Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Neogrády-Kiss Márton

Collatz sejtés

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Bátkai András
ELTE
Alkalmazott Analízis Tanszék

Kiss Márton
BME
Differenciálegyenletek Tanszék

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

„Hopeless. Absolutely hopeless.”

Erdős Pál szavai ma is aktuálisak, akárcsak 1985-ben. A $3x+1$ probléma azóta is megoldatlan, pedig nem volt próbálkozások híján. A sejtés eredetileg Lothar Collatz nevéhez fűződik, aki az 1930-as években az elemi számelmélet és a gráfok kapcsolatát vizsgálta[2]. Vegyünk egy gráfot, aminek pontjai a természetes számok. Legyen $f(n)$ egy számelméleti függvény, n-et és $f(n)$-et kössük össze egy éllel. Ekkor vizsgálható, hogy összefüggő-e, létezik-e kör a gráfban stb. Collatz vizsgálta az alábbi függvényt is:

$$C(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ n/2 & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

Sok számra vizsgálva azt gondolta, hogy csak az (1,4,2) kör van ebben a gráfban, és a gráf összefüggő. A sejtés nagyon nehéznek bizonyult, ezért nem jelentetett meg publikációt ezzel kapcsolatban, csak ismerőseinek beszélt róla. Így később, az 1950-es években terjedt el. Emiatt többféleképp is nevezik a problémát, mint például Syracuse problem, Hasse's algorithm, Ulam's problem, Kakutani's problem. Kakutani így értékelt: „For about a month everybody at Yale worked on it, with no result. A similar phenomenon happened when I mentioned it at the University of Chicago. A joke was made that this problem was a part of a conspiracy to slow down mathematical research in the U.S.”

A problémát több irányból is megközelítették már, például valószínűségszámítás, ergodelmélet, számítástudomány vagy dinamikus rendszerek felől.[4] Ezért dolgozatomban két már ismert eredményt és egy saját megközelítést mutatok be.

Először is vegyük az alábbi függvényt:

$$T(n) = \begin{cases} \frac{3n+1}{2} & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ n/2 & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

$T^{(k)}(n) = T^{(k-1)}(T(n))$ és $T^{(0)}(n) = n$.

A kapcsolat az eredeti függvénnyel nyilvánvaló. Így a sejtés a következőképpen írható:

1. Sejtés. *Minden $n \in \mathbb{N}$-re $\exists\, i \in \mathbb{N}$ hogy $T^{(i)}(n) = 1$.*

Látszik, hogy ha valamely $n > 1$-re $T^{(i)}(n) = 1$, akkor $T^{(k)}(n) < n$ is valamely k-ra. Legyen $\sigma(n)$ az n megállási ideje az a legkisebb k, amelyre $T^{(k)}(n) < n$. Ha nincs ilyen

k, akkor $\sigma(n)$ legyen ∞. Legyen $\sigma_\infty(n)$, az n totális megállási ideje, a legkisebb olyan k, amire $T^{(k)}(n) = 1$, és végtelen ha nincs ilyen k. Terras[5] és Everett[3] észrevette, hogy ha a $\sigma_\infty(n)$-ről nem is, de $\sigma(n)$-ről már több dolgot állíthatunk. Körülbelül egyidőben, $1976-77$-ben, egymástól függetlenül bizonyították, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \{n : n \leq x \text{ és } \sigma(n) \text{ véges}\} = 1.$$

A két bizonyítást a következő két fejezetben mutatom be.

Természetesen adódik a kérdés, hogy tetszőleges rögzített $\rho > 0$-ra

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \left\{n \in \mathbb{N} : n \leq x \text{ és } T^{(k)}(n) < \rho n \text{ valamely } k\text{-ra}\right\} = 1 \tag{1}$$

teljesül-e. Ezt Giovanni Venturini bizonyította 1989-ben[7], majd 1997-ben[8] egy sokkal általánosabb függvényre, $T(x)$-re is megmutatta, ahol $T(x) = \frac{t_r - u_r}{p}$, ha $x \equiv r \mod p$, $t_r \in \mathbb{Z}^+$ és $u_r \equiv r t_r \mod p$, $p > 1$ egészre. Ha $t_0 t_1 \ldots t_{p-1}$ és p legnagyobb közös osztója 1, továbbá ha $t_0 t_1 \ldots t_{p-1} < p^p$ akkor (1) igaz.

1.1. Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Kiss Mártonnak és Bátkai Andrásnak a segítő ötleteket, a támogatást és a dolgozat átnézését.

2. C. J. Everett bizonyítása

Ebben a fejezetben C. J. Everett elegáns bizonyítását [3] mutatom be.[1]

Minden $m \geq 0$-ra a $T(m)$ függvényiteráció meghatároz egy egészekből álló sorozatot, azaz

$$m \longrightarrow [m_0, m_1, \ldots], \tag{2}$$

ahol $m_n = T^{(n)}(m)$. Például $m = 11$-re

$$11 \longrightarrow [11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, \ldots].$$

Ekkor (2) meghatároz egy ún. „paritás sorozat"-ot,

$$m \longrightarrow \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}, \tag{3}$$

ahol $x_n = 0$, ha $m_n = T^n(m)$ páros, és $x_n = 1$, ha páratlan. Például $m = 11$-re

$$11 \longrightarrow \{1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, \ldots\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $m \to \{0, 0, 0, \ldots\}$ akkor és csak akkor lehetséges, ha $m = 0$. Hasonlóan $m \to \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$ akkor és csak akkor lehetséges, ha $m = 1$, ezért m paritás sorozata $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots\} = \{x_0, \ldots, x_{k-1}, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $m_k = 1$. Tehát a Collatz sejtés szerint minden pozitív természetes szám paritás sorozata egy tagtól kezdve 1, 0, 1, 0, ... Ez elég érdekes lenne annak fényében, hogy az $m < 2^N$ egészek paritás sorozatainak első N tagját, $\{x_0, x_1, ...x_{N-1}\}$-t nézve megkapjuk az összes N hosszú 0,1 sorozatot. $N = 2$-re

$$0 \longrightarrow [0,0, ...] \longrightarrow \{0,0, ...\}$$

$$1 \longrightarrow [1,2, ...] \longrightarrow \{1,0, ...\}$$

$$2 \longrightarrow [2,1, ...] \longrightarrow \{0,1, ...\}$$

$$3 \longrightarrow [3,5, ...] \longrightarrow \{1,1, ...\}$$

Sőt, az összes $m = a + 2^N Q$, $Q = 0,1,2,..$ számnak ugyanaz a paritás vektora az x_{N-1}-ig. Ezt felhasználva belátható az alábbi tétel.

1. Tétel. *Egy tetszőleges 0,1 értékű $\{x_0, x_1, ..., x_{N-1}\}$ sorozathoz egyértelműen megfelel egy $m < 2^N$ egész paritás sorozatának első N tagja. Speciálisan az x_n sorozat meghatározza m-et és m_N-et az alábbi formában:*

$$m = a_{N-1} + 2^N Q_N;\ 0 \leq a_{N-1} < 2^N.$$

[1] Lásd angolul a [4] könyvben a kétszázhuszonötödik oldaltól.

$$m_N = b_{N-1} + 3^X Q_N;\ 0 \le b_{N-1} < 3^X,\ X = \sum_0^{N-1} x_n \tag{4}$$

Bizonyítás. N szerinti indukcióval. $N=1$-re, ha $x_0 = 0$, akkor $m = 2Q_1$, $m_1 = Q_1$. Ha $x_0 = 1$, akkor $m = 1 + 2Q_1$, $m_1 = 2 + 3Q_1$. Feltéve, hogy (4) igaz valamilyen $N \ge 1$-re, két esetet kell megvizsálni aszerint, hogy b_{N-1} páros vagy páratlan.

I. b_{N-1} páros.

(a) Ha $x_N = 0$, akkor $Q_N = 2Q_{N+1}$, $m = a_{N-1} + 2^{N+1}Q_{N+1}$, $m_N = b_{N-1} + 3^X 2Q_{N+1}$, $m_{N+1} = b_{N-1}/2 + 3^X Q_{N+1}$.

(b) Ha $x_N = 1$, akkor $Q_N = 1 + 2Q_{N+1}$, $m = a_{N-1} + 2^N + 2^{N+1}Q_{N+1}$, $m_N = (b_{N-1} + 3^X) + 3^X 2Q_{N+1}$, $m_{N+1} = \frac{1}{2}(3b_{N-1} + 3^{X+1} + 1) + 3^{X+1}Q_{N+1}$, ahol $\frac{1}{2}(3b_{N-1} + 3^{X+1} + 1) \le \frac{1}{2}(3(3^X - 1) + 3^{X+1} + 1) = 3^{X+1} - 1 < 3^{X+1}$.

II. b_{N-1} páratlan.

(a) Ha $x_N = 0$, akkor $Q_N = 1 + 2Q_{N+1}$, $m = a_{N-1} + 2^N + 2^{N+1}Q_{N+1}$, $m_N = (b_{N-1} + 3^X) + 3^X 2Q_{N+1}$, $m_{N+1} = \frac{1}{2}(b_{N-1} + 3^X) + 3^X Q_{N+1}$, ahol $\frac{1}{2}(b_{N-1} + 3^X) < \frac{1}{2}(2 \cdot 3^X) = 3^X$.

(b) Ha $x_N = 1$, akkor $Q_N = 2Q_{N+1}$, $m = a_{N-1} + 2^{N+1}Q_{N+1}$, $m_N = b_{N-1} + 3^X 2Q_{N+1}$, $m_{N+1} = \frac{1}{2}(3b_{N-1} + 1) + 3^{X+1}Q_{N+1}$, ahol $\frac{1}{2}(3b_{N-1} + 1) < \frac{1}{2}(3^{X+1} + 1) < 3^{X+1}$. Ezért (4) igaz $N+1$-re minden esetben.

□

2. Következmény. *Az*

$$m \longrightarrow [m_0, m_1, ..., m_{N-1}] \longrightarrow \{x_0, x_1, ..., x_{N-1}\}$$

hozzárendelés bijekció a $0 \le m < 2^N$ egészek és az összes 0,1 értékű $\{x_0, x_1, ..., x_{N-1}\}$ vektor között.

Jelölje $A(m)$ azoknak az $m < M$ pozitív egészeknek a számát, melyekre $T^k(m) < m$ valamely k-ra!

3. Tétel. *Majdnem minden természetes számnak véges a megállási ideje, abban az értelemben, hogy $\lim_{M\to\infty} A(M)/M = 1$.*

Bizonyítás. Először nézzük az $M=2^N$ esetet. A bizonyítás kulcsa az, hogy a legtöbb diadikus vektor ugyanannyi egyest tartalmaz, mint nullát. Ha $x_n=0$, akkor $m_{n+1}/m_n = = 1/2$, míg ha $x_n=1$, akkor $m_{n+1}/m_n=(3Q+2)/(2Q+1)\le 5/3$, ha $m_n>1$. Így a legtöbb $m \le 2^N$ egészre $m_N \approx (\frac{1}{2})^{N/2}(\frac{5}{3})^{N/2} m_0 < m_0$. Jelölje H_N az összes $\{x_0, x_1, ..., x_{N-1}\}$ diadikus sorozatot, amikre igaz, hogy

$$\frac{1}{2}-\varepsilon < \frac{X}{N} < \frac{1}{2}+\varepsilon, \tag{5}$$

ahol $X=\sum_0^{N-1} x_n$, $\varepsilon \equiv L-(\frac{1}{2})$, $L\equiv \log 2/\log(10/3)$. Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\#H_N/2^N \ge 1-\frac{1}{4\varepsilon^2 N}. \tag{6}$$

Az (5)-ös feltétel miatt igaz a következő egyenlőtlenség is:

$$X/N < L. \tag{7}$$

Legyen D_N azoknak a diadikus sorozatoknak a halmaza, melyek kielégítik (7)-et. Látszik, hogy D_N tartalmazza H_N-et, ezért

$$\#D_N \ge \#H_N. \tag{8}$$

Az $m=1$ esetet kivéve, azok az $m \le 2^N$ egészek, amiknek paritás sorozata, $\{x_0, x_1, ..., x_{N-1}\}$ kielégíti (7)-et, két részre oszthatók. Az egyik, ahol $m_n=1$ és $n \le N-1$, a másik, ahol nincs olyan n, amire $m_n=1$. Viszont utóbbira (7) miatt igaz, hogy

$$(1/2)^{N-X}(5/3)^X < 1.$$

Tehát

$$m_N = m_0(m_1/m_0)\cdots(m_N/m_{N-1}) \le (1/2)^{N-X}(5/3)^X m_0 < m_0 = m. \tag{9}$$

Ezért $A(N) \ge \#D_N - 1 \ge \#H_N - 1$ és (6) miatt

$$\lim_{M\to\infty} A(2^N)/2^N = 1. \tag{10}$$

Már csak a $2^N < M < 2^{N+1}$ eset maradt. Legyen $A_N = A(2^N)$, és

$$n_N = 2^N + \left\{(2^{N+1}-2^N)-(A_{N+1}-A_N)\right\} = A_N + (2^{N+1}-A_{N+1}) \ge 2^N. \tag{11}$$

Ha $M = 2^N+1, ..., n_N$, akkor

$$A(M)/M \ge A_N/n_N. \tag{12}$$

Másrészről, ha $M = n_N + k$, $k = 1,2,...,2^{N+1} - 1 - n_N$, akkor

$$A(M)/M \geq (A_N + k)/(n_N + k) \geq A_N/n_N \tag{13}$$

$n_N \geq 2^N \geq A_N$ miatt. Tehát (10) és (11) szerint

$$A_N/n_N = \frac{A_N/2^N}{A_N/2^N + 2(1 - A_{N+1}/2^{N+1})} \longrightarrow 1, \tag{14}$$

így (12), (13) és (14) miatt

$$\lim_{M \to \infty} A(M)/M = 1.$$

$\square$

3. Terras bizonyítása

Ebben a fejezetben Terras bizonyítását [6] mutatom be. [2] Ő is a paritásvektor fogalmára támaszkodik a bizonyításban.

4. Tétel. *Az egészekből álló $S_k = \{n : \sigma(n) \leq k\}$ halmaz sűrűsége határértékben aszimptotikus, azaz*

$$F(k) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \{n : n \leq x \text{ és } \sigma(n) \leq k\}$$

létezik. Sőt, $F(k) \to 1$, ha $k \to \infty$, azaz majdnem minden természetes számnak véges a megállási ideje.

Az előző fejezetben láttuk, hogy a paritás vektor pontosan leírja az első k iterációt. Legyen

$$T^i(n) \equiv x_i(n) \mod (2), 0 \leq i < \infty,$$

$$v_k(n) = (x_0(n), \ldots, x_{k-1}(n)).$$

Az első k iteráció pedig

$$T^{(k)}(n) = \lambda_k(n)n + \rho_k(n), \tag{15}$$

ahol

$$\lambda_k(n) = \frac{3^{x_0 + \ldots + x_{k-1}(n)}}{2^k} \tag{16}$$

és

$$\rho_k(n) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n) \frac{3^{x_{i+1}(n) + \ldots + x_{k-1}(n)}}{2^{k-i}}. \tag{17}$$

Látszik, hogy $\rho_k(n)$ és $\lambda_k(n)$ is csak $v_k(n)$-től függ. (15)-ből látszik, hogy a $T^k(n) < n$-hez szükséges feltétel a

$$\lambda_k(n) < 1, \tag{18}$$

mivel $\rho_k(n)$ nemnegatív. Legyen $\omega(n)$ érétéke az a legkisebb k egész, amire (18) fennáll, és végtelen ha nem létezik ilyen k; hívjuk $\omega(n)$-t az n együttható megállási idejének. A következő tételben fontos szerepe lesz $\omega(n)$-nek. Felhasználva, hogy az összes $m = a + 2^k Q$, $Q = 0,1,2,..$ számnak ugyanaz a $v_k(m)$ vektora, és az előző fejezetben levő (2) következmény miatt, egy tetszőleges k hosszú diadikus $\mathbf{v} = (v_0, \ldots, v_{k-1})$ vektor egyértelműen meghatároz egy $S(\mathbf{v})$ maradékosztályt ($\mod 2^k$), ahol

$$S(\mathbf{v}) = \{n : \mathbf{v} = (x_0(n), \ldots, x_{k-1}(n))\}.$$

[2] Lásd angolul a [4] könyvben a harmincötödik oldaltól.

Legyen $0 \le n_0(\mathbf{v}) < 2^k$ az $S(\mathbf{v})$ legkisebb eleme. Ekkor

$$S(\mathbf{v}) = \left\{ n_0(\mathbf{v}) + 2^k i : 0 \le i < \infty \right\}.$$

Hívjunk egy k hosszú $\mathbf{v} = (v_0, \ldots, v_{k-1})$ vektort megengedhetőnek, ha

(i) $(v_0 + \ldots + v_{k-1}) \ln 3 < k \ln 2$,

(ii) $(v_0 + \ldots + v_i) \ln 3 > (i+1) \ln 2$ ha $0 \le i \le k-2$.

Jegyezzük meg, hogy minden k hosszú megengedhető $\mathbf{v}$ vektorra

$$v_0 + \ldots + v_{k-1} = \lfloor k\theta \rfloor, \tag{19}$$

ahol $\theta = \ln 2 / \ln 3$.

5. Tétel. *(a) Azok az egész számok, melyeknek az együttható megállási ideje k, pontosan azok a számok, amik az n-edik maradékosztályba tartoznak (mod 2^k), és van egy megengedhető k hosszú $\mathbf{v}$ vektor, amire $n = n_0(\mathbf{v})$*

(b) Legyen $n = n_0(\mathbf{v})$ valamilyen k hosszú $\mathbf{v}$-re. Ha $\mathbf{v}$ megengedhető, akkor minden elég nagy egésznek, ami kongruens n-nel (mod 2^k), megállási ideje k. Ha $\mathbf{v}$ nem megengedhető, akkor csak véges sok olyan egész létezik, ami kongruens n-nel (mod 2^k), és megállási ideje k.

Bizonyítás. Az (a) rész következik a megengedhetőség definíciójából, ugyanis

(i) $\lambda_k(\mathbf{v}) < 1$,

(ii) $\lambda_i(\mathbf{v}) > 1 \quad 1 \le i \le k-1$-re.

(b) bizonyításához jegyezzük meg, hogy ha $\mathbf{v}$ egy k hosszú megengedhető vektor, akkor

$$T^{(i)}(n) \ge \frac{3^{v_0 + \ldots + v_{i-1}}}{2^i} n \ge n \text{ ha } 1 \le i \le k-1,$$

tehát $S(\mathbf{v})$ összes elemének megállási ideje legalább k. Legyen

$$\varepsilon_k = 1 - \frac{3^{\lfloor k\theta \rfloor}}{2^k}$$

(19)-ből következik, hogy

$$\varepsilon_k = 1 - \lambda_k(\mathbf{v}) = 1 - \frac{3^{v_0 + \ldots + v_{k-1}}}{2^k}$$

minden megengedhető $\mathbf{v}$-re. Tehát ha $n \in S(\mathbf{v})$, ahol $\mathbf{v}$ megengedhető, akkor (15) átírható

$$T^{(k)}(n) = n + (\rho_k(\mathbf{v}) - \varepsilon_k n) \tag{20}$$

alakba. Mivel ρ_k csak $\mathbf{v}$-től függ, ezért ha n elég nagy, akkor

$$\rho_k(\mathbf{v}) - \varepsilon_k n < 0.$$

Így majdnem az összes $n \in S(\mathbf{v})$-re $\omega(n) = \sigma(n) = k$. Most tegyük fel, hogy $\mathbf{v}$ nem megengedhető. Ekkor két eset fordulhat elő attól függően, hogy valamilyen $i < k-1$-re $(v_0, \ldots, v_i)$-re megengedhető-e. Ez akkor és csak akkor nem fordul elő, ha

$$(v_0 + \ldots + v_{i-1}) \ln 3 > i \ln 2 \text{ ahol } 1 \leq i \leq k-1. \tag{21}$$

Amikor (21) fennáll, azt mondjuk hogy $\mathbf{v}$ emelkedő. Ha $\mathbf{v}$ emelkedő, akkor $\lambda_k(\mathbf{v}) > 1$, tehát (15)-ból látszik, hogy $T^k(n) \geq n$ minden $n \in S(\mathbf{v})$-re, vagyis $S(\mathbf{v})$ minden elemének megállási ideje legalább $k+1$. A másik esetben létezik ilyen $\mathbf{w} = (v_0, \ldots, v_i)$ megengedhető vektor. Mivel $S(\mathbf{v}) \subset S(\mathbf{w})$, és véges sok elemet leszámítva $S(\mathbf{w})$ elemeinek a megállási ideje $i+1 < k$ a fentebbi érvelés miatt. $\square$

Jelölje I_k azoknak a számoknak a halmazát, amiknek az együttható megállási ideje k. Az előbbi tétel miatt I_k egy számtani sorozat, amiből rögtön következik, hogy aszimptotikusan sűrű,

$$d(I_k) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \# \{n : n \leq x \text{ és } n \in I_k\},$$

ami pontosan

$$d(I_k) = \frac{1}{2^k} \# \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \text{ megengedhető és hossza } k\}.$$

Továbbá a tétel állítása szerint az

$$S_k = \{n : n \text{ megállási ideje } k\}$$

halmaz I_k-tól csak véges sok tagban különbözik, így S_k is aszimptotikusan sűrű, sőt sűrűsége megegyezik $d(I_k)$-val. Tehát (5)-ből következik (4) első fele, miszerint az összes természetes szám, aminek legfeljebb k a megállási ideje, aszimptotikusan sűrű. Az $F(k)$ sűrűség megadható

$$F(k) = \sum_{\substack{\mathbf{v} \text{ megengedhető} \\ \text{és hossza legfeljebb } k}} s(\mathbf{v}) \tag{22}$$

alakban, ahol

$$s(\mathbf{v}) = 2^{-hossz(\mathbf{v})}.$$

(22)-vel bizonyítható (4) második fele, sőt egy erősebb állítás is, miszerint $F(k)$ 1-et exponenciálisan közelíti, ahogy k tart végtelenbe.

6. Tétel. *Minden $k \geq 1$-re*

$$1 - F(k) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \{n : n \leq x \text{ és } \sigma(n) > k\} \leq 2^{-\eta k}, \tag{23}$$

ahol

$$\eta = 1 - H(\theta) \approx .05004\ldots, \tag{24}$$

és $H(x) = -x \log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$, $\theta = \ln 2 / \ln 3$.

Bizonyítás. Legyen $C = C_1 \cup C_2$, ahol

$$C_1 = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \text{ megengedhető és hossza legfeljebb } k\}$$

és

$$C_2 = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \text{ emelkedő és hossza } k\}.$$

C-nek megvan az a tulajdonsága, hogy egy tetszőleges k hosszú diadikus $\mathbf{w}=(w_0, w_1, \ldots, w_{k-1})$ vektorhoz egyértelműen létezik egy C-beli $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_i)$, $(0 < i \leq k-1)$ vektor, hogy $v_j = w_j$ $(j = 0\ldots i)$, így

$$s(\mathbf{v}) = \sum s(\mathbf{w}),$$

ahol az összegzés az összes olyan k hosszú $\mathbf{w}$-n megy, ahol $v_j = w_j$ $(j = 0\ldots i)$. Ezért

$$\sum_{\mathbf{v}\in C} s(\mathbf{v}) = \sum_{hossz(\mathbf{w})=k} \mathbf{w} = 1.$$

(22)-ből következik, hogy

$$\sum_{\mathbf{v}\in C_2} s(\mathbf{v}) = 2^{-k}\,|C_2| = 1 - F(k),$$

ahol $|C_2|$ jelöli a C_2-beli vektorok számát. A már bebizonyított (4) tétel első része miatt

$$1 - F(k) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \{n : n \leq x \text{ és } \sigma(n) > k\},$$

tehát (23) bizonyításához $|C_2|$-t kell felülről becsülni.

Az emelkedő vektor (21) definíciója miatt

$$C_2 \subset \left\{ \mathbf{v} : \sum_{i=0}^{k-1} v_i > k\theta \right\},$$

tehát

$$|C_2| \leq \sum_{j>k\theta} \binom{k}{j}.$$

A Stirling formula szerint $\log \binom{k}{j} \sim kH(\frac{j}{k})$, így tetszőleges $\alpha > \frac{1}{2}$ és $\varepsilon > 0$-ra megmutatható, hogy

$$\sum_{j>k\alpha} \binom{k}{j} \leq k \binom{k}{\lfloor k\alpha \rfloor} \leq 2^{(H(\alpha)+\varepsilon)k}$$

fennáll elég nagy k-ra. Belátható, hogy tetszőleges $\alpha > \frac{1}{2}$-re

$$\sum_{j>k\alpha} \binom{k}{j} \leq 2^{H(\alpha)k}$$

is fennáll [1]. Így (23)-at beláttuk. □

Megjegyzés. A (6)-es tétel nem javítható lényegében, ugyanis megmutatható, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$|C_2| \geq 2^{H(\theta-\varepsilon)k}$$

elég nagy k-ra.

3.1. $\omega(n)$ és $\sigma(n)$ kapcsolata

A (5)-ös tétel szerint lényegében egyenlőek. Ugyanis adott k-ra csak véges sok olyan egész létezik, melyeknek együttható megállási idejük legfeljebb k, és $\sigma(n) \neq \omega(n)$. Terras, majd később Garner megsejtették, hogy ez nem fordul elő.

2. Sejtés. *Tetszőleges $n \geq 2$-re $\sigma(n) = \omega(n)$.*

Ennek a sejtésnek lenne egy esztétikus következménye, miszerint ha igaz, akkor azok a számok amiknek a megállási idejük pontosan k, egy maradékosztályt képeznek $(mod\, 2^k)$, ahogyan az (5) tétel (a) része mondja. Másrészről a sejtésnek lenne egy olyan következménye, hogy nem fordulhat elő nemtriviális kör. Hogy ezt belássuk, tegyük fel hogy létezik egy k hosszú kör, aminek a legkisebb eleme legye n_0. A legkisebb elem miatt $\sigma(n_0) = \infty$, és $T^{(i)}(n_0) > n_0$ $1 \leq i \leq k-1$-re, és

$$T^{(k)} = \lambda_k(n_0) n_0 + \rho_k(n_0). \tag{25}$$

$\rho_k(n_0) \neq 0$, mert n_0 nem kettőhatvány, tehát (25) miatt $\lambda_k(n_0) < 1$. Ezért $\omega(n_0) \leq k$ és $\omega(n_0) \neq \sigma(n_0)$, azaz ellentmondás.

A következő, amit bizonyítás nélkül közlök, azt állítja, hogy nagyjából igaz a sejtés.

7. Tétel. *Létezik egy kiszámítható k_0 konstans, hogy minden $k \geq k_0$-ra, ha $\mathbf{v}$ egy k hosszú megengedhető vektor, akkor $S(\mathbf{v})$ minden elemének megállási ideje k, kivéve legfeljebb a legkisebb $n_0(\mathbf{v})$ elemet.*

4. Analitikus megközelítés

4.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben az alábbi tételt látjuk be.

8. Tétel. *Tetszőleges $\rho > 0$-ra a $\left\{n \in \mathbb{N} : C^{(k)}(n) < \rho n \text{ valamely } k\text{-ra}\right\}$ halmaznak a sűrűsége egy, vagyis*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \left\{n \in \mathbb{N} : n \le x \text{ és } C^{(k)}(n) < \rho n \text{ valamely } k\text{-ra}\right\} = 1.$$

Rögzítsünk egy N számot. Azt fogjuk vizsgálni, hogy mely páratlan k számok iterálnak az $1, \ldots, N$ számok valamelyikébe, azaz mely páratlan k számokhoz létezik olyan i egész, hogy $C^{(i)}(k) \le N$. A $k \le N$ egészekre ez $C^0(k) = k$ miatt igaz. Rögtön látszik, hogy ha valamelyik N-nél nagyobb szám ezt teljesíti, akkor megállási ideje véges . Ennél több is igaz lehet, attól függően, hogy az adott szám mennyivel nagyobb N-nél. Osszuk el az összes természetes számot N-nel. Ekkor egy k egésznek k/N felel meg. Az iteráció pedig a

$$C_N(k/N) = \begin{cases} \frac{k}{2N} & \text{ha } k \text{ páros} \\ \frac{3k+1}{N} & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases} \tag{26}$$

függvény szerint értendő. Könnyen látszik, hogy a k/N C_N függvény szerinti, és a k szám C függvény szerinti iterációja egy N szorzóban különbözik. Ez azért jó, mert a [0,1] intervallumba való iterálást kell tekinteni, és ha N elég nagy, akkor a „számlálás sűrűségfüggvénye” rendezett viselkedést mutat.

Először tisztázzuk a sűrűségfüggvényt. Legyen M_N olyan halmaz, aminek elemei k/N alakúak, ahol k nemnegatív egész. Z_N pedig legyen az összes k/N alakú szám halmaza, ahol k nemnegatív egész. A sűrűséget a Z_N halmazhoz akarjuk mérni, ezért legyen ennek sűrűségfüggvénye a konstans 1 függvény.

9. Definíció. *Legyen az $f(x)$ valós értékű nemnegatív függvény az M_N halmazsorozat sűrűségfüggvénye, ha tetszőleges $[a, b] \subset [0, \infty)$ intervallumra*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#([a, b] \cap (M_N))}{\#([a, b] \cap (Z_N))} = \frac{\int_a^b f(x)}{\int_a^b 1}.$$

Jelölje K_N azokat a $\frac{2k+1}{N}$ számokat, amik az $\left\{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, 1\right\}$ halmazba konvergálnak.

10. Állítás. *Ha a K_N halmazsorozat sűrűségfüggvénye $f(x)=\frac{1}{2}$ (majdnem mindenhol), akkor (8) igaz.*

Bizonyítás. Legyen $0<\rho<1$ tetszőleges. K_N definíciója alapján az $\left[\frac{1}{\rho},\frac{1}{\rho}+1\right]$ intervallumban levő $q=\frac{2k+1}{N}\in K_N$ számokra létezik olyan i, hogy $C_N^{(i)}(q)<q\rho$. Ekkor a (9) definíció miatt tetszőleges ε-hoz létezik olyan N_0, hogy minden $N\geq N_0$-ra

$$\frac{\#(\left[\frac{1}{\rho},\frac{1}{\rho}+1\right]\cap(K_N))}{\#(\left[\frac{1}{\rho},\frac{1}{\rho}+1\right]\cap(Z_N))}>\frac{1}{2}-\varepsilon.$$

Legyen $x>N_0$ elég nagy szám, és legyen $N_1\geq N_0$ az a legnagyobb természetes szám, amire $\frac{N_1}{\rho}+N_1\leq x$. Ekkor $x-\frac{N_1}{\rho}+N_1\leq\frac{1}{\rho}+1$. Tudjuk, hogy ha $n\in\left[\frac{N_1}{\rho},\frac{N_1}{\rho}+N_1\right]$ páratlan, és $n\in K_{N_1}$, akkor létezik i, hogy $C^{(i)}(n)<\rho n$. Ekkor a feltétel miatt az ilyen n számok és az $\left[\frac{N_1}{\rho},\frac{N_1}{\rho}+N_1\right]$-ban lévő összes egészek aránya legalább $\frac{1}{2}-\varepsilon$. Hasonlóan, legyen $N_2\geq N_0$ az a legnagyobb egész szám, amire $\frac{N_2}{\rho}+N_2\leq\frac{N_1}{\rho}$. Ezt ismételjük addig, amíg $N_i\geq N_0$. Ekkor olyan $\left[\frac{N_i}{\rho},\frac{N_i}{\rho}+N_i\right]$ intervallumokat kaptunk, ahol a vizsgált páratlan számok aránya legalább $\frac{1}{2}-\varepsilon$, és amik legfeljebb $\frac{1}{\rho}+1$ nagyságú hézagokkal lefedik $\left[\frac{N_0}{\rho},x\right]$-et. Innen már könnyen látszik, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\#\left\{n\in\mathbb{N}:n\leq x\text{ és }C^{(k)}(n)<\rho n\text{ valamely }k\text{-ra}\right\}\geq\frac{1}{2}-\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, és $N\cdot K_N$ csak páratlan számokat tartalmaz, ez azt jelenti, hogy lényegében az összes páratlan számra igaz a feltevés. Ekkor viszont majdnem minden számra is, mert minden páros szám elér egy páratlan számot. $\square$

K_N-et megadhatjuk úgy is, hogy elindulunk visszafele a már elért halmazból (melynek elemei azok a páratlan számok, amikről már biztosan tudjuk, hogy az $\left\{\frac{1}{N},\frac{2}{N},\ldots,1\right\}$ halmazba mennek), ami kezdetben az

$$A=\left\{\frac{2k+1}{N}\text{ és a nulla}:0\leq k<N/2\text{ ha }N\text{ páros, és }0\leq k\leq\lfloor N/2\rfloor\text{ ha }N\text{ páratlan}\right\}$$

halmaz. Azaz egy tetszőlegesen elért $q=\frac{2k+1}{N}$ páratlan számnak megnézzük az összes kettőhatvánnyal vett szorzatát, majd minden ilyen szorzatra megnézzük, hogy a $(q2^i-\frac{1}{N})N$ osztható-e hárommal. Ha igen, akkor a $(q2^i-\frac{1}{N})/3$ számot is bevesszük az elértek halmazába. Az eljárást ismételve megkapjuk K_N-et.

Most másképp, de hasonlóan fogjuk megadni K_N-et. Legyen $I_0=[0,1]$, $I_j=[2^{j-1},2^j]$ $j\geq 1$ esetén. A végeredmény

$$K_N=\bigcup_{i=0}^{\infty}k_i$$

alakban fog előállni, ahol $k_0 = A$ és $\bigcup_{i=0}^{n} k_i$ pedig az a halmaz, ahol az összes elért $q = \frac{2k+1}{N}$ számra megnézzük az összes $(q2^j - \frac{1}{N})N$ számot, hogy osztható-e hárommal, és ha igen, akkor bevesszük a $(q2^j - \frac{1}{N})/3$-at a halmazba, ahol $q2^j - \frac{1}{N} < 3 \cdot 2^n$. Formálisan leírva először is definiáljunk két függvényt.

$$\tau(x) = \begin{cases} 2x & \text{ha } 2^{i-1} + 2^i < x \leq 2^{i+1} \text{ valamilyen } i\text{-re} \\ 4x & \text{ha } 2^i < x \leq 2^{i-1} + 2^i \text{ valamilyen } i\text{-re} \end{cases} \tag{27}$$

$$\widehat{C}_N(x) = \begin{cases} \frac{x-1/N}{3} & \text{ha } Nx \equiv 1 (\mod 3), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{28}$$

A $\widehat{C}_N$ függvény valamifajta inverze a C_N függvénynek. Legyen $S \subset I_j$ tetszőleges j-re. Ekkor

$$P(S) = \bigcup_{i=0}^{\infty} u_i,$$

ahol

$$u_0 = \widehat{C}_N(\tau(S)) \text{ és } u_i = \widehat{C}_N(\tau(u_{i-1})).$$

(Az u_i halmazokat csak a P és P_i halmazok felírására használom. Az itt és az ezután szereplő u_i halmazok különbözhetnek.) Látszik, hogy $P(S) \subset I_j \cup \{0\}$, és ha S elemei $\frac{k}{N}$ alakúak, akkor $P(S)$ elemei is $\frac{k}{N}$ alakúak. Legyen

$$L(S) = \left\{ s \in S : s \leq 2^{j-2} + 2^{j-1} \right\}$$

és

$$L_i(Z) = \{ z \in Z : z \in I_i \}.$$

Szükség lesz még a $P_j(S)$-ekre ($j > 1$) is. $j = 2$-re először is legyen $S \subset I_2$,

$$u_0 = P(S), \quad u_{2i+1} = P(\frac{1}{2}L(u_{2i})), \quad u_{2i} = P(2u_{2i-1}),$$
$$P_2(S) = \bigcup_{i=0}^{\infty} u_i.$$

Látszik, hogy $u_{2i+1} \subset I_1$, $u_{2i} \subset I_2$, így $P_2(S) \subset I_1 \cup I_2$. Ha ezenfelül S $\frac{k}{N}$ alakú számok halmaza, akkor $P_2(S)$ olyan $I_1 \cup I_2$-beli számok halmaza, amik S-be iterálnak C_N szerint.

$j > 2$-re pedig legyen $S \subset I_j$,

$$u_0 = P(S), \quad u_{2l+1} = P_{j-1}(\frac{1}{2}L(u_{2l})), \quad u_{2l} = P(\bigcup_{i=1}^{j-1} 2^{j-i}L_i(u_{2l-1})),$$

$$P_j(S) = \bigcup_{l=0}^{\infty} u_l.$$

Indukcióval könnyen igazolható, hogy $P_j(S) \subset \bigcup_{i=1}^{j} I_i$ és itt is, ha S $\frac{k}{N}$ alakú számok halmaza, akkor $P_j(S)$ olyan $\bigcup_{i=1}^{j} I_i$-beli számok halmaza, amik S-be iterálnak. Legyen

$$\tilde{A}_N = \{2k/N : \text{ahol}\, k = \lceil N/2 \rceil \,..N\}.$$

Ekkor számolással belátható, hogy K_N az alábbi alakban áll elő

$$k_0 = A, \quad k_1 = P(\tilde{A}), \quad k_i = P_i(2^{i-1}\tilde{A} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} 2^{i-j}L_j(\bigcup_{l=1}^{i-1} k_l)).$$

Azért kellett így meghatározni, mert minden egyes lépésnek követhető a sűrűségfüggvénye. Nézzük azokat a függvénytranszformációkat, amikkel ezt követni tudjuk.

$$Q_{0,i}(h)(x) = \begin{cases} h(\frac{3}{2^i}x-1)/(2\cdot 2^{i-1}) & x \in \left[2^{i-1}, \frac{4}{3}2^{i-1}\right] \\ h(\frac{3}{2^{i+1}}x-1)/(4\cdot 2^{i-1}) & x \in \left(\frac{4}{3}2^{i-1}, 2^i\right] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{29}$$

$$Q_{i,i}(h)(x) = \begin{cases} h(\frac{3}{2}x)/2 & x \in \left[2^{i-1}, \frac{4}{3}2^{i-1}\right] \\ h(\frac{3}{4}x)/4 & x \in \left(\frac{4}{3}2^{i-1}, 2^i\right] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{30}$$

$j > i$-re

$$Q_{i,j}(h)(x) = \begin{cases} h(\frac{3}{2^{j-i+1}}x)/(2\cdot 2^{i-j}) & x \in \left[2^{j-1}, \frac{4}{3}2^{j-1}\right] \\ h(\frac{3}{2^{j-i+2}}x)/(4\cdot 2^{i-j}) & x \in \left(\frac{4}{3}2^{j-1}, 2^j\right] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{31}$$

ha $j = i-1$ akkor pedig

$$Q_{i,i-1}(h)(x) = \begin{cases} h(\frac{3}{2}x)/2 & x \in \left(\frac{4}{3}2^{i-1}, 2^i\right] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{32}$$

11. Állítás. *$Q_{0,i}(\frac{1}{2})$ a sűrűségfüggvénye a $\widehat{C}_N(\tau(2^{i-1}\tilde{A_N}))$ halmazsorozatnak.*

Bizonyítás. $\tilde{A_N} \subset I_1$ sűrűségfüggvénye az I_1-en $1/2$, mivel tetszőleges $[a,b] \subset I_1$ intervallumra, ha N elég nagy, akkor az $[a,b]$-beli minden második $\frac{k}{N}$ alakú szám benne van $\#\tilde{A_N} \cap [a,b]$-ben. $2^{i-1}\tilde{A}_N \subset I_i$-nél minden 2^i-edik szám $2^{i-1}\tilde{A}_N$-beli, ezért $2^{i-1}\tilde{A}_N$ sűrűségfüggvénye I_i-n $1/2^i$. Hasonlóan látható, hogy $\tau(2^{i-1}\tilde{A_N})$ sűrűségfüggvénye $[3\cdot 2^{i-1},2^{i+1}]$-en $\frac{1}{2^{i+1}}$, $[2^{i+1},3\cdot 2^i]$-en $\frac{1}{2^{i+2}}$. Mivel az utóbbi két intervallumban egymás után ugyanakkora távolságra helyezkednek el a számok, és két egymás utáni szám számlálójának különbsége nem osztható hárommal, minden harmadik szám számlálója egyet ad maradékul hárommal osztva. Ezeknek a számoknak a sűrűsége nyilván harmada a $\tau(2^{i-1}\tilde{A_N})\cap[3\cdot 2^{i-1},2^{i+1}]$ és $\tau(2^{i-1}\tilde{A_N})\cap[2^{i+1},3\cdot 2^i]$-nak. Viszont $\widehat{C}_N$ ezekből kivon $\frac{1}{N}$-et és elosztja hárommal, emiatt pedig a sűrűségfüggvény szorzódik hárommal. Tehát azt kaptuk, hogy $\widehat{C}_N(\tau(2^{i-1}\tilde{A_N}))$ sűrűségfüggvénye $\left[2^{i-1}, \frac{4}{3}2^{i-1}\right]$-en $\frac{1}{2^{i+1}}$, $\left[\frac{4}{3}2^{i-1},2^i\right]$-en $\frac{1}{2^{i+2}}$, ami éppen $Q_{0,i}(\frac{1}{2})$. □

$\widehat{C}_N(\tau(2^{i-1}\tilde{A_N}))$ olyan halmazsorozat, ami két részre bontható az I_i intervallumon. Mindkettőben olyan számok vannak, amik egymástól egyenlő távolságra vannak, és ha ez a távolság adott N-re $\frac{d_1}{N}$ és $\frac{d_2}{N}$, akkor d_1 és d_2 nem osztható hárommal. Tegyük fel, hogy adott egy olyan H_N halmazsorozat tetszőleges I_i-n, hogy I_i felbomlik k darab zárt diszjunk intervallumra, és H_N elemei egy ilyen részintervallumon egymástól egyenlő $\frac{d_i}{N}$ távolságra helyezkednek el, ahol d_i $(i = 1,\dots,k)$ egész és nem osztható hárommal. Legyen ennek a sűrűségfüggvénye I_i-n $h(x)$ (mindenhol máshol legyen nulla az értéke). Ekkor a fentihez teljesen hasonló számolással adódik, hogy $\widehat{C}_N(\tau(H_N))$-nak I_i-n $Q_{i,i}(h)$, $\widehat{C}_N(\tau(2^{j-i}H_N))$-nek I_j-n $Q_{i,j}(h)$, és $\widehat{C}_N(\tau(\frac{1}{2}L(H_N)))$-nek I_{i-1}-en $Q_{i,i-1}(h)$ a sűrűségfüggvénye. Az is látszik, hogy az eredményül kapott halmazok is felbonthatóak legfeljebb $k+1$ részre I_j-n, I_i-n vagy I_{i-1}-en. Az is világos, hogy ezeken a részintervallumokon egyenlő távolságra helyezkednek el az elemek, és ott sem osztható 3-mal két egymást követő szám számlálójának különbsége. Ebből következik, hogy $P(\tilde{A_N})$ sűrűségfüggvénye I_1-en legalább akkora, mint $Q_{0,1}(1/2)+\sum_{i=0}^{\infty} Q_{1,1}^{(i)}(Q_{0,1}(1/2))$. Ez azért igaz, mert véges sokra tudjuk, hogy $\bigcup_{i=0}^{j} u_i$ halmaznak $Q_{0,1}(1/2)+\sum_{i=0}^{j-1} Q_{1,1}^{(i)}(Q_{0,1}(1/2))$ a sűrűségfüggvénye I_1-en (ahol u_i a $P(\tilde{A_N})$-hez tartozik). Viszont könnyen látszik, hogy $\sum_{i=0}^{\infty} Q_{i,i}^{(i)}(f)$ egyenletesen konvergens függvénysor tetszőleges I_1-en korlátos f-re. Most nézzük az általános függvényrekurziót, majd utána vizsgáljuk meg a pontos kapcsolatot.

4.2. Általános

Ebben az alfejezetben leírjuk az általános függvényrekurziót, majd belátunk egy tételt, miszerint bizonyos feltételek mellett egy f függvényre használva ezt a rekurziót, megkapjuk magát a függvényt.

Jelölje H az összes I_j-n korlátos $f(x): \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvények halmazát.

$$\omega: \ \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \to L, \text{ ahol } L: H \to H \text{ és } L(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot L(f),\ L(f+g) = L(f) + L(g)$$

és ω teljesítse az alábbi négy tulajdonságot:

(a) $D(\omega(i,j)) = \{f | f \in H, \text{ ahol } f(x) = 0 \text{ ha } x \notin I_i\}$

(b) $D((\omega(i,j)(f)) = \mathbb{R}_0^+$

(c) $\omega(i,j)(f)(x) = 0$ ha $x \notin I_j$

(d) ω olyan, hogy a következőkben definiálandó F_n kifejezésre $F_n(1)$ minden n-re H-beli.

K_N-hez hasonlóan definiálom F-et és a segédfüggvényeket. Ha f tetszőleges H-beli függvény, legyen $F_1(f) = f\chi_1$, és $n = 2$-re

$$s_0 = f\chi_2, \quad s_1 = \omega(2{,}1)(s_0\chi_2), \quad s_{2i} = \omega(1{,}2)(s_{2i-1}\chi_1),$$
$$s_{2i+1} = \omega(2{,}1)(s_{2i}\chi_2), \quad F_2(f) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i.$$

Mivel $\omega(i,j)$ a teljes H-n értelmezett és monoton, ezért (sup-normában) korlátos $\Rightarrow$ folytonos. F_2 lineáris és monoton, ezért definíciónk értelmes minden H-beli függvényre. Ezután $n > 2$-re legyen

$$s_0 = f\chi_n, \quad s_1 = F_{n-1}(\omega(n,n-1)(s_0\chi_n)), \quad s_{2i} = \sum_{j=1}^{n-1} \omega(j,n)(s_{2i-1}\chi_j),$$
$$s_{2i+1} = F_{n-1}(\omega(n,n-1)(s_{2i}\chi_n)), \quad F_n(f) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i.$$

Mivel F_n lineáris és monoton, definíciónk értelmes minden H-beli függvényre. Végül

$$B_0(x) = f\chi_0, \quad B_1 = \omega(0{,}1)(B_0\chi_0), \quad B_n = F_n(\sum_{i=0}^{n-1} \omega(i,n)(\sum_{j=i}^{n-1} B_j\chi_i)),$$
$$F(f) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n,$$

ahol $F(f)$ lehet végtelen is.

Azt akarjuk, hogy minél több $f \in H$ függvényre $F(f) = f$ legyen. A (d) feltétel miatt minden F_n is folytonos. Jegyezzük még meg, hogy bármely $F_n(f)$-nél az s_{2i}-k csak az I_n intervallumon nem nullák, és a s_{2i+1}-k pedig csak a $\bigcup_{i=0}^{n-1} I_i$ intervallumon nem nullák. Így $j < n$-hez $F_n(f)\chi_j = \sum_{i=0}^{\infty} s_{2i+1}\chi_j$ és $j = n$-re $F_n(f)\chi_n = \sum_{i=0}^{\infty} s_{2i}$.

12. Lemma. *Ha minden n-re az $F_n(f) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i$ sor egyenletesen konvergens, és $F(f) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i$ is $\bigcup_{i=0}^{n} I_i$-n egyenletesen konvergens, akkor*

(a) Minden $j \geq 2$-re $F_j(f) = F_j(f)\chi_j + F_{j-1}(\omega(j, j-1)(F_j(f)\chi_j))$

(b) Minden $k \geq 2$-re és $1 \leq j < k$-ra $F_k(f)\chi_j = \omega(j+1, j)(F_k(f)\chi_{j+1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \omega(i, j)(F_k(f)\chi_i)$, $j = k$-ra pedig $F_k(f)\chi_k = f\chi_k + \sum_{i=1}^{k-1} \omega(i, k)(F_k(f)\chi_i)$

(c) Minden $j \geq 1$-re $F(f)\chi_j = \omega(j+1, j)(F(f)\chi_{j+1}) + \sum_{i=0}^{j-1} \omega(i, j)(F(f)\chi_i)$

Bizonyítás. Először (a)-t bizonyítjuk.

$$\begin{aligned}
F_j(f) &= \sum_{i=0}^{\infty} s_i = \sum_{i=0}^{\infty} s_{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} s_{2i+1} = F_j(f)\chi_j + \sum_{i=0}^{\infty} s_{2i+1} \\
&= F_j(f)\chi_j + \sum_{i=0}^{\infty} F_{j-1}(\omega(j, j-1)(s_{2i}\chi_j)) \\
&= F_j(f)\chi_j + F_{j-1}(\sum_{i=0}^{\infty} \omega(j, j-1)(s_{2i}\chi_j)) \\
&= F_j(f)\chi_j + F_{j-1}(\omega(j, j-1)(\sum_{i=0}^{\infty} s_{2i})),
\end{aligned}$$

ahol F_{j-1} és $\omega(j, j-1)$ (sup-normában való) folytonosságát használtuk. A továbbiakban mindig ezt használjuk fel, amikor végtelen szummát be vagy kiviszünk a leképezésből, ezért ezt külön nem írjuk le.

(b)-t k szerinti indukcióval bizonyítjuk. $k = 2$ és $j = 1$-re felhasználva a lemma (a) részét és F_1 definícióját, kapjuk

$$F_2(f)\chi_1 = F_1(\omega(2{,}1)(F_2(f)\chi_2)) = \omega(2{,}1)(F_2(f)\chi_2)$$

$j = 2$-re pedig

$$F_2(f)\chi_2 = \sum_{i=0}^{\infty} s_{2i} = f\chi_2 + \sum_{i=1}^{\infty} s_{2i} = f\chi_2 + \sum_{i=0}^{\infty} \omega(1{,}2)(s_{2i+1}\chi_1) = f\chi_2 + \omega(1{,}2)(F_2(f\chi_1)).$$

Tegyük fel, hogy (b) igaz k-ig. Ekkor $k+1$ és $j<k$-ra kapjuk indukció miatt

$$F_{k+1}(f)\chi_j = (\sum_{i=0}^{\infty} s_{2i+1})\chi_j = (\sum_{i=0}^{\infty} F_k(\omega(k+1,k)(s_{2i}\chi_{k+1})))\chi_j =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\omega(j+1,j)(F_k(\omega(k+1,k)(s_{2i}\chi_{k+1}))\chi_{j+1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \omega(i,j)(F_k(\omega(k+1,k)(s_{2i}\chi_{k+1}))\chi_i)\Big) =$$

$$= \omega(j+1,j)(\sum_{i=0}^{\infty} F_k(\omega(k+1,k)(s_{2i}\chi_{k+1}))\chi_{j+1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \omega(i,j)(\sum_{i=0}^{\infty} F_k(\omega(k+1,k)(s_{2i}\chi_{k+1}))\chi_i) =$$

$$\omega(j+1,j)(\sum_{i=0}^{\infty} s_{2i+1}\chi_{j+1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \omega(i,j)(\sum_{i=0}^{\infty} s_{2i+1}\chi_i) =$$

$$\omega(j+1,j)(F_{k+1}(f)\chi_{j+1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \omega(i,j)(F_{k+1}(f)\chi_i).$$

$j=k$-ra hasonlóan (röviden)

$$F_{k+1}(f)\chi_k = (\sum_{i=0}^{\infty} F_k(\omega(k+1,k)(s_{2i}\chi_{k+1})))\chi_k =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\omega(k+1,k)(s_{2i}\chi_{k+1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \omega(i,j)(F_k(\omega(k+1,k)(s_{2i}\chi_{k+1}))\chi_i)\Big) =$$

$$= \omega(k+1,k)(F_{k+1}(f)\chi_{k+1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \omega(i,k)(F_{k+1}(f)\chi_i).$$

Végül pedig $j=k+1$-re hasonlóan kapjuk, mint a $k=2$, $j=2$ esetre,

$$F_{k+1}(f)\chi_{k+1} = \sum_{i=0}^{\infty} s_{2i} = f\chi_{k+1} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} \omega(j,k+1)(s_{2i+1}\chi_j) =$$

$$= f\chi_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \omega(j,k+1)(\sum_{i=0}^{\infty} s_{2i+1}\chi_j) = f\chi_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \omega(j,k+1)(F_{k+1}(f)\chi_j).$$

Most már beláthatjuk (c)-t. $F(f)\chi_j = \sum_{n=j}^{\infty} B_n\chi_j$, és minden B_n egy speciálisF_n, ezért $n>j$-re a (b) pont első felét alkalmazhatjuk,

$$B_n\chi_j = \omega(j+1,j)(B_n\chi_{j+1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \omega(i,j)(B_n\chi_i)$$

$n=j$-re pedig a (b) második felét

$$B_j\chi_j = F_j(\sum_{i=0}^{j-1} \omega(i,j)(\sum_{l=i}^{j-1} B_l\chi_i))\chi_j =$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} \omega(i,j)(\sum_{l=i}^{j-1} B_l\chi_i) + \sum_{i=1}^{j-1} \omega(i,j)(B_j\chi_i) = \sum_{i=0}^{j-1} \omega(i,j)(\sum_{l=i}^{j} B_l\chi_i)$$

Így ha összegezzük a B_n-eket $n \geq j$-re, akkor

$$F(f)\chi_j = \sum_{i=j}^{\infty} B_i\chi_j = \omega(j+1,j)(\sum_{n=j+1}^{\infty} B_n\chi_{j+1}) + \sum_{i=0}^{j-1}\omega(i,j)(\sum_{l=i}^{\infty} B_l\chi_i) =$$

$$= \omega(j+1,j)(F(f)\chi_{j+1}) + \sum_{n=0}^{j-1}\omega(n,j)(F(f)\chi_n)$$

Itt felhasználtuk $\sum B_n$ egyenletes konvergenciáját I_j-n. Így (c)-t beláttuk. $\square$

Ha az $F(f) = f$ kérdést akarjuk eldönteni, akkor a fenti lemma (c) pontja miatt f-re és ω-ra az alábbi szükséges feltételt kaptuk.

$$\text{Minden } j \geq 1\text{-re} \quad f\chi_j = \omega(j+1,j)(f\chi_{j+1}) + \sum_{i=0}^{j-1}\omega(i,j)(f\chi_i) \tag{33}$$

4.3. Egy példa

Legyen ω olyan, hogy $\int_{I_j}\omega(i,j)(f\chi_i) = \frac{1}{2}\int_{I_i} f\chi_i$ minden $j > i$-re, $j = i-1$-re pedig $\int_{I_{i-1}}\omega(i,i-1)(f\chi_i) = \frac{1}{4}\int_{I_i} f\chi_i$. Nézzük a legegyszerűbb ω-t, ami ezt teljesíti, és hozzá egy konstans kezdőfüggvényt, mondjuk $f(x) = 1$-et. $i \geq 1$-re

$$\omega(0,i)(g\chi_0)(x) = \begin{cases} g(\frac{x}{2^{i-1}}-1)/2^i & \text{ha } x \in I_i \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{34}$$

$i \geq 2$-re

$$\omega(i,i-1)(g\chi_i)(x) = \begin{cases} g(x+2^{i-2})/2 & \text{ha } x \in I_{i-1} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{35}$$

végül $j > i \geq 1$

$$\omega(i,j)(g\chi_i)(x) = \begin{cases} g(\frac{x}{2^{j-i}})/2^{j+1-i} & \text{ha } x \in I_j \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{36}$$

Könnyen látszik, hogy ω megfelel a feltételnek, és ha egy konstans függvényre alkalmazzuk $\omega(i,j)$-t, akkor konstans függvényt kapunk. Méghozzá

$$\omega(0,i)(c\chi_0) = c/2^i\chi_i, \quad \omega(i,i-1)(c\chi_i) = c/2\chi_{i-1}, \quad \omega(i,j)(c\chi_i) = c/2^{j+1-i}\chi_j.$$

A rekurziót úgy számoljuk ki, hogy az s_i segédfüggvényeknek csak az y_i integrálját nézzük. (Ebből, mivel minden I_i intervallumon konstans részek lesznek, könnyen visszaszámolható a függvény.)

Először számoljuk ki $\int_{\mathbb{R}} F_n(1)$-et és $\int_{I_1} F_n(1)$-et a konstans 1 függvényre. Először n=2-re

$$y_0=\int_{I_2}s_0=\int_{I_2}\chi_2=2;\quad y_1=\int_{I_1}s_1=\int_{I_1}\omega(2,1)(\chi_2)=y_0/4;$$
$$y_{2i}=\int_{I_2}s_{2i}=\int_{I_2}\omega(1,2)(s_{2i-1}\chi_1)=y_{2i-1}/2;$$
$$y_{2i+1}=\int_{I_1}s_{2i+1}=\int_{I_1}\omega(2,1)(s_{2i}\chi_2)=y_{2i}/4;\quad \int_{\mathbb{R}}F_2(1)=\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=0}^{\infty}s_i=\sum_{i=0}^{\infty}y_i=$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}y_{2i}+\sum_{i=0}^{\infty}y_{2i+1}=y_0(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\ldots)+y_1(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\ldots)=y_0\frac{10}{7}=\frac{20}{7};$$
$$\int_{I_1}F_2(1)=y_0\frac{2}{7}=\frac{4}{7}.$$

$n>2$-re tegyük fel, hogy

$$\int_{\mathbb{R}}F_n(1)=\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}\int_{I_n}\chi_n,\text{ ahol } a_{n-2},b_{n-2} \text{ egész számok,}$$

és

$$\int_{I_1}F_n(1)=\frac{c_{n-2}}{d_{n-2}}\int_{\mathbb{R}}F_n(1),\text{ ahol } c_{n-2},d_{n-2} \text{ egész számok.}$$

Láttuk, hogy n=2-re $a_0=10$, $b_0=7$, $c_0=1$, $d_0=5$. Tehát $n+1$-re

$$y_0=\int_{I_{n+1}}s_0=\int_{I_{n+1}}\chi_{n+1};\quad y_1=\int_{\mathbb{R}}s_1=\int_{\mathbb{R}}F_n(\omega(n+1,n)(\chi_{n+1}))=$$
$$\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}\int_{I_n}\omega(n+1,n)(\chi_{n+1})=\frac{a_{n-2}}{4b_{n-2}}\int_{I_{n+1}}\chi_{n+1}=\frac{a_{n-2}}{4b_{n-2}}y_0;$$
$$y_{2i}=\int_{I_{n+1}}s_{2i}=\int_{I_{n+1}}\sum_{j=1}^{n}\omega(j,n+1)(s_{2i-1}\chi_j)=\sum_{j=1}^{n}\int_{I_{n+1}}\omega(j,n+1)(s_{2i-1}\chi_j)=$$
$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{I_j}s_{2i-1}\chi_j=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}s_{2i-1}=\frac{1}{2}y_{2i-1}$$
$$y_{2i+1}=\int_{\mathbb{R}}s_{2i+1}=\int_{\mathbb{R}}F_n(\omega(n+1,n)(s_{2i}\chi_{n+1}))=\frac{a_{n-2}}{4b_{n-2}}y_{2i}$$
$$\int_{\mathbb{R}}F_{n+1}(1)=\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=0}^{\infty}s_i=\sum_{i=0}^{\infty}y_i=y_0(1+\frac{a_{n-2}}{8b_{n-2}}+(\frac{a_{n-2}}{8b_{n-2}})^2+\ldots)+\frac{a_{n-2}}{4b_{n-2}}y_0(1+\frac{a_{n-2}}{8b_{n-2}}+\ldots)=$$
$$y_0(\frac{1}{1-\frac{a_{n-2}}{8b_{n-2}}}+\frac{a_{n-2}}{4b_{n-2}}\frac{1}{1-\frac{a_{n-2}}{8b_{n-2}}})=y_0\frac{8b_{n-2}+2a_{n-2}}{8b_{n-2}-a_{n-2}}$$

Tehát

$$a_{n-1}=8b_{n-2}+2a_{n-2}$$

$$b_{n-1}=8b_{n-2}-a_{n-2}$$

Indukcióval belátható, hogy

$$a_{n-1}=3\cdot 6^n-2\cdot 4^n$$

$$b_{n-1}=9\cdot 6^{n-1}-2\cdot 4^{n-1}$$

A c_{n-1}, d_{n-1} meghatározására először is

$$\int_{I_1} F_{n+1}(s) = \frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\int_{I_{n+1}} s\chi_{n+1} = \frac{c_{n-2}}{d_{n-2}}\frac{2a_{n-2}}{8b_{n-2}-a_{n-2}}\int_{I_{n+1}} s\chi_{n+1}$$

Ebből pedig

$$c_{n-1} = 2a_{n-2}c_{n-2}$$

$$d_{n-1} = a_{n-1}d_{n-2}$$

következik, amiből pedig két nagy szorzatot kapunk ha kifejezzük c_0-lal és d_0-lal, viszont minket csak a $\frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}$ hányados érdekel, ezért egyszerűsítés után

$$c_{n-1} = 2^n$$

$$d_{n-1} = a_{n-1}$$

Most számoljuk ki $\int_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{\infty} B_i$-t. Legyen $S_n = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{n} B_i$.

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2}$$

$n \geq 2$-re pedig

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{2}S_{n-1}\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}} = S_{n-1}\frac{2b_{n-2}+a_{n-2}}{2b_{n-2}} = S_{n-1}\frac{6^n - 3\cdot 4^{n-1}}{3\cdot 6^{n-1} - 4^{n-1}} =$$
$$= \frac{3}{2}\prod_{i=0}^{n-2}\frac{6^{i+2}-3\cdot 4^{i+1}}{3\cdot 6^{i+1}-4^{i+1}} = \frac{1}{2}\frac{6^n}{3^n - 2^{n-1}}$$

Ez a képlet jó S_1 kiszámítására is, amit fel is használok $\int_{I_1} F(f)$ kiszámolásához:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{I_1} B_i = \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{c_{i-2}}{d_{i-2}}(\frac{1}{2}S_{i-1}\frac{a_{i-2}}{b_{i-2}}) = \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{2^{i-1}}{a_{i-2}}(\frac{1}{4}\frac{6^{i-1}}{3^{i-1}-2^{i-2}}\frac{a_{i-2}}{b_{i-2}}) =$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\infty} 2^{i-2}\frac{6^{i-1}}{(3^{i-1}-2^{i-2})(9\cdot 6^{i-2} - 2\cdot 4^{i-2})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{6^{i-1}}{(3^{i-1}-2^{i-2})(3^i - 2^{i-1})}$$

13. Állítás.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{6^{i-1}}{(3^{i-1}-2^{i-2})(3^i-2^{i-1})} = 1$$

Bizonyítás. Elöször is indexeljük át a sort, és rendezzük az egyenletet. Ekkor az állítás

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{6^{k+1}}{(3^{k+1}-2^k)(3^{k+2}-2^{k+1})} = 1$$

alakba írható. Nézzük ennek egy tagját.

$$\frac{6^{k+1}}{(3^{k+1}-2^k)(3^{k+2}-2^{k+1})} = (\frac{2}{3})^{k+1}\frac{1}{3}\frac{1}{1-(\frac{2}{3})^k 3}\frac{1}{1-(\frac{2}{3})^{k+1}3} =$$
$$(\frac{2}{3})^{k+1}\frac{1}{3}\Big(1 + (\frac{2}{3})^k\frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^{2k}\frac{1}{3^2} + \ldots\Big)\Big(1 + (\frac{2}{3})^{k+1}\frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^{2k+2}\frac{1}{3^2} + \ldots\Big)$$

Párosítsuk össze ennek a szorzatnak a tagjait aszerint, hogy az $\frac{1}{3}$ hanyadik hatványon van. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$$

$$\frac{1}{3^2}(\left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2k+2})$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{3^i}(\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{ik+j})$$

Mindegyik sort, ha $k=0$-tól összegezük, kapjuk a $\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \ldots$ mértani sorozatot. Viszont az eredeti összeghez még ezeket is összegezni kell, ami viszont 1, így az állítást bebizonyítottuk. $\square$

Tehát $\int_{I_1} F(f)=1$, emiatt $F(f)\chi_1=1$. Ekkor viszont a (12) lemma (c) pontja miatt $F(f)\chi_1=\omega(0,1)(F(f)\chi_0)+\omega(2,1)(F(f)\chi_2)$, és mivel $F(f)\chi_0$ és $F(f)\chi_1$ a konstans 1 I_0-on és I_1-en, ezért $F(f)\chi_2$ is az I_2-n. Így sorban belátható, hogy az egész pozitív félegyenesen egy, azaz $F(f)=f$.

4.4. A tétel

14. Tétel. *Legyen f H-beli függvény és ω olyan, hogy a (12) lemma feltételei teljesüljenek, és a (33) szükséges feltétel is teljesüljön. Továbbá*

(a) $\exists\lambda_i>0$ *hogy* $\quad\omega(0,i)(f\chi_0)\geq\lambda_i f\chi_i \quad \forall\, i$*-re*

(b) $\exists\lambda_{j,i}>0$ *hogy* $\quad\omega(j,i)(f\chi_j)\geq\lambda_{j,i}f\chi_i$

$\lambda(i,i-1)>1/p \quad \lambda_{j,i}\geq\frac{1}{2^{i-j-1}p}$ *ahol* $p<6$, $i>j$

Ha (a), akkor I., ha ezen felül (b) is teljesül, akkor II. is igaz.

I. $(F_n(\omega(n+1,n)(f\chi_{n+1}))+\sum_{i=0}^{n}B_i)\sum_{i=0}^{n}\chi_i=f\sum_{i=0}^{n}\chi_i$ $\forall n\in\mathbb{N}$*-re*

II. $F(f)=\sum_{i=0}^{\infty}B_i=f$.

Bizonyítás. *I.*-et n szerinti indukcióval bizonyítjuk. $n=1$-re

$$(F_1(\omega(2,1)(f\chi_2))+\sum_{i=0}^{1}B_i)\sum_{i=0}^{1}\chi_i=(\omega(2,1)(f\chi_2)+\omega(0,1)(f\chi_0)+f\chi_0)\sum_{i=0}^{1}\chi_i=f\sum_{i=0}^{1}\chi_i$$

(33) miatt. Tegyük fel, hogy I. igaz $n > 1$-re. Először is jelölje

$$A = \big(F_{n+1}(\omega(n+2,n+1)(f\chi_{n+2})) + B_{n+1}\big)\chi_{n+1}$$

és jegyezzük meg, hogy

$$g = (F_{n+1}(\omega(n+2,n+1)(f\chi_{n+2})) + \sum_{i=0}^{n+1} B_i)\sum_{i=0}^{n+1}\chi_i = (F_n(\omega(n+1,n)(A)) + A + \sum_{i=0}^{n} B_i)\sum_{i=0}^{n+1}\chi_i$$

a (12) lemma (a) része és F_n linearitása miatt. (Eml. B_{n+1} is egy speciális F_{n+1}, így rá is alkalmazható a lemma.)

Az indukció miatt, ha $A = f\chi_{n+1}$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, és legyen

$$1 > \lambda = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^+}\{A \geq \lambda f\chi_{n+1}\}$$

$B_{n+1} > \omega(0,i)(f\chi_0) \geq \lambda_i f\chi_i$ miatt $\lambda > 0$. Ekkor

$$g\sum_{i=1}^{n}\chi_i = (F_n(\omega(n+1,n)(A)) + A + \sum_{i=0}^{n} B_i)\sum_{i=1}^{n}\chi_i = (F_n(\omega(n+1,n)(A)) + \sum_{i=1}^{n} B_i)|\sum_{i=1}^{n}\chi_i \geq$$

$$(F_n(\omega(n+1,n)(\lambda f\chi_{n+1})) + \lambda(\sum_{i=1}^{n} B_i))\sum_{i=1}^{n}\chi_i \geq$$

$$\lambda\big((F_n(\omega(n+1,n)(f\chi_{n+1})) + \sum_{i=1}^{n} B_i)\big)\sum_{i=1}^{n}\chi_i = \lambda f\sum_{i=1}^{n}\chi_i$$

A (12) lemma (b) pontjának második felét alkalmazva A mindkét tagjára, és felhasználva B_{n+1} definícióját, kapjuk, hogy

$$g\chi_{n+1} = A = \omega(n+2,n+1)(f\chi_{n+2}) + \sum_{i=0}^{n}\omega(i,n+1)(g\chi_i).$$

Viszont $g\chi_i \geq \lambda f\chi_i$ ($i \geq 1$), (33), $g\chi_0 = f\chi_0$ és (a) feltétel miatt

$$A = \omega(n+2,n+1)(f\chi_{n+2}) + \sum_{i=0}^{n}\omega(i,n+1)(g\chi_i) \geq \lambda\omega(n+2,n+1)(f\chi_{n+2}) +$$

$$(1-\lambda)\omega(0,n+1)(f\chi_0) + \sum_{i=0}^{n}\omega(i,n+1)(\lambda f\chi_i) \geq ((1-\lambda)\lambda_{n+1} + \lambda)f\chi_{n+1} > \lambda f\chi_{n+1}$$

ami ellentmondás, mert λ supremum volt.

Most belátjuk II.-t.

Legyen

$$x_{in} = (\sum_{j=i}^{n} B_j)\chi_i.$$

Jegyezzük meg, ha $\exists\varepsilon>0\in\mathbb{R}$, hogy minden $x_{nn}\geq\varepsilon f\chi_n$, akkor $x_{i(n+1)}\geq x_{in}+(f\chi_i-x_{in})\varepsilon$. Ez azért igaz, mert

$$x_{i(n+1)}=x_{in}+B_{n+1}\chi_i=x_{in}+F_{n+1}(\sum_{i=0}^{n}\omega(i,n+1)(x_{in}))\chi_i$$

I. és (12) lemma (a) pontja miatt tudjuk, hogy ha

$$F_{n+1}(\sum_{i=0}^{n}\omega(i,n+1)(x_{in}))\chi_{n+1}=f\chi_{n+1},$$

akkor $x_{i(n+1)}=f\chi_i$, azaz $B_{n+1}\chi_i=(f\chi_i-x_{in})$. Így, ha

$$x_{(n+1)(n+1)}=B_{n+1}\chi_{n+1}\geq\varepsilon f\chi_{n+1},$$

akkor

$$x_{i(n+1)}\geq x_{in}+(f\chi_i-x_{in})\varepsilon. \tag{37}$$

Ekkor n szerinti indukcióval igazolható, hogy

$$x_{in}\geq(1-\varepsilon)^{n-i}\varepsilon f\chi_i+f\chi_i(1-(1-\varepsilon)^{n-i}),$$

így

$$F(f)\chi_i=\lim_{n\to\infty}x_{in}=f\chi_i.$$

Tehát azt kell bizonyítani, hogy ha $x_{ii}>\varepsilon, f\chi_i$ $1<i\leq n$-re, akkor $x_{(n+1)(n+1)}$ is. Tegyük fel, hogy

$$x_{in}\geq\varepsilon f\chi_i,\quad 0<i\leq n,$$

és legyen $0<\varepsilon\leq\lambda_i^*\in\mathbb{R}$ az a supremum amelyre $x_{in}\geq f\chi_i\lambda_i^*$. Tegyük fel azt is, hogy

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega(i,n)(f\chi_i\lambda_i^*)\geq\varepsilon f\chi_n.$$

Először is, ha $x_{in}\geq 2^{n-i}p\varepsilon f\chi_i$ valamilyen i-re, akkor (b) miatt $x_{(n+1)(n+1)}\geq\varepsilon f\chi_{n+1}$, tehát készen vagyunk. Tegyük fel, hogy nincs ilyen i. Az indukciós feltevés miatt, és a (12) lemma (b) pontjának második felébe behelyettesítve B_n-t, majd x_{in}-t kifejezve kapjuk, hogy

$$x_{nn}=\sum_{i=0}^{n-1}\omega(i,n)(x_{in})\geq\sum_{i=0}^{n-1}\omega(i,n)(f\chi_i\lambda_i^*)\geq\varepsilon f\chi_n.$$

Ekkor hasonlóan, és a tétel (b) pontját felhasználva

$$x_{(n+1)(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} \omega(i,n+1)(x_{i(n+1)}) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega(i,n+1)(x_{i(n+1)} - f\chi_i\lambda_i^*) + \omega(n,n+1)(x_{n(n+1)} - f\chi_n\varepsilon) +$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega(i,n+1)(f\chi_i\lambda_i^*) + \omega(n,n+1)(f\chi_n\varepsilon) \geq (\delta + \varepsilon/2 + \varepsilon/p) f\chi_{n+1},$$

ahol

$$\delta = \sup(\delta \in \mathbb{R} : \sum_{i=0}^{n-1} \omega(i,n+1)(x_{i(n+1)} - f\chi_i\lambda_i^*) + \omega(n,n+1)(x_{n(n+1)} - f\chi_n\varepsilon) \geq \delta f\chi_{n+1}).$$

Tehát δ-t kell úgy megbecsülni, hogy $(\varepsilon/2 + \varepsilon/p + \delta) \geq \varepsilon$. (37)-hez hasonlóan

$$x_{i,n+1} \geq (1 - 2^{n-i}p\varepsilon)(\varepsilon/2 + \varepsilon/p + \delta) f\chi_i + \lambda_i^* f\chi_i.$$

Így

$$\delta \geq \sum_{i=k}^{n} \frac{(1-2^{n-i}p\varepsilon)(\varepsilon/2+\varepsilon/p+\delta)}{2^{n-i}p} = \frac{2}{p}(1-1/2^{n-k+1})(\varepsilon/2+\varepsilon/p+\delta) - (n-k+1)\varepsilon(\varepsilon/2+\varepsilon/p+\delta).$$

Legyen minden n-re $d = n - k + 1$ állandó. Ez a d megválasztható úgy, hogy $1/2^d$ elhanyagolható legyen, és ε-t is megválaszthatjuk előre olyannak, hogy $d\varepsilon$ is elhagyható legyen. Így tetszőleges $\varepsilon_1 > 0$-hoz lehet úgy választani ε-t és d-t, hogy

$$\delta \geq \varepsilon \frac{p+2}{p(p-2)} - \varepsilon_1$$

fennálljon. És minden $p < 6$-ra van olyan ε_1, hogy

$$\varepsilon/2 + \varepsilon/p + \varepsilon \frac{p+2}{p(p-2)} - \varepsilon_1 \geq \varepsilon$$

teljesül. Ezzel *II.*-t beláttuk. □

4.5. Kapcsolat

Mint már az első alfejezet végén látszott, az alábbi

$$\omega(i,j)(h)(x) = Q_{i,j}(h)(x) + \sum_{k=1}^{\infty} Q_{j,j}^{(k)}(Q_{i,j}(h))(x)$$

lesz megfelelő. Nézzük meg a (33) feltételt egy olyan f függvényre, ami majdnem mindenhol $1/2$.

15. Állítás. *A fenti ω és $f = 1/2$ (majdnem mindenhol) függvény kielégíti a (33) feltételt, miszerint*

$$\textit{minden } j \geq 1\textit{-re} \quad 1/2\chi_j = \omega(j+1,j)(1/2\chi_{j+1}) + \sum_{i=0}^{j-1} \omega(i,j)(1/2\chi_i)$$

Bizonyítás. Tetszőleges j-re

$$\int_{I_j} (\omega(j+1,j)(1/2\chi_{j+1}) + \sum_{i=0}^{j-1} \omega(i,j)(1/2\chi_i)) = 2^{j-2} + 1/2 + \sum_{i=1}^{j-1} 2^{i-1} 1/2 = 2^{j-1} = \int_{I_j} 1/2\chi_j$$

Azt is tudjuk, hogy

$$\omega(j+1,j)(1/2\chi_{j+1}) + \sum_{i=0}^{j-1} \omega(i,j)(1/2\chi_i) \leq \frac{1}{2}\chi_j \text{ majdnem mindenhol,}$$

mert ha lenne olyan $[a,b] \subset I_j$ intervallum, ahol fordított egyenlőtlenség áll fenn, akkor valamely ε-ra a $\sum_i^\infty Q_{i,i}(h)$ egyenletes konvergenciája miatt létezne olyan N_0, hogy

$$\omega(j+1,j)(1/2\chi_{j+1}) + \sum_{i=0}^{j-1} \omega(i,j)(1/2\chi_i) \geq$$

$$Q_{j+1,j}(1/2\chi_{j+1}) + \sum_{i=1}^{N_0} Q_{j,j}^{(i)}(Q_{j+1,j}(1/2\chi_j)) + \sum_{i=0}^{j-1}(Q_{i,j}(1/2\chi_i) + \sum_{k=1}^{N_0} Q_{j,j}^{(k)}(Q_{i,j}(1/2\chi_i))) > 1/2 + \varepsilon$$

$[a,b]$-n. Viszont az első alfejezet végén tárgyaltak miatt ez azt jelentené, hogy $[a,b]$-n elég nagy N-re a $\frac{2k+1}{N} \in [a,b]$ számok és az összes $\frac{k}{N} \in [a,b]$ számok aránya több, mint $\frac{1}{2} + \varepsilon$ lenne, ez pedig ellentmondás, vagyis kész vagyunk. $\square$

Ebből látszik, hogy minden F_n és maga F is korlátos. A többi ω-ra tett feltétel könnyen látszik.

16. Állítás. *A fentebb megadott $\omega(i,j)$ és $f(x) = 1/2$ (majdnem mindenhol) függvény megfelel a tétel feltételeinek, így $F(f(x)) = 1/2$.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\omega(i,i+1)(1/2\chi_i) &> Q_{i,i+1}(1/2) + Q_{i+1,i+1}^{(0)}(Q_{i,i+1}(1/2)) + Q_{i+1,i+1}^{(1)}(Q_{i,i+1}(1/2)) \\ &\geq 1/2(1/8 + 1/32 + 1/64) > 1/2 \cdot 1/6\end{aligned}$$

és ω definíciója miatt $\omega(i,i+1) = 1/2\omega(i,i+2)$. $\omega(i,i-1)$-re ugyanígy teljesül. Tehát a tétel feltételei teljesülnek, így alkalmazható rá a tétel. Már csak annyi van hátra, hogy

F(1/2)-et tudjuk véges sok Q függvénnyel közelíteni I_j-n. Ez igaz, mert F_n és ω folytonos leképezések, és $\sum_{k=1}^{\infty} Q_{j,j}^{(k)}(Q_{i,j}(h))(x)$ egyenletesen konvergens. Így K_N sűrűségfüggvénye legalább akkora, mint ennek a véges sok Q-nak az összege, így tetszőlegesen közel van 1/2-hez, így a sűrűségfüggvénye csak az 1/2-ed lehet. Ezzel (10)-et beláttuk, így (8)-at is. $\square$

Hivatkozások

[1] R. Ash, *Information Theory*, Interscience Publishers, Wiley, New York, 1965.

[2] L. Collatz, *On the Motivation and Origin of the* $3n+1$ *Problem*, J. Qufu Normal Univ., Nat. Sci. Edition **12(3)** (1986), 9–11.

[3] C. J. Everett, *Iteration of the number theoretic function* $f(2n) = n, f(2n+1) = = 3n+2$, Advances in Math. **25** (1977), 42–45.

[4] J. C. Lagarias, *The Ultimate Challenge: The* $3x+1$ *Problem*, AMS, Providence, Rhode Island, 2010.

[5] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Aritmetica. **30** (1976), 241–252.

[6] ———, *On the existence of a density*, Acta Aritmetica. **35** (1979), 101–102.

[7] G. Venturini, *On the* $3x+1$ *Problem*, Adv. Appl. Math. **10** (1989), 344–347.

[8] ———, *On a generalization of the* $3x+1$ *Problem*, Adv. Appl. Math. **19** (1997), 295–305.