

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Somogyi Crescencia Kornélia

**DIFFERENCIÁLEGYENLETEK NUMERIKUS
MEGOLDÁSA**

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék



Budapest, 2014

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Kovács Sándornak, aki tanácsaival és útmutatásával segített ezen szakdolgozat elkészítésében. Köszönettel tartozom továbbá családomnak és barátaimnak a rengeteg hasznos tanácsért és biztatásukért.

Budapest, 2014. május 27.

Somogyi Crescencia

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak	4
2. Numerikus módszerek	8
3. Nemstandard módszerek	13
3.1. Az egzakt módszerek	14
3.2. Az egzakt módszer meghatározása	16
3.3. A nemstandard módszerek szabályai	17
3.4. Egyensúlyi pontok viselkedése	19
4. Egyenletek és megoldásuk a különböző módszerekkel	22
4.1. A radioaktív bomlási egyenlet	22
4.1.1. Megoldás az explicit Euler-módszerrel	23
4.1.2. Megoldás az implicit Euler-módszerrel	24
4.1.3. Megoldás a módosított explicit Euler-módszerrel	24
4.1.4. Megoldás az egzakt módszerrel	26
4.1.5. Megoldás a normált egzakt módszerrel	27
4.2. A logisztikus egyenlet	28
4.2.1. Megoldás az explicit Euler-módszerrel	28
4.2.2. Megoldás a módosított explicit Euler-módszerrel	30
4.2.3. Megoldás a centrális Euler-módszerrel	31
4.2.4. Megoldás a módosított centrális Euler-módszerrel	32
4.2.5. Megoldás az egzakt módszerrel	34
4.2.6. Megoldás a normált egzakt módszerrel	35

Bevezetés

A differenciálegyenletek nem csak a matematikában, hanem számos másik tudományágban, köztük a biológiában, fizikában, közgazdaságtanban is fontos szerepet töltenek be.

Amikor nem ismerjük az általános megoldást, és annak mégis egy adott pontbeli értékét keressük, azt numerikus módszerekkel közelítjük. Az egyes módszerek közötti apró különbségek a kapott közelítő megoldásban már jelentős eltérésekhez vezethetnek - mind a konvergencia, mind pedig a konzisztencia rendjét vizsgálva. Mivel általánosan legjobb módszer nem létezik, így az egyes feladatok esetén külön-külön kell választanunk a lehetőségek közül.

A választás nehézségén segíthetnek például Mickens szabályai, amelyeket konkrét feladatok és a rájuk alkalmazott numerikus módszerek vizsgálatakor állapított meg. Ezek nem javasolnak konkrét módszert, azonban segítenek kiszűrni, hogy milyen tulajdonságokkal bírót válasszunk az egyes egyenletekhez.

A szakdolgozatom célja, hogy bemutassak néhányat a leggyakrabban alkalmazott numerikus módszerek közül, definiáljam az egzakt módszerek fogalmát és Mickens nem-standard módszereit. Ezeket két konkrét differenciálegyenletre fogom alkalmazni, azonos paraméterekkel, így szemléltetve a köztük előforduló különbségeket. A kapott eredményeket pedig a MATLAB segítségével illusztrálom majd.

1. Alapfogalmak

Egy differenciálegyenlet numerikus megoldása az eredeti, analitikus megoldással ellentétben csak véges sok pontban állítja elő a megoldást. Nagyon sokféle numerikus módszer¹ létezik, és ezek általában különböző megoldásokhoz vezetnek minket. A megoldások különbözősége természetesen nem csak a formájukban, hanem tulajdonságaikban is megmutatkozhat. Ebben a szakdolgozatban alapvetően azzal foglalkozunk, hogy hogyan találhatnánk elég jó, vagy legalábbis bizonyos elvárásoknak megfelelő módszert.

Először természetesen szükségünk van ehhez a differenciálegyenlet és a hozzá tartozó megoldás definíciójára, hogy lássuk pontosan mit is keresünk.

1.1. Definíció. Legyen $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ összefüggő nyílt halmaz, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Ha az $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumra és az $y : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható függvényre teljesül, hogy

1. $(t, y(t)) \in \mathcal{D}$ minden $t \in \mathcal{I}$ esetén,
2. $y'(t) = f(t, y(t))$ minden $t \in \mathcal{I}$ esetén,
3. $y(t_0) = y_0$

akkor az y függvényt az \mathcal{I} intervallumon a f jobboldalú explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenlet(rendszer) megoldásának nevezzük az $y(t_0) = y_0$ kezdeti feltétel mellett.

1.2. Definíció. (Numerikus módszer¹) Numerikus módszernek nevezzük azt az eljárást, amely a differenciálegyenlet megoldását véges sok pontban állítja elő.

A numerikus módszert k lépéses ($k \in \mathbb{N}$) módszernek nevezzük, ha az y megoldás az t_n pontbeli közelítő y_n értéket az $y_{n-k}, y_{n-k+1}, \dots, y_{n-1}$ értékekből állítja elő.

Legyen $0 < h = \frac{1}{N}$ és $t_n = h \cdot n$ ($n = 0, 1, \dots, N, N \in \mathbb{N}$) (ha t_0 adott és $t_0 \neq 0$, akkor $t_n = t_0 + n \cdot h$). Ekkor az $y_0 = y(t_0)$ kezdeti érték mellett y_n az $y(t_n)$ pontos megoldás t_n pontbeli közelítése.

¹Ugyan numerikus módszereket a matematika más területein is alkalmazunk, ebben a szakdolgozatban a differenciálegyenletek megoldására alkalmazható numerikus módszereket értjük ezen kifejezés alatt.

1.3. Megjegyzés. A továbbiakban az általános $[a; b]$ intervallum helyett a definíciókban a $[0; 1]$ intervallumot használjuk, mert lineáris transzformációval a kapott eredmények mindegyike átvihető az általános esetre, így a kapott eredményeket nem befolyásolja.

Ilyen módszerek például az Euler-módszerek, amiket a következő fejezetben elemzünk, előbb még azonban megvizsgáljuk, hogy milyen fontosabb tulajdonságai lehetnek egy-egy ilyen módszernek.

Nagyon fontos tulajdonságuk, hogy az általuk generált megoldás mennyire közelíti az eredeti megoldást. Ezt a generált megoldás hibájával mérjük: a lokális, illetve a globális hibájával. A lokális hibája azt mutatja meg, hogy egy lépés alatt mekkora hiba keletkezik, ha a pontos megoldásból indultunk, míg a globális hiba a több lépés alatt felhalmozódott hiba nagyságát jelenti, szintén a pontos megoldásból indulva. Megállapításuknál a módszer konvergenciájából illetve konzisztenciájából számolunk.

A fent említett fogalmakat a következőképpen definiáljuk formálisan:

1.4. Definíció. (Lokális hiba) A numerikus módszer lokális hibája a módszerrel egy lépés alatt elkövetett hiba, ha pontos értékből indulunk. Azaz ha $h = \frac{1}{N}$ és $t_i = i \cdot h$, akkor minden $i = 0, 1, \dots, N$ -re a

$$g_{i+1} = y(t_{i+1}) - y_{i+1}$$

értéket a módszer t_{i+1} pontbeli *lokális hibájának* nevezzük, feltéve hogy $y_i = y(t_i)$.

Ennek h -szerinti, nagyságrendi becslése a konzisztencia:

1.5. Definíció. (p -ed rendű konzisztencia) Ha létezik $p \geq 1$ egész úgy, hogy minden $(i = 1, \dots, N)$ -re

$$|g_i| \leq M \cdot h^{p+1}$$

akkor azt mondjuk, hogy a módszer p -ed rendben *konzisztens*.

1.6. Definíció. (Globális hiba) A numerikus módszer globális hibája a módszerrel több lépés után felhalmozódó hiba. Ha $h = \frac{1}{N}$ és $t_i = i \cdot h$ akkor minden $i = 1, \dots, N$ -re az

$$e_i = y(t_i) - y_i$$

értéket a módszer t_i pontbeli *globális hibájának* nevezzük, feltéve, hogy $y_0 = y(t_0)$.

Ennek (h-szerinti) nagyságrendi becslése a módszer konvergenciája:

1.7. Definíció. (p -ed rendbeli konvergencia) Egy módszer p -ed rendben konvergens, ha a fentiek mellett létezik olyan $M \in \mathbb{R}^+$, ami független h -től és i -től, és

$$|e_i| \leq M \cdot h^p$$

teljesül.

1.8. Megjegyzés. A konvergenciát szokás máshogy is definiálni: Azt mondjuk, hogy egy módszer konvergens, ha az intervallum minden pontjában konvergens. (Emlékeztetőül: az intervallum t pontjában akkor konvergens, ha

$$h = \frac{t}{n}, t_n = t \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y(t_n).$$

Ebből pedig szintén felírható a p -ed rendbeli konvergencia fogalma.

A lokális és globális hibák segítségével meg tudjuk állapítani, hogy a módszerünk stabil-e:

1.9. Definíció. (Stabilitás) Azt mondjuk, hogy egy numerikus módszer stabil, ha létezik $K > 0$ konstans úgy, hogy minden $i = 1, \dots, N$ -re

$$|e_i| \leq K \cdot (|e_0| + \sum_{j=1}^i |g_j|).$$

Vagyis a globális hiba felülről becsülhető a lokális hibák összegével.

Ez természetesen feladatonként változik, mindig a konkrét feladatra kell felírni, ugyanis a lokális illetve globális hiba nagysága is függ az adott egyenlettől. Befejezésül álljon itt még egy fontos összefüggés, amire a későbbiekben szükségünk lesz:

1.10. Tétel. *Ha egy numerikus módszer p -ed rendben konzisztens és stabil, akkor a módszer p -ed rendben konvergens is.*

Bizonyítás. A $t = 0$ pontban a tulajdonság triviálisan teljesül. Ha $t \in (0; 1]$ valamint h és n olyanok, hogy $h = \frac{t}{n}$ és így minden n -re $t_n = t$, akkor a globális hiba képletét felírva

$$|e_n| \leq K \cdot \left(|e_0| + \sum_{j=1}^n |g_j| \right) \leq K \cdot \left(\sum_{j=1}^n c \cdot h^{p+1} \right) \leq \quad (1)$$

$$\leq K \cdot c \cdot n \cdot h^{p+1} = K \cdot c \cdot (n \cdot h) \cdot h^p \leq \quad (2)$$

$$\leq (K \cdot c) \cdot h^p. \quad (3)$$

Mivel c és K is konstansok és így a szorzatuk is konstans, ezért ez pontosan a p -ed rendbeli konvergenciát jelenti. ■

A következő fejezetben ezen fogalmakat felhasználva mutatjuk be az egyik legismertebb és leggyakrabban alkalmazott numerikus módszert, az explicit Euler-módszert.

2. Numerikus módszerek

Talán az egyik legismertebb numerikus módszer-család az Euler nevet viselő Euler-módszerek családja. A nevük nem véletlenül hasonló: az alakjukban alapvetően csak indexbeli különbségek vannak, ezek azonban, mint később látni fogjuk, igen jelentős különbségekhez vezethetnek a kapott eredményekben.

Az alakjuk a pontbeli differenciahányados fogalmára vezethető vissza:

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}$$

Ennek a kifejezésnek az (5) pontban vett átalakításával kapjuk az explicit Euler-módszert, a (7) átalakításával pedig az implicit Euler-módszert.

A numerikus módszereknél véges sok pontban értelmezzük a függvényeket. Ezek a pontok itt most az t_0, t_1, \dots, t_n pontok, az ezen pontokon felvett értékeket pedig nevezük y_0, y_1, \dots, y_n -nek amik rendre az $y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_n)$ pontokhoz tartozó közelítő értékeket jelölik. Ekkor a fenti differenciahányados a következőképpen közelíthető az i -edik pontban:

$$\frac{dy}{dt}(t_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_i + h) - y(t_i)}{h} \quad (4)$$

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (5)$$

Amikor az explicit Euler-módszert alkalmazzuk, ez a kifejezés kerül a differenciál- (vagy így már differencia-) egyenlet bal oldalára. Az egyes Euler-, illetve numerikus módszerek közötti alapvető különbség, hogy a jobb oldalon található kifejezésekbe az t_i milyen függvényét helyettesítjük. Az explicit Euler-módszer alakja

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(t_i, y_i), \quad (6)$$

míg az implicité

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(t_{i+1}, y_{i+1}). \quad (7)$$

Vegyük észre, hogy a nevük nem véletlen, hiszen y_{i+1} függvényében valóban explicit illetve implicit a két felírt kifejezés.

A kétlépéses módszerek között is találunk Euler-módszert, például a centrális Euler-módszert:

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot h} = f(t_i, y_i). \quad (8)$$

A centrális módszer hátránya, hogy a fentiekkel szemben nem elég egyetlen kezdeti érték, hiszen $y(t_0) = y_0$ mellett y_1 ismeretére is szükségünk van. Ezt természetesen kiszámolhatjuk egy másik módszerrel is y_0 -ból, amire általában a $y_1 = y_0 + h \cdot y_0 \cdot (1 - y_0)$ képletet használjuk ([2]).

2.1. Megjegyzés. A második derivált numerikus közelítésére is adhatunk képletet, így nem kell kétszer helyettesítenünk. Ennek egy lehetséges és sokszor használt formája ([2]):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \quad (9)$$

A centrális Euler-módszerhez hasonlóan ez is kétlépéses módszert eredményez.

Vizsgáljuk itt most meg az explicit-módszert kicsit részletesebben. A módszer konzisztenciájáról a következő állítást tudjuk megfogalmazni:

2.2. Tétel. *Az explicit Euler-módszer első rendben konzisztens.*

Bizonyítás. Induljunk ki a lokális hiba képletéből, amit az explicit módszerre alkalmazva alakítsunk át a következőképpen:

$$g_k = y(t_k) - y_k \quad (10)$$

Használjuk fel, hogy $y_{k-1} = y(t_{k-1})$ és $y_k = y_{k-1} + h \cdot f(t_{k-1}, y_{k-1})$.

$$g_k = y(t_k) - [y_{k-1} + h \cdot f(t_{k-1}, y_{k-1})] \quad (11)$$

$$g_k = y(t_k) - y(t_{k-1}) - h \cdot f(t_{k-1}, y(t_{k-1})) \quad (12)$$

$$g_k = h \cdot \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h} - h \cdot y'(t_{k-1}) \quad (13)$$

Ha elhagyjuk h -t akkor csak felülről becsülünk ($0 < h < 1$)

$$|g_k| \leq \left| \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h} - y'(t_{k-1}) \right| = |y'(\psi_{k-1}) - y'(t_{k-1})| \quad (14)$$

ahol $t_{k-1} < \psi_{k-1} < t_k$ (felhasználva a Lagrange-közéértéktételt²).

Most bővítsük a törtet a következőképpen:

$$|y'(\psi_{k-1}) - y'(t_{k-1})| = \frac{|y'(\psi_{k-1}) - y'(t_{k-1})|}{|\psi_{k-1} - t_{k-1}|} \cdot |\psi_{k-1} - t_{k-1}| \quad (15)$$

és használjuk ismét a tételt:

$$\frac{|y'(\psi_{k-1}) - y'(t_{k-1})|}{|\psi_{k-1} - t_{k-1}|} \cdot |\psi_{k-1} - t_{k-1}| = |y''(\psi_{k-1}^*)| \cdot |\psi_{k-1} - t_{k-1}|. \quad (16)$$

Itt h -val felülről becsülhetjük az $|\psi_{k-1} - t_{k-1}|$ kifejezést így

$$|y''(\psi_k^*)| \cdot |\psi_{k-1} - t_{k-1}| \leq \|y''\|_{max} \cdot h, \quad (17)$$

amiből az következik, hogy a módszer elsőrendben konzisztens. ■

Vizsgáljuk meg a konvergenciáját is:

2.3. Tétel. *Az explicit Euler-módszer elsőrendben konvergens.*

Bizonyítás. Rendezzük át először a lokális hiba képletét a következőképpen:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h \cdot f(t_k, y(t_k)) + h \cdot g_k \quad (18)$$

Maga a módszer hasonló alakban:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k) \quad (19)$$

$$e_{k+1} = e_k + h \cdot (f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)) + h \cdot g_k \quad (20)$$

Vegyük minden tagnak az abszolút értékét:

$$|e_{k+1}| \leq |e_k| + h \cdot |(f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k))| + h \cdot |g_k| \quad (21)$$

Legyen L az f -hez tartozó Lipschitz-konstans³. Ekkor teljesül a következő:

$$|(f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k))| \leq L \cdot |y(t_k) - y_k| = L \cdot |e_k|, \quad (22)$$

²A Lagrange-közéértéktétel: tegyük fel, hogy f folytonos az $[a; b]$ intervallumon és differenciálható az (a, b) intervallumon. Ekkor létezik olyan $a < c < b$ szám, amelyre igaz, hogy $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Mivel ezek a feltételek teljesülnek, használhatjuk a tételt $b = t_k$, $a = t_k - 1$ és $c = \psi_k - 1$ helyettesítéssel.

amit felhasználva (21)-nél a következőt kapjuk:

$$|e_{k+1}| \leq |e_k| + h \cdot L \cdot |e_k| + h \cdot |g_k| \quad (23)$$

$$|e_k| \leq (1 + h \cdot L)|e_{k-1}| + h \cdot |g_{k-1}| \leq \quad (24)$$

$$\leq (1 + h \cdot L)^2 |e_{k-2}| + h \cdot ((1 + h \cdot L)|g_{k-2}| + |g_{k-3}|) \leq \dots \leq \quad (25)$$

$$\leq (1 + h \cdot L)^k |e_0| + h \cdot ((1 + h \cdot L)^{k-1} |g_0| + (1 + h \cdot L)^{k-2} |g_1| + \dots + |g_{k-1}|) \quad (26)$$

Ha a második zárójeles kifejezésben az egyre csökkenő hatványkitevők helyett mindenhol a k -edik hatványt vesszük, akkor ezzel csak felülről becsüljük a jobb oldalt.

$$|e_k| \leq (1 + h \cdot L)^k |e_0| + h \cdot (1 + h \cdot L)^k (|g_0| + |g_1| + \dots + |g_{k-1}|) = \quad (27)$$

$$= (1 + h \cdot L)^k \left[|e_0| + \sum_{r=0}^{k-1} |g_r| \right] \quad (28)$$

A kiemelt szorzótényezőt felülről becsülhetjük egy konstans c számmal⁴.

$$(1 + h \cdot L)^k \leq e^{k \cdot h \cdot L} = e^{t_k} \cdot L \leq e^L \leq c \quad (29)$$

Ezt felhasználva:

$$|e_k| \leq c \cdot \left[|e_0| + h \cdot \sum_{r=0}^{k-1} |g_r| \right] \leq \quad (30)$$

$$\leq c_0 \cdot [|e_0| + h \cdot h \cdot k] = c_1 \cdot [|e_0| + h] = \mathcal{O}(h), \quad (31)$$

ami pont azt jelenti, hogy a módszer első rendben konvergencia is és éppen ezt akartuk bizonyítani. ■

Miután megvizsgáltuk az explicit Euler-módszert, megállapíthatjuk, hogy ugyan elsőrendben konvergencia és konzisztencia is, de ez nem feltétlenül elég minden probléma megoldásánál. Nem beszéltünk a stabilitásról, ami az egyes feladatoknál külön-külön értelmezendő, de ahogyan azt később láthatjuk, ez a h lépésköz méretétől függően fog változni.

Alapvető kérdés továbbá egy numerikus módszer vizsgálatánál, hogy az esetleges egyensúlyi pontokban a (nem feltétlenül létező) analitikus megoldáshoz képest hogyan

³A függvény Lipschitz-tulajdonsága a feladat kitűzéséből következik.

⁴Ugyanis $(1 + t) \leq e^t$, feltéve, hogy $t > 0$ és itt $h \cdot L > 0$.

viselkedik a generált megoldásunk. Ez szintén az egyes feladatoktól függ, de ahogyan azt a negyedik fejezetben láthatjuk, sem az explicit, sem pedig az implicit Euler-módszer nem biztosítja feltétlenül az egyensúlyi pontok stabilitási tulajdonságainak korrektségét.

Mindezekben a problémákban próbálunk meg segíteni a következő fejezetben úgy, hogy az egzakt és nemstandard módszerek fogalmát bevezetjük, majd azokból kiindulva megmutatjuk, hogy tetszőleges numerikus módszer esetén korrekt stabilitási tulajdonságokat érhetünk el a közelítés által adott megoldás egyensúlyi pontjaiban, még hozzá egy módosítás segítségével.

3. Nemstandard módszerek

Az előző fejezetben megismerkedtünk néhány standard numerikus módszerrel és azok speciális tulajdonságaival. A következő fejezetben azt is láthatjuk majd, hogy ezek a módszerek nem közelítenek elég jól, vagyis csak bizonyos feltételek, megfelelő nagyságú lépésközök mellett adnak elég pontos megoldást, azonban megfelelően módosítva őket mégis kaphatunk egész jó megoldásokat.

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk Ronald E. Mickens [1] nemstandard numerikus módszereit és az ahhoz kapcsolódó szabályokat, amik segíthetnek a standard módszerek választásánál illetve megfelelő módosításánál is.

Először is elevenítsük fel a paraméteres differenciálegyenlet definícióját.

Legyen

$$y' = f \circ (id, y, \lambda),$$

ahol λ egy n dimenziós paramétervektor.

Az általánosan alkalmazott pontbeli differencia definíciójának erre vonatkozó eredeti egyenlete:

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y[t + \psi_1(h)] - y(t)}{\psi_2(h)} \quad (32)$$

$$\text{ahol } \psi_i(h) = h + \mathcal{O}(h^2), \quad i \in \{1, 2\}. \quad (33)$$

Vagyis az eddig látottakkal ellentétben itt nem h van a nevezőben illetve a számlálóbeli pontoknál sem, hanem annak egy-egy, a (33) eleget tevő függvénye.

A korábban tárgyalt numerikus módszereknél használt képletünket ez alapján átírva a következőt kapjuk:

$$y' \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{\varphi(h, \lambda)}.$$

Itt a nevezőbeli φ függvényre továbbra is teljesül (33).

3.1. Megjegyzés. Ha $h \rightarrow 0$ akkor az ilyen tulajdonsággal bíró függvények mindegyike a szokásos differenciahányadoshoz tart, azaz teljesül, hogy:

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y[t + \psi_1(h)] - y(t)}{\psi_2(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t + h) - y(t)}{h}.$$

Néhány példa ilyen pszi-függvényekre:

$$\psi \in \left\{ id, (h \mapsto \sin(h)), (h \mapsto e^h - 1), (h \mapsto 1 - e^{-h}), \left(h \mapsto \frac{1 - e^{-\lambda \cdot h}}{\lambda} \right) \right\}$$

3.2. Megjegyzés. Bár a módszer más egyenletekre is használható, a továbbiakban csak elsőrendű, közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

3.1. Az egzakt módszerek

Tekintsük az általános elsőrendű közönséges differenciálegyenlethez tartozó kezdetiérték problémát, illetve továbbra is annak paraméteres verzióját:

$$y' = f \circ (id, y, \lambda) \tag{34}$$

$$y(t_0) = y_0, \tag{35}$$

Tegyük fel, hogy $f(t, y, \lambda)$ -nak létezik egyértelmű megoldása a $0 \leq t < T$ intervallumon, valamint $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

Tudjuk, hogy a megoldás $y(t) = \psi(\lambda, y_0, t_0, t)$ alakú, ahol $y_0 = \psi(\lambda, y_0, t_0, t_0)$. Ekkor az $y_0 = y(0)$ kezdeti érték és $t_k = h \cdot k$ mellett az $y_{k+1} = g(\lambda, h, y_k, t_k)$ alakú numerikus módszer által generált megoldást jelölje a következő:

$$y_k = \psi_h(\lambda, y_0, t_0, t_k), \text{ amelyre természetesen} \tag{36}$$

$$y_0 = \psi_h(\lambda, y_0, t_0, t_0) = \psi(\lambda, y_0, t_0, t_0). \tag{37}$$

3.3. Megjegyzés. Fontos, hogy a továbbiakban is feltesszük a megoldás létezését.

Mickens az egzakt módszerek vizsgálatához a következő fogalmakat és állításokat fogalmazza meg:

3.4. Definíció. (Általános megoldások azonossága) Azt mondjuk hogy a kezdeti érték feladatnak és a rá alkalmazott numerikus módszernek azonos az általános megoldása pontosan akkor, ha $y_k = y(t_k)$ tetszőleges h konstans lépésközzel.

3.5. Definíció. (Egzakt módszer) Egzakt differencia-módszernek nevezünk egy olyan módszert, amelynek a megoldása azonos az eredeti differenciálegyenlet általános megoldásával.

3.6. Tétel. (A differenciálegyenlethez tartozó egzakt módszer)

Legyen $y' = f \circ (id, y, \lambda)$, és $y(t_0) = y_0$. Ekkor a differenciálegyenlethez tartozó egzakt numerikus módszer a következő alakú:

$$y_{k+1} = \psi(\lambda, y_k, t_k, t_{k+1}),$$

ahol ψ a (36) és a (37) helyeken megadott tulajdonságú.

Bizonyítás. A megoldások csoport-tulajdonságai miatt

$$y(t+h) = \psi(\lambda, y(t), t, t+h).$$

Itt a $t \rightarrow t_k$ és a $y(t) \rightarrow y_k$ helyettesítéseket elvégezve az

$$y_{k+1} = \psi(\lambda, y_k, t_k, t_{k+1})$$

egyenletet kapjuk, ennek pedig pontosan az a megoldása, mint az eredeti $y' = f \circ (id, y, \lambda)$ egyenletnek. ■

Ezzel gyakorlatilag annyit tettünk, hogy minden lépésnél az előző pontot (és az abban felvett *pontos* értéket) vettük kezdeti értéknek.

A tétel könnyen általánosítható több, elsőrendű közönséges differenciálegyenletből álló rendszerre is. Ha a megoldás mindig létezik, még $T = \infty$ esetén is, akkor

$$y_{k+1} = \psi(\lambda, y_k, t_k, t_{k+1})$$

igaz minden h -ra és minden t -re. (Különben csak akkor, ha

$$y_{k+1} = \psi(\lambda, y_k, t_k, t_{k+1})$$

jobb oldala értelmezve van.)[1]

A fő következménye a tételnek, hogy az egzakt módszer megoldása pontosan megegyezik a differenciálegyenlet megoldásával a számított pontokban, tetszőleges, de állandó h lépésközzre.

Fontos megjegyeznünk, hogy ez csak egy egzisztencia-tétel, azaz ha a differenciálegyenletnek létezik megoldása, akkor az egzakt módszer is létezik. Ezt elő is tudjuk állítani, ha a megoldás ismert. Egy általános differenciálegyenlet esetén azonban, aminek a megoldását esetleg nem ismerjük, nem tudjuk hogyan gyártsunk egzakt módszert.

Felmerül a kérdés tehát, hogy mégis hogyan érdemes próbálkoznunk.

3.2. Az egzakt módszer meghatározása

A következő determináns kiszámításával bizonyíthatóan egy egzakt numerikus módszert kapunk a kitűzött egyenletre ([1]). Itt használjuk fel, hogy ismernünk kell a differenciálegyenlet összes megoldását, hiszen láthatóan azokból számoljuk ki az egzakt módszert.

Legyen $y^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, N$ lineárisan független függvények halmaza⁵. Ekkor tudunk olyan N -ed rendű lineáris differenciálegyenletet előállítani, aminek a megfelelő diszkrét függvények: $y_j^{(k)} = y^{(k)}(t_j)$ a megoldásai. A szükséges egyenletet a következő determináns adja meg:

$$\begin{vmatrix} y_k & y_k^{(1)} & \cdots & y_k^{(N)} \\ y_{k+1} & y_{k+1}^{(1)} & \cdots & y_{k+1}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+N} & y_{k+N}^{(1)} & \cdots & y_{k+N}^{(N)} \end{vmatrix} = 0$$

A következő fejezetben bemutatjuk ennek a módszernek a működését is, még hozzá a radioaktív bomlási egyenleten.

A módszerről meg kell még jegyeznünk, hogy csak lineáris differenciálegyenleteknél működik. A nemlineáris egyenletekre vonatkozó egzakt módszerek meghatározásához a 3.6 tételhez fordulunk. Ezt a következő három lépésen keresztül valósítjuk meg:

1. Vegyük a következő

$$Y' = F \circ (id, Y, \lambda) \tag{38}$$

$$Y(t_0) = Y_0 \tag{39}$$

N db elsőrendű differenciálegyenletből álló rendszert, aminek N dimenziós oszlopvektorainak i -edik komponense:

$$(Y)_i = y^{(i)}(t), \text{ ez alapján pedig} \tag{40}$$

$$(F)_i = f^{(i)}[y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}; t, \lambda]. \tag{41}$$

⁵Figyelem! A jelölés megegyezik az y függvény i -edik deriváltjával, de ebben a fejezetben átmenetileg az i -edik függvényt jelenti. Azért van erre szükség, mert az alsó indexet másra használjuk és így mégis átláthatóbb lesz.

2. Most használjuk fel, hogy ezen rendszer általános megoldásának alakja:

$$Y(t) = \psi(\lambda, Y_0, t_0, t)$$

ahol

$$(Y)_i = y^{(i)}(t) = \psi^{(i)}[\lambda, y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \dots, y_0^{(N)}, t_0, t]$$

3. Végül végezzük el a következő helyettesítéseket:

$$\begin{cases} y(t) \rightarrow y_{k+1} \\ y_0 = y(t_0) \rightarrow y_k \\ t_0 \rightarrow t_k \\ t \rightarrow t_{k+1} \end{cases}$$

Az így kapott egyenletet rendezve egzakt numerikus módszert kapunk.

Ez azt jelenti, hogy ha ismerjük a megoldást (aminek feltétele az is, hogy ez a megoldás, vagy megoldások létezzenek), akkor tudunk egzakt módszert készíteni.

3.3. A nemstandard módszerek szabályai

Megállapítottuk, hogy hogyan tudunk ilyen egzakt módszer készíteni a már ismert megoldás alapján. Azonban ezek a módszerek még mindig csak a differenciaegyenlet egyik oldalát határozzák meg. Arról, hogy a másik oldalon milyen összefüggéseivel helyettesítsünk az egyes y_k -knak, vagyis hogy pontosan melyik pontbeli értékeket vegyük, még nem mondtunk semmit. Ahogy ez az implicit és explicit módszerek közötti különbségnél is látszott, ez egyáltalán nem mindegy.

A vizsgálati során Mickens a következő megállapításokhoz jutott ezzel kapcsolatban, amiket a fontosságuk miatt a továbbiakban szabályoknak nevezünk.

A szabályok

1. A használt numerikus módszer rendjének meg kell egyeznie a vizsgált differenciálegyenlet rendjével.⁶
2. A nevezőbeli függvény általában a lépésköznek egy bonyolultabb függvénye.

3. A nemlineárisan tagokat általában nemlokálisan kell kifejezni.
4. A differenciálegyenlet speciális megoldásainak a numerikus módszer esetén is speciális megoldásoknak kell megfelelniük.
5. A numerikus módszernek nem lehet olyan megoldása, ami nem felel meg egyetlen eredeti megoldásnak sem.

Ugyan még mindig nem egyértelmű, hogy pontosan melyik módszert válasszuk, de ezek a szabályok igen nagy segítséget nyújthatnak.

Néhány példa az egzakt módszerekre [4]:

Differenciálegyenlet	Standard módszer	Egzakt módszer
$y' = -\lambda \cdot y$	$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = -\lambda \cdot y_k$	$\frac{y_{k+1}-y_k}{\left(\frac{1-e^{-\lambda \cdot h}}{h}\right)} = -\lambda \cdot y_k$
$y' = -y^2$	$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = -y_k^2$	$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = -y_{k+1} \cdot y_k$
$y' = \lambda_1 \cdot y - \lambda_2 \cdot y^2$	$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = \lambda_1 \cdot y_k - \lambda_2 \cdot y_k^2$	$\frac{y_{k+1}-y_k}{\left(\frac{e^{-\lambda_1 \cdot h}-1}{h}\right)} = \lambda_1 \cdot y_k - \lambda_2 \cdot y_{k+1} \cdot y_k$
$y' = -y^3$	$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = -y_k^3$	$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = -\left(\frac{2 \cdot y_{k+1}}{y_{k+1}+y_k}\right) \cdot y_{k+1} \cdot y_k^2$

Látható, hogy mindegyik egzakt módszer kielégíti a nemstandard módszerek szabályait, a magasabb rendűek közül egyik sem közelít lokálisan és azt is megfigyelhetjük, hogy minél bonyolultabb a differenciálegyenlet amit közelítünk, az egzakt képlet is annál bonyolultabb lesz.

Összesítve az eddigieket: az általános megoldás(ok) ismeretében tudunk egzakt módszert alkotni, a standard módszerekre alkalmazva a szabályokat pedig azokon is tudunk javítani.

Amit még nem vizsgáltunk meg, az az egyensúlyi pontok viselkedése. Szeretnénk ezeken a szabályokon felül egy olyan módosítási lehetőséget is bemutatni, amit standard módszerre alkalmazva javíthatjuk azt és az általa adott megoldás viselkedését az egyensúlyi pontokban és azok környékén.

⁶A numerikus módszer rendje alatt a kifejezésben használt legmagasabb rendű numerikus derivált rendjét értjük.

3.4. Egyensúlyi pontok viselkedése

Bizonyítható, hogy a legtöbb numerikus instabilitás összefüggésben áll az egyensúlyi pontok viselkedésével (v.ö. Mickens[1]). Ha a numerikus módszer által generált megoldás nem megfelelően viselkedik ezekben a pontokban, akkor gyakran más hibák is származnak ebből. Így most megnézzük, hogy hogyan lehetne ezen javítani.

Mickens a következőt javasolja: próbáljuk meg a nevezőbeli φ függvényt valahogyan lenormálni, hátha így már a megfelelő tulajdonságokat kapjuk. Standard módszerek esetén az csak egy konstans szorzó lesz, nemstandard módszerek esetén a φ függvényt is függővé tesszük tőle.

A differenciálegyenletet továbbra is a következő alakban kezeljük:

$$y' = f(y),$$

továbbá feltesszük, hogy ennek zérushelyei egyszeresek.

Jelölje az egyensúlyi pontok halmazát, azaz azoknak az \bar{y} pontoknak a halmazát, ahol $f(\bar{y}) = 0$

$$\mathcal{I} = \{\bar{y}^{(i)} | i = 1, \dots, N \in \{\mathbb{N} \cup \{\infty\}\}\}$$

és így legyen

$$R_i = \frac{df[\bar{y}^{(i)}]}{dy} \text{ és } R^* = \max_{i=1, \dots, I} |R_i|$$

Ekkor azt mondjuk, hogy

- ha $R_i < 0$ akkor az $y(t) = \bar{y}^{(i)}$ egyensúlyi pont stabil,
- ha $R_i > 0$ akkor az $y(t) = \bar{y}^{(i)}$ egyensúlyi pont instabil.

Ezen információkat felhasználva normáljuk a numerikus módszerünket a következőképpen:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\left(\frac{\varphi(h \cdot R^*)}{R^*}\right)} = f(y_k).$$

ahol φ -re továbbra is $z > 0$ mellett:

$$\varphi(z) = z + \mathcal{O}(z^2) \text{ és} \tag{42}$$

$$0 < \varphi(z) < 1. \tag{43}$$

Az itt leírt normáló transzformáció meglepően jó tulajdonságokkal rendelkezik, erről Mickens a következő tételt fogalmazza meg:

3.7. Tétel. *A (44) alakú numerikus módszer által generált megoldás a differenciálegyenlet egyensúlyi pontjaiban pontosan ugyanolyan stabilitási tulajdonsággal rendelkezik, mint a vizsgált differenciálegyenlet általános megoldása.*

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\left[\frac{\varphi(h \cdot R^*)}{R^*} \right]} = f(y_k) \quad (44)$$

Bizonyítás. Vegyük az i -edik egyensúlyi pont közelítését a következőképpen:

$$y_k = \bar{y}^{(i)} + \epsilon_k.$$

Ennek az ϵ_k -nak a lineáris stabilitására vonatkozó egyenlet:

$$\frac{\epsilon_{k+1} - \epsilon_k}{\left[\frac{\varphi(h \cdot R^*)}{R^*} \right]} = R_i \cdot \epsilon_k$$

Ezt rendezve ϵ_{k+1} -re:

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k \cdot \left[1 + \left(\frac{R_i}{R^*} \right) \cdot \varphi(h \cdot R^*) \right]$$

Vezessük vissza az iterációt ϵ_0 -ra.

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{R_i}{R^*} \right) \cdot \varphi(h \cdot R^*) \right]^k$$

Ekkor két eset lehetséges az egyensúlyi pont stabilitása alapján:

1. Ha az egyensúlyi pont stabil, azaz $R_i < 0$, akkor $h > 0$ -ra:

$$0 < 1 - \left(\frac{|R_i|}{R^*} \right) \cdot \varphi(h \cdot R^*) < 1,$$

ahol $\varphi(z)$ és $\left(\frac{R_i}{R^*} \right)$ tulajdonságai alapján az $y_k = \bar{y}^{(i)}$ egyensúlyi pont a numerikus módszer szerint is stabil.

2. A másik lehetőség, hogy az egyensúlyi pont instabil, vagyis $R_i > 0$, amiből $h > 0$ esetén

$$1 + \left(\frac{R_i}{R^*} \right) \cdot \varphi(h \cdot R^*) > 0,$$

azaz szintén azt kaptuk, hogy az egyensúlyi pont instabil.

Ez azt jelenti, hogy mindkét esetben a megfelelő stabilitási tulajdonságot kaptuk vissza.

■

A tétel nagyon fontos következménye, hogy tudunk olyan numerikus módszert konstruálni közönséges autonóm elsőrendű differenciálegyenlet esetén, aminek használata semmilyen numerikus instabilitáshoz nem vezet, mivel az egyensúlyi pontokon az eredeti megoldásnak megfelelő stabilitási tulajdonságokat adja. Ilyet a standard módszereknél nem láttunk sehol. A standard módszerek

$$y' \rightarrow \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$$

alakja helyett a nemstandard lenormált módszer alakja:

$$y' \rightarrow \frac{y_{k+1} - y_k}{\left[\frac{\varphi(h \cdot R^*)}{R^*} \right]} \quad (45)$$

3.8. Megjegyzés. A nemstandard módszereknél a derivált helyére írt kifejezés is a deriválthoz tart, azaz

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty \\ h \cdot k = t}} \frac{y_{k+1} - y_k}{\left[\frac{\varphi(h \cdot R^*)}{R^*} \right]} = y'. \quad (46)$$

A korábban említett tulajdonságok mellett φ tetszőleges lehet, azonban van egy különösen hasznos és egyszerű formája, ami sok egzakt és nemstandard módszernél előkerül:

$$\varphi(z) = 1 - e^{-z}.$$

Ennek segítségével módosítva a fent ismertetett általánosan használt standard módszereket megoldhatjuk az előforduló szuperstabilitási⁷ problémákat, ami például az implicit Euler-módszerre jellemző. Az implicit módszer képlete ezzel a módosítással:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\left[\frac{\varphi(h \cdot R^*)}{R^*} \right]} = f(y_{k+1}),$$

ami pedig a fenti tétel és annak bizonyítása miatt már elkerüli a szuperstabilitást.

A következő fejezetben bemutatjuk az egyes módszerek működését, beleértve a korábbi fejezetben látott Euler-módszereket is.

⁷Szuperstabilitás: a módszer minden egyensúlyi pontban stabil viselkedést mutat.

4. Egyenletek és megoldásuk a különböző módszerekkel

A fent bemutatott módszereket és azok különbségeit szeretnénk most két konkrét differenciálegyenlet segítségével bemutatni.

4.1. A radioaktív bomlási egyenlet

Az első egyenlet, amin a numerikus módszereket vizsgáljuk, a radioaktív bomlási egyenlet: a radioaktív izotópok bomlásakor az izotópok számát az idő függvényében ezzel az egyenlettel írják le.

Az egyenlet alakja a következő:

$$y'(t) = -y(t) \quad (47)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (48)$$

Ennek általános megoldása:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-(t-t_0)} \quad (49)$$

4.1. Megjegyzés. Az egyenlet általánosabb formájában a jobb oldalon egy pozitív konstansszorzó is áll, ennek megoldása:

$$y(t) = e^{-\lambda \cdot t}.$$

4.2. Megjegyzés. Látható, hogy ennek az egyetlen egyensúlyi pontja $y = 0$. Ezzel csak a normált egzakt módszernél fogunk foglalkozni, a többi alkalmazott módszernél alapvetően azt vizsgáljuk, hogy a kapott numerikus megoldásunk valóban az eredetihez konvergál-e.

A kezdeti értéktől függően, ha $y_0 < 0$ akkor a megoldás monoton nő és konvergál a 0-hoz, ha pedig $y_0 > 0$ akkor monoton csökken és úgy konvergál a 0-hoz. (Ha $y_0=0$, akkor a konstans 0 függvényt kapjuk.) A képek MATLAB-os előállításakor az $y(0) = 1$ kezdeti értékkel számolunk, így a második esetet láthatjuk majd mindenhol.

Ezen az egyenleten vizsgáljuk először a fent bemutatott módszereket.

4.1.1. Megoldás az explicit Euler-módszerrel

Erre az egyenletre az explicit forma a következő:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = -y_k$$

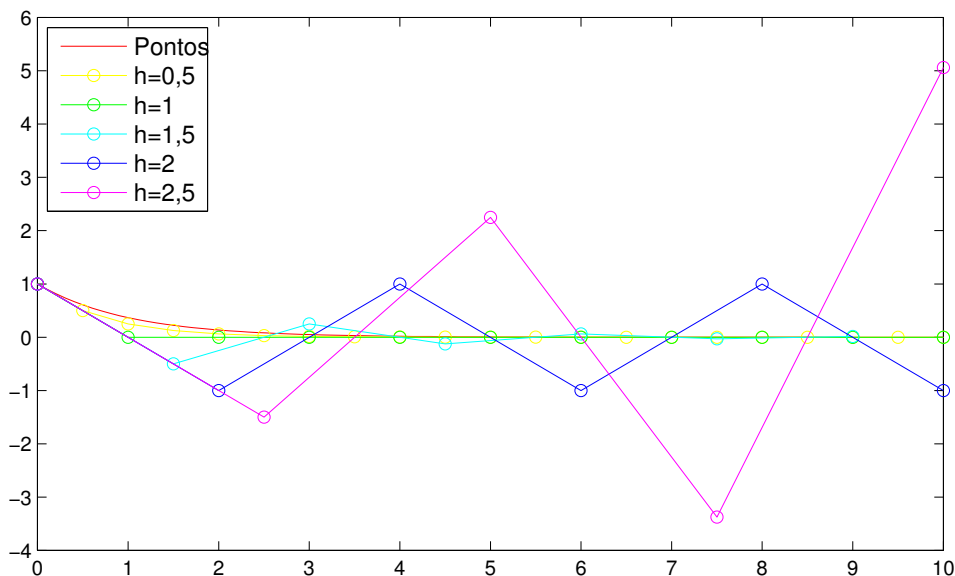
Átrendezve:

$$y_{k+1} = y_k \cdot (1 - h) \quad (50)$$

$$y_k = y_{k-1} \cdot (1 - h) \quad (51)$$

$$y_{k+1} = y_0 \cdot (1 - h)^{k+1}. \quad (52)$$

Mivel y_0 adott, ennek viselkedése csak h -tól függ.



1. ábra. A radioaktív bomlási egyenlet megoldása az explicit Euler-módszerrel.

Ahogy ezt az 1. ábrán is láthatjuk, az explicit Euler-módszer által adott megoldás jellemzői h függvényében:

- ha $0 < h < 1$ a numerikus megoldás monoton konvergál a 0-hoz,
- ha $h = 1$ és $k \geq 1$ akkor konstans 0-t kapunk,
- ha $1 < h < 2$ akkor oszcillálva konvergál a 0-hoz,

- $h = 2$ esetén állandó amplitúdóval oszcillálva divergál,
- míg $h > 2$ esetén pedig szintén oszcillálva divergál, de ezúttal növekvő amplitúdóval.

Ez azt jelenti, hogy a numerikus megoldás viselkedése csak $0 < h < 1$ esetén felel meg az elvártaknak, vagyis a lépésköz korlátozására van szükség, hogy a megoldásunk az eredetihez tartson.

4.1.2. Megoldás az implicit Euler-módszerrel

Írjuk fel az ide vonatkozó implicit Euler-formulát.

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = -y_{k+1}$$

Ismét rendezzük át:

$$y_{k+1} \cdot (1 + h) = y_k \tag{53}$$

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + h} \tag{54}$$

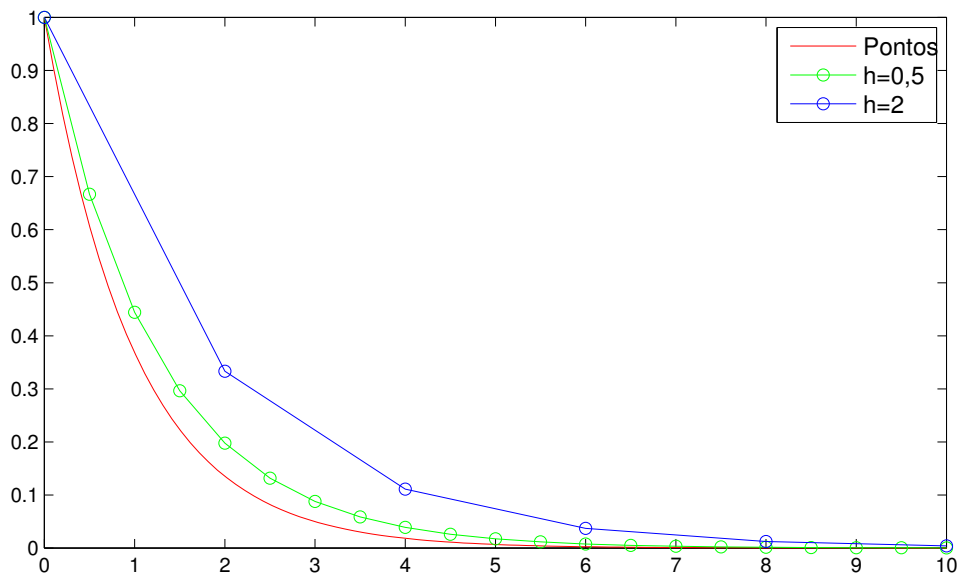
$$y_{k+1} = \frac{y_0}{(1 + h)^{k+1}} \tag{55}$$

Ez tetszőleges h lépésközre konvergálni fog a 0-hoz, ahogy ezt a 2. ábrán is láthatjuk.

4.1.3. Megoldás a módosított explicit Euler-módszerrel

Mivel az explicit Euler-módszer alkalmazásakor azt kaptuk, hogy csak $0 < h < 1$ lépésköz esetén konvergál megfelelő tulajdonságokkal a 0-hoz, ezért kipróbáljuk annak egy módosított változatát, hátha az nagyobb lépésközre is működik. Ilyenkor természetesen nem a módszer formuláját módosítjuk, hanem a jobb oldalon álló kifejezést. Jelen esetben szimmetrikusra, így több y_k értéket felhasználva. A megoldandó egyenlet tehát a következő:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = -\frac{y_{k+1} + y_k}{2}$$



2. ábra. A radioaktív bomlási egyenlet megoldása az implicit Euler-módszerrel.

Rendezzük át:

$$2 \cdot y_{k+1} - 2 \cdot y_k = -h \cdot y_{k+1} - h \cdot y_k \quad (56)$$

$$y_{k+1} \cdot (2 + h) = y_k \cdot (2 - h) \quad (57)$$

$$y_{k+1} = y_k \cdot \frac{2 - h}{2 + h} \quad (58)$$

$$y_{k+1} = y_0 \cdot \left(\frac{2 - h}{2 + h} \right)^{k+1} \quad (59)$$

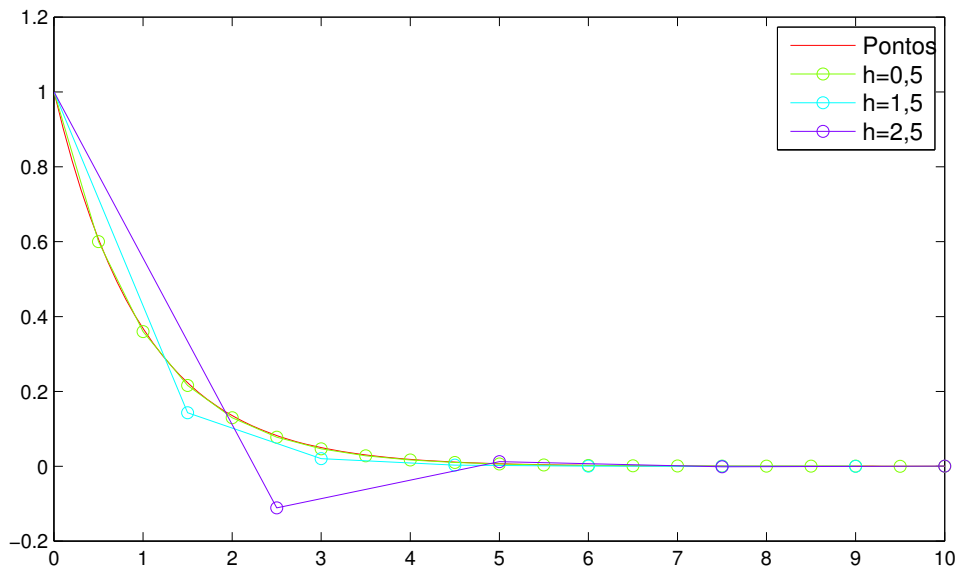
Mivel tudjuk, hogy

$$\left| \frac{2 - h}{2 + h} \right| < 1$$

ezért ennek hatványozódása miatt:

- $0 < h < 2$ lépésköz esetén a numerikus megoldás monoton csökken és a 0-hoz konvergál, míg
- $h > 2$ esetén oszcillálva konvergál a 0-hoz.

Összefoglalva: a módosítás eredményeként már bármilyen h lépésköze konvergál a numerikus megoldásunk a 0-hoz, legfeljebb oszcillálni fog, ezt a 3. ábrán láthatjuk.



3. ábra. A radioaktív bomlási egyenlet megoldása a módosított explicit Euler-módszerrel

4.1.4. Megoldás az egzakt módszerrel

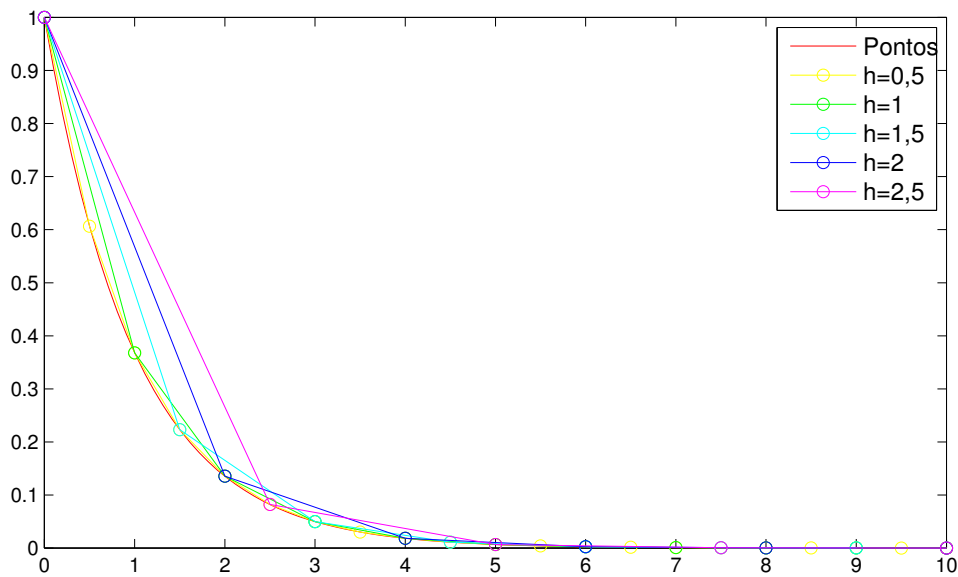
Lássuk most Mickens egzakt módszerét minderre.

$$\begin{vmatrix} y_k & y_k^{(1)} \\ y_{k+1} & y_{k+1}^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

Ez itt a következőképpen alakítható:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_k & e^{-\lambda \cdot h \cdot k} \\ y_{k+1} & e^{-\lambda \cdot h \cdot (k+1)} \end{vmatrix} &= e^{-\lambda \cdot h \cdot k} \begin{vmatrix} y_k & 1 \\ y_{k+1} & e^{-\lambda \cdot h} \end{vmatrix} = \\ &= e^{-\lambda \cdot h \cdot k} \cdot (y_k \cdot e^{-\lambda \cdot h} - y_{k+1}) = 0 \\ &y_{k+1} = e^{-\lambda \cdot h} \cdot y_k \end{aligned}$$

Ez a módszer természetesen teljesíti az egzakt módszerek tulajdonságait, így bármilyen $h > 0$ lépésközre a numerikus megoldás és az eredeti megoldás adott pontbeli értéke megegyezik. A 4. ábrán ezt csak véges sok h -ra vizsgáltuk, de természetesen tetszőleges $h > 0$ -ra működik.



4. ábra. A radioaktív bomlási egyenlet megoldása az egzakt módszerrel.

4.1.5. Megoldás a normált egzakt módszerrel

Végül nézzük meg a normált egzakt módszerünket.

$$y' = -\lambda \cdot y$$

Ennek egyetlen egyensúlyi pontja $\bar{y}^{(1)} = 0$. Kiszámolva a hozzá tartozó $R_1 = -\lambda$ -t, azt kapjuk, hogy $R^* = \lambda$.

Felhasználva a $\varphi(z) = 1 - e^{-z}$ korábban kiválasztott normáló avagy nevezőbeli függvényt a kapott nemstandard módszerünk:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\left(\frac{1 - e^{-\lambda \cdot h}}{\lambda}\right)} = -\lambda \cdot y_k$$

Ezt rendezhetjük egy kicsit egyszerűbb és egyben ismerősebb alakba:

$$\frac{\lambda \cdot (y_{k+1} - y_k)}{1 - e^{-\lambda \cdot h}} = -\lambda y_k \quad (60)$$

$$y_{k+1} - y_k = -y_k \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot h}) \quad (61)$$

$$y_{k+1} = e^{-\lambda \cdot h} \cdot y_k = y_0 \cdot e^{-\lambda \cdot k \cdot h} \quad (62)$$

Vagyis visszakaptuk az eredeti, általános megoldás képletének numerikus formáját. Ez természetesen teljesíti az összes egzakt módszerekre vonatkozó tulajdonságot és egyben a nemstandard módszerek szabályainak is eleget tesz.

4.2. A logisztikus egyenlet

Egy másik, sok problémát előhozó egyenlet az úgynevezett logisztikus differenciálegyenlet.

$$y' = y \cdot (1 - y) \quad (63)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (64)$$

Ennek általános megoldása:

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0) \cdot e^{-t}} \quad (65)$$

A viselkedés ahogyan a fentebbi bomlási egyenletnél, úgy itt is szintén függ y_0 értéktől. Ha $y_0 < 0$, akkor először monoton csökken $-\infty$ -ig, majd egy szinguláris pont után monoton csökkenően konvergál 0-hoz. Ha viszont $y_0 > 0$ akkor a megoldás monoton csökkenően konvergál 1-hez. A differenciálegyenlet szingularitási pontja:

$$t^* = \ln \frac{1 + |y_0|}{|y_0|}$$

A beágyazott képeken mindenhol egységesen az $y(0) = 0.6$ kezdeti értékkel számolunk, így a szinguláris pont nem látszik, de alapvetően nem is ezt szeretnénk szemléltetni.

4.2.1. Megoldás az explicit Euler-módszerrel

Mivel az egyenletben előfordul másodfokú kifejezése y -nak, ezért itt már két egyensúlyi pont viselkedését fogjuk vizsgálni. Azt szeretnénk, ha az általunk használt módszer egyensúlyi pontjai megegyeznének az eredeti egyensúlyi pontokkal, továbbá a stabilitási tulajdonságuk is. Az explicit módszer formulája erre az egyenletre a következő:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y_k \cdot (1 - y_k) \quad (66)$$

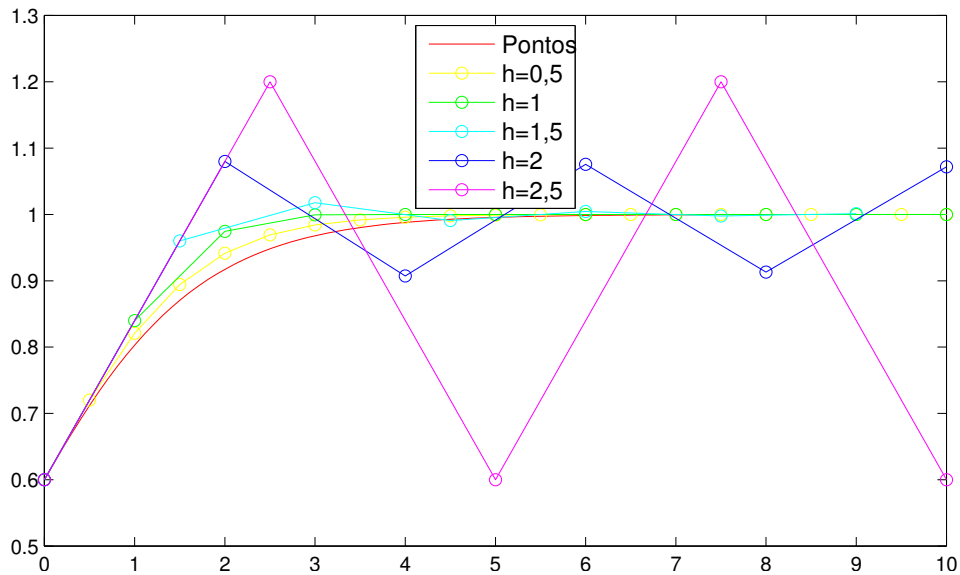
A viselkedés vizsgálatához lineárisan közelítünk a két egyensúlyi pont körül, a nem-lineáris tagokat elhagyjuk jobboldalról.

$y^{(0)} = 0$	$y^{(1)} = 1$
$y_k = y^{(0)} + \epsilon_k = \epsilon_k$	$y_k = y^{(1)} + \eta_k = 1 + \eta_k$
$ \epsilon_k < 1$	$ \eta_k < 1$
$\frac{\epsilon_k - \epsilon_{k-1}}{h} \leq \epsilon_{k-1}$	$\frac{(1+\eta_k) - (1+\eta_{k-1})}{h} \leq -\eta_{k-1}$
$\epsilon_k = \epsilon_0 \cdot (1+h)^k$	$\eta_k = \eta_0(1-h)^k$

Ezek alapján

- $y^{(0)}$ bármilyen $h > 0$ esetén instabil, ami megegyezik az eredeti tulajdonságokkal,
- $y^{(1)}$ pedig $0 < h < 1$ -re stabil,
- $1 < h < 2$ -re stabil, azonban csökkenő amplitúdóval, de oszcillál
- míg $h > 2$ esetén instabil és növekvő amplitúdóval oszcillál.

A megoldás általános tulajdonságait ábrázoljuk különböző h lépésközökre az 5. ábrán.



5. ábra. A logisztikus egyenlet megoldása az explicit Euler-módszerrel.

Láthatóan a kapott megoldás $0 < h < 1$ lépésközre az eredetit követi, ennél nagyobb, $1 < h < 2$ -ra már oszcillálni kezd, míg végül oszcillálva divergál $h \geq 2$ -től.

Összegezve: az explicit módszer által adott megoldás mind az egyensúlyi pontok viselkedését, mind pedig a konvergenciát tekintve csak $0 < h < 1$ esetén egyezik meg az eredeti megoldásával.

4.2.2. Megoldás a módosított explicit Euler-módszerrel

Az egyenletre alkalmazott explicit Euler-módszert módosítsuk a következőképpen:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y_k \cdot (1 - y_{k+1})$$

Ezt megoldani a változók cseréjével lehet:

$$y_k = \frac{1}{\omega_k}$$

Helyettesítsünk be:

$$\omega_{k+1} - \left(\frac{1}{1+h} \right) \cdot \omega_k = \frac{h}{1+h} \quad (67)$$

$$\omega_{k+1} = \frac{\omega_k + h}{1+h} = \frac{(1+h) - 1 + \omega_k}{1+h} = 1 + \frac{\omega_k - 1}{1+h} \quad (68)$$

$$\omega_{k+1} = 1 + \frac{\omega_0 - 1}{(1+h)^{k+1}} \quad (69)$$

$$\omega_k = 1 + \frac{\omega_0 - 1}{(1+h)^k} \quad (70)$$

A kezdetiérték feltétel alapján

$$\omega_0 = \frac{1}{y_0}.$$

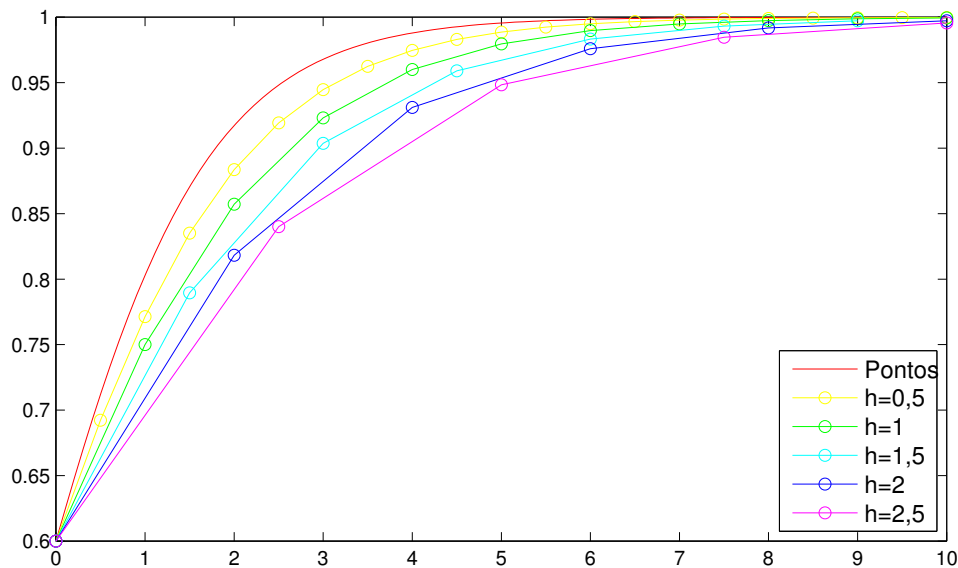
Végül vegyük a (70) egyenletben mindkét oldal reciprokát:

$$y_k = \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{y_0} - 1}{(1+h)^k}}$$

Kicsit átláthatóbb formába rendezve pedig:

$$y_k = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0) \cdot (1+h)^k}$$

Ahogy ezt a 6. ábrán is láthatjuk, ez már bármilyen $h > 0$ -ra 0-hoz konvergál, így a módosításunk valóban segített.



6. ábra. A logisztikus egyenlet megoldása a módosított explicit Euler-módszerrel.

4.2.3. Megoldás a centrális Euler-módszerrel

Az egyenletre alkalmazott centrális Euler-módszer alakja:

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2 \cdot h} = y_k \cdot (1 - y_k)$$

Mivel a módszerünk most egy kétlépéses módszer, y_1 -re is szükség van. Legyen tehát

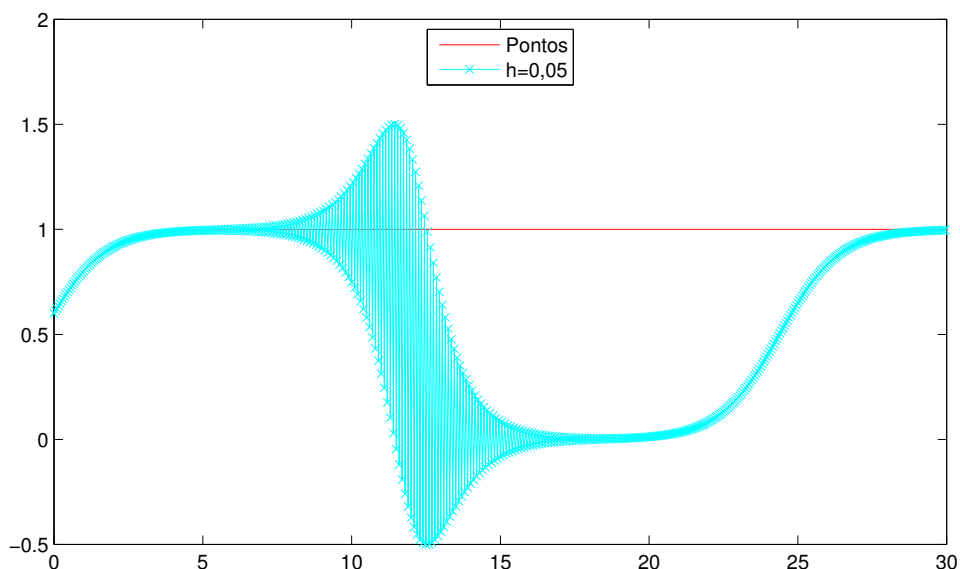
$$y_1 = y_0 + h \cdot y_0 \cdot (1 - y_0).$$

Ismét az egyensúlyi pontok vizsgálatával kezdünk. A két egyensúlyi pontunk továbbra is $y_k = y^{(0)} = 0$ és $y_k = y^{(1)} = 1$. Közelítsük őket ismét lineárisan, vagyis elhagyva a jobboldalról a nemlineáris tagokat.

$y^{(0)} = 0$	$y^{(1)} = 1$
$y_k = y^{(0)} + \epsilon_k$	$y_k = y^{(1)} + \eta_k$
$ \epsilon_k \ll 1$	$ \eta_k \ll 1$
$\frac{\epsilon_{k+1} - \epsilon_{k-1}}{2 \cdot h} = \epsilon_k$	$\frac{\eta_{k+1} - \eta_{k-1}}{2 \cdot h} = -\eta_k$
$\epsilon_k = A \cdot (r_+)^k + B \cdot (r_-)^k$	$\eta_k = C \cdot (s_+)^k + D \cdot (s_-)^k$
Itt A és B kicsi konstansok	ahogyan C és D is.
$r_{\pm}(h) = h \pm \sqrt{1 + h^2}$	$s_{\pm}(h) = -h \pm \sqrt{1 + h^2}$

Ekkor tehát ϵ_k első tagja exponenciális sebességgel nőni fog, második tagja (exponenciális sebességgel) csökkenő amplitúdóval oszcillálni, ami összegezve azt jelenti, hogy az egyensúlyi pont instabil a módszer szerint, ahogyan eredetileg is. A másik egyensúlyi pont, η_k szintén két részből áll, ezek viselkedése viszont: az első rész exponenciális sebességgel csökken, míg második része (exponenciális sebességgel) növekvő amplitúdóval oszcillál. Eszerint a módszer szerint tehát mindkét egyensúlyi pont instabil.

A módszer által generált megoldás viselkedése: tetszőleges $0 < y_0 < 1$ kezdeti értékre y_k először exponenciális sebességgel nő $y^{(1)} = 1$ környezetéig, utána oszcillálni kezd (exponenciális sebességgel) növekvő amplitúdóval, amíg a másik egyensúlyi pont közelébe ér, innen pedig ismét nő 1-ig. Ez a minta periodikusan ismétlődik. Ezt láthatjuk a 7. ábrán.



7. ábra. A logisztikus egyenlet megoldása a centrális Euler-módszerrel.

4.2.4. Megoldás a módosított centrális Euler-módszerrel

Kicsit módosítsuk a differenciaegyenlet jobb oldalát:

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2 \cdot h} = y_{k-1} \cdot (1 - y_{k+1})$$

Megint a változók cseréjével tudjuk megoldani:

$$y_k = \frac{1}{\omega_k}$$

Először helyettesítsünk be, aztán rendezzük a következők szerint:

$$\frac{\frac{1}{\omega_{k+1}} - \frac{1}{\omega_{k-1}}}{2 \cdot h} = \frac{1}{\omega_{k-1}} - \frac{1}{\omega_{k-1} \cdot \omega_{k+1}} \quad (71)$$

$$\omega_{k-1} - \omega_{k+1} = 2 \cdot h \cdot (\omega_{k+1} - 1) \quad (72)$$

$$\omega_{k-1} + 2 \cdot h = (2 \cdot h + 1) \cdot \omega_{k+1} \quad (73)$$

Tudjuk, hogy a módszer kétlépéses, de jelen esetben ráadásul a köztes lépések ki is maradnak, így ketté kell bontanunk k paritása szerint. (Természetesen két kezdeti értékre lesz szükségünk ismét, de y_1 -et ugyanúgy meg tudjuk határozni, mint a fenti módszereknél.) Ha k páros: ($k = 2 \cdot l$)

$$\omega_k = \frac{\omega_{k-2} - 1}{2 \cdot h + 1} + 1 = \dots = \frac{x_0 - 1}{(2 \cdot h + 1)^{k/2}} + 1 \quad (74)$$

Vegyük a reciprokát mindkét oldalnak:

$$y_k = \frac{1}{1 + (\frac{1}{y_0} - 1) \cdot (2 \cdot h + 1)^{-k/2}} = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0) \cdot (2 \cdot h + 1)^{-l}} \quad (75)$$

Ha pedig k páratlan: ($k = 2 \cdot l + 1$)

$$\omega_k = \frac{\omega_{k-2} - 1}{2 \cdot h + 1} + 1 = \dots = \frac{\omega_1 - 1}{(2 \cdot h + 1)^{k/2}} + 1 \quad (76)$$

Megint vegyünk a reciprokát mindkét oldalnak:

$$y_k = \frac{1}{1 + (\frac{1}{y_1} - 1) \cdot (2 \cdot h + 1)^{-k/2}} = \frac{y_1}{y_1 + (1 - y_1) \cdot (2 \cdot h + 1)^{-l}} \quad (77)$$

Ha kicsit egységesebb képletet szeretnénk, akkor ez a két eset felírható egyben a következő módon: [1]

$$y_k = \frac{1}{1 + [A + (-1)^k \cdot B] \cdot (1 + 2 \cdot h)^{-k/2}} \quad (78)$$

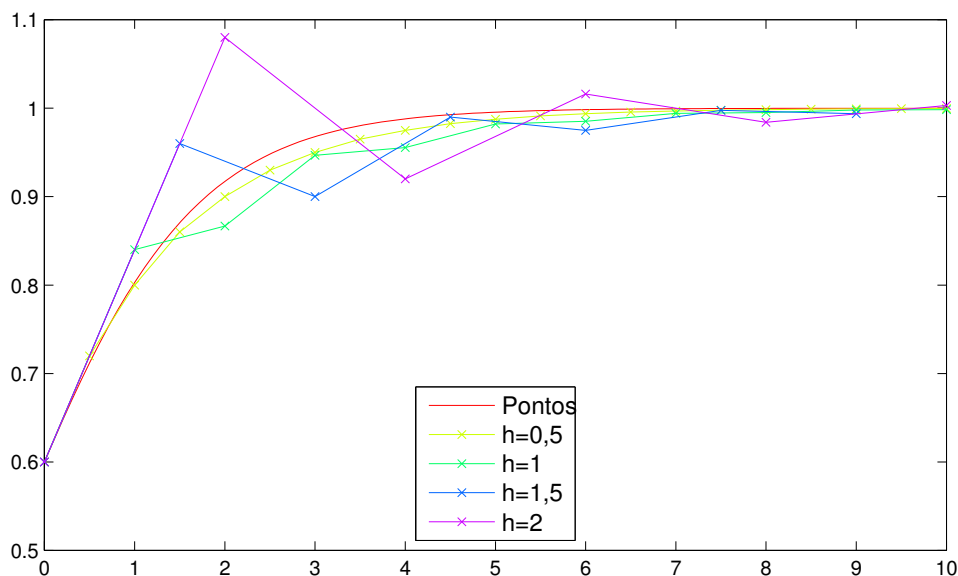
ahol

$$A = \frac{1}{2 \cdot y_0} - \frac{y_1 - 1}{2 \cdot y_1} \cdot (1 + 2 \cdot h)^{1/2} - \frac{1}{2} \quad (79)$$

és

$$B = \frac{1}{2 \cdot y_0} + \frac{y_1 - 1}{2 \cdot y_1} \cdot (1 + 2 \cdot h)^{1/2} - \frac{1}{2} \quad (80)$$

A numerikus módszer által kapott megoldásunk ekkor y_0 és a belőle nyert y_1 függvényében: ha $0 < y_0 < 1$ és y_1 a fenti, akkor a megoldás alapvető tulajdonságai megegyeznek az eredeti megoldásával és a 8. ábrán látható módon tartanak ahhoz. (Legfeljebb kis oszcillációkban térnek el attól.) Nagyobb y_0 kezdeti érték esetén a kapott megoldás még mindig konvergál, azonban már nagyobb amplitúdóval fog oszcillálni. A 8. ábrán a szokásos $y(0) = 0.6$ kezdeti értékkel ábrázoljuk mindezt.



8. ábra. A logisztikus egyenlet megoldása a módosított centrális Euler-módszerrel.

4.2.5. Megoldás az egzakt módszerrel

$$y' = y \cdot (1 - y) \quad (81)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (82)$$

Ennek eredeti megoldása:

$$y(t) = \frac{y_0}{(1 - y_0) \cdot e^{-(t-t_0)} + y_0}.$$

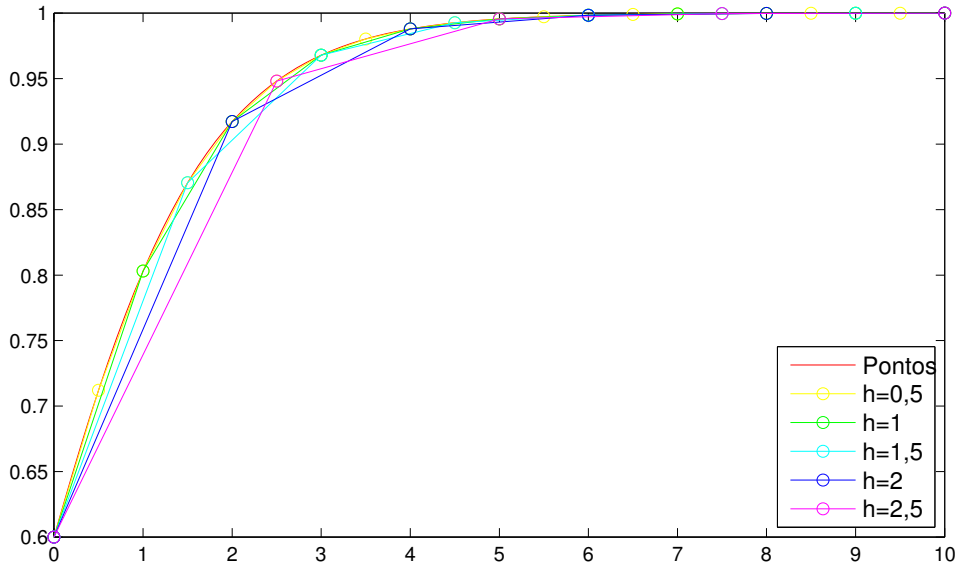
Most ismét végezzük el a megfelelő helyettesítéseket:

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{(1 - y_k) \cdot e^{-h} + y_k}$$

Ezt rendezzük a szokásos formába:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{e^h - 1} = y_k - y_k \cdot y_{k+1}$$

Ennek viselkedése látható a 9. ábrán. Mivel egzakt a módszer, természetesen teljesíti a megfelelő tulajdonságokat, így tetszőleges $h > 0$ -ra a numerikus megoldás pontjai megegyeznek az eredeti megoldás adott pontbeli értékeivel.



9. ábra. A logisztikus egyenlet megoldása az egzakt módszerrel.

4.2.6. Megoldás a normált egzakt módszerrel

$$y' = y \cdot (1 - y)$$

Ennek az egyensúlyi pontjai továbbra is az $\bar{y}^{(1)} = 0$ és az $\bar{y}^{(2)} = 1$, amiből pedig a hozzájuk tartozó R_i értékek rendre $R_1 = 1$ és $R_2 = -1$, így tehát $R^* = 1$.

Helyettesítve a $\varphi(z) = 1 - e^{-z}$ nevezőfüggvénybe ezek alapján a normált numerikus módszerünk alakja:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{1 - e^{-h}} = y_k \cdot (1 - y_k)$$

Ez láthatóan nem felel meg a nemstandard modellek mindegyik szabályának. A jobb oldalon lokálisan közelítünk egy másodfokú kifejezést, így ezt először is kijavítjuk:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{1 - e^{-h}} = y_k \cdot (1 - y_{k+1})$$

Ezt a változók cseréjével tudjuk megoldani:

$$y_k = \frac{1}{\omega_k},$$

az így kapott alak:

$$\omega_{k+1} - \frac{1}{2 - e^{-h}} \cdot \omega_k = \frac{1 - e^{-h}}{2 - e^{-h}}.$$

Ezt a következő algebrai átalakításokkal hozzuk olyan alakra, hogy az iterációt könnyen vissza tudjuk majd vezetni az első (nulladik) tagig.

$$\omega_{k+1} = \frac{\omega_k + 1 - e^{-h}}{2 - e^{-h}} = \frac{\omega_k - 1 + 1 + 1 - e^{-h}}{2 - e^{-h}} = \quad (83)$$

$$= \frac{\omega_k - 1}{2 - e^{-h}} + 1 \quad (84)$$

ezt vezessük vissza ω_0 -ig:

$$\omega_k = \frac{\omega_0 - 1}{(2 - e^{-h})^k} + 1 \quad (85)$$

az y -okhoz való visszatéréshez vegyük az egész reciprokát:

$$y_k = \frac{1}{\omega_k} = \frac{1}{\frac{\omega_0 - 1}{(2 - e^{-h})^k} + 1} = \quad (86)$$

$$= \frac{y_0}{(1 - y_0) \cdot (2 - e^{-h})^{-k} + y_0} \quad (87)$$

Mivel tudjuk, hogy $1 < 2 - e^{-h} < 2$ minden $h > 0$ -ra, ezért ennek $(-k)$ -adik hatványai egy exponenciális sebességgel csökkenő függvényét alkotják. Ez összességében azt jelenti, hogy a normált módszer által generált megoldás tulajdonságai minden $h > 0$ lépésközzre megegyeznek az eredeti megoldásával.

Összefoglalás

A fentiekben megmutattuk tehát, hogy az általánosan használt, standard módszerek közül volt olyan, ami meghatározottan kicsi h lépésközre valóban a megoldáshoz tartott, és olyan standard módszerrel is találkoztunk, ami nem viselkedett ilyen szépen. Ezután ezeknek a javított verzióit vizsgáltuk. Ezek a javítások arra irányultak, hogy a differenciaegyenlet jobb oldalát módosítva, a nemstandard szabályok tanácsainak eleget tegyünk és az egyes pontokat ne lokálisan közelítsük. Ezek hasonlóan az egzakt módszerekhez már sokkal jobban működtek. A normált egzakt módszer pedig az egzakthoz hasonló, illetve azzal megegyező megoldást generált, ami bizonyítottan jól működött.

Összesítve: még mindig nem tudunk legjobb módszert adni, de mutattunk egy lehetőséget, hogy a már meglévő módszereinket hogyan tudjuk feljavítani. Ezek a javítások pedig valóban hasznosnak bizonyultak.

A tanulság tehát, hogy ha megfelelő numerikus módszert szeretnénk választani, ismert megoldás esetén célszerű az egzakt módszerekhez fordulnunk, nem ismert megoldás esetén pedig valamilyen módosított módszert alkalmazhatunk.

Ábrák jegyzéke

1.	A radioaktív bomlási egyenlet megoldása az explicit Euler-módszerrel. . .	23
2.	A radioaktív bomlási egyenlet megoldása az implicit Euler-módszerrel. . .	25
3.	A radioaktív bomlási egyenlet megoldása a módosított explicit Euler- módszerrel	26
4.	A radioaktív bomlási egyenlet megoldása az egzakt módszerrel.	27
5.	A logisztikus egyenlet megoldása az explicit Euler-módszerrel.	29
6.	A logisztikus egyenlet megoldása a módosított explicit Euler-módszerrel.	31
7.	A logisztikus egyenlet megoldása a centrális Euler-módszerrel.	32
8.	A logisztikus egyenlet megoldása a módosított centrális Euler-módszerrel.	34
9.	A logisztikus egyenlet megoldása az egzakt módszerrel.	35

Hivatkozások

- [1] MICKENS, RONALD E.: *Nonstandard difference models of differential equations*, 1994.
- [2] GERGÓ LAJOS: *Numerikus módszerek*, 2010.
- [3] MICKENS, RONALD E.: *Appilcations of nonstandard finite difference schemes*, 2005.
- [4] PETER M. MANNING AND GARY F. MARGRAVE: *Introduction to non-standard finite-difference modelling*, 2006.
CREWES Research Report - Volume 18
- [5] SIMON L. PÉTER: *Közönséges differenciálegyenletek Jegyzet*, 2007.