EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Simon Emese Gyöngyi

LINEÁRIS ALGEBRA A KOMBINATORIKÁBAN

BSc Szakdolgozat

Témavezető:
Freud Róbert
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Szakdolgozatomban a lineáris algebra különböző eszközeinek segítségével látok be bizonyos kombinatorikai problémákat. Ezen problémák kiválasztása, valamint a feladatok megoldása önálló munkám.

Elsőként azt az állítást alkalmazom, hogy egy n dimenziós térben a lineárisan független vektorok száma legfeljebb n lehet. Ezt kihasználva látom be az egytávolságú halmaz – olyan ponthalmaz, melynek bármely két pontja között azonos a távolság – pontjainak számára tett kikötést is, amely bizonyítása során a pontokat definiáló vektorok különbségeinek a lineáris függetlenségét vizsgálom. A második fejezetben a részhalmazok és páronkénti metszeteik elemszámára vonatkozó különböző kikötések mellett vizsgálom a részhalmazok maximális elemszámát, többek között a Fisher-egyenlőtlenséget és az általános Ray-Chaudhuri–Wilson tételt. Ezt a vizsgálatot az előzőhöz hasonló módszerrel végzem, ebben az esetben viszont az egyes részhalmazokhoz rendelt karakterisztikus vektorok függetlenségét alkalmazom. Utóbbi tétel bizonyításánál a vizsgált vektorokhoz rendelt függvényeket reprezentáló polinomokról látom be, hogy beletehetőek egy megfelelő dimenziós térbe.

Vannak olyan esetek, amikor az előbb említett módszer nem ad elég éles becslést, ilyen a kéttávolságú halmazok esete, illetve az „uniform" Ray-Chaudhuri–Wilson tétel. Ezekben az esetekben a vektorok számára úgy adhatunk éles becslést, ha megnézzük hány olyan vektort tudunk megadni a térben, melyekkel együtt még lineárisan függetlenek maradnak a vizsgálandó vektorok.

A harmadik fejezetben a halmazok elemszámának paritása játszik szerepet, ekkor a karakteriszikus vektorok skaláris szorzata megegyezik a hozzájuk tartozó halmazok metszetének elemszámával mod 2. Ezt alkalmazva látjuk be a Páratlanváros tételben a vektorok lineáris függetlenségét, amiből pedig az első módszer segítségével a halmazok számára kapunk becslést. Azonban a Párosváros tételnél ennél kicsit mélyebb algebrát alkalmazunk, mivel azt használjuk ki, hogy a halmazok karakterisztikus vektorai merőlegesek egymásra és önmagukra is. Ennek segítségével a vektorok által generált altér és ennek merőleges alterének a dimenzióját vizsgálva jutunk el a megoldáshoz. Ezt követően a belátott tételeket és a Fisher-egyenlőtlenséget alkalmazom feladatok megoldásához.

Végül egy gráfelméleti problémát vizsgálok meg a gráfhoz tartozó szomszédsági mátrix spektrumának a kiszámításával. Az ehhez a témakörhöz kapcsolódó feladatokban a spektrumok kiszámításának menetére mutatok példát, illetve egy illeszkedési mátrixnak a saját transzponáltjával vett szorzatának a mátrixhoz tartozó gráfra vett jelentését fejtem ki.

2. Segédállítások

Először is belátunk két lemmát, melyek a későbbiekben segítségünkre lesznek.

2.0.1 Lemma: Ha az $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényekre

$$f_i(a_j) \begin{cases} \neq 0 & \text{ha } j = i, \\ = 0 & \text{ha } j \neq i, \end{cases} \qquad \text{ahol } i, j = 1, \ldots, m \text{ és } a_j \in \Omega,$$

akkor az $f_1, \ldots, f_m$ leképezések lineárisan függetlenek $\mathbb{R}^\Omega$-ban.

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg az f_i leképezések lineáris kombinációját:

$$\mu_1 f_1(x) + \mu_2 f_2(x) + \cdots + \mu_m f_m(x) = 0.$$

Behelyettesítve a_1-et az egyenletbe az egyetlen nemnulla tag az első lesz, vagyis a következőt kapjuk:

$$\mu_1 f_1(a_1) = 0.$$

Mivel $f_1(a_1)$-ről tudjuk, hogy nemnulla értéket vesz fel, ezért μ_1-nek egyenlőnek kell lennie nullával.
Bármely a_i-t behelyettesítve az egyenletbe, hasonlóképpen megkapjuk, hogy $\mu_i = 0$. Vagyis a lineáris kombináció csak a triviális módon lehet nulla, ami azt jelenti, hogy az $f_1, \ldots, f_m$ leképezések lineárisan függetlenek. □

Időnként az alábbi erősebb állításra van szükségünk.

2.0.2 Lemma: Ha az $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényekre

$$f_i(a_j) \begin{cases} \neq 0 & \text{ha } j = i, \\ = 0 & \text{ha } j < i, \end{cases} \qquad \text{ahol } i, j = 1, \ldots, m \text{ és } a_j \in \Omega,$$

akkor az $f_1, \ldots, f_m$ leképezések lineárisan függetlenek $\mathbb{R}^\Omega$-ban.

Bizonyítás: Ennek a lemmának a bizonyításánal hasonlóképpen járunk el, mint az előzőnél, azonban itt már nem minden a_j behelyettesítésre tehetjük fel, hogy az egyetlen nemnulla tag a j-edik lesz, mivel az f_i $(i < j)$ leképzések a_j-n vett helyettesítési értékéről nem tudunk semmit.
Vizsgáljuk meg az f_i leképezések lineáris kombinációját:

$$\mu_1 f_1(x) + \mu_2 f_2(x) + \cdots + \mu_m f_m(x) = 0.$$

Ahhoz, hogy egyetlen tag kivételével mindegyik kinullázódjon, olyan a_j-t kell behelyettesíteni, hogy $j < i$ minden $i \neq j$-re teljesüljön. Ennek megfelelő behelyettesítési érték a_1 lesz. Ezzel a következőt kapjuk:

$$\mu_1 f_1(a_1) = 0.$$

Mivel $f_1(a_1)$-ről tudjuk, hogy nemnulla értéket vesz fel, ezért μ_1-nek egyenlőnek kell lennie nullával.
Következőként a_2-t helyettesítünk be:

$$\mu_1 f_1(a_2) + \mu_2 f_2(a_2) = 0.$$

Az első tagról azonban tudjuk, hogy nulla, mivel az előbb láttuk, hogy μ_1 szükségképpen nulla. Ily módon beláthatjuk, hogy $\mu_2 = 0$, mivel $f_2(a_2)$-ről tudjuk, hogy nem egyenlő nullával.
Ezzel a módszerrel minden μ_i-re ($i = 1, \ldots, m$) beláthatjuk, hogy nulla. Vagyis a lineáris kombináció csak a triviális módon lehet nulla, ami azt jelenti, hogy az $f_1, \ldots, f_m$ leképezések lineárisan függetlenek. $\square$

3. Egy- és két-távolságú halmazok $\mathbb{R}^n$-ben

3.1. Probléma

Ebben a fejezetben az olyan $\mathbb{R}^n$-beli pontok maximális számát vizsgáljuk, amelyek között csak egy- vagy kétféle távolság lép fel.

3.1.1 Tétel: Ha bármely két pont közti távolság megegyezik, akkor az n-dimenziós térben $n+1$ pontot tudunk megadni.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy bármely két pont közti távolság λ.
Egy $\mathbb{R}^n$-beli vektor hosszát a következőképpen értelmezzük:

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{ahol } x \in \mathbb{R}^n.$$

Két n-dimenziós vektor távolsága pedig a különbségük hossza.
Ezek alapján azok a pontok, melyeknek egy koordinátája 1, a többi pedig 0, pontosan $\sqrt{2}$ távolságra lesznek egymástól, vagyis most $\lambda = \sqrt{2}$. Ezekből a pontokból n darab van.
Ezen a_i pontokat $\mathbb{R}^n$-ben a következő egyenlettel írhatjuk le:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

Mivel ez az egyenlet egy hipersík, azaz egy $\mathbb{R}^{n-1}$-beli altér eltoltját írja le, ezért a pontok beletehetőek $\mathbb{R}^{n-1}$-be. Ebből következik, hogy egy n-dimenziós térben $n+1$ olyan pont van, amelyek közül bármely kettő távolsága megegyezik.

Most pedig belátjuk, hogy a becslés éles, vagyis $n+1$-nél több ilyen pont nem adható meg $\mathbb{R}^n$-ben.
Legyenek $a_1, \dots, a_k$ ilyen pontok és definiáljuk a következő vektorokat:

$$b_i = a_{i+1} - a_1, \qquad \text{ahol } i = 1, \dots, k-1.$$

Amennyiben a b_i vektorok lineárisan függetlenek, akkor legfeljebb n darab lehet belőlük, mivel $\mathbb{R}^n$-ben vagyunk. Ebből következik, hogy az a_i pontokból legfeljebb $n+1$ darab lehet.
Tehát csak azt kell belátni, hogy a b_i vektorok lineárisan függetlenek. Ezekre a vektorokra a hosszuk és a távolságuk miatt a következők teljesülnek:

$$b_i b_i = \|b_i\|^2 = \lambda^2; \tag{1}$$

$$\lambda^2 = \|b_i - b_j\|^2 = (b_i - b_j)(b_i - b_j) = b_i^2 - 2b_ib_j + b_j^2,$$

$$\text{vagyis } b_ib_j = \frac{1}{2}\lambda^2. \tag{2}$$

Vegyük a vektorok lineáris kombinációját:

$$\mu_1 b_1 + \cdots + \mu_k b_{k-1} = 0,$$

és szorozzuk meg b_i-vel:

$$\mu_1 b_1 b_i + \cdots + \mu_{k-1} b_{k-1} b_i = 0.$$

Ekkor az (1)-ben és (2)-ben kapott értékeket behelyettesítve átrendezéssel a következő kifejezést kapjuk:

$$-2\mu_i\lambda^2 = (\mu_1 + \cdots + \mu_{i-1} + \mu_{i+1} + \cdots + \mu_{k-1})\lambda^2.$$

Ha λ, vagyis bármely két pont közti távolság nulla, akkor csak egyetlen pontot vehetünk fel. Feltehetjük, hogy $\lambda \neq 0$, ezért leoszthatunk vele, ily módon a következőt kapjuk:

$$-2\mu_i = (\mu_1 + \cdots + \mu_{i-1} + \mu_{i+1} + \cdots + \mu_{k-1}). \tag{3}$$

Ez minden $i = 1, \ldots, k-1$-re teljesül.
Összeadva a μ_i-kre kapott kifejezéseket a következőt kapjuk:

$$-2(\mu_1 + \cdots + \mu_{k-1}) = (k-2)(\mu_1 + \cdots + \mu_{k-1}).$$

Ez azonban csak akkor teljesülhet, ha $(\mu_1 + \cdots + \mu_{k-1}) = 0$, mivel a k pozitív szám, vagyis $(k-2) \neq -2$. Ebből a következő kifejezést kapjuk a μ_i-kre:

$$-\mu_i = \mu_1 + \cdots + \mu_{i-1} + \mu_{i+1} + \cdots + \mu_{k-1}.$$

Ez azonban a (3)-as kifejezéssel együtt csak akkor teljesülhet, ha $\forall i$ esetén $\mu_i = 0$. Amiből következik, hogy a b_i vektorok lineárisan függetlenek. □

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha két pont közti távolság kétféle lehet.
Legyenek $a_1, \ldots, a_m$ azon $\mathbb{R}^n$-ben felvehető pontok, amelyek közül bármely kettő különbsége λ_1 vagy λ_2. Ekkor elég nagy n-re a maximálisan felvehető pontok száma körülbelül $\frac{n^2}{2}$.

3.1.2 Tétel: Azon pontok maximális száma ($\max m$) $\mathbb{R}^n$-ben, melyek közül bármely kettő távolsága λ_1 vagy λ_2, a következő korlátokkal becsülhető:

$$\frac{n(n+1)}{2} \leq \max m \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2}.$$

Bizonyítás: **Alsó becslés:** Nézzük azokat a v_i vektorokat, melyeknek pontosan két elemük 1, a többi nulla. Ezekre a következő igaz:

$$\|v_i\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (v_{ik})^2 = 2.$$

Ezen vektorok számossága $\binom{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$. Ezenkívül tudjuk azt, hogy ezek a vektorok meghatároznak egy-egy $\mathbb{R}^n$-beli a_i pontot, amelyek közül bármely kettő távolsága 2 vagy $\sqrt{2}$, hiszen

$$\|a_i - a_j\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} - a_{jk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{ha } \exists k\colon a_{ik} = a_{jk} = 1, \\ 2 & \text{különben}, \end{cases}$$

$$\text{ahol } i, j = 1, \ldots, m \text{ és } k = 1, \ldots, n.$$

Ezek a pontok a következő egyenlettel írhatóak le $\mathbb{R}^n$-ben:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 2.$$

Ebből pedig az egy-távolságú esethez hasonlóan kijön, hogy az a_i pontok benne vannak egy $\mathbb{R}^{n-1}$-beli altér eltoltjában, ezért tekinthetjük őket úgy is, mint $\mathbb{R}^{n-1}$ részhalmazát. Ebből adódik, hogy $\mathbb{R}^n$-ben $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ pont adható meg.

Felső becslés: Legyenek $a_1, \ldots, a_m$ $\mathbb{R}^n$-beli pontok, melyek távolsága λ_1 vagy λ_2.
Legyen $G(x, y) : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$:

$$G(x, y) = \left(\|x - y\|^2 - \lambda_1^2\right)\left(\|x - y\|^2 - \lambda_2^2\right).$$

Ekkor behelyettesítve az a_i, a_j pontokat, a következő teljesül:

$$G(a_i, a_j) = \begin{cases} (\lambda_1 \lambda_2)^2 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{ha } i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, \ldots, m.$$

Ezen G függvények segítségével értelmezhetjük az a_i pontokhoz rendelt következő n-változós $\mathbb{R}$-beli polinomokat: $g_i(x) = G(x, a_i)$.
A 2.0.1 lemmával a_j helyettesítési értékre megkapjuk, hogy ezek a g_i polinomok lineárisan függetlenek. Azt kell még belátnunk, hogy benne vannak egy $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ dimenziós térben. Ha ez teljesül, akkor a függetlenségük miatt legfeljebb annyi ilyen polinom (illetve hozzátartozó a_i pont)

lehet, amennyi a tér dimenziója, vagyis igazoltuk a felső korlátot.
A g_i polinomokat átírjuk a következő alakba:

$$g_i(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_{ik})^2 - \lambda_1^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_{ik})^2 - \lambda_2^2\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 - 2a_{ik}x_k + a_{ik}^2\right) - \lambda_1^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 - 2a_{ik}x_k + a_{ik}^2\right) - \lambda_2^2\right).$$

Ebből látszik, hogy a g_i polinomot a következő polinomok lineáris kombinációjával írhatjuk fel: $\{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2, \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) x_j, x_i x_j, x_i, 1\}$, ahol $i, j = 1, \ldots, n$. Ezek elemszáma $1 + n + \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$. Tehát a g_i polinomok valóban benne vannak az ezek által generált legfeljebb $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ dimenziós térben. $\square$

4. Ray-Chaudhuri–Wilson tételek

4.1. Probléma

4.1.1 Definíció: **Halmazrendszer**nek, vagy **hipergráf**nak nevezzük egy alaphalmaz részhalmazainak a családját. A halmazrendszer elemei az alaphalmaz részhalmazai.
Mivel általában nem lényeges, hogy pontosan mik az alaphalmaz elemei, ezért egy n elemű halmazt $[n]$-nel jelölünk és ennek az összes részhalmazainak a családját $2^{[n]}$-nel.

A következő tételekben azt vizsgáljuk, hogy a halmazok és páronkénti metszetek elemszámaira tett korlátozások hogyan befolyásolják a hipergráf elemszámát.

Először azt vizsgáljuk, amikor bármely két részhalmaznak pontosan $\lambda > 0$ közös eleme van.

4.1.2 Példa: Legyen $\{A_1, \ldots, A_m\} = \mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, ahol $A_i \subseteq [n]$ és $\forall i \neq j$-re $|A_i \cap A_j| = 1$. Ekkor legyen $A_n = \{n\}$ és $i < n$-re $A_i = \{i, n\}$. Ekkor bármely két részhalmaz egyetlen közös eleme az n.
Tehát ezzel a konstrukcióval létrehoztunk egy pontosan n elemű halmazrendszert.
A következő tételben belátjuk, hogy ennél több részhalmazt nem tudunk létrehozni a halmazrendszerben.

4.1.3 Tétel (Fisher–egyenlőtlenség): Ha egy halmazrendszerben bármely két elem metszetének elemszáma egy adott $\lambda > 0$ szám, akkor a halmazrendszer elemszáma nem nagyobb, mint az alaphalmaz elemszáma.

Bizonyítás: A bizonyítást két esetre bonthatjuk:

1) Létezik olyan A részhalmaz, melynek elemszáma pontosan λ. Ekkor a többi részhalmaz elemszáma legalább λ és $\forall j, l$ esetén $A_j \cap A_l = A$.
Ekkor a részhalmazok maximális elemszáma $n - \lambda + 1$, ami legfeljebb n lehet, mivel feltettük, hogy $\lambda \geq 1$.

2)Legyen $\{A_1, \ldots, A_m\} = \mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$.
Minden A_i részhalmaz elemszáma nagyobb λ-nál, azaz $|A_i| = \lambda + a_i$, ahol $a_i > 0$ egész szám.

Definiáljuk minden A_i részhalmazon a v_i karakterisztikus vektort:

$$v_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ha } k \in A_i, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \qquad \text{ahol } k = 1, \ldots, n.$$

A karakterisztikus vektorok skaláris szorzata a következőképpen néz ki:

$$v_i v_j = \sum_{k=1}^{n} v_{ik} v_{jk} = |A_i \cap A_j| \tag{4}$$

Ennek alapján:

$$v_i v_j = \begin{cases} \lambda & \text{ha } i \neq j, \\ \lambda + a_i & \text{ha } i = j, \end{cases} \qquad \text{ahol } i, j = 1, \ldots, m.$$

Ha a $v_1, \ldots, v_m$ karakterisztikus vektorok lineárisan függetlenek, abból következik, hogy $m \leq n$.
A függetlenség belátásához legyen

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = 0.$$

Megmutatjuk, hogy $\forall i \; \alpha_i = 0$. Szorozzuk be a lineáris kombinációt a v_j vektorral:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i v_j = 0.$$

Ez a karakterisztikus vektorok szorzatának ismeretében a következőképpen néz ki:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda + \alpha_j a_j = 0.$$

Átrendezéssel ezt az egyenletet kapjuk α_j értékére:

$$\alpha_j = -\frac{\lambda}{a_j} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i.$$

Először tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$. Ha ez teljesül, akkor $\forall j = 1, \ldots, m$-re $\alpha_j = 0$, vagyis a lineáris kombináció csak a triviális esetben nulla, és a vektorok lineárisan függetlenek.
Nézzük meg azt az esetet is, amikor $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = c \neq 0$. Az α_j-re kapott egyenlet mindkét oldalát j-re összegezve a következő kifejezést kapjuk:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \sum_{j=1}^{m} \left(-\frac{\lambda}{a_j} \right) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i.$$

Azonban feltettük, hogy $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = c$, illetve tudjuk, hogy $\left(-\frac{\lambda}{a_j}\right) < 0$, mivel λ és a_j is pozitív szám, eszerint a kifejezés a következőképpen néz ki:

$$c = (\text{valami negatív}) \cdot c.$$

Ami ellentmondás, mivel feltettük, hogy c, vagyis $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ nem egyenlő nullával.
Így beláttuk, hogy a vektorok lineárisan függetlenek, amiből következik, hogy legfeljebb n darab részhalmaza lehet a halmazrendszernek. □

Mi a helyzet, ha a metszetek elemszáma többféle is lehet? Nyilvánvaló, hogy több halmazt tudunk létrehozni, hiszen kevesebb a megszorítás.

4.1.4 Példa: Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} = \{A_1, \dots A_m\}$, mint az előbbi példában. Legyen $L = \{l_1, \dots l_s\}$ nemnegatív n-nél kisebb egészek halmaza. Ezenkívül minden $|A_i \cap A_j| \in L$, ahol $i \neq j$.
Legyenek l_i-k a következőek: $l_i = i$ (minden $i < s$-re), és $l_s = 0$.
Vegyük bele $\mathcal{F}$-be az összes részhalmazt, ami legfeljebb s elemszámú. Ezek közül bármely kettőre teljesül, hogy a metszetük legfeljebb $s - 1$ elemszámú, mivel minden halmaz különböző, így a metszetek maximális elemszáma a legnagyobb halmaz elemszáma-1. Azonban az $s + 1$ elemszámú halmazokat már nem vehetjük bele a halmazrendszerbe, mert minden ilyen halmazhoz találunk olyan s elemszámú halmazt, melyet teljes egészében tartalmaz, vagyis a metszetük elemszáma s, ami már nem megengedett.
Tehát $\mathcal{F}$ elemei a legfeljebb s elemű részhalmazok, amelyek száma $\sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}$.
A következő tételben belátjuk, hogy ennél több eleme valóban nem lehet a halmazrendszernek, vagyis a fenti konstrukció a lehető legnagyobb elemszámú $\mathcal{F}$-et eredményezi.

4.1.5 Tétel (Általános Ray-Chaudhuri–Wilson): Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy halmazrendszer. Legyen $L = \{l_1, \dots, l_s\}$ nemnegatív n-nél kisebb egészek halmaza.
Ha $\mathcal{F}$ bármely két különböző eleme metszetének elemszáma L-beli, akkor $\mathcal{F}$ elemszámára a következő állítás igaz:

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}.$$

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$. Feltehetjük, hogy

$$|A_1| \leq \dots \leq |A_m|. \tag{5}$$

Legyen v_i az A_i karakterisztikus vektora, azaz $v_i \in \Omega = \{0,1\}^n$.
Ekkor $v_i v_j = |A_i \cap A_j|$.
Megadunk m lineárisan független polinomot egy $\sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}$ dimenziós térben. Ebből következik, hogy $m \leq \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}$.

Tekintsük először a következő függvényeket:

$$f_i(x) = \prod_{k=1}^{s} (v_i x - l_k) \qquad (x \in \Omega,\ i = 1, \ldots, m).$$

A függetlenség belátásához a 2.0.1 vagy a 2.0.2 lemmát szeretnénk alkalmazni.
Ekkor x helyére valamely A_j halmaz v_j karakterisztikus vektorát helyettesítve a következőt kapjuk:

$$f_i(v_j) = \prod_{k=1}^{s} (v_i v_j - l_k).$$

A $v_i v_j$-ről tudjuk, hogy az A_i és A_j halmazok metszetének elemszáma, tehát ha $j \neq i$, akkor a függvény értéke nulla lesz, mivel van olyan l_k, ami megegyezik a metszetük elemszámával, vagyis a szorzatban lesz nulla tényező.
Nézzük meg a $j = i$ esetet. Ekkor a $v_i v_j$ szorzat az A_i elemszámát adja meg. Probléma akkor lehet, ha van olyan metszetméret, amely megegyezik a halmaz elemszámával, mert ekkor a szorzat értéke nulla lesz, és így a 2.0.1 lemma nem alkalmazható.

A függvényeket a következőképpen tudjuk kijavítani:

$$F_i(x) = \prod_{k,\ l_k < |A_i|} (v_i x - l_k) \qquad (x \in \Omega,\ i = 1, \ldots, m).$$

Ezekre már nem fordul elő, hogy $F_i(v_i) = 0$, mivel csak azon metszetméretekre szorozzuk össze a tényezőket, melyek szigorúan kisebbek, mint A_i elemszáma. Azonban $F_i(v_j) \neq 0$ előfordul $i \neq j$-re is. Ezért a 2.0.2 lemmát próbáljuk meg alkalmazni.
Az $F_i(v_j)$ függvények kifejtése (4) és (5) alapján:

$$F_i(v_j) = \prod_{k, l_k < |A_i|} (v_i v_j - l_k) = \prod_{k, l_k < |A_i|} \left(|A_i \cap A_j| - l_k\right) \begin{cases} \neq 0 & \text{ha } j = i, \\ = 0 & \text{ha } j < i. \end{cases}$$

Ezek a függvények a 2.0.2 lemma alapján lineárisan függetlenek. Továbbá

$$F_i(x) = ((v_{i1} x_1 + \cdots + v_{in} x_n) - l_1) \ldots ((v_{i1} x_1 + \cdots + v_{in} x_n) - l_k).$$

Mivel a szorzatban szereplő $x \in \{0,1\}^n$, ezért $x_i = x_i^2$, ebből következik, hogy mindegyik F_i függvényt reprezentálhatjuk egy legfeljebb s-fokú n-változós multilineáris polinommal, melyek Ω-n az F_i függvényekkel azonos értéket vesznek fel, ily módon ezek is lineárisan függetlenek.
Ezen polinomok vektorterének egy bázisa az

$$\{1, x_1, x_2, \ldots x_n, x_1x_2, \ldots, x_1x_n, \ldots, x_1x_2\ldots x_s, \ldots\}.$$

Tehát az F_i függvényeket reprezentáló lineárisan független polinomok benne vannak egy $\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}$ dimenziós térben, vagyis a számuk legfeljebb $\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}$. □

Tegyük fel, hogy a halmazrendszerünkre még egy korlátozást teszünk, mégpedig azt, hogy minden részhalmaz elemszáma azonos. Ekkor mi állítható a halmazrendszer maximális elemszámáról?

4.1.6 Példa: Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots A_m\}$, mint korábban. Legyen $L = \{l_1, \ldots l_s\}$ nemnegatív n-nél kisebb egészek halmaza, minden $|A_i \cap A_j| \in L$, ahol $i \neq j$. Ezek mellett most az is feltesszük, hogy $\forall i\ |A_i| = k$.
A metszetek elemszámáról feltesszük, hogy a következő lehet: $\{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$.
Mivel a metszet elemszáma legfeljebb a halmazok elemszámával lehet egyenlő, ezért $s - 1 \leq k$, azonban a részhalmazok különbségéből az is adódik, hogy $s - 1 < k$.
A példánkban most legyen $k = s$. Ekkor véve a pontosan s elemű halmazokat, ezek metszete legfeljebb $s - 1$ elemű, ami még megengedett. Ezekből pontosan $\binom{n}{s}$ darab van, mivel feltettük, hogy $k = s$.

A most következő tétellel belátjuk, hogy ez az eredmény éles, vagyis a halmazrendszer másféle konstrukciójával sem érhető el nagyobb elemszám.

4.1.7 Tétel („Uniform" Ray-Chaudhuri–Wilson): Legyen $2^{[n]}$ egy olyan halmazrendszer, amelynek minden eleme pontosan k elemű. Legyen $L = \{l_1, \ldots, l_s\}$ nemnegatív n-nél kisebb egészek halmaza.
Ha $\mathcal{F}$ bármely két különböző eleme metszetének elemszáma L-beli, akkor

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{s}.$$

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, ahol $A_i \subseteq [n]$ és $\forall i\ |A_i| = k$.
Jelölje M az előző bizonyításban már definiált, legfeljebb s fokú multilineáris n-változós polinomok vektorterét, melyről beláttuk, hogy $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{s}$

dimenziós.
Legyen v_i az A_i karakterisztikus vektora, mint korábban, vagyis $v_i \in \Omega = \{0,1\}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Ekkor $v_i v_j = |A_i \cap A_j|$.
A korábban már definiált

$$f_i(x) = \prod_{b=1}^{s}(v_i x - l_b) \qquad (x \in \Omega,\ i = 1, \dots m)$$

függvényeket ebben az esetben nem kell javítani, mivel az elemszámokra tett korlát miatt nem fordulhat elő, hogy egy metszet elemszáma egyenlő legyen valamelyik másik halmaz elemszámával.
Ezért a következő teljesül rá:

$$f_i(v_j) \begin{cases} \neq 0 & \text{ha } j = i, \\ = 0 & \text{ha } j \neq i. \end{cases}$$

Ezek a függvények az 2.0.1 lemma miatt lineárisan függetlenek, és benne vannak az előző bizonyításban definiált M vektortérben. Ahhoz, hogy belássuk, az elemszámuk $\leq \binom{n}{s}$, találnunk kell hozzájuk $\sum_{j=0}^{s-1}\binom{n}{j}$ darab függvényt, melyekkel együttesen is lineárisan függetlenek az f_i függvények.

Ehhez tekintsük azokat az y_I-vel jelölt polinomokat, melyek a következőképpen néznek ki:

$$y_I = \prod_{i \in I} x_i, \qquad \text{ahol } I \subseteq [n] \text{ és } \forall i\ x_i \in \Omega.$$

Ezek egytagú multilineáris polinomok, melyek főegyütthatója 1.
A viselkedésüket egy egyszerű példán szemléltethetjük:
Legyen $I = \{1,2,3\}$. Ekkor $v_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \{0,1\}^n$ és $y_I = x_1 x_2 x_3$. Vagyis $y_I(v_i) = 1$.
Azonban a $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ vektort behelyettesítve $y_I(w) = 0$, mivel az $x_1 x_2 x_3$ szorzat első tényezője a belyettesítéssel 0 lesz.
Innen látszik, hogy az y_I polinomokra az alábbi teljesül:

$$y_I(v_J) = \begin{cases} 1 & \text{ha } I \subseteq J, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \tag{6}$$

ahol v_J a $J \subseteq [n]$ karakterisztikus vektora.

Belátjuk, hogy az f_i és az $y_I\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - k\right)$ függvények együttesen is lineárisan függetlenek, ahol $I \subseteq [n]$ és $|I| \leq s-1$, mert ha ez teljesül, akkor van $m + \sum_{j=0}^{s-1} \binom{n}{j}$ darab lineáris független legfeljebb s-fokú multilineáris polinom, amelyek benne vannak az M vektortérben, amiről tudjuk, hogy $\sum_{i=0}^{s} \binom{n}{s}$ dimenziós, vagyis az f_i függvények maximális száma $m \leq \binom{n}{s}$, és pont ezt szerettük volna.

A lineáris függetlenség bizonyítása. Legyen:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i + \sum_{|I| \leq s-1} \mu_I y_I \left(\sum_{j=1}^{n} x_j - k \right) = 0, \qquad \lambda_i, \mu_I \in \mathbb{R}.$$

Ha az egyenletbe behelyettesítjük bármely v_i vektort, akkor az egyetlen nemnulla tag $\lambda_i f_i(v_i)$ lesz, mivel a második összeg minden tagja nulla lesz, ugyanis bármely vektorra $\sum_{j=1}^{n} v_j - k = 0$, mivel $|A_j| = k$ és $\sum_{j=1}^{n} v_j = |A_j|$, és az első összegből, pedig csak az i-edik tag nem lesz nulla. Viszont $f_i(v_i) \neq 0$, vagyis $\lambda_i = 0$.

Tehát azt kell még belátni, hogy a μ_I együtthatók értéke is nulla. Ezt az előzőhöz hasonlóan láthatjuk be:

$$\sum_{|I| \leq s-1} \mu_I y_I \left(\sum_{j=1}^{n} x_j - k \right) = 0.$$

Legyen $h(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j - k$. Belátjuk, hogy $h(v_I) \neq 0$ minden $|I| \leq (s-1)$-re.
Ez azért teljesül, mert $\forall i$ $|A_i| = k$, ami azt jelenti, hogy ezek metszetének az elemszáma legfeljebb $k-1$ lehet. Viszont tudjuk, hogy pontosan s-féle elemszámú metszet lehetséges, ami „legrosszabb” esetben $0, 1, \ldots, s-1$ ebből következik, hogy $s \leq k$.
Vagyis $\sum_{j=1}^{n} v_{Ij} < k$ minden $|I| \leq (s-1)$ esetén.
Az $[n]$ részhalmazait sorba tudjuk rendezni az elemszámaik nagysága szerint: $J < I$, ha $|J| < |I|$, az azonos elemszámúakat pedig tetszőlegesen rendezhetjük. Ekkor (6) miatt $J < I$ esetén $y_I(v_J) = 0$ és $y_I(v_I) = 1$, vagyis

$$y_I(v_J)h(v_J) \begin{cases} \neq 0 & \text{ha } J = I, \\ = 0 & \text{ha } J < I, \end{cases} \qquad \forall I\ J \subseteq [n];\ |I|, |J| \leq s-1.$$

Erre alkalmazva a 2.0.2 lemmát, megkapjuk, hogy ezek valóban lineárisan függetlenek. A lineáris függetlenségükből pedig a korábban leírtak szerint következik a tétel. □

Nézzük meg mi történik, ha feltesszük, hogy a halmazok elemszáma r-féle lehet. A korábban látott tételekből arra következtethetünk, hogy az elemszám $\binom{n}{s}$ és $\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}$ között lesz valahol. Hiszen az előbbi esetben r nagysága minimális, utóbbiban pedig maximális.

4.1.8 Példa: Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} = \{A_1, \dots A_m\}$, mint korábban. Legyen $L = \{l_1, \dots l_s\}$ és $K = \{k_1, \dots k_r\}$ nemnegatív egészek halmaza, valamint L elemei n-nél kisebbek, K elemei pedig $s-r$-nél nagyobbak. Ezenkívül minden $|A_i \cap A_j| \in L$, ahol $i \neq j$, és most azt is feltesszük, hogy $\forall i\ |A_i| \in K$.
Vegyük az $s, s-1, \dots, s-r+1$ elemszámú halmazokat, ezeknek metszete $0, 1, \dots, s-1$. Ekkor k_i-k értéke rendre $s-i+1$ ($i = 1, \dots, r$), emiatt ezekből a halmazokból pontosan $\binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \dots + \binom{n}{s-r+1}$ darab van.

Most, hogy megadtunk egy ilyen konstrukciót, azt is be fogjuk látni, hogy ennél több részhalmaza semmiképpen sem lehet a halmazrendszernek.

4.1.9 Tétel: Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer. Legyen $L = \{l_1, \dots, l_s\}$ és $K = \{k_1, \dots k_r\}$ nemnegatív egészek halmaza, valamint $\forall i\ l_i < n$ és $\forall j\ k_j > s - r$.
Ha $\mathcal{F}$ bármely két különböző eleme metszetének elemszáma L-beli és bármely elemének elemszáma K-beli, akkor:

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \dots + \binom{n}{s-r+1}.$$

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$, ahol $A_i \subseteq [n]$ és $\forall i\ |A_i| \in K$.
A tétel bizonyítása majdnem teljesen olyan, mint az 4.1.7 tétel bizonyítása, azzal a különbséggel, hogy a $\sum_{j=0}^{s}\binom{n}{j}$ dimenziós M vektortéren most $\binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \dots + \binom{n}{s-r+1}$ darab lineárisan független függvényt szeretnénk csinálni, és ezekhez keresni $\sum_{j=0}^{s-r}\binom{n}{j}$ polinomot, amelyekkel kiegészítve még mindig függetlenek maradnak.

Az f_i függvényekkel most sincs probléma. Viszont azt szeretnénk, hogy ebben az esetben $\binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \dots + \binom{n}{s-r+1}$ darab legyen belőlük.

Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik az y_I és a h:
Láthatjuk, hogy az y_I-re most is teljesül (6).
Mivel a halmazok elemszáma nem mind ugyanaz, ezért $h(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j - k$ helyett a következőt kell venni:

$$h(x) = \prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - k_i\right).$$

Ekkor $h(v_I) \neq 0$ minden $|I| \leq (s-r)$-re, mivel $\forall i\, k_i > s-r$ és $\sum_{j=1}^{n} v_I = |I|$, amire feltettük, hogy $\leq s-r$.

Ezután már ugyanúgy láthatjuk be az f_i és az $y_I h$ függvények együttes lineáris függetlenségét, mint a 4.1.7 tétel bizonyításában. Ezenfelül a függvények mindegyikét helyettesíthetjük egy legfeljebb s-fokú multilineáris polinommal.
Ez esetben viszont $m + \sum_{j=0}^{s-r} \binom{n}{j}$ darab lineárisan független polinomunk van a $\sum_{j=0}^{s} \binom{n}{j}$ dimenziós térben. Vagyis m legfeljebb $\binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \cdots + \binom{n}{s-r+1}$ lehet. Ez pedig megegyezik azzal, amit a tétel állít. $\square$

5. Páratlan- és párosváros

5.1. Probléma

Ebben a fejezetben a halmazok és a páronkénti metszeteinek elemszámára különböző paritási feltételeket teszünk.

5.1.1 Tétel (Páratlanváros): Legyen X egy n elemű halmaz, $H_1, \dots, H_m$ különböző részhalmazok X-ben, melyekre az alábbi feltételek teljesülnek:
- minden halmaz elemszáma páratlan;
- bármely két különböző halmaz metszete páros.
Ekkor a részhalmazok maximális száma n.

Bizonyítás: Vegyük X-ben az egyelemű halmazokat. Ezekből pontosan n darab van, és teljesülnek rájuk az elemszámokra vonatkozó feltételek is. Tehát X-ben tényleg van n darab ilyen részhalmaz.

Azt kell még belátnunk, hogy ennél több halmazt valóban nem tudunk létrehozni.
Legyen H_i $(i = 1, \dots, m)$ az X részhalmaza. Ezen halmazok karakterisztikus vektora alatt a következő $\mathbb{F}_2^n$-beli h_i vektorokat értjük:

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in H_i, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \qquad \text{ahol } j = 1, \dots, n.$$

A karakterisztikus vektorok skaláris szorzatára az alábbi teljesül:

$$h_i h_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } |H_i \cap H_j| \text{ páratlan,} \\ 0 & \text{ha } |H_i \cap H_j| \text{ páros,} \end{cases} \qquad \text{ahol } i, j = 1, \dots, m. \tag{7}$$

Azt szeretnénk belátni, hogy ezek a h_i karakterisztikus vektorok lineárisan függetlenek, mivel $\mathbb{F}_2^n$-ben legfeljebb n darab lineárisan független vektor adható meg, amiből következik az állítás.
Vizsgáljuk meg a vektorok lineáris kombinációját:

$$\lambda_1 h_1 + \dots \lambda_m h_m = 0.$$

Megszorozva a lineáris kombinációt h_j-vel a következő összefüggést kapjuk:

$$\lambda_1 h_1 h_j + \cdots + \lambda_j h_j h_j + \cdots + \lambda_m h_m h_j = 0.$$

Azonban tudjuk, hogy $h_j h_j \neq 0$, amiből következik, hogy $\lambda_j = 0$. Ugyanakkor ez bármely $j = 1, \dots, m$ esetén teljesül. Ebből következik, hogy a karakterisztikus vektorok valóban lineárisan függetlenek. $\square$

5.1.2 Tétel (Párosváros): Legyen X egy n elemű halmaz, $H_1, \ldots, H_m$ különböző részhalmazok X-ben, melyekre az alábbi feltételek teljesülnek:
- minden halmaz elemszáma páros
- bármely két különböző halmaz metszete is páros.

Ekkor a részhalmazok maximális elemszáma $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Bizonyítás: Véve X-ben a diszjunkt elempárokat, és az elempárokból képezhető összes halmazt $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ részhalmazt kapunk, amelyekre teljesülnek a tétel feltételei.

Most azt kell belátni, hogy ennél több halmaz nem is adható meg.
A 5.1.1 tétel bizonyításában definiált h_i karakterisztikus vektorokat használjuk ennél a bizonyításnál is.
Két vektor merőleges, ha a skaláris szorzatuk nulla, vagyis a h_i vektorok merőlegesek egymásra és önmagukra is, hiszen $h_i h_j = |H_i \cap H_j| \bmod 2$.
Legyen $V = \{x | x \in \mathbb{F}_2^n\}$ és legyen U a h_i vektorok által generált altér. U-ban bármely két vektor merőleges egymásra, mivel $(h_i + h_j)(h_i + h_j) = h_i h_i + 2(h_i h_j) + h_j h_j = 0$ teljesül (7) miatt. Vagyis U része $U^\perp = \{x \in V | u \in U \text{ esetén } ux = 0\}$ V-beli altérnek, emiatt $\dim U \leq \dim U^\perp$. Viszont tudjuk, hogy $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$.
A dimenziókra vonatkozó összefüggésekből következik, hogy $\dim U \leq \left\lfloor \frac{dimV}{2} \right\rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Azaz $m \leq |U| = 2^{\dim U} \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

□

5.2. Feladatok

5.2.1 Egy városban a következő egyesületalapítási szabályok érvényesek:
(I)kevesebb egyesület van, mint ahány lakos,
(II)bármely két lakos ugyanannyi (legalább 1 darab) egyesületnek közös tagja,
(III)minden egyesületnek legalább két tagja van, és két egyesületnek nem lehet teljesen azonos a tagsága.
Hány egyesület működik a városban?

Megoldás: Legyenek $H_1, \ldots, H_n$ halmazok az egyesületek és a hozzájuk tartozó karakterisztikus vektorok $h_1, \ldots, h_n$, ahol

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } j \in H_i, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezekből a h_i sorvektorokból egy $(n \times k)$-as mátrixot képezhetünk, melyek oszlopai azt írják le, hogy a j-edik ember melyik egyesületeknek a tagja. Ezeket az oszlopokat jelöljük $v_1, \ldots, v_k$-val, a hozzájuk tartozó halmazokat pedig $V_1, \ldots, V_k$-val.
A h_i vektorok függetlensége helyett, most a v_i vektorok függetlenségét vizsgáljuk, mivel ismerjük a v_i vektorok hosszát és a skalárszorzatukat is:

$$v_i v_j = |V_i \cap V_j| = \lambda \qquad (i \neq j) \qquad \text{(II) feltétel miatt,} \tag{8}$$

$$\|v_i\|^2 \geq \lambda \qquad \text{(8) miatt.} \tag{9}$$

A v_i vektorok lineáris függetlenségéhez nézzük a lineáris kombinációjukat: $\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$=0. Vegyük ennek a négyzetét, ekkor ugyanis megjelenik a szorzatban $\|v_i\|$ és a $v_i v_j$ skalárszorzat is:

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i \right)^2 = \left(\sum_{i \neq j} \mu_i \mu_j v_i v_j \right) + \sum_{i=1}^{k} (\mu_i v_i)^2 .$$

Átrendezéssel és (8) és (9) felhasználásával a következőt kapjuk:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i \right)^2 \lambda + \sum_{i=1}^{k} \mu_i^2 \left(|V_i| - \lambda \right) .$$

Mivel $\lambda > 0$ a (II) feltétel alapján, és (9) miatt az egyenletben minden tag nem negatív, vagyis csak úgy lehet az összeg nulla, ha a tagok is nullák.
Azonban az (I) feltétel miatt $n < k$, valamint a h_i és egyben v_i vektorokból álló mátrix oszlop- és sorrangja megegyezik, ezért a v_i vektorok lineárisan összefüggőek. Tehát a lineáris kombináció nem csak triviális módon lesz nulla, ami azt jelenti, hogy $\exists i$, amire $|V_i| = \lambda$, ezt jelölje V_l.
A (II) feltétel miatt $\forall i \neq j$ esetén $|V_i \cap V_j| = \lambda$, ezért amely egyesületnek az l-edik ember tagja, annak az összes többi is. Azonban ez csak $\lambda = 1$ esetén lehetséges, mivel a (III) feltétel miatt minden egyesület különböző. Mivel l pontosan egy egyesületnek a tagja, ennek pedig minden ember a tagja, ezért nem létezhet rajta kívül olyan egyesület, aminek több ember is a tagja. Azonban a (III) feltétel miatt minden egyesületnek legalább két tagja van, ebből következik, hogy pontosan egy egyesület alapítható a városban, és ennek minden lakos a tagja.

5.2.2 A k lakosú Páratlanvárosban n egyesület működik. Igaz-e, hogy ha az egyesületek száma nem maximális (vagyis $n < k$), akkor a rendszer bővíthető, azaz a meglevők mellé további egyesület is alapítható?

Megoldás: Nem igaz, mivel vannak olyan esetek, amikor nem alapítható meg új egyesület.
Ellenpéldaként vegyünk egy $k - n + 1$ elemű részhalmazt (itt feltesszük, hogy $k - n + 1$ páratlan szám, hogy teljesüljön a Páratlanváros tétel feltétele), H-t, és azokat az egyelemű részhalmazokat (H_j, ahol $j = 1, \dots, n - 1$), melyekre $H_j \cap H = \emptyset$. Ekkor pontosan n darab részhalmazunk van, melyekre teljesülnek a tétel feltételei.
Amennyiben új H_k részhalmazt szeretnénk létrehozni azt a következőképpen tehetjük meg:
(1) H_k-nak van közös eleme H-val: Ekkor a két halmaznak pontosan páros sok közös eleme van a tétel 2. feltétele szerint. Azonban a tétel 1. feltétele miatt H_k-nak létezik H-tól legalább egy különböző eleme (páratlan sok különböző eleme lehet, hogy az elemszáma páratlan legyen). Azonban mivel az eredeti halmaz minden H-tól különböző eleme az egyelemű halmazok valamelyikének eleme, ezért nem tudjuk az új H_k halmazt megkonstruálni. Mivel ha hozzáveszünk még egy elemet, akkor valamelyik egyelemű halmazzal páratlan sok közös eleme lesz, ami miatt a Páratlanvásor tétel 2. feltétele nem teljesül.
(2) H_k-nak nincs közös eleme H-val: Ez esetben rögtön az előző eset végére ugrunk, amikor is nem tudunk páratlan sok olyan elemet kiválasztani H_k-ba, amely ne lenne tagja valamelyik egyelemű halmaznak. Ezeket viszont nem választhatjuk, mivel akkor H_k-nak és legalább az egyik egyelemű halmaznak páratlan sok közös eleme lenne.
Tehát nem minden esetben igaz, hogy egy Páratlanvárosban a meglévő egyesületek mellé új alapítható, akkor sem, ha az egyesületek száma nem maximális.

6. Szép gráfok

Ebben a fejezetben egy igazán szép gráfelméleti tételt fogok bemutatni. Ehhez először is még itt, a fejezet elején kikötném, hogy a gráfon minden alkalommal hurokél és többszörös él nélküli véges gráfot értünk.

6.1. Alapfogalmak

6.1.1 Definíció: Egy csúcs **foka** a csúcsból kiinduló élek száma.

6.1.2 Definíció: Egy gráf **reguláris**, ha minden csúcs foka egyenlő.

6.1.3 Definíció: Egy $\mathcal{G}(V,E)$ gráf ($|V| = n,\ |E| = m$) **szomszédsági (adjacencia) mátrix**a az az $n \times n$-es a mátrix, melyben

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha létezik } e(i,j) \text{ él,} \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \qquad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

6.1.4 Definíció: Egy gráf **spektrum**a a szomszédsági mátrix sajátértékeinek halmaza.

6.1.5 Definíció: Egy $\mathcal{G}(V,E)$ gráf ($|V| = n,\ |E| = m$) **illeszkedési (incidencia) mátrix**a az az $n \times m$-es C mátrix, melyben

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik csúcs illeszkedik a } j\text{-edik élre,} \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

$$\text{ahol } i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m.$$

6.2. Probléma

Legyen $\mathcal{G}$ olyan gráf, melyben nincs ötnél rövidebb kör és minden csúcsából d él indul ki. Ekkor bármely csúcsból indulunk ki, újabb d csúcshoz jutunk. Ezen csúcsokból egyenként $d-1$ él fut ki. Amennyiben két ilyen él, vagy a végpontjaik egybeesnek, az azt eredményezi, hogy lesz a gráfban 3, vagy 4 hosszúságú kör. Ez azonban ellentmond a feltételnek. Tehát az élek újabb $d(d-1)$ csúcshoz vezetnek, vagyis legalább d^2+1 csúcsa van a gráfnak.
A következő tétel kimondja, hogy mely d esetén valósítható meg pontosan d^2+1 csúcsú ilyen gráf.

6.2.1 Tétel (Hoffman–Singleton-tétel): Tegyük fel, hogy egy gráf minden csúcsából d él indul ki, a gráfban nincs ötnél rövidebb kör és a gráfnak $d^2 + 1$ csúcsa van. Ekkor d értéke csak 1, 2, 3, 7 vagy 57 lehet.

Megjegyzés: Nem tudjuk, hogy a $d = 57$ esetre valóban megvalósítható-e a gráf.

Bizonyítás: Amennyiben A egy gráf szomszédsági mátrixa, akkor a $B = A^2$ gráf elemeire a következő igaz:

$$b_{ij} = (A\ i\text{-edik sora}) \cdot (A\ j\text{-edik oszlopa}),$$

ahol

$$(A\ i\text{-edik sora})_k = \begin{cases} 1 & \text{ha } G\text{-ben létezik } e(i,k) \text{ él} \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

$$(A\ j\text{-edik oszlopa})_k = \begin{cases} 1 & \text{ha } G\text{-ben létezik } e(j,k) \text{ él} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ebből következik, hogy:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A\ i\text{-edik sora})_k \cdot (A\ j\text{-edik oszlopa})_k =$$

$$= (i\text{-edik és } j\text{-edig csúcs közös szomszédainak a száma})$$

Speciálisan az $i = j$ esetben $b_{ii} = \deg i$.

Legyen $\mathcal{G}(V, E)$ olyan $n(= d^2 + 1)$ csúcsú gráf, amely megfelel a tétel követelményeinek. Ekkor $\mathcal{G}$-ben bármely két csúcsra igaz, hogy szomszédosak, vagy pontosan egy közös szomszédjuk van. Ugyanis ezeket a gráfokat a 6.2 problémánál leírtakhoz hasonlóan konstruálhatjuk meg. Vagyis a gráfot feloszthatjuk három szintre.
Minden d-re igaz lesz, hogy az I) szinten egyetlen, a II) szinten d, a III) szinten pedig $d^2 - d$ csúcs lesz. Ezenfelül I)-ből d él megy II)-be, II)-nek pedig minden csúcsából $d - 1$ él megy III)-ba, valamint I)-ből III)-ba nem fut él.
Ezekből következik, hogy a III) szint minden csúcsából $d - 1$ él megy III)-beli csúcsba úgy, hogy közben nincs a gráfban 5-nél rövidebb kör. A III) szint csúcsait d csoportba tudjuk sorolni aszerint, hogy melyik II)-beli pont szomszédai, így minden III)-beli csúcsból a $d - 1$ él az őt nem tartalmazó $d - 1$ másik csoport egyik pontjába megy.
Emiatt bármely két csúcs szomszédos vagy létezik közös szomszédjuk. Az

már könnyen látható, hogy két pontnak legfeljebb egy közös szomszédja lehet, mert ellenkező esetben lenne a gráfban 4 hosszúságú kör, ami ellentmond a feltételnek.

Ebből kifolyólag a G szomszédsági mátrixára (A) teljesül az alábbi egyenlet:

$$A + A^2 - (d-1)I = J, \tag{10}$$

ahol $I =$($n \times n$-es egységmátrix), $J =$($n \times n$-es csupa egyesből álló mátrix). A szimmetrikus mátrix, ezért n független sajátvektora van.
A 6.3.2 feladathoz hasonlóan kiszámolhatjuk, hogy

$$\det(J - \mu I) = (-1)^n \mu^{n-1}(\mu - n),$$

amiből következik, hogy J sajátértékei n és 0 (előbbi egyszeres, utóbbi $n-1$-szeres multiplicitással). Emellett (10)-ből következik, hogy ha $\underline{v}$ sajátvektora A-nak λ sajátértékkel, akkor $\underline{v}$ sajátvektora J-nek μ sajátértékkel, ahol

$$\mu = \lambda^2 + \lambda - (d-1).$$

Ezekből könnyen kiszámolható, hogy A sajátértékei a következők:

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{4d-3}}{2}, \qquad \lambda_1 = \frac{-1 - \sqrt{4d-3}}{2}, \qquad \lambda_3 = d,$$

m_1, m_2 *és* $m_3 = 1$ multiplicitással, ahol $m_1 + m_2 = n - 1 = d^2$.
A mátrix nyoma a sajátértékek multiplicitással vett összege:

$$0 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 = \frac{m_1 - m_2}{2}\sqrt{4d-3} - \frac{m_1 + m_2}{2} + d.$$

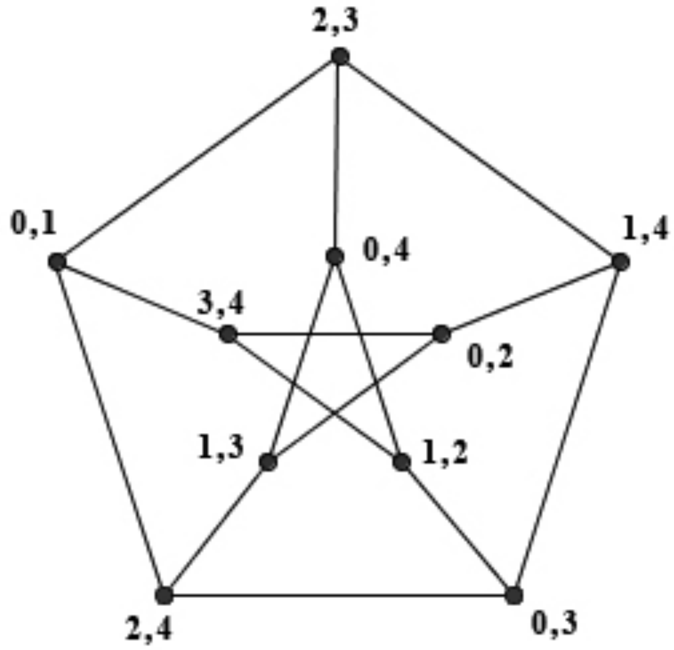
Ez akkor teljesül, ha 1) $m_1 = m_2$, vagy 2) $s = \sqrt{4d-3}$ egész szám.
1) Mivel $m_1 + m_2 = n - 1 = d^2$, ezért megkapjuk, hogy $d = 2$.
2) Ha $d = \dfrac{s^2+3}{4}$ kifejezést beírjuk a mátrix nyomára kapott egyenletbe, akkor megkapjuk, a

$$-s^4 + 2s^2 + 16(m_1 - m_2) + 15 = 0$$

összefüggést. Amiből következik, hogy s osztója a 15-nek. Vagyis $s = 1, 3, 5, 15$. Tehát az 1)-ből és a 2)-ből megkapjuk, hogy $d \in \{1, 2, 3, 7, 57\}$.
□

6.3. Feladatok

6.3.1 Legyen $\mathcal{G}$(V,E) a Petersen-gráf. Ekkor
$V = \{\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{0,4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$,
$E = \{\{u,v\} \in \binom{V}{2} : u \cap v = \emptyset\}$.
a) Ellenőrizzük, hogy ebben a gráfban valóban nincs ötnél rövidebb kör és minden csúcs foka 3.
b)Adjuk meg a Petersen-gráf spektrumát.



Megoldás: a) A gráfnak részgráfjait képezhetjük úgy, hogy vesszük a gráf bármely négy csúcsát és a köztük futó éleket. Amennyiben ezeknek a részgráfoknak felírjuk a szomszédsági mátrixát, akkor láthatjuk, hogy minden esetben legalább egy sor van, amelyben csupán egy egyes van, vagyis az adott csúcsból csupán egy él fut ki.
Példaként nézzük a $0,1;\ 2,3;\ 0,4;\ 3,4$ gráfok szomszédsági mátrixát:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ebből következik, hogy a négy csúcs nem alkothat kört (vagyis nincs négy hosszú kör a gráfban), mivel ehhez minden élből legalább két élnek kellene kiindulni.
Ugyanígy felírható bármely három csúcs által alkotott részgráf szomszédsági mátrixa, amiből szintén látszik, hogy nincs három hosszú kör.
Példaként nézzük a $0,1;\ 2,3;\ 0,4$ gráfok szomszédsági mátrixát:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Rövidebb kör nem lehet, mivel a gráfban nincs hurokél, illetve többszörös él.)
Ezek alapján a Petersen-gráfban nincs ötnél rövidebb kör.
A gráf illeszkedési mátrixát felírva jól látható, hogy minden csúcsból pontosan három él fut ki, mivel $\forall i$ csúcshoz tartozó a_i vektor elemeinek az összege 3.
b) Az a) pont alapján teljesül a gráfra a 6.2.1 Tétel. A bizonyítás során pedig megkaptuk, hogy a d mindig sajátértéke a szomszédsági gráfnak, valamint képletet kaptunk a többi sajátérték kiszámítására. Ezek alapján megkapjuk, hogy a Petersen-gráf három sajátértéke:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{4\cdot 3-3}}{2} = 1, \quad \lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{4\cdot 3-3}}{2} = -2$$

Egy gráf spektruma a szomszédsági mátrix sajátértékeinek a halmaza. Ezek alapján a Petersen-gráf spektruma $\{-2,1,3\}$.

6.3.2 Határozzuk meg az alábbi n csúcsú gráfok spektrumát:
a) n csúcsú teljes gráf;
b) $n = 2k$, és minden csúcsnak pontosan egy szomszédja van (ekkor a gráf diszjunkt élek egyesítése, úgynevezett egyfaktor);
c) $n-1$ élű csillag (azaz a középpont a többi $n-1$ pont mindegyikével össze van kötve, és más él nincs);

Megoldás: a) $\mathbf{n = 2}$:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = ((-\lambda)^2 - 1) = (\lambda+1)(\lambda-1),$$

vagyis $\lambda = -1, 1$.
$\mathbf{n = 3}$:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)^2(\lambda-2)(-1),$$

ami azt jelenti, hogy $\lambda = -1, 2$ (illetve a -1 kétszeres sajátértéke a szomszédsági mátrixnak).
Általánosan: A mátrix karakterisztikus polinomja

$$(\lambda+1)^{n-1}(\lambda-(n-1))(-1)^n.$$

Vagyis a mátrix sajátértékei a következők:

$$\lambda = \begin{cases} n-1 & \text{egyszeres,} \\ -1 & n-1\text{-szeres sajátérték.} \end{cases}$$

Azt, hogy a karakterisztikus polinom valóban a fent leírt módon néz ki, teljes indukcióval láthatjuk be.
Fentebb láthattuk, hogy $n = 2, 3$-ra valóban jó a polinom. (Az $n = 1$ esetre a mátrix egyetlen elemből áll, ezzel egyezik meg a determináns is.)
Belátjuk, hogy ha n-re jó a polinom, akkor $n+1$-re is:

$$|A_{n+1}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\lambda & 1 \\ 1 & \ddots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} =$$

Az első sor szerint kifejtve a következőt kapjuk:

$$= (-\lambda)|A_n| - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}_{n\times n} + \dots \pm \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & -\lambda \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{n\times n} =$$

Ebből sorcserékkel:

$$= (-\lambda)|A_n| - n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}_{n\times n}$$

Ekkor az összeg első tagját ismerjük, mivel n-re tudjuk az ilyen alakú mátrixok karakterisztikus polinomját. Azonban az összeg második tagjának (a mátrixot jelölje A'_n) értékét még nem tudjuk. Ezt a következőképpen találhatjuk meg:
$\mathbf{n = 1}$: Triviális a determináns, mivel ekkor a mátrix megegyezik az (1)-gyel.
$\mathbf{n = 2}$:

$$|A'_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) - 1$$

$\mathbf{n = 3}$:

$$|A'_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 + 2\lambda + 1 = ((-\lambda) - 1)^2$$

Ebből arra következtethetünk, hogy a mátrix determinánsa $((-\lambda) - 1)^{n-1}$ alakú. Ezt könnyen be is láthatjuk n-re nézve teljes indukcióval a kifejtési tétel alapján, annak segítségével, hogy A_n és A'_{n-1} determinánsát ismerjük:
$|A'_n| = 1|A_{n-1} - (n-1)|A'_{n-1}| = (\lambda - (n-2))(\lambda + 1)^{n-2}(-1)^{n-1} - -(n-1)((-\lambda) - 1)^{n-2} = ((-\lambda) - 1)^{n-2}[(-1)(\lambda - (n-2)) - (n-1)] = = ((-\lambda) - 1)^{n-2}((-\lambda) - 1) = ((-\lambda) - 1)^{n-1}$
Mivel most már ismerjük $|A'_n|$ értékét, ezért visszahelyettesíthetjük az A_{n+1} determinánsára vonatkozó képletbe:
$|A_{n+1}| = (-\lambda)|A_n| - n|A'_n| = (-\lambda)(\lambda - (n-1))(\lambda + 1)^{n-1}(-1)^n - -n(\lambda + 1)^{n-1}(-1)^{n-1} = (\lambda + 1)^{n-1}(-1)_{n-1}[\lambda(\lambda - (n-1)) - n] = = (\lambda+1)^{n-1}(-1)^{n+1}[(\lambda+1)(\lambda - n)] = (\lambda+1)^n(\lambda - n)(-1)^{n+1}$, ami pont megegyezik a kívánt polinommal.

b) $\mathbf{n = 2}$:
A mátrix megegyezik az előző eset 2×2-es mátrixával, vagyis $\lambda = -1, 1$.
$\mathbf{n = 4}$:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2,$$

ami azt jelenti, hogy $\lambda = -1, 1$ és mindkettő kétszeres sajátértéke a mátrixnak.

Általánosan: A karakterisztikus polinom

$$(\lambda-1)^k(\lambda+1)^k.$$

Amiből látszik, hogy a sajátértékek:

$$\lambda = \begin{cases} -1 & k\text{-szoros,} \\ 1 & k\text{-szoros sajátérték.} \end{cases}$$

Akárcsak az előző feladatnál itt is teljes indukcióval láthatjuk be, hogy a fenti polinom, valóban karakterisztikus polinom az általános esetre.
Itt azonban a k értékére végzünk teljes indukciót, vagyis belátjuk, hogy ha $k-1$ esetben jó a polinom, akkor k esetben is jó lesz.

$$|B_n| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}_{n\times n} =$$

A mátixot az első sora szerint kifejtve:

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} -$$

$$-1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} =$$

Majd a két mátrixot újra az első soruk szerint kifejtve kapjuk:

$$(-\lambda)^2|B_{n-2}| - 1^2|B_{n-2}|.$$

Ebbe az egyenletbe pedig már beírhatjuk a karakterisztikus polinomot, mivel $n-2$ esetben tudjuk, hogy jó. Tehát:

$|B_n| = (-\lambda^2 - 1^2)|B_{n-2}| = (\lambda_2 - 1)[(\lambda - 1)^{k-1}(\lambda + 1)^{k-1}] =$
$= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-1)^{k-1}(\lambda+1)^{k-1} = (\lambda-1)^k(\lambda+1)^k$, ami azt jelenti, hogy a fenti polinom, valóban a karakterisztikus polinom bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

c) $\mathbf{n = 2}$:
A mátrix itt is azonos az előzőekben leírt 2×2-es mátrixszal, amiből következik, hogy $\lambda = -1, 1$.
$\mathbf{n = 3}$:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^3 + 2\lambda = -\lambda(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2}),$$

vagyis a sajátértékek egyenlőek $\lambda = -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0$-val.
$\mathbf{n = 4}$:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^4 - 3\lambda^2 = (-\lambda)^2(\lambda + \sqrt{3})(\lambda - \sqrt{3}),$$

ami azt jelenti, hogy $\lambda = -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0$ és mindkettő kétszeres sajátértéke a mátrixnak.
Általánosan: A mátrix karakterisztikus polinomja

$$(-1)^n\lambda^n - (n-1)\lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - (n-1)) = \lambda^{n-2}(\lambda + \sqrt{n-1})(\lambda - \sqrt{n+1}).$$

A polinomból láthatjuk, hogy a sajátértékek a következők lesznek:

$$\lambda = \begin{cases} -\sqrt{n-1} & \text{egyszeres,} \\ \sqrt{n-1} & \text{egyszeres,} \\ 0 & n-2\text{-szeres sajátérték.} \end{cases}$$

Be kell még látni, hogy ez a polinom megegyezik az $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjával.

$$|D_n| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}_{n \times n} =$$

Ezt a determinánst az első sora szerint kifejtve a következő determinánsok összegére bomlik szét:

$$= (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} -$$

$$-(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} =$$

Ezután a két determinánst újra az első sora szerint kifejtve a következő kifejezést kapjuk:

$$= (-\lambda)(-\lambda)^{n-1} - (n-1) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} =$$

$$= (-\lambda)^n - (n-1)(-\lambda)^{n-2} = (-\lambda)^{n-2}(-\lambda - \sqrt{n-1})(-\lambda + \sqrt{n-1}),$$

ami a kívánt polinom.

6.3.3 Legyen a $\mathcal{G}$ gráf illeszkedési mátrixa C. Mi a C^TC, illetve a CC^T mátrixok elemeinek kombinatorikai jelentése?

Megoldás: $\mathbf{C^TC}$ **eset:** $C^TC = A$, ahol a_{ij} =(az i-edik és j-edik él közös végpontjainak a száma). Számoljuk azt is, hogy egy él saját magával közös végpontjainak száma $= 2$.
Ez az állítás könnyen látható egy példa segítségével. Legyen $\mathcal{G}$ két diszjunkt élből álló gráf. Ekkor a szorzat a következő:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ekkor mindkét élnek saját magával pontosan két közös végpontja van ($a_{ii} = 2, i = 1, 2$), azonban mivel diszjunktak, ezért egymással nincs közös

pontjuk ($a_{ij} = 0, i \neq j$).
Általánosan: $A = C^T C$, ekkor

$$a_{ij} = (c_i)^T (c_j) = \sum_{k=1}^{n} (c_{ki})(c_{kj}),$$

ahol $c_{ij} = \begin{cases} 1 & i \text{ illeszkedik a } j\text{-edik élre,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

Vagyis $(c_{ki})(c_{kj}) = \begin{cases} 1 & k \text{ illeszkedik az } i\text{-edik és a } j\text{-edik élre is,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

Ami azt jelenti, hogy a_{ij} azon pontok száma, amelyek az i-edik és a j-edik élre is illeszkednek. Amennyiben $i = j$, abban az esetben $a_{ij} = 2$, mivel minden élnek pontosan két közös végpontja van saját magával, így a $\sum_{k=1}^{n} (c_{ki})(c_{ki})$ összeg tagjai pontosan két esetben vesznek fel 1 értéket, mégpedig akkor, ha k az i-edik él valamelyik végpontja.

$\mathbf{CC^T}$ eset: $CC^T = B$, ahol b_{ij} =(azon élek száma, melyek i-re és j-re is illeszkednek).
Ezt az esetet is egy példán láthatjuk a legkönnyebben. Legyen $\mathcal{G}$ egy 2 élű csillag, ekkor a szorzat a következő:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vagyis a két szélső csúcsnak, azaz a csillag ágainak nincs közös éle ($b_{13} = b_{31} = 0$), azonban bármely másik két különböző csúcsnak pontosan egy közös éle van ($b_{ij} = 1$, amennyiben $ij \neq 13,\ 31$). A mátrix főátlójában pedig az egyes csúcsok fokszáma található ($b_{ii} = \deg i,\ i = 1, 2, 3$), hiszen a saját magával vett közös élek száma a csúcs éleinek a száma.
Általánosan: $B = C^T C$, ekkor

$$b_{ij} = (c_i)(c_j)^T = \sum_{k=1}^{n} (c_{ik})(c_{jk}),$$

ahol $c_{ij} = \begin{cases} 1 & i \text{ illeszkedik a } j\text{-edik élre,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

Vagyis $(c_{ik})(c_{jk}) = \begin{cases} 1 & k\text{-adik élnek az } i \text{ és a } j \text{ is végpontja,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

Ami azt jelenti, hogy b_{ij} azon élek száma, melyeknek i és j is végpontja. Amennyiben $i = j$, akkor $b_{ij} = \deg i$, mivel $\sum_{k=1}^{n} (c_{ik})(c_{ik})$ összegnek pontosan annyi tagja lesz 1, ahány él kiindul az i-edik pontból.

Hivatkozások

[1] Freud Róbert *Lineáris algebra*,
ELTE Eötvös Kiadó (2001)

[2] László Babai - Péter Frankl *Linear Algebra Methods in Combinatorics*,
Department of Computer Science The University of Chicago (1992)

[3] Katona Gyula Y. - Recski András - Szabó Csaba *A számítástudomány alapjai*
Typotex Kiadó (2006)