(p, q)=p^TAq$, $E_N(p, q)=p^TBq$, képletekből:

$$E_K(p, q)= [2/9\ 7/9]\begin{bmatrix}-10 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/14\\ 11/14\end{bmatrix}=-6/7$$

$$E_N(p, q)= [2/9\ 7/9]\begin{bmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/14\\ 11/14\end{bmatrix}=1/3$$

Vagyis a játék nem igazságos a kisebb cégre nézve, bárhogy választ is stratégiát -6/7-nél kisebb veszteségre nem számíthat, míg a nagyobb cég be tudja biztosítani az 1/3 nyereséget.

A következő fejezetben egy valós pénzügyi játékot fogok elemezni, amelyben a két játékos kooperálva hasznot húz egy 0 összegű bimátrixjátékból

7.Fejezet

Swap ügyletek

Aswap ügylet, vagy credit swap, egy pénzügyi megállapodás két cég között, annak érdekében, hogy egy adott banktól kedvezőbb hitelt tudjanak felvenni.

Tekintsük a következő példát:

Legyen két cég A és B. Tegyük fel, hogy A-nak a bank 9%-os dollár alapú hitelt tud felajánlani, még ha forint alapút vesz fel 12%-ot kell törlesztenie. B cégnek biztosabbak a bevételei, ezért a bank neki, 10%-os forint hitelt, még 8%-os dollár alapú hitelt tud adni. Tegyük fel továbbá, hogy A-nak dollár alapú, még B-nek forint alapú hitelre lenne szüksége, befektetéseik finanszírozására. Ekkor tehát a következő kifizetési mátrixot kapjuk:

Hitel/cég	A	B
Dollár	-9	-8
Forint	-12	-10

10. táblázat

Ekkor A és B felvehetik saját hiteleiket, ekkor A 12%-ot B pedig 8%-ot fog fizetni, vagy megkötnek egy úgynevezett kredit swap megállapodást, és B felveszA nevében dollár alapú hitelt 9%-ért, így ő bukik 1%-ot, azonban A cserébe felvesz forint alapú hitelt B nevében 10%-ért és ezzel 2%-ot nyer. Így összesen 19%-ot fognak fizetni a 20%-helyett, ezzel nyernek 1%-ot, amit utána valamilyen arányban eloszthatnak.

Persze ez az 1% nem hangzik soknak, de gondoljunk bele, hogy egy nagyobb befektető cég esetén, ez a különbség, akár milliókat is jelenthet, minden alkalommal, amikor ezt a két cég eljátssza.

A valóságban persze az élet nem ilyen egyszerű.A cégek felelősséget vállalnak egymás hitelének fizetésér, így ha az egyik hó végére valamelyikük csődöt jelent, akkor a másik cég hitele nem lesz kifizetve és ráadásul még a másik cég hitelét is kifizette. Játékosainknak tehát a fizet, illetve a nem fizet lépései lehetnek, a kifizetési mátrix pedig a következőképp alakul:

A/B	Fizet	Nem fizet
Fizet	(0,5 ; 0,5)	(-10 ; 10)
Nem fizet	(9 ; -9)	(0 ; 0)

11. táblázat

Ezzel tehát visszatértünk a kezdetben már megoldott csempész feladathoz, ahol a konklúzió az volt, hogy a csempészek nem fognak csereüzletet végrehajtani. Láthatjuk, hogy a nem fizet stratégiák itt is dominálják a fizet stratégiákat, azonban a különbség, hogy itt megengedjük a cégek kooperációját és így el tudják érni a (0,5 ; 0,5) hasznot.

A másik probléma a swap ügyletekkel, hogy a dollár alapú hitel általában nem fix kamatlábú. Tehát ha általánosan akarjuk definiálni, akkor fix, illetve változó kamatlábú hitelek cseréjéről kell beszélnünk. Ekkor benne van az a kockázat, hogy aki változó kamatlábon vett fel hitelt, annak idővel az üzlet elinflálódik és amint nem éri meg számára a 0,5% haszon felbontja a szerződést. Természetesen ezzel a másik cég is számolhat, és ha úgy látja, hogy a másik csődöt fog jelenteni, akkor ő sem fizet, ezzel egyből a kockázatmentes (0 ; 0) pontra ugrunk.

A credit swap üzletek tehát majdnem kockázatmentes nyereséghez juttatják a cégeket, akik megkötik, azonban általában csak véges ideig áll fenn ez a nyereséges helyzet. Természetesen előfordulhat, hogy a változó kamatú hitel kamatlába csökken, azonban ez infláció esetén nem fordulhat elő. Ebben a kivételes esetben pedig a másik cég fogja felbontani a szerződést, vagy legalábbis nagyobb részt fog kérni a haszonból.

A credit swap tehát egy árfolyamra érzékeny, de rövid időre biztos hasznot termelő megegyezés, két eltérő biztonsági helyzetű cég között.

Irodalomjegyzék

Dr. Filep László, Játékelmélet (2001)

Mészáros József: Játékelmélet (2005)

DarrellDuffie: Credit SwapValuation (1999)