Lineáris terek – projektív síkok

Balog Tamás szakdolgozata
Matematika B.Sc., alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: dr. Szőnyi Tamás
egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2015

Tartalomjegyzék

I. Bevezetés

Önálló fogalomként *Paul Libois* belga matematikus vezette be a *lineáris tér* fogalmát 1964-ben, de lineáris terekkel kapcsolatos eredmények már jóval korábbról is vannak. Az egyik legjelentősebb eredmény 1948-ban a *de Bruijn–Erdős-tétel* ([2]), ennek előzményének tekinthető a *Fisher-egyenlőtlenség* ([1]). A dolgozat az *Erdős, Mullin, T. Sós, Stinson-tétel* ([8]) bizonyításával zárul, de természetesen további eredmények is vannak.
A *projektív sík* megkerülhetetlen fogalom, ha lineáris terekben pontok és egyenesek száma közti összefüggéseket vizsgálunk, mivel ezek igen speciális lineáris terek. Legismertebb a legkisebb rendű véges projektív sík, a hét pontból és hét egyenesből álló *Fano-sík*. Külön bemutatásra kerül majd néhány érdekes, véges projektív síkok színezésével kapcsolatos eredmény is. A szakdolgozatot a lineáris tereknél is általánosabb *illeszkedési struktúrák*kal (vagy ha úgy tetszik, *hipergráfok*kal) vezetem be.

I.1. Illeszkedési struktúrák

I.1.1. Definíció. *Egy* $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ *hármast* illeszkedési struktúrá*nak nevezünk, ha* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{B}$ *diszjunkt halmazok (előbbi elemeit* pontok*nak, utóbbi elemeit* blokkok*nak vagy* egyenesek*nek nevezzük) és* I *egy* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{B}$ *elemei közti ún.* illeszkedési reláció*, pontosabban* $I \subset \mathbf{P} \times \mathbf{B}$.

A $(p, B) \in I$ helyett a geometriai terminológiának megfelelően $p\ I\ B$ -t írunk.
Az *illeszkedési struktúra* elnevezés helyett szokásos a *hipergráf* megnevezés is.
A korábban tanult *gráfok* olyan speciális illeszkedési struktúrák vagy speciális hipergráfok, ahol minden blokk vagy 2, vagy 1 pontra illeszkedik, utóbbi attól függően fordul elő, hogy hurokéleket megengedünk-e a gráfban. Ha egynél több blokk is pontosan ugyanarra az 1 vagy 2 pontra illeszkedik, akkor a gráfban többszörös élről (előbbi esetben többszörös hurokélről) beszélünk.

I.1.2. Definíció. *A* $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ *illeszkedési struktúra* duálisá*nak nevezünk egy* $\mathbf{D}^* = (\mathbf{P}^*, \mathbf{B}^*, I^*)$ *illeszkedési struktúrát, ha* $\mathbf{P}^* = \mathbf{B}, \mathbf{B}^* = \mathbf{P}$*,* I^* *pedig* I *inverze, azaz* $\mathbf{D}$*-ben* $p\ I\ B$ *(*$p \in \mathbf{P}, B \in \mathbf{B}$*) pontosan akkor, ha* $\mathbf{D}^*$*-ban* $B\ I^*\ p$ *(*$B \in \mathbf{P}^*, p \in \mathbf{B}^*$*). (Illeszkedési struktúra duálisának duálisa az eredeti illeszkedési struktúra, vagyis* $\mathbf{D}^{**} = \mathbf{D}$*.)*

Gráfok esetén a duális struktúra megnevezése: *élgráf*.

I.1.3. Definíció. *A* $p \in \mathbf{P}$ pont foka *azon blokkok száma, melyre* p *illeszkedik, tehát*

$$\deg(p) = |\{B \in \mathbf{B} : p\ I\ B\}|,$$

a $B \in \mathbf{B}$ blokk foka *a* B*-re illeszkedő pontok száma, azaz*

$$\deg(B) = |\{p \in \mathbf{P} : p\ I\ B\}|.$$

I.1.4. Definíció. $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ *és* $\mathbf{D}' = (\mathbf{P}', \mathbf{B}', I')$ *illeszkedési struktúrák. A* $\Phi\colon \mathbf{P} \cup \mathbf{B} \to \mathbf{P}' \cup \mathbf{B}'$*,* $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ *leképezéspárt* izomorfizmus*nak nevezzük, ha*

- $\phi_1\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ *és* $\phi_2\colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}'$ *bijekciók,*
- $pIB \Leftrightarrow \phi_1(p) I' \phi_2(B) \qquad \forall p \in \mathbf{P},\ \forall B \in \mathbf{B}$.

$\mathbf{D}$ *és* $\mathbf{D}'$ *egymással* izomorfak*, ha létezik köztük izomorfizmus.*

Ennek alapján egy illeszkedési struktúra és duálisa nem feltétlen izomorf egymással, pl. egy két pontból és egy (őket összekötő) egyenesből álló struktúra duálisa egy pontból és két ezen (és csak ezen) áthaladó egyenesből áll, az előbbi definícióban nem teljesülhet ϕ_1 és ϕ_2 bijektív tulajdonsága. Azaz nyilván szükséges (viszont nem elégséges) feltétel, hogy az illeszkedési struktúrában a pontok és blokkok száma megegyezzen.

Az illeszkedési struktúrát *egyszerű*nek nevezzük, ha bármely két különböző blokkjára (egyenesére) nem pontosan ugyanazok a pontok illeszkednek. (Egy gráf akkor *egyszerű*, ha egyszerű illeszkedési struktúra, és minden blokk pontosan 2 pontra illeszkedik.) Ez esetben tekinthetjük úgy, hogy az egyenesek a pontok bizonyos részhalmazai.

Feladat. *Lássuk be, hogy ha* $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$*,* $\mathbf{D}' = (\mathbf{P}, \mathbf{B}', \in)$ *és* $\mathbf{B}' = \{\{p \in \mathbf{P} : pIB\} | B \in \mathbf{B}\}$*, akkor* $\mathbf{D}$ *és* $\mathbf{D}'$ *izomorfak egymással, ha* $\mathbf{D}$ *egyszerű illeszkedési struktúra.*

Megoldás. $\phi_1 \colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ az identikus leképezés, tehát bijekció. A $\phi_2 \colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}'$, $\phi_2(B) = \{p \in \mathbf{P} : pIB\}$ leképezés injektív, mivel ha $\mathbf{B} \ni B_1 \neq B_2 \in \mathbf{B}$, akkor $\phi_2(B_1) \neq \phi_2(B_2)$ teljesül a struktúra egyszerűsége miatt. Ezen kívül ϕ_2 szürjektív is, hiszen B' elemeit B elemeiből képeztük. Még be kell látni, hogy $pIB \Leftrightarrow \phi_1(p)I'\phi_2(B)$ teljesül $\forall p \in \mathbf{P}$, $\forall B \in \mathbf{B}$ esetén, azaz $pIB \Leftrightarrow p \in \{p \in \mathbf{P} : pIB\}$, ami teljesen nyilvánvalóan teljesül. $\square$

I.1.5. Definíció. *A $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$ halmazpár* halmazrendszer*, ha $E(\mathcal{H})$ elemei $V(\mathcal{H})$ bizonyos részhalmazai.*

I.1.6. Definíció. *A $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ véges illeszkedési struktúra* illeszkedési mátrix*a (vagy más néven* pont-blokk illeszkedési mátrix*a) $M = (m_{ij}) \quad (i = 1, \ldots, v,$ $j = 1, \ldots, b)$, ahol*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } p_i \; I \; B_j \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

és $p_1, p_2, \ldots, p_v \in \mathbf{P}, \quad B_1, B_2, \ldots, B_b \in \mathbf{B}$ a $\mathbf{D}$ illeszkedési struktúra összes pontja illetve blokkja felsorolva.

I.1.7. Definíció. *$\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ illeszkedési struktúra* szomszédsági mátrix*a az $A = MM^T$ (szimmetrikus) mátrix.*

Az A szomszédsági mátrix a_{ij} eleme a $\mathbf{D}$-ben p_i-re és p_j-re is illeszkedő blokkok száma. Ez $i = j$ esetén éppen $\deg(p_i)$, tehát a főátlóban a $\mathbf{D}$ pontjainak fokai szerepelnek. Tekinthetjük még az $B = M^T M$ mátrixot is, ennek egy b_{ij} eleme B_i és B_j közös pontjainak száma, a főátlóban itt az egyenesek fokszámai (elemszámai) vannak.

I.1.8. Lemma. *Bármely $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ illeszkedési struktúrára fennáll*

$$\sum_{p \in \mathbf{P}} \deg(p) = \sum_{B \in \mathbf{B}} \deg(B).$$

Bizonyítás. $\mathbf{D}$ illeszkedési mátrixában egy adott sor elemeit összeadva a sornak megfelelő pont fokát kapjuk eredményül, egy adott oszlop elemeit összeadva pedig az oszlopnak megfelelő blokk fokát kapjuk. Vagyis a képlet baloldala a sorösszegek szummázva, a képlet jobboldala pedig az oszlopösszegek szummázva, ezek pedig megegyeznek, hiszen mindkettő az illeszkedési mátrix összes elemének összege (ami itt speciálisan épp a mátrixban lévő egyesek száma). ∎

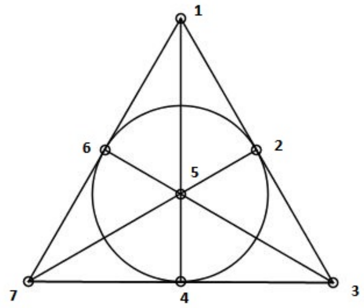
II. Projektív és affin síkok

II.1. Projektív síkok

Feladat. ([4]) *Hét ember ultit szeretne játszani úgy, hogy minden napra egy partit szerveznek és mindenki szeretne játszani mindenkivel pontosan egyszer.*

Megoldás. A játékosokat jelöljük $1-7$-ig! $\binom{7}{2}=21$ párosításnak kell eleget tennünk, egyetlen ulti parti alatt $\binom{3}{2}=3$ valósulhat meg, azaz 7 partira (és ezzel 7 napra) szükségünk lesz. Az első nap játsszon $(1,2,3)$, a második nap $(1,4,5)$, a harmadik nap $(1,6,7)$, a negyedik nap $(2,4,6)$, az ötödik nap $(2,5,7)$, a hatodik nap $(3,4,7)$, a hetedik nap $(3,5,6)$. Ellenőrizhető, hogy bármely két beosztás metszete legfeljebb 1, sőt sikerült olyan beosztást készítenünk, hogy pontosan egy. Lehet-e egyáltalán készíteni olyan beosztást, hogy valamely két nap csupa különböző ember ül le játszani? Például az első nap $(1,2,3)$, a második nap $(4,5,6)$. Ez esetben például az $(1,4),(1,5),(1,6)$ pároknak külön játszmákban kell szerepelniük (külön hármasokban), különben nem teljesülne a *pontosan egyszer* feltétel, másrészt viszont a harmadik naptól kezdve valamennyi játszmában részt kellene vennie a 7-es játékosnak, ezáltal bármelyik emberrel háromszor is játszana, így megintcsak nem teljesülne a feladat feltétele. Azaz ebből következik, hogy a megadott feltétel mellett nem lehet olyan beosztást készíteni, hogy bármely két parti játékosai között ne legyen közös résztvevő. □

Ábrázolva a megoldást:



Az előbbi megoldásból kapott ábra nem más, mint az ún. *Fano-sík.* Ezt fogjuk most általánosítani a következő definícióval:

II.1.1. Definíció. *Legyen* Π *nemüres halmaz (elemeit* pont*nak nevezzük),* Λ *(elemeit* egyenes*nek hívjuk) a* Π *bizonyos részhalmazainak a halmaza. Nevezzük a* (Π, Λ) *párt* projektív sík*nak a következő axiómákkal:*

1. Π *bármely két különböző pontjához pontosan egy olyan egyenes található, melyre mindkettő illeszkedik.*

2. Λ *bármely két különböző egyeneséhez pontosan egy olyan pont van* Π*-ben, melyre mindkét egyenes illeszkedik.*

3. *Létezik négy olyan pont* Π*-ben, melyek közül bármely három nem kollineáris, azaz nem illeszkednek egy egyenesre.*

A projektív sík véges, pontosabban q-adrendű, ha teljesít egy negyedik axiómát is:

4. *Van olyan egyenes, amelyre* $q + 1$ *pont illeszkedik.*

Ezek alapján a *Fano-sík* egy másodrendű projektív sík. Sőt az is igaz, hogy izomorfiától eltekintve az egyetlen másodrendű projektív sík.

Állítás. II.1.2. *Projektív síkban igaz a* dualitás elve*, azaz ha egy állítás pontok és egyenesek illeszkedéséről szól, akkor az állításból a* pont *és* egyenes *szavak felcserélésével kapott állítás ugyanolyan igazságértékkel teljesül, mint az eredeti.*

Bizonyítás. A projektív sík definíciójában az első két axióma megkapható egymásból a *pont* és *egyenes* szavak felcserélésével.

A harmadik axióma szerint létezik négy olyan pont, melyek közül bárhogy véve hármat azok nem kollineárisak. Be fogjuk látni, hogy itt is felcserélhetjük a *pont* és *egyenes* szavakat. Legyen a harmadik axiómát teljesítő négy pont mondjuk a, b, c, d. Az $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}$ pontpárokra illeszkedő egyenesek (legyenek rendre A, B, C, D) a harmadik axióma miatt különbözőek. A, B, C, D egyenesek páronként vett metszéspontjai az a, b, c, d pontokon kívül még e, ami A és C metszéspontja, és f, mely B és D közös pontja. Ez a két pont különböző, ugyanis ha nem így lenne, akkor például C és B egyenesek a c-n kívül még az

$e = f$ pontban is metszenék egymást, ellentmondásban a projektív sík definíciójával. Így A, B, C, D közül bármely hármat választva nincs közös pontjuk. A negyedik axióma *duális* megfelelője az, hogy van olyan pont, amin épp $q + 1$ darab egyenes megy át. A harmadik axióma miatt létezik pont a $q + 1$-pontú egyenesen kívül, ezen a II.1.1. első és második axiómája miatt pontosan $q + 1$ darab egyenes megy át. ■

II.1.3. Lemma. *A projektív sík egy tetszőleges pontját véve a rajta átmenő egyenesek halmaza a projektív sík összes pontját magában foglalja.*

Bizonyítás. Vegyük a projektív sík egy s pontját, és indirekt tegyük fel, hogy $\exists\ t \neq s$ pont, amit az s-en átmenő egyenesek egyike sem tartalmaz. Ekkor a II.1.1. első axiómája sérül: $\{s, t\}$ pontpárra nem illeszkedik egyenes. ■

Mondjuk ki a „duális" megfelelőjét is:

II.1.4. Lemma. *A projektív sík egy tetszőleges egyenesét véve a rá illeszkedő pontokon átmenő egyenesek halmaza lefedi a projektív sík egyeneseinek halmazát.*

II.1.5. Lemma. *Ha a projektív sík q-adrendű, akkor $q \geq 2$, azaz nem lehet olyan egyenes, amely 3-nál kevesebb pontot tartalmaz.*

Bizonyítás. Indirekt: legyen K egyenes 2-elemű, vegyünk ezen kívül egy tetszőleges p pontot, ilyennek lennie kell II.1.1. harmadik axiómája folytán. A II.1.1. első és második axiómája miatt $\deg(p) = 2$. Másik K-n kívüli pont nem létezhet, ugyanis az a II.1.1. első axiómája miatt ellentmondana $\deg(p) = 2$-nek. Ekkor a projektív sík összesen 3 pontot tartalmaz, a II.1.1. harmadik axiómája nem teljesülhet.

Ha K 1 vagy 0-elemű, akkor szintén nem teljesül a II.1.1., előbbi esetben (van pontosan egy legalább 1-elemű egyenes, melynek pontosan az egyik pontjára illeszkednek az 1-pontú egyenesek) a harmadik, utóbbi esetben a második axióma nem igaz. ■

Állítás. II.1.6. *A q-adrendű projektív síkokra fennállnak a következők:*

- *Minden egyenesre $q+1$ pont illeszkedik.*
- *Minden ponton $q+1$ egyenes megy át.*
- *A pontok és egyenesek száma megegyezik, éspedig q^2+q+1.*

Bizonyítás. Ha a projektív sík q-adrendű, akkor létezik olyan p pont, amire épp $q+1$ darab egyenes illeszkedik (II.1.2.). Ekkor egy p-re nem illeszkedő tetszőleges L egyenesnek $q+1$ pontja van, ugyanis a II.1.1. második axiómája miatt minden p-n átmenő egyenessel létezik metszéspontja, de ezek páronként különbözőek, mert p-ben már metszik egymást. Több pontja nem lehet L-nek, ui. ekkor ez a pont és p nem elégítené ki az első axiómát. A p-n átmenő egyeneseknek a II.1.5. értelmében van olyan pontjuk, melyek p-től különböznek és nem illeszkednek L-re, ezeknek a fokszáma $|L| = q+1$ miatt $q+1$, ezért a p-re illeszkedő egyenesek elemszáma is $q+1$.

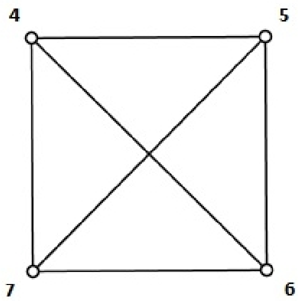
A harmadik állításhoz tekintsük a projektív sík egy tetszőleges p pontját. A II.1.3. alapján elegendő az ezeken átmenő egyenesek összeelemszámát megszámolni. Ha p-t nem számoljuk, minden rajta átmenő egyenes még q pontot tartalmaz, az egyenesek pedig p-n kívül nem tartalmaznak közös pontot, tehát minden pontot pontosan egyszer számolunk, azaz p-vel együtt $1+(q+1)\cdot q = q^2+q+1$ pont van.

Az egyenesek számát és a második állítást nem kell külön belátnunk (II.1.2.).■

Megjegyzendő, hogy véges, q-adrendű projektív síkok létezése, illetve egyértelműsége sem triviális. Ismert, hogy 10-rendű projektív sík nem létezik, 9-rendűből pedig van négy is. De például a 12, 15, 18, 20-rendű projektív síkok létezése, illetve nemlétezése nem ismert.

II.2. Affin síkok

Tegyük fel, hogy az előbbi feladatban egy adott ulti parti, például az első nap résztvevő játékosai minden nap, amikor játszaniuk kellene, otthon maradnak, a többiek pedig változatlan felállásban játsszanak. Ez azt fogja jelenteni, hogy az első nap nem lesz játék, a második nap a 4-es és 5-ös fognak sakkozni, aztán a harmadik nap a 6-os és 7-es sakkoznak, stb. Ábrázolva a játszmákat:



Valójában annyit csináltunk, hogy az előbbi, számozott Fano-sík ábrából kivettük az $(1,2,3)$ egyenest a pontjaival együtt. Az így kapott struktúrát *affin sík*nak nevezik, speciálisan ez egy másodrendű affin sík.

II.2.1. Definíció. *Legyen* Π *nemüres halmaz (elemeit* pont*nak nevezzük),* Λ *(elemeit* egyenes*nek hívjuk) a* Π *bizonyos részhalmazainak a halmaza. A* (Π, Λ) *párt* affin sík*nak nevezzük a következő axiómákkal:*

1. Π *bármely két különböző pontjához pontosan egy olyan egyenes található, melyre mindkettő illeszkedik.*
2. Λ *bármely* s *egyeneséhez bármely* $s \not\ni p \in \Pi$*-n keresztül egyértelműen van* s*-t nem metsző egyenes.*
3. *Létezik három olyan pont* Π*-ben, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.*

Az affin sík véges, pontosabban q*-adrendű, ha teljesít egy negyedik axiómát is:*

4. *Van* q *pontú egyenes.*

Megjegyzendő (és később fel is fogjuk használni), hogy a II.1.3. affin síkokra is igaz, ugyanis az csak a projektív sík definíciójának első axiómáját használja ki, de az megegyezik az affin sík definíciójának első axiómájával.

Feladat. *Lássuk be általában, hogy projektív sík egy egyenesét pontjaival együtt törölve affin síkot kapunk!*

Megoldás. A jelölés történjen úgy, hogy a törlés után kapott egyeneseket ugyanazzal a (törlés előtti) betűvel, de egy aposztróffal kiegészítve jelöljük. Induljunk ki egy tetszőleges projektív síkból, aminek töröljük egy l egyenesét pontjaival együtt. Ezután vegyünk egy tetszőleges s' egyenest és egy $s' \not\ni p$ pontot. Az s'

eredetileg, azaz s-ként metszette a törölt l egyenest éppen egy x pontban (amit l-lel együtt töröltünk). p és x a törlés előtt pontosan egy $k \neq s$ egyenesre illeszkedett, tehát s és k épp az x-ben metszették egymást, azaz a törlés után s' és k' nem metszik egymást, k' pedig egy p-re illeszkedő egyenes. Indirekt tegyük fel, hogy k' nem egyértelmű: azaz tegyük fel, hogy létezik p-n átmenő, s'-vel párhuzamos, k'-től különböző m' egyenes. Ennek a törölt egyenessel, l-lel vett metszéspontja szintén x volt, vagyis l és s metszéspontja, ugyanis amennyiben $m \cap l \neq x$, úgy mivel eredetileg bármely két egyenes egyértelmű metszésponttal bírt, ezért l törlésével nem törölhettük volna s és m metszéspontját. Tehát $x \in m$, azaz a projektív síkban a $\{p, x\}$ pontpárra való egyértelmű illeszkedés miatt $m = k$, a törlést követően pedig $m' = k'$. Ezzel teljesül az affin síkra vonatkozó 2. axióma.

Az 1. axióma azért teljesül, mert projektív síkból indultunk ki, egyenest pedig csak a pontjaival együtt töröltünk, a 3. axiómához pedig vegyük a II.1.2. bizonyításában szereplő A, B, C és D egyeneseket (ezek l törlése előtt biztosan léteztek), ezeknek a páronként vett metszéspontjai (összesen hat) közül, akárhogy is törlünk a projektív síkból egy egyenest, mindig ki lehet választani hármat, melyek az affin sík definíciójában a harmadik axiómát teljesítik: ha A, B, C, D valamelyikét töröljük, az a, b, c, d, e, f közül megmaradt három metszéspont jó, ha ezektől különböző egyenest, akkor az előbbi hat pont közül legfeljebb kettőt tudunk törölni az l törlésével, a megmaradt legalább négy pont közül kiválasztható három nem kollineáris. □

Feladat. *q-adrendű projektív sík egy egyenesét pontjaival együtt törölve a kapott struktúra q-adrendű affin sík!*

Megoldás. Az előző feladat megoldása alapján affin síkot kapunk egy egyenes törlését követően, azt kell csak belátni, hogy van olyan egyenes, amire q pont illeszkedik. A törölt egyenesnek az összes többivel egyértelmű metszéspontja volt, ebből következik, hogy minden megmaradt egyenes elemszáma 1-gyel csökkent, azaz q lett. □

Most térjünk vissza a projektív síkokhoz, színezzük ki egy projektív sík pontjait kétféle színnel, mondjuk pirossal és kékkel.

Feladat. *Egy véges projektív sík pontjait két színnel színeztük. Legyen p_E, k_E egy E egyenes piros, illetve kék pontjainak száma. Lássuk be, hogy a $\sum\limits_E (p_E - k_E)^2$ csak a színosztályok méretétől függ, a színezés "hogyanjától" nem!*

Megoldás. A projektív sík rendje legyen q, jelöljük L_i-vel $(1 \leq i \leq q^2+q+1)$ a projektív sík egyeneseit. A piros színű pontok halmazát jelöljük P-vel, $|P| = r$ a piros színű pontok száma, legyen ez a szám rögzített. Feltehetjük, hogy $1 \leq r \leq q^2+q$, ugyanis ha az összes pont ugyanolyan színű, akkor $\sum\limits_E (p_E - k_E)^2$ az egyenesek elemszámának négyzete összegezve.

$$\sum_E (p_E - k_E)^2 = \sum_E (p_E - (q+1-p_E))^2 = \sum_E (2p_E - (q+1))^2 =$$

$$= \sum_E \left(4p_E^2 - 4p_E(q+1) + (q+1)^2\right) = 4 \cdot \sum_E p_E(p_E - 1) - 4q \cdot \sum_E p_E +$$

$$+ (q+1)^2 \cdot \left(q^2+q+1\right).$$

A $\sum\limits_E p_E$ érték tekinthető úgy, mint az olyan különböző (L, p) párok száma, ahol L a projektív sík egyenese, p az L egyenes egy piros színű pontja. Egy adott $p \in P$ ponton éppen $q+1$ különböző egyenes megy át, azaz a piros pontok szerint összegezve a különböző (L, p) párok száma $r \cdot (q+1)$.
$\sum\limits_E p_E(p_E - 1)$ vehető úgy, mint az olyan különböző (L, p_1, p_2) hármasok száma, ahol L a projektív sík egyenese, p_1 és p_2 az L különböző, piros színű pontjai. Projektív síkban két különböző pont egyértelműen meghatároz egy egyenest, emiatt két nem azonos, piros színű pont alkotta párt pontosan egy egyenesnél számolhatunk, azaz ez valójában nem más, mint a különböző pontokból álló (p_1, p_2) párok száma, tehát $r \cdot (r-1)$.
Behelyettesítve ezeket a $\sum\limits_E (p_E - k_E)^2$-re kapott kifejezésbe látható, hogy az csak r és q függvénye, azaz adott projektív síkra és színosztályméretre konstans érték. $\square$

Feladat. *Tekintsük az előző feladatot véges* projektív sík *helyett véges* affin sík*ra, és a megoldásban az affin sík definíciójának csak az első axiómáját használjuk fel (közvetlen vagy közvetve). (Megjegyzés: Valójában persze projektív síkra is nézhetnénk így a feladatot, hiszen az is bír ezzel a tulajdonsággal, de kiemelendő, hogy már affin síkra is igaz az állítás, és ennek kulcsa az első axióma.)*

Megoldás. Az affin sík pontjainak száma legyen n, az összes piros színű pont száma pedig r. Nyilván ha az összes pont színe piros, vagy az összes pont színe kék, akkor a kérdéses érték is mindig ugyanannyi: az egyenesek elemszámainak négyzete szummázva.

A továbbiakban feltehetjük, hogy mindkétféle szín előfordul a színezésben, tehát $n-1 \geq r \geq 1$. Elegendő azt belátni, hogy egy feltevésünknek megfelelő színezésből kiindulva, ha két különböző színű pont színosztálybeli besorolását megcseréljük (azaz amelyik piros volt, az kék lesz, amelyik pedig kék, az piros), akkor a fenti érték nem változik. (Ugyanis ilyen cserélgetéssel bármelyik színezéshez el tudunk jutni adott színosztályméretek mellett.)
A bizonyítás a következő lépések szerint lesz:

1. Megnézzük, hogy a feltételnek megfelelő, adott n, r paraméterekből kiindulva ha egy tetszőlegesen kiválasztott piros színű pontot átszínezünk kékre, hogyan változik a $\sum\limits_{E}(p_E - k_E)^2$ érték.
2. Megnézzük, hogy a feltételnek megfelelő, adott n, r paraméterekből kiindulva ha egy tetszőlegesen kiválasztott kék színű pontot átszínezünk pirosra, hogyan változik a $\sum\limits_{E}(p_E - k_E)^2$ érték.
3. Előbb átszínezünk egy piros színű pontot kékre, majd utána egy ettől különböző kék színű pontot pirosra, ezt követően felhasználva az első két lépésben kapott eredményeket $\sum\limits_{E}(p_E - k_E)^2$ érték reményeink szerint nem változik a kiinduló értékéhez képest.

1.lépés:

Legyen q egy tetszőleges, piros színnel kiszínezett pontja az affin síknak, amit most átszínezünk kékre. Azon egyenesekre, melyekre nem illeszkedett q, változatlanok maradnak p_E, k_E értékek, így írhatjuk, hogy

$$\sum_E (p'_E - k'_E)^2 = \sum_{q \notin E} (p_E - k_E)^2 + \sum_{q \in E} ((p_E - k_E) - 2)^2 = \sum_{q \notin E} (p_E - k_E)^2 +$$
$$+ \sum_{q \in E} ((p_E - k_E)^2 + 4 - 4(p_E - k_E)).$$

Az utolsó szummában $\sum_{q \in E} 4 = 4 \cdot \deg(q)$. Vizsgáljuk meg most a $\sum_{q \in E} (p_E - k_E)$ értéket. A $\sum_{q \in E} k_E$ érték nem más, mint az összes kék pont száma kezdetben $(n - r)$, mivel a q-n átmenő egyenesek minden pontot tartalmaznak az affin síkból (II.1.3.), q pedig kezdetben piros volt. $\sum_{q \in E} p_E$-t érdemes átírni $\sum_{q \in E} (p_E - 1) + \sum_{q \in E} 1$ alakra. Ekkor $\sum_{q \in E} (p_E - 1)$-et tekinthetjük úgy, mint a q-n átmenő egyenesek piros színnel színezett pontjai szummázva, kivéve a q (hiszen piros volt kezdetben), azaz $\sum_{q \in E} (p_E - 1) = r - 1$. Összesítve az egészet azt kapjuk, hogy

$$\sum_E (p'_E - k'_E)^2 = \sum_E (p_E - k_E)^2 + 4 \deg(q) - 4(r-1) - 4 \deg(q) + 4(n - r) =$$
$$= \sum_E (p_E - k_E)^2 + 4(1 + n - 2r).$$

2.lépés:

Ha kékről pirosra színezünk át egy tetszőleges p pontot az előzőhöz teljesen hasonlóan levezetve

$$\sum_E (p'_E - k'_E)^2 = \sum_{p \notin E} (p_E - k_E)^2 + \sum_{p \in E} ((p_E - k_E) + 2)^2 = \sum_{p \notin E} (p_E - k_E)^2 +$$
$$+ \sum_{p \in E} ((p_E - k_E)^2 + 4 + 4(p_E - k_E)).$$

Itt $\sum_{p \in E} 4 = 4 \cdot \deg(p)$, $\sum_{p \in E} p_E$ érték az összes piros pont száma kezdetben (p pirosra színezése előtt), mivel a p-n átmenő egyenesek minden pontot tartalmaznak az affin síkból (II.1.3.), p pedig kezdetben kék volt, azaz $\sum_{p \in E} p_E = r$. $\sum_{p \in E} k_E$-t érdemes átírni $\sum_{p \in E} (k_E - 1) + \sum_{p \in E} 1$ alakra. Ekkor $\sum_{p \in E} (k_E - 1)$-et tekinthetjük úgy, mint a p-n átmenő egyenesek kék színnel színezett pontjai szummázva, kivéve a p (hiszen kék volt kezdetben), azaz $\sum_{p \in E} (k_E - 1) = n - r - 1$.

$$\sum_E (p'_E - k'_E)^2 = \sum_{p \in E} (p_E - k_E)^2 + 4 \cdot \deg(p) + 4r - 4 \cdot (n - r - 1 + \deg(p)) =$$

$$= \sum_E (p_E - k_E)^2 + 4(1 - n + 2r).$$

3.lépés:

Most akkor induljunk ki egy q pontból, ezt színezzük át pirosról kékre, majd egy $p \neq q$ kék színű pontot pirosra. Írhatjuk, hogy

$$\sum_E (p''_E - k''_E)^2 \overset{2.}{=} \sum_E (p'_E - k'_E)^2 + 4(1 - n + 2r') \overset{1.}{=} \sum_E (p_E - k_E)^2 + 4(1 + n - 2r) +$$

$$+ 4(1 - n + 2r') = \sum_E (p_E - k_E)^2 + 4(1 + n - 2r) + 4(1 - n + 2(r - 1)) =$$

$$= \sum_E (p_E - k_E)^2,$$

közben felhasználtuk $r' = r - 1$-et. Ezzel beláttuk az állítást. □

Az előző feladat megoldásában tehát sehol nem használtuk ki teljesen még azt sem, hogy affin síkban vagyunk. Az első axiómát használtuk csak ki, miszerint bármely két pont pontosan egy egyenesre illeszkedik, ugyanis II.1.3. is csak ezt a tulajdonságot használja ki, így ez egy általánosabb illeszkedési struktúrára, *lineáris tér*re is igaz, ezekről a későbbiekben egy külön szakaszban még lesz szó.

III. Véges projektív síkok színezése

Ebben a részben az előző rész végén lévő eredményből fogunk kiindulni.

III.0.2. Definíció. *Legyen $\mathcal{P} = (\Omega, \Lambda)$ projektív sík, legyen $\chi : \Omega \to \{-1, 1\}$ a ponthalmaz egy piros-kék színezése. Legyen $\chi(L) = \sum_{a \in L} \chi(a)$ (ez az előbbi feladat jelöléseivel a $p_L - k_L$ érték), ekkor a*

$$\operatorname{disc}(\mathcal{P}) = \min_{\chi} \max_{L \in \Lambda} |\chi(L)|$$

értéket $\mathcal{P}$ diszkrepanciájának *nevezzük.*

III.1. A diszkrepancia alsó becslése

Feltehetjük a továbbiakban, hogy a projektív sík nem egyszínűre van színezve (ekvivalensen: léteznek olyan v, w pontok, melyekre $\chi(v) = -1$, $\chi(w) = 1$), hiszen ilyen színezésre biztosan nem minimális $\max_{L \in \Lambda} |\chi(L)| = q + 1$, ha q-adrendű a projektív sík. Nyilván ez egy triviális felső becslés a diszkrepancia értékére.

III.1.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{P} = (\Omega, \Lambda)$ egy q-adrendű projektív sík, $\chi : \Omega \to \{-1, 1\}$ a ponthalmaz egy piros-kék színezése. Ekkor* $\operatorname{disc}(\mathcal{P}) \geq \sqrt{q}$.

Bizonyítás.

$$\sum_{A \in \Lambda} \chi(A)^2 \leq \left(q^2 + q + 1\right) \cdot \left(\max_{A \in \Lambda} |\chi(A)|\right)^2,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\max_{A \in \Lambda} \chi(A)^2 = \left(\max_{A \in \Lambda} |\chi(A)|\right)^2$. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\operatorname{disc}(\mathcal{P}) = \min_{\chi} \max_{A \in \Lambda} |\chi(A)| \geq \min_{\chi} \sqrt{\frac{\sum_{A \in \Lambda} \chi(A)^2}{q^2 + q + 1}} = \sqrt{\frac{\min_{\chi} \sum_{A \in \Lambda} \chi(A)^2}{q^2 + q + 1}}.$$

Az előző feladat alapján a $\sum_{A \in \Lambda} \chi(A)^2$ érték csak a színosztályok méretétől függ, a színezés „hogyanjától” nem, ezért csoportosíthatjuk a színezést a következőképpen:

Ha r a piros pontok száma, akkor $r-1$-et maradékosan elosztva q-val: $r-1=r_e\cdot q+r_p$. Tekintsünk egy tetszőleges pirosra színezett $s\in\Omega$ pontot a projektív síkban, ezen $q+1$ darab egyenes megy át ($K_i,\ i=1,\ldots,q+1$), legyen ezek közül $K_1,K_2,\ldots,K_{r_e}$ teljesen piros, azaz az egyenesek minden pontja piros színű, legyen K_{r_e+1} egyenes olyan, melyen s-en kívül még r_p darab pont piros, a többi pedig kék, a többi s-en áthaladó egyenesek ($K_{r_e+2},K_{r_e+3},\ldots,K_{q+1}$) s-től különböző pontjai pedig valamennyien legyenek kékek.
Ezek alapján felírva

$$f(r_e,r_p):=\sum_{L\in\Lambda}\chi(L)^2=\underbrace{r_e(q+1)^2+(q-r_e)(q-1)^2+\left(q-1-2r_p\right)^2}_{\sum\limits_{\substack{L\in\Lambda\\ s\in L}}\chi(L)^2=\sum\limits_{i=1}^{q+1}\chi(K_i)^2}+$$

$$+\underbrace{r_p\cdot q\cdot(q-1-2r_e)^2+\left(q-r_p\right)\cdot q\cdot(q+1-2r_e)^2}_{\sum\limits_{\substack{L\in\Lambda\\ s\notin L}}\chi(L)^2=\sum\limits_{\substack{L\cap K_{r_e+1}\neq\emptyset\\ s\notin L}}\chi(L)^2}=$$

$$=r_e\cdot\left(4q-4q(q-1)r_p-4q(q+1)\left(q-r_p\right)\right)+r_e^2\cdot\left(4qr_p+4q\left(q-r_p\right)\right)+$$

$$+r_p\cdot\left(-4(q-1)+q(q-1)^2-q(q+1)^2\right)+r_p^2\cdot4+q(q-1)^2+(q-1)^2+$$

$$+q^2(q+1)^2=4q^2r_e^2+\left(-4q^3-4q^2+4q\right)r_e+4r_p^2+\left(-4q^2-4q+4\right)r_p+$$

$$+8qr_er_p+q^4+3q^3-q+1.$$

Ezt teljes négyzetté tudjuk alakítani:

$$f\left(r_e,r_p\right)=\left(2qr_e+2r_p-\left(q^2+q-1\right)\right)^2+q^3+q^2+q.$$

Ebből már látszik, hogy f értelmezési tartományát valós számokra kiterjesztve azon (x,y) valós értékekre van minimuma, melyre $2qx+2y-\left(q^2+q-1\right)=0$, a minimum értéke pedig q^3+q^2+q, amit q^2+q+1-gyel leosztva, majd gyököt vonva belőle épp $\sqrt{q}$ adódik. ∎

Lássuk be ugyanezt a tételt f minimalizálásának lineáris algebrai módszerével is:

Bizonyítás. Legyen $v = \left(\chi\left(p_1\right), \ldots, \chi\left(p_{q^2+q+1}\right)\right) \in \{-1, 1\}^{q^2+q+1}$ a $\mathcal{P}$ pontjainak egy színezése, A az incidencia mátrixa.

$$vA = \left(\chi\left(B_1\right), \ldots, \chi\left(B_{q^2+q+1}\right)\right),$$

ahol $B_1, \ldots, B_{q^2+q+1}$ a projektív sík egyenesei.

$$f\left(r_e, r_p\right) = \sum_{i=1}^{q^2+q+1} \chi\left(B_i\right)^2 = |vA|^2 = (vA)(vA)^T = v\left(\underbrace{AA^T}_{qI+J}\right)v^T \geq qvv^T + vJv^T =$$

$$= q|v|^2 + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{q^2+q+1} \chi\left(p_i\right)\right)^2}_{\geq 0} \geq q\left(q^2+q+1\right),$$

ahol J a $\left(q^2+q+1\right) \times \left(q^2+q+1\right)$-es csupa 1 elemből álló mátrix. Közben felhasználtuk, hogy AA^T mátrix egy (i, j) eleme a p_i-re és p_j-re illeszkedő közös egyenesek száma, ami $i \neq j$-re 1, különben $\deg p_i = q+1 \quad \left(i = 1, \ldots, q^2+q+1\right)$. ■

III.2. A diszkrepancia felső becslése

Ebben a részben nagyrészt a [9]-ben lévő bizonyításokat követjük. Először *Erdős Pál* tételét fogjuk megnézni, mely a *Chernoff-egyenlőtlenség*en alapul, tehát előbb tekintsük magát az egyenlőtlenséget:

III.2.1. Tétel. (Chernoff-egyenlőtlenség) *Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók, melyekre $\mathrm{P}\left(\xi_i = 1\right) = \mathrm{P}\left(\xi_i = -1\right) = \frac{1}{2} \quad (i = 1, \ldots, n)$, és $\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, akkor minden $\lambda > 0$ esetén fennáll, hogy*

$$\mathrm{P}\left(\eta_n > \lambda\right) < e^{\frac{-\lambda^2}{2n}}.$$

Bizonyítás. Egy ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\mathrm{E}\xi = \sum_k \alpha_k \mathrm{P}\left(\xi = \alpha_k\right)$. A ϕ injektív, Borel-mérhető leképezésre $\phi(\xi)$ is valószínűségi változó, $\mathrm{E}\left(\phi(\xi)\right) = \sum_k \phi\left(\alpha_k\right) \mathrm{P}\left(\phi(\xi) = \phi\left(\alpha_k\right)\right) = \sum_k \phi\left(\alpha_k\right) \mathrm{P}\left(\xi = \alpha_k\right)$. Ezek alapján $y > 0$-ra

$$\mathrm{E}\left(e^{y\xi_i}\right) = e^y \cdot \frac{1}{2} + e^{-y} \cdot \frac{1}{2} < e^{\frac{y^2}{2}},$$

ugyanis ha felírjuk ezeket Taylor-sorral:

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!}, \quad e^{-y} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{y^k}{k!},$$

akkor

$$\frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!},$$

míg

$$e^{\frac{y^2}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^{2k}}{2^k \cdot k!},$$

$$(2k)! = k! \cdot (k+1) \cdot \ \ldots \ \cdot (2k) > k! \cdot 2^k,$$

ha $k \geq 2$, $k = 0, 1$ esetén pedig egyenlőség áll. Felhasználva ezt

$$\mathrm{E}\left(e^{y\eta_n}\right) = \mathrm{E}\left(e^{y(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)}\right) = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{y\xi_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(e^{y\xi_i}\right) < \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{y^2}{2}} = e^{\frac{y^2 n}{2}}.$$

$y > 0$-t és e^x függvény pozitivitását felhasználva

$$\mathrm{P}\left(\eta_n > \lambda\right) = \mathrm{P}\left(e^{y\eta_n} > e^{y\lambda}\right) = \mathrm{P}\left(e^{y(\eta_n-\lambda)} > 1\right) \leq \sum_{\substack{k \\ \alpha_k > 1}} \alpha_k \mathrm{P}\left(e^{y(\eta_n-\lambda)} = \alpha_k\right) \leq$$

$$\leq \mathrm{E}\left(e^{y(\eta_n-\lambda)}\right) = \frac{1}{e^{y\lambda}} \mathrm{E}\left(e^{y\eta_n}\right) < e^{\frac{y^2 n}{2} - y\lambda}.$$

Ha $y = \frac{\lambda}{n}$, akkor

$$\mathrm{P}\left(\eta_n > \lambda\right) < e^{\frac{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 n}{2} - \frac{\lambda}{n}\lambda} = e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}.$$ ■

III.2.2. Tétel. (Erdős) *Ha $\mathcal{H}$ egyszerű hipergráf az X ponthalmaz részhalmazaiból, $\chi : X \to \{-1, 1\}$ a pontok egy 2-színezése, $|X| = |\mathcal{H}| = n$, akkor* $\operatorname{disc}(H) \leq \sqrt{2n \ln(2n)}$.

Bizonyítás. Legyen χ a pontok egy véletlenszerű 2-színezése, ekkor egy $L \in \mathcal{H}$ egyenesre, melyre $|L| = t$, $\chi(L) = \sum_{a \in L} \chi(a) = \eta_t$.

$$\mathrm{P}\left(|\chi(L)| > \lambda\right) = \mathrm{P}\left(\chi(L) > \lambda \ \vee \ \chi(L) < -\lambda\right) = 2 \cdot \mathrm{P}\left(\chi(L) > \lambda\right) =$$

$$= 2 \cdot \mathrm{P}\left(\eta_t > \lambda\right) < 2e^{-\frac{\lambda^2}{2t}} \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{2n}},$$

mivel $n \geq t$.

$$\mathrm{P}\left(\max_{L\in\mathcal{H}} |\chi(L)| > \lambda\right) \leq \sum_{L\in\mathcal{H}} \mathrm{P}\left(|\chi(L)| > \lambda\right) < \sum_{L\in\mathcal{H}} \left(2e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}\right) = 2ne^{-\frac{\lambda^2}{2n}}.$$

Válasszuk λ értékét $\sqrt{2n\ln(2n)}$-nek:

$$\mathrm{P}\left(\max_{L\in\mathcal{H}} |\chi(L)| > \lambda\right) < 2ne^{-\frac{2n\ln(2n)}{2n}} = 1,$$

azaz létezik olyan χ 2-színezés, melyre

$$\mathrm{disc}(\mathcal{H}) \leq \max_{L\in\mathcal{H}} |\chi(L)| \leq \lambda = \sqrt{2n\ln(2n)}.$$

■

Ennél jobb felső becslés is létezik a diszkrepanciára projektív síkok esetén, nevezetesen egy q-adrendű projektív sík diszkrepanciája felülről becsülhető $K\sqrt{q}$-val ([6]), ahol K egy abszolút konstans. Ezt nem fogjuk bizonyítani a bizonyítás nagy terjedelme miatt. A következőkben megmutatjuk, hogy a *Komlós-sejtés* ismeretében milyen könnyen adódna felső korlátra $K\sqrt{q+1}$.

Sejtés. (Komlós-sejtés) *Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_s \in \mathbb{R}^m$ vektorok, melyekre $|v_i| \leq 1$ $(i = 1, \ldots, s)$. Léteznek olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s \in \{-1, 1\}$ értékek, melyre*

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_s v_s\|_\infty \leq K,$$

ahol $\|.\|_\infty$ a maximuma a koordináták abszolútértékének, és K abszolút konstans, azaz egy s-től, m-től és v_i-ktől $(i = 1, \ldots, s)$ független állandó.

Legyen $\mathcal{P} = (\Omega, \Lambda)$ q-adrendű projektív sík, A az incidencia mátrix, $\Omega = \left\{p_1, \ldots, p_{|\Omega|}\right\}$, $\Lambda = \left\{L_1, \ldots, L_{|\Lambda|}\right\}$, jelölje v_i az A i-edik sorát, $\chi : \Omega \to \{-1, 1\}$ $\mathcal{P}$ pontjainak egy 2-színezése, melyet definiáljunk a *Komlós-sejtés*ben lévő ε_i $(i = 1, \ldots, |\Omega| = s)$ értékeknek, azaz $\chi(p_i) = \varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Normalizáljuk v_i-ket: $e_i := \frac{v_i}{|v_i|}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Ezekre alkalmazzuk a *Komlós-sejtés*t, tehát léteznek olyan $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ értékek, melyre

$$\|\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \cdots + \varepsilon_s e_s\|_\infty \leq K.$$

$$\|\varepsilon_1 \frac{v_1}{|v_1|} + \varepsilon_2 \frac{v_2}{|v_2|} + \cdots + \varepsilon_s \frac{v_s}{|v_s|}\|_\infty \leq K.$$

Mivel projektív síkon $|v_i| = \sqrt{q+1}$, ezért

$$\frac{1}{\sqrt{q+1}} \|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_s v_s\|_\infty \leq K.$$

$\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_s v_s = (\chi(L_1), \chi(L_2), \ldots, \chi(L_{|\Lambda|}))$, tehát

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_s v_s\|_\infty = \max_{i \in \{1,2,\ldots,|\Lambda|\}} |\chi(L_i)|,$$

azaz ezt felhasználva

$$\operatorname{disc}(\mathcal{P}) \leq \max_{i \in \{1,2,\ldots,|\Lambda|\}} |\chi(L_i)| \leq K \cdot \sqrt{q+1}.$$

IV. Lineáris terek

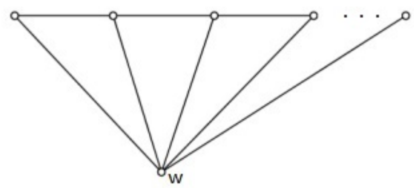
A dolgozat további részében lineáris terekkel fogunk foglalkozni, melyek speciális illeszkedési struktúrák, de például az előző szakaszban érintőlegesen érintett projektív síkoknál jóval általánosabbak.

IV.0.3. Definíció. *Ha az $\mathcal{L} = (V, E)$ hipergráfra fennáll:*

- *bármely két különböző pontja pontosan egy blokkra illeszkedik*
- *minden blokkra legalább két pont illeszkedik*
- *legalább két blokk van*

akkor $\mathcal{L}$-t lineáris tér*nek nevezzük.*

Az első és a második tulajdonságból következik a hipergráf egyszerűsége. Lássunk egy egyszerű példát lineáris térre (ami nem projektív vagy affin sík): vegyünk valamilyen V alaphalmazt, tetszőleges $w \in V$ pontot. Legyen $V \setminus \{w\}$ az egyik blokk, ezen kívül vegyük az összes w-t és $V \setminus \{w\}$ egy pontját magába foglaló két elemű blokkokat.



Az ilyen lineáris tereket *degenerált* lineáris tereknek nevezzük. Egy degenerált lineáris térnek ugyanannyi blokkja van, mint pontja.

Itt is megjegyzendő (és ismételten fel fogjuk használni), hogy II.1.3. lineáris terekre is igaz, mivel az a projektív sík definíciójának csak az első axiómáját használja ki, de az ugyanaz, mint a lineáris tér definíciójának első axiómája.

IV.1. Néhány egyszerű összefüggés lineáris terekben

Legyen $\mathcal{L} = (V, E)$ lineáris tér. Továbbra is érvényes az I.1.8. Lemma. Most számoljuk meg az összes pontpárt, ami egy blokkra illeszkedik! Lineáris térben vagyunk, azaz bármely két pontot véve azok pontosan egy blokkra illeszkednek, tehát egy tetszőleges $w \in V$ pont a V ponthalmaz bármely másik elemével (pontjával) ilyen pontpárt alkot, azaz ha $|V| = v$, akkor az összes ilyen pontpár száma $v(v-1)$. (Itt most pontpár alatt egy rendezett párt értünk, egyébként feleennyi lenne.) Egy másik módszerrel megszámolva ugyanezen pontpárokat: vegyünk egy tetszőleges $L \in E$ blokkot. Egy tetszőleges, L-re illeszkedő w pont L összes másik pontjával ilyen pontpárt ($|L| - 1$ darabot) alkot, ez tehát L-re összesen $|L|(|L|-1)$. Mivel egy pontpárt az illeszkedési struktúra lineáris tér mivolta miatt pontosan egyetlen blokknál számolhatunk csak, ezért az összes $L \in E$-re összegezve megkapjuk az összes pontpárt (ami hasonlóan az előző leszámláláshoz itt is egy rendezett pár). Azt kaptuk tehát, hogy

$$v(v-1) = \sum_{L \in E} |L|(|L|-1).$$

Most rögzítsünk le egy $s \in V$ pontot. Tekintsük azt a struktúrát, amit az eredetiből az s-en átmenő blokkokból kapunk (tehát kivettük azokat az $L \in E$ blokkokat, melyre $s \notin L$). Minden blokkból kivéve s-t alkalmazzuk az I.1.8. Lemmát! Tudjuk, hogy továbbra is bármely két pont pontosan egy blokkra illeszkedik, ebből adódik, hogy bármely ilyen, eredetileg s-en átmenő, s-től „megfosztott" blokkra illeszkedő pont fokszáma 1. Mivel az eredeti illeszkedési struktúra lineáris tér volt, valamennyi s-en kívüli pont szerepel a struktúrában, így az I.1.8. baloldala $(v-1) \cdot 1 = v - 1$, tehát:

$$v - 1 = \sum_{s \in L} (|L| - 1),$$

ahol $|L|$ a blokk eredeti elemszáma.

Írjuk fel a $\mathcal{H} = (\{w \in V : w \notin L\}, \{K \in E : K \cap L = \emptyset\})$ hipergráfra az I.1.8. Lemmát (itt L a kiinduló $\mathcal{L}$ lineáris tér egy blokkja)! Az eredeti ponthalmazból kivettük L pontjait, továbbá az L-t metsző blokkokat, ezért egy $w \notin L$ pont fokszáma épp $|L|$-kel csökkent: egyrészt mert L tetszőleges pontjával pontosan egy blokkra illeszkedett, másrészt mert utóbbi tulajdonságból az is következik, hogy a lineáris térben bármely két különböző egyenes legfeljebb egy pontban metszheti egymást (itt ez most *pontosan* egy, hiszen L-t metsző blokkokat vettünk ki), tehát L minden pontjához külön-külön vezetett w-n átmenő egyenes. Az összefüggés tehát a következőképpen néz ki:

$$\sum_{w \notin L} (\deg(w) - |L|) = \sum_{B \in \{K \in E : K \cap L = \emptyset\}} |B|.$$

IV.1.1. Lemma. *Ha az* $\mathcal{L} = (V, E)$ *lineáris térben* $p \in V$, $L \in E : p \notin L$, *akkor* $\deg(p) \geq |L|$. *Egyenlőség akkor és csak akkor, ha minden p-n átmenő egyenes metszi L-t (ekvivalens átfogalmazása: szigorúan nagyobb akkor és csak akkor, ha van p-n átmenő L-t nem metsző egyenes).*

Bizonyítás. $p \notin L$ pontosan egy blokkra illeszkedik tetszőleges $w \in L$ ponttal, ennek a blokknak L-lel w egyértelmű metszéspontja (ha több lenne, akkor lenne két olyan pont, mely egynél több különböző blokkra illeszkedik, ellentmondásban azzal, hogy $\mathcal{L}$ lineáris tér), tehát a p-ből L pontjaihoz húzott egyenesek páronként különböznek, ezért $\deg(p) \geq |L|$. Ha van p-n átmenő L-t nem metsző egyenes, akkor triviálisan szigorúan nagyobb, ha pedig szigorúan nagyobb, akkor kell legyen p-n átmenő L-t nem metsző egyenes, különben lenne olyan L-beli pont, ami p-vel egynél több blokkra illeszkedik (skatulya-elv). ∎

Feladat. (Transfer-lemma) *Az* $\mathcal{L} = (V, E)$ *lineáris térben tekintsünk két (nem feltétlen metsző) egyenest, L_1-et és L_2-t. Legyen $p \in V$ egy olyan pont, amely sem L_1-re, sem L_2-re nem illeszkedik. Ha r nemnegatív egész az olyan egyenesek száma, melyekre p illeszkedik, L_1-et metszik, de L_2-t nem, akkor a p-re illeszkedő L_2-t metsző, de L_1-et nem metsző egyenesek száma* $r + |L_2| - |L_1|$.
Ha K, L_1, L_2 olyan egyenesek, hogy K metszi L_1-et, de L_2-t nem, akkor az olyan egyenesek száma, mely K-t és L_2-t metszi, L_1-et viszont nem, legalább $(|K| - 1) \cdot (1 + |L_2| - |L_1|)$.

Megoldás. Hogy L_1 és L_2 metsző egyenesek vagy diszjunktak, azt mint információt r értéke „tartalmazza", nem kell külön a két esettel foglalkoznunk.

$$p\text{-n átmenő, } L_1 \cup L_2\text{-t metsző egyenesek:} \begin{cases} \text{átmennek } L_1\text{-en, de } L_2\text{-n nem: } r \\ \text{átmennek } L_1\text{-en: } |L_1| \\ \text{átmennek } L_2\text{-n: } |L_2| \end{cases}$$

Ebből következően az olyan p-n átmenő egyenesek száma, melyek mind L_1-en, mind L_2-n átmennek: $|L_1| - r$, ezért az L_2-n átmenő, de L_1-et nem metsző egyenesek száma $|L_2| - (|L_1| - r) = r + |L_2| - |L_1|$.
Vegyünk egy tetszőleges $s \in K \setminus L_1$ pontot ($|K| - 1$ ilyen van összesen). Az s-en átmenő és L_2-t metsző, L_1-től diszjunkt egyenesek számára alsó becslést tudunk adni: $1 + |L_2| - |L_1|$, ugyanis a feladat első részében p-re megadott r értékről azt tudjuk itt, hogy legalább 1, mert K egyenes maga olyan, hogy átmegy s-en, L_1-et metszi, de L_2-t nem. Ilyen pontból $|K| - 1$ darabot tudunk venni (K és L_1 metszéspontja nem jó csak, hiszen minden rajta átmenő egyenes metszi L_1-et), továbbá egy egyenest nem számolhatunk kettő $K \setminus L_1$-beli pontnál, ugyanis ez a pontpár K-ra már illeszkedik. Így a K-t metsző, L_1-et nem metsző egyenesek száma legalább $(|K| - 1) \cdot (1 + |L_2| - |L_1|)$. □

Feladat. (Parallel-lemma) *Ha $\mathcal{L} = (V, E)$ lineáris tér, $N \in E$ egy n-pontú egyenes, $L_1, L_2 \in E$ nem diszjunkt egyenesek, melyek N-től diszjunktak, akkor*

$$d_1 d_2 \geq n - t,$$

ahol $d_i = n + 1 - |L_i| \quad (i = 1, 2),\ t = \sum_{p \in N} (\deg(p) - n - 1).$

Megoldás. Az előző feladat alapján azon egyenesek száma, melyek L_1-et és N-t metszik, de L_2-t nem, legalább $(|L_1| - 1)(1 + |N| - |L_2|) = d_2 (n - d_1)$.
Az L_2-t és N-t metsző, de L_1-et nem metsző egyenesek száma ugyanezen levezetéssel a megfelelő indexeket beírva legalább $d_1 (n - d_2)$.
Az L_1-től diszjunkt és N-t metsző egyenesek száma (kivéve magát N-t)

$$\sum_{p \in N} (\deg(p) - 1 - |L_1|) = \sum_{p \in N} (\deg(p) - 1 - (n + 1 - d_1)) \geq d_1 (n - d_2),$$

mivel az L_1-től diszjunkt és N-t metsző egyenesek halmazának részhalmaza az L_2-t és N-t metsző, de L_1-et nem metsző egyenesek halmaza, utóbbinak számosságára pedig felhasználtuk az alsó becslést.
Ugyanígy az L_2-től diszjunkt és N-t metsző egyenesek száma (kivéve magát N-t)

$$\sum_{p \in N} (\deg(p) - 1 - |L_2|) = \sum_{p \in N} (\deg(p) - 1 - (n + 1 - d_2)) \geq d_2 (n - d_1),$$

mivel az L_2-től diszjunkt és N-t metsző egyenesek halmazának részhalmaza az L_1-et és N-t metsző, de L_2-t nem metsző egyenesek halmaza, utóbbinak számosságára pedig megintcsak felhasználtuk az alsó becslést.
Adjuk össze a két egyenlőtlenséget:

$$\sum_{p \in N} (2 \deg(p) - 4 - 2n + d_1 + d_2) \geq n(d_1 + d_2) - 2d_1 d_2.$$

$n(d_1 + d_2)$-t mindkét oldalból levonva, majd 2-vel leosztva mindkét oldalt azt kapjuk, hogy

$$\sum_{p \in N} (\deg(p) - 2 - n) \geq -d_1 d_2,$$

ezt átrendezve:

$$d_1 d_2 \geq -\sum_{p \in N} (\deg(p) - n - 1 - 1) = \sum_{p \in N} 1 - \sum_{p \in N} (\deg(p) - n - 1) = n - t.$$

□

IV.2. A de Bruijn–Erdős-tétel

Ha adott egy alaphalmaz, hány olyan részhalmazát tudjuk venni, hogy bármely kettőnek pontosan egy közös eleme legyen? Vagy még általánosabban, λ közös eleme legyen? Erre a kérdésre a *Fisher-egyenlőtlenség* ad választ, annak is a nem azonos elemszámú részhalmazokra vonatkozó, általánosabb változata.

IV.2.1. Tétel. (Fisher-egyenlőtlenség) *Ha $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \subseteq \mathcal{P}(H)$, H elemszáma n, és $|A_i \cap A_j| = \lambda > 0 \quad \forall i \neq j$, akkor $m \leq n$.*

Bizonyítás. A bizonyítás a(z) [7]-beli bizonyításon alapul. Ha a fenti feltétel úgy teljesül, hogy van egyetlen A_k halmaz, melynek épp λ eleme van, akkor A_k halmaz bármely másik halmaznak részhalmaza, a többi halmaz A_k-n kívül eső része egymástól diszjunkt, amiből következően legfeljebb $n - \lambda$ lehet ezen diszjunkt halmazok száma, azaz összesen (A_k-val együtt) $n - \lambda + 1$, tehát $m \leq n - \lambda + 1 \leq n$.

Tegyük fel, hogy $|A_i| > \lambda \quad \forall i$. Legyen az A_i halmaz karakterisztikus vektora $\mathbf{a}_i$, melynek j-edik koordinátája 1, ha az alaphalmaz j-edik eleme benne van, 0, ha nincs benne. Jelöljük α_i-vel az $|A_i| - \lambda$ számot, melyről tehát a feltevés miatt tudjuk, hogy legalább 1.

$$\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = \begin{cases} \lambda, & \text{ha } i \neq j \\ |A_i|, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

Legyenek $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ olyanok, hogy $\sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Szorozzunk be $\mathbf{a}_j$-vel: $\lambda \cdot \sum_{i=1, i\neq j}^{m} \mu_i + \mu_j(\lambda + \alpha_j) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \mu_i + \mu_j\alpha_j = 0$, amiből

$$\mu_j = -\frac{\lambda}{\alpha_j} \sum_{i=1}^{m} \mu_i. \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Összegezzük ezeket:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i = \left(-\lambda \sum_{i=1}^{m} \mu_i \right) \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i}.$$

Rendezzük át:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i \right) \cdot \left(1 + \lambda \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i} \right) = 0.$$

Vagy $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 0$, ekkor a μ_j-re kapott képlet miatt $\mu_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$, vagy $1 + \lambda \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i} = 0$, de utóbbi nem lehetséges, mert $\lambda > 0$, az α_i-k pedig pozitívak. Így azonban $\sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m = 0$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{a}_i$-k lineárisan függetlenek, számuk nem lehet több n-nél, azaz $m \leq n$. ∎

Tekintsük most egy lineáris tér duálisát! A *bármely két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik* tulajdonság a duálisban *bármely két egyenes pontosan egy pontban metszi egymást*, a *minden blokkra legalább két pont illeszkedik* duális megfelelője *minden ponton legalább két blokk (egyenes) megy át*, a *legalább két blokk van* kikötés pedig a duálisban *legalább két különböző pont van*.

Egyszerű illeszkedési struktúra-e egy lineáris tér duálisa? Az azonnal látható, hogy a nem egyelemű blokkok nem tartalmazhatják pontosan ugyanazokat a pontokat. Egyelemű blokkból eleve nem lehet kettő, más-más pontot tartalmazó, hiszen metszeniük kell egymást. Az egyelemű blokk eredeti, lineáris térbeli megfelelője pedig olyan w pont, melyen csak egy egyenes megy át ($\deg(w) = 1$). Lineáris térben legalább két blokk van, vegyük azt, amelyikre w nem illeszkedik (a blokk elemszáma legalább 2). Erre a IV.1.1. alapján $1 = \deg(w) \geq 2$, ami ellentmondás, azaz egy lineáris tér duálisában nincsenek egyelemű blokkok, következésképp egy lineáris tér duálisa egyszerű illeszkedési struktúra. Ezáltal tekinthetjük mint halmazrendszert, melynek elemeire a IV.2.1.-beli $\lambda = 1$, így egy v pontból, b blokkból álló lineáris tér duálisára fennáll a IV.2.1. Tétel: az alaphalmazunk tehát most b elemből áll, a részhalmazok (blokkok) száma pedig v. Így $v \leq b$. Ennél többet is kimond a *de Bruijn-Erdős tétel*:

IV.2.2. Tétel. (de Bruijn–Erdős) *Egy $\mathcal{L} = (V, E)$ lineáris térben $b \geq v$ ($|V| = v, |E| = b$), egyenlőség pedig pontosan akkor áll ($b = v$), ha a lineáris tér degenerált vagy projektív sík.*

Bizonyítás. (leszámlálós, Conway) Tegyük fel, hogy $b \leq v$. Felhasználva még a IV.1.1.-et:

$$\frac{\deg(p)}{b - \deg(p)} \geq \frac{|L|}{v - |L|} \tag{1}$$

minden olyan (p, L) párra, melyre $p \notin L$, ugyanis a bal oldali tört számlálója nagyobb egyenlő a jobb oldali tört számlálójánál, a jobb oldali törtnek pedig a nevezője nagyobb egyenlő a bal oldali tört nevezőjénél. Szummázva az (1) egyenlőtlenség bal oldalát $\forall\ (p, L) : p \notin L$ párra:

$$\sum_{p \notin L} \frac{\deg(p)}{b - \deg(p)} = \sum_{p \in V} \sum_{L : p \notin L} \frac{\deg(p)}{b - \deg(p)}.$$

Vegyük észre, hogy az utolsó kifejezésnél $\frac{\deg(p)}{b-\deg(p)}$ nem függ a belső szumma "indexétől", azaz hogy konkrétan melyik L egyenesről van szó. Emiatt ez kiemelhető a belső szumma elé:

$$\sum_{p \in V} \left(\frac{\deg(p)}{b - \deg(p)} \sum_{L : p \notin L} 1 \right),$$

így ebben $\sum_{L:p\notin L} 1$ pontosan annyi, amennyi olyan L egyenes van, melyre p nem illeszkedik, ez pedig éppen $b - \deg(p)$. Ez által az (1) bal oldalának végső alakja:

$$\sum_{p \in V} \left(\frac{\deg(p)}{b - \deg(p)} (b - \deg(p)) \right) = \sum_{p \in V} \deg(p).$$

Most akkor (1) jobb oldalát szummázva szintén $\forall\ (p, L) : p \notin L$ párra:

$$\sum_{p \notin L} \frac{|L|}{v - |L|} = \sum_{L \in E} \sum_{p : p \notin L} \frac{|L|}{v - |L|}.$$

Teljesen hasonlóan eljárva, mint előbb a bal oldalon, $\frac{|L|}{v-|L|}$ kiemelhető a belső szumma elé:

$$\sum_{L \in E} \left(\frac{|L|}{v - |L|} \sum_{p : p \notin L} 1 \right) = \sum_{L \in E} \left(\frac{|L|}{v - |L|} (v - |L|) \right) = \sum_{L \in E} |L|$$

az (1) jobb oldalának végső alakja, közben felhasználtuk, hogy $v - |L|$ azon pontok száma, melyek nem illeszkednek L-re. Így (1) összegezve:

$$\sum_{p \in V} \deg(p) \geq \sum_{L \in E} |L|. \tag{2}$$

Az I.1.8. szerint itt egyenlőség áll, ami azt jelenti, hogy (1), amit szummáztunk minden (p, L) párra, melyre $p \notin L$, egyenlőséggel kell teljesüljön szintén minden ilyen $(p, L) : p \notin L$ párra: így az adódik, hogy egyrészt $b = v$, másrészt $\deg(p) = |L| \quad \forall\ (p, L) : p \notin L$. Rögzítsünk le egy tetszőleges $L \in E$ blokkot. A IV.1.1. alapján bármely $p \notin L$ pontra az összes p-n átmenő egyenes metszi L-t, vagyis L-t minden egyenes metszi. Ez bármelyik egyenesre igaz, tehát akkor $b = v$ esetén (mivel $b \leq v$ esetben a $b = v$-ből kiindulás is benne van) bármely két egyenes metszi egymást (és persze az is igaz, hogy pontosan egy pontban, mivel lineáris térből indultunk ki, ahol bármely két egyenes legfeljebb egy pontban metszi egymást).

Az kell még, hogy ekkor egy lineáris tér vagy degenerált lineáris tér, vagy projektív sík. Először tekintsük azt az esetet, mikor van olyan M egyenes, aminek az elemszáma 2. A IV.1.1. miatt egy $p \notin M$ pontra $\deg(p) = 2$. Mindkét p-n átmenő egyenes metszi M-et egyik, illetve másik pontjában (a kiinduló feltétel miatt), és szintén a IV.1.1. alapján ezen a két, p-n áthaladó egyenesen kívül az összes többi kételemű. A p-n áthaladó két egyenes közül pedig csak az egyik lehet kettőnél több elemű, mivel ha van egyiken "közbeékelődő" ($\neq p, \notin M$) pont, annak a fokszáma $|M| = 2$, emiatt pedig a másik p-n áthaladó egyenes elemszáma csak 2 lehet. Ezek a "közbeékelődő" pontok pedig kételemű egyenesekkel vannak összekötve a p-ből induló másik, kételemű egyenes M-mel vett metszéspontjával. Ez tehát egy degenerált lineáris tér. Ha mindkét p-ből induló egyenes kételemű, akkor nyilván ezek M-mel együtt alkotják a három egyenesből és három pontból álló degenerált lineáris teret. A másik eset, ha minden egyenes legalább három pontot tartalmaz. Ismert, hogy bármely két pont pontosan egy egyenesre illeszkedik és hogy bármely két egyenes pontosan egy pontban metszi egymást. Van-e négy olyan pont, amely közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre? Vegyünk két egyenest, ezek pontjai közül 2-2 olyat, amelyik nem a két egyenes metszéspontja. Ezek közül nem tudunk úgy venni hármat, hogy azok egy egyenesre illeszkedjenek, mivel a kiválasztott három közül kettő mindig az egyik egyenesre illeszkedik, egy a másikra, ha pedig ezek egy egyenesen lennének, akkor nem teljesülne, hogy bármely két egyenes pontosan egy pontban metszi egymást. Teljesül tehát a II.1.1. Definíció, azaz a lineáris terünk ez esetben projektív sík. ■

IV.3. Az Erdős, Mullin, T. Sós, Stinson-tétel

Láttuk, hogy nemdegenerált lineáris tér esetén a *de Bruijn-Erdős tétel* csak $v = n^2 + n + 1$ alakú pontszám esetén teljesül egyenlőséggel. A kérdés, amit vizsgálni szeretnénk, hogy ha $(n-1)^2 + (n-1) + 1 = n^2 - n + 1 < v < n^2 + n + 1$, akkor milyen becslést adhatunk az egyenesek számára, vagyis ha a pontszámot két „szomszédos" rendű projektív sík pontszáma közé fogjuk.

IV.3.1. Lemma. (Stanton-Kalbfleisch) *Az $\mathcal{L} = (V, E)$ lineáris térben egy tetszőleges $L \in E$ egyenes esetén*

$$b \geq 1 + \frac{k^2(v-k)}{v-1} = f(k, v),$$

ahol $b = |E|, v = |V|, k = |L|$. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

- *L minden $E \setminus \{L\}$-beli egyenest metsz,*
- *tetszőleges $L \neq N \in E$ egyenesre $|N| = t$, ahol t konstans,*
- *$k(t-1) = (v-1)$.*

Bizonyítás. Jelöljük $\mathcal{M}$-mel az L-t metsző egyenesek halmazát ($|\mathcal{M}| = m$).

A $\sum\limits_{M\in\mathcal{M}}(|M|-1)$ kifejezés azon (p,M) párok száma az $\mathcal{M}$ élhalmaz által meghatározott hipergráfban, melyekre $p\in M\setminus L,\quad M\in\mathcal{M}$. Egy ilyen p pont az L minden pontjával egyértelműen van összekötve az eredeti lineáris térben, azaz (p,M) párban rögzített p pont mellett M k-féle lehet, lehetséges p-ből pedig $v-k$ darab van, tehát

$$\sum_{M\in\mathcal{M}}(|M|-1)=k\cdot(v-k).$$

A $\sum\limits_{M\in\mathcal{M}}(|M|-1)(|M|-2)$ kifejezés az olyan (p,q,M) hármasok száma, melyekre $\quad p\neq q,\quad p,q\in M\setminus L,\quad M\in\mathcal{M}$. Itt az előzőeknek megfelelő p, illetve q pontokból $v-k$, illetve $v-k-1$ van, két ilyen rögzített pont pedig legfeljebb egy egyenesre illeszkedhet (ugyanis a struktúrát lineáris térből kaptuk), azaz itt egy felső becslést tudunk adni:

$$\sum_{M\in\mathcal{M}}(|M|-1)(|M|-2)\leq(v-k)\cdot(v-k-1)\cdot 1=(v-k)\cdot(v-k-1).$$

Ezekből

$$\sum_{M\in\mathcal{M}}(|M|-1)^2=\sum_{M\in\mathcal{M}}(|M|-1)\,(|M|-2)+\sum_{M\in\mathcal{M}}(|M|-1)\leq$$
$$\leq(v-k)(v-k-1)+k(v-k)=(v-k)(v-1).$$

Használjuk fel az $|M|-1$ értékekre $(M\in\mathcal{M})$ a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget:

$$\left(\sum_{M\in\mathcal{M}}(|M|-1)\right)^2\leq m\cdot\sum_{M\in\mathcal{M}}(|M|-1)^2$$

Az egyenlőtlenség bal oldalába behelyettesítve, jobb oldalát felülről becsülve kapjuk:

$$(k(v-k))^2\leq m(v-k)(v-1),$$

ebből pedig

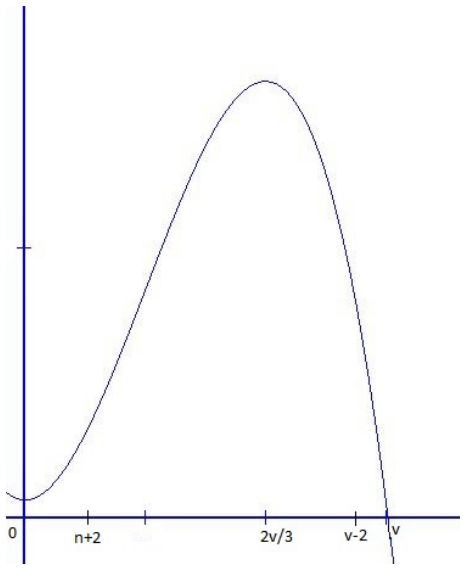
$$b\geq m+1\geq 1+\frac{k^2(v-k)}{v-1}=f(k,v).$$

Egyenlőség esetén a számtani és négyzetes közép között is egyenlőség áll fenn, azaz az összes $|M|-1$, és így $|M|$ érték $(M\in\mathcal{M})$ ugyanazzal a t konstanssal egyenlő. Továbbá $\sum\limits_{M\in\mathcal{M}}(|M|-1)(|M|-2)\ \leq\ (v-k)\cdot(v-k-1)$ is

egyenlőséggel teljesül, azaz tetszőleges $p \neq q, \quad p, q \in M \setminus L, \quad M \in \mathcal{M}$ pontok pontosan egy $\mathcal{M}$-beli egyenesre illeszkednek, ebből már következik, hogy $\mathcal{M} = E \setminus \{L\}$, ami épp azt jelenti, hogy minden egyenes metszi L-t.
Ekkor egy rögzített $p \in \mathcal{M} \setminus \{L\}$ pont esetén $k(t-1) = \deg(p) \cdot (t-1)$, azaz ez a p-n átmenő egyenesek p-től különböző elemeinek az összegzése, ami a tér *lineáris* mivolta miatt éppen $v-1$, ezzel a lemma valamennyi állítását beláttuk.■

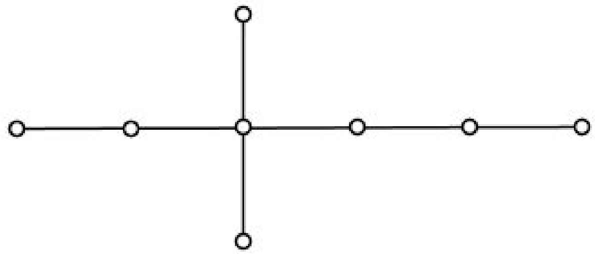
IV.3.2. Lemma. *Az előző (IV.3.1.) lemmában szereplő $f(k,v)$ függvény v-szerint szigorúan monoton nő, k-szerint $k \in \left[2, \frac{2v}{3}\right]$-on szigorúan monoton növekszik, $k \in \left[\frac{2v}{3}, v-1\right]$-en szigorúan monoton csökken.*

Bizonyítás. Az $f(k,v)$ függvényt k szerint parciálisan deriválva $\partial_k f = \frac{k(2v-3k)}{v-1}$, még egyszer deriválva $\partial_k^2 f = \frac{2v-6k}{v-1}$, $\partial_k^2 f(\frac{2v}{3}) = -\frac{2v}{v-1} < 0 \quad (v \geq 3)$, azaz a függvény a $[2, v-1]$ intervallumon $k = \frac{2v}{3}$-nál veszi fel a maximumát, $[2, \frac{2v}{3}]$-on szig. mon. nő, $[\frac{2v}{3}, v-1]$-en szig. mon. csökken.
$f(k,v)$ függvényt v szerint parciálisan deriválva $\partial_v f = \frac{k^2(k-1)}{(v-1)^2} > 0$, azaz $f(k,v)$ a v-ben szig. monoton nő. ■

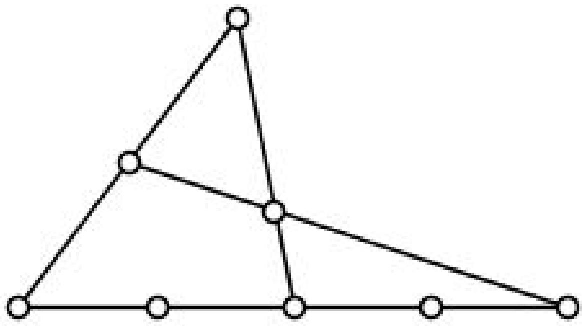


A függvény a k-változó szerint egy tetszőleges $[a,b] \subseteq [2, v-1]$ intervallumon a minimumát vagy a-ban, vagy b-ben veszi fel.

IV.3.3. Lemma. *$\mathcal{L} = (V,E)$ nemdegenerált lineáris tér, melyre $v = |V| \geq n^2 - n + 2$, és $b = |E| \leq n^2 + n + 1 \quad (n \geq 2)$. Ha a legnagyobb blokk mérete – jelöljük ezt k-val a későbbiekben – legalább $n+2$, akkor az $\mathcal{L}$ nemdegenerált lineáris tér a következők egyike:*



E_2



E_3,

ahol a két ábra úgy értelmezendő, hogy azon pontpárokat, melyek a rajzon egyetlen közös egyenesre sem illeszkednek, kétpontú egyenesek kötik össze. Ezeket nem rajzoltuk fel az egyszerűség kedvéért. Tehát az E_2-vel jelölt lineáris tér 8 pontból és 12 egyenesből, az E_3 pedig 8 pontból és 13 egyenesből áll.

Bizonyítás. A kiinduló feltétel szerint $k \geq n + 2 \geq 4$. Továbbá a legnagyobb blokkon kívül legalább két pont van, ugyanis ha csak egyetlen pont lenne, akkor ez egy degenerált lineáris tér lenne, tehát $k \leq v - 2$ is fennáll.
A k-ra írt feltételek és IV.3.2. miatt $f(k, v) \geq \min\{f(n + 2, v), f(v - 2, v)\}$.
Be fogjuk látni, hogy k az adott feltételek mellett nem lehet bármekkora. A k pontú egyenesen kívül legalább 2 pont van, egyenes pedig a k pontún kívül még legalább $1 + (k - 1) \cdot 2$ van, mivel ez a 2 „külső” pont együtt legfeljebb egy másik ponttal illeszkedhet egy egyenesre a k pontot tartalmazó egyenes pontjai

közül (legalább 3-pontú egyenest alkotva), ezen kívül pedig az egyenes többi, $k-1$ pontjának mindegyikével legalább 2-pontú egyenesekre illeszkedik külön-külön a 2 „külső” pont, ami összesen $(k-1)\cdot 2$, azaz azt kaptuk összességében, hogy $b \geq 2+(k-1)\cdot 2 = 2k$.
Meg szeretnénk nézni, hogy $k \leq \frac{2v}{3}$ milyen n-ekre teljesül biztosan (ekkor $f(k,v)$ a k-változó szerint $n+2$-ben veszi fel a minimumát):

$$k \leq \frac{b}{2} \leq \frac{n^2+n+1}{2} \leq \frac{2}{3}\cdot(n^2-n+2) \leq \frac{2v}{3}$$

$$3n^2+3n+3 \leq 4n^2-4n+8$$

$$0 \leq n^2-7n+5$$

Az $x^2-7x+5=0$ egyenlet megoldásából $n \geq 7$. A továbbiakban többször ki fogjuk használni az $f(k,v)$ függvény k-változójában a $[\frac{2v}{3}, v-2]$ intervallumon a monoton csökkenést, azaz megvizsgáljuk $f(v-2,v)$ értéket, összevetjük a b-re megadott felső korláttal, amiből ellentmondásra jutunk, mely a monoton csökkenés miatt az egész $[\frac{2v}{3}, v-2]$ intervallumon ellentmondást szül, azaz $k < \frac{2v}{3}$.

$n=6$ eset:

$$v \geq 36-6+2=32, \quad b \geq f(v-2,v) = 1+2\cdot\frac{(v-2)^2}{v-1} \geq 1+2\cdot\frac{900}{31} > 59,$$

ugyanakkor

$$b \leq 36+6+1=43.$$

$n=5$ eset:

$$v \geq 25-5+2=22, \quad b \geq 1+2\cdot\frac{(v-2)^2}{v-1} \geq 1+2\cdot\frac{400}{21} > 39,$$

viszont

$$b \leq 25+5+1=31.$$

$n=4$ eset:

$$v \geq 16-4+2=14, \quad b \geq 1+2\cdot\frac{(v-2)^2}{v-1} \geq 1+2\cdot\frac{144}{13} > 23,$$

$$b \leq 16+4+1=21.$$

Tegyük fel $n \geq 4$-et, ekkor tehát $k < \frac{2v}{3}$, és használjuk ki $f(k,v)$-nek a v-változó szerinti monoton növekedő jellegét :

$$n^2+n+1 \geq b \geq f(k,v) \geq \min\{f(n+2,v), f(v-2,v)\} = f(n+2,v) \geq$$

$$\geq f(n+2, n^2-n+2) = n^2+n+1+\frac{2n^3-4n^2-9n}{n^2-n+1}.$$

Az n^2-n+1 negatív diszkriminánsú, $n \geq 0$, ezért a

$$0 \geq 2n^2-4n-9$$

egyenlőtlenségre egyszerűsödik le a probléma. A $2x^2-4x-9=0$ egyenlet megoldásából $n \leq 3$ jön ki végül, de $n \geq 4$ a feltevésünk szerint, azaz a megadott kezdeti feltételek mellett csak az $n = 2, 3$ esetek jöhetnek szóba.

$n = 2$-re: $k \geq 4$, $b \geq 2k \geq 8$, de $b \leq 2^2+2+1 = 7$, így már csak az $n = 3$ eset lehetséges.

Tehát $n = 3$, $b \leq 9+3+1 = 13$, $v \geq 9-3+2 = 8$. A $b \geq 2k$-ból és $k \geq n+2$-ből $k = 5$ vagy 6.

Ha $k = 5$, akkor az $f(k,v) = 1+k^2\frac{v-k}{v-1} = 1+25\cdot\frac{v-5}{v-1} \geq 1+25\cdot\frac{3}{7} > 11$, de $v = 9$-re: $f(k,v) = 1+25\cdot\frac{4}{8} > 13$, ellentmondásban b felső korlátjával, ebből következik, hogy $v = 8$.

$k = 6$-nál $v = 9$ esetén $b \geq f(k,v) = 1+36\cdot\frac{v-6}{v-1} \geq 1+36\cdot\frac{3}{8} > 14 > 13 \geq b$, ellentmondás, viszont $v = 8$-ra $f(k,v) = 1+36\cdot\frac{2}{7} < 12$, tehát $v = 8$. Az könnyen ellenőrizhető, hogy E_2 és E_3 megfelel a feltételeknek. Azt is lássuk be, hogy más nem jó:

Ha $k = 5$, akkor az 5-pontú egyenesen kívül 3 „külső” pont van. A struktúra lineáris jellege miatt ebből a 3 pontból bármely pontpár illeszkedik egy egyenesre. Ha létezik 4-pontú egyenes, az csak úgy lehetséges, hogy a 3 „külső” pont és az 5-pontú egyenes egy pontja alkotja. Így $b \geq 2+3\cdot 4 = 14$, de $b \leq 13$. Ha a 3 „külső” pont együtt egy 3-pontú egyenesre illeszkedik, akkor $b \geq 2+3\cdot 5 = 17 > 13 \geq b$, ellentmondás.
Ha a 3 „külső” pont közül bármely kettő egy 2-pontú egyenest alkot, akkor az E_3-hoz képest legalább $+2$ egyenessel számolhatunk, tehát $b \geq 13+2 = 15 > 13 \geq b$, ellentmondás. Az összes E_3-on kívüli esetet kizártuk.

Ha $k = 6$, akkor ha a két „külső” pont együtt egy 2-pontú egyenest alkot $\Rightarrow b \geq 2+2\cdot 6 = 14 > 13 \geq b$, ellentmondásra jutottunk, így ez a 2 pont csak egy harmadik ponttal együtt (még eggyel nem, hisz legfeljebb egy pontban metszheti egymást két egyenes) illeszkedhet egy egyenesre, ezzel a lineáris tér éppen az E_2. ■

IV.3.4. Tétel. (Erdős, Mullin, T. Sós, Stinson) *Egy $\mathcal{L} = (V, E)$ nemdegenerált lineáris térben $n^2 + n + 1 \geq b \geq B(v)$, ahol*

$$B(v) = \begin{cases} n^2+n-1, & \text{ha } v = n^2 - n + 2, \text{ miközben } n \neq 2 \\ n^2+n, & \text{ha } n^2+1 \geq v \geq n^2-n+3 \text{ vagy } v = 4 \\ n^2+n+1, & \text{ha } n^2+n+1 \geq v \geq n^2+2, \end{cases}$$

$b = |E|, v = |V|$.

Bizonyítás. Legyen $\max\limits_{K \in E} |K| = k$.
A IV.3.3. Lemmában szereplő E_2-re és E_3-ra $v = 3^2 - 3 + 2 = 8$, $B(v) = 3^2 + 3 - 1 = 11$, ez mind 12-nél, mind 13-nál kisebb, azaz $B(v) \leq b$ teljesül, tehát a továbbiakban IV.3.3. miatt $k \leq n+1$-et tesszük fel.
Az $\mathcal{L}$ lineáris térben minden pont foka legalább n, ugyanis ha indirekt feltesszük, hogy nincs így, akkor egy legfeljebb $n-1$ fokszámú ponton átmenő egyenesek alapján felírva $v \leq 1 + (n-1)\cdot(k-1) \leq 1 + (n-1)\cdot n < n^2 - n + 2 \leq v$. Három fő esetet fogunk vizsgálni k-szerint:

I. $k = n+1$,

II. $k = n$,

III. $k < n$.

I. eset: $\boxed{k = n+1}$
Legyen S egy olyan egyenes, melyre $|S| = k$. Ha az S-re illeszkedő összes pont fokszáma nagyobb, mint n, akkor

$$b \geq |\{K \in E : K \cap S \neq \emptyset\}| \geq 1 + k \cdot n = n^2 + n + 1 = \max_{n^2-n+2 \leq v \leq n^2+n+1} B(v) \geq B(v).$$

A továbbiakban feltehető, hogy létezik S-re illeszkedő n-fokú pont (a fentiek alapján ugye ez a minimális fokszám), jelöljük ezt p-vel. A p-n átmenő egyenesek alapján felírva $v \leq 1 + \deg(p)\cdot(k-1) = n^2 + 1$.

A) eset: $\exists\, E \ni J \neq S : p \in J : |J| = k$.
A IV.1.1. Lemmának megfelelően $\forall r \neq p : r \in S$ pontra $\deg(r) \geq |J| = k = n+1$.

$$b \geq |\{K \in E : K \cap S \neq \emptyset\}| \geq 1 + (k-1)\cdot n + (n-1) = n^2 + n \geq B(v),$$

mert $v \leq n^2 + 1$, $B(v)$ ilyenkor definíció szerint vagy $n^2 + n$, vagy $n^2 + n - 1$.

B) eset: $\nexists\, E \ni J \neq S : p \in J : |J| = k$. A p-n átmenő egyenesek alapján felírva: $v \leq 1 + n + (n-1)\cdot(n-1) = n^2 - n + 2$, viszont v-re az $n^2 - n + 2$ a legkisebb érték, amit felvehet a kiinduló feltételünk miatt, tehát $v = n^2 - n + 2$, az egyenlőtlenség pedig végig egyenlőséggel teljesül $\Leftrightarrow$ az S-től különböző, p-n átmenő egyenesek valamennyien n-pontúak.
Ha $n = 2 \Rightarrow \mathcal{L}$ degenerált lineáris tér, mivel ekkor $|S| = 3$, $v = 2^2 - 2 + 2 = 4$, azaz S egyenesen kívül csak egyetlen pont van, ami 2-pontú egyenesekkel van összekötve S minden pontjával. Emiatt a továbbiakban feltehető, hogy $n \geq 3$.
Vegyünk két p-n átmenő, S-től különböző (előbbiek alapján n-pontú) egyenest, T-vel és W-vel jelölve őket. Ilyen $n \geq 3$ miatt biztosan van. Alulról szeretnénk becsülni az egyenesek számát úgy, hogy felírjuk a T vagy W valamelyikét metsző egyenesek számát. Legyen $u \in (T \cup W) \setminus S$, *a* IV.1.1. Lemma miatt $\deg(u) \geq |S| = k = n+1$.

$$b \geq |\underbrace{\{K \in E : K \cap (T \cup W) \neq \emptyset\}}_{\Gamma:=}| = \underbrace{|\{K \in \Gamma : K \cap T \neq \emptyset, K \cap W \neq \emptyset\}|}_{A:=} +$$

$$+ \underbrace{|\{K \in \Gamma : K \cap T \neq \emptyset, K \cap W = \emptyset\}|}_{B:=} + \underbrace{|\{K \in \Gamma : K \cap T = \emptyset, K \cap W \neq \emptyset\}|}_{C:=}.$$

Tovább bontva A-t aszerint, hogy p-t tartalmazzák-e ezek a közös egyenesek: egyrészt a p-n átmenő n darab egyenes (beleértve T-t és W-t is) mindegyike metszi T-t és W-t is, másrészt egy $u \in (T \cup W) \setminus S$ pontból a p-n átmenő egyenest (ez vagy T, vagy W) nem számolva még pontosan $n-1$ darab egyenes megy a $\{K \in \{T, W\} : u \notin K\} \setminus \{p\}$ halmaz pontjai felé. Mivel közös egyenesek, elegendő csak az egyik egyenes p-től különböző pontjain átmenő, p-t nem tartalmazó közös egyeneseket tekinteni, így

$$A \geq n + (n-1)\cdot(n-1).$$

A csak T-t, vagy a csak W-t metsző egyenesek számát alulról tudjuk becsülni. Egy $u \in (T \cup W) \setminus S$ ponton pontosan $|T| = |W| = n$ közös egyenes megy át, de $\deg(u) \geq n+1$, tehát van még legalább egy egyenes, ami átmegy u-n, de nem metszi mind T-t, mind W-t. Ilyen u pontból összesen $2 \cdot (n-1)$ van, ezért

$$B + C \geq 2 \cdot (n-1) \cdot 1 = 2(n-1).$$

Összesítve tehát:

$$b \geq |\Gamma| = A + B + C \geq n + (n-1)^2 + 2(n-1) = n^2 + n - 1 = B(v).$$

Az utolsó egyenlőség $v = n^2 - n + 2$ és $n \geq 3$ miatt igaz.

II. eset: $\boxed{k = n}$ ($n \geq 3$, ugyanis $k = n = 2$ esetén degenerált lineáris tér lenne)
Írjuk fel egy tetszőleges $p \in V$-n átmenő egyenesek alapján a becslésünket v-re:

$$v \leq 1 + \deg(p) \cdot (k-1) = 1 + \deg(p) \cdot (n-1),$$

amiből

$$\deg(p) \geq \frac{v-1}{n-1} \geq \frac{(n^2-n+2)-1}{n-1} > \frac{n^2-n}{n-1} = n.$$

Legyen M egy n-pontú egyenes. Az M-et metsző egyenesek száma az előzőek alapján $\geq n \cdot n = n^2$, így tehát

$$b = |\{K \in E : K \cap M \neq \emptyset\}| + \underbrace{|\{K \in E : K \cap M = \emptyset\}|}_{h:=} \geq n^2 + 1 + h.$$

A h értéket becsüljük alulról úgy, hogy megszámoljuk azokat a (p, Q) párokat, melyekre $E \ni Q \ni p \notin M$, $M \cap Q = \emptyset$. Egy adott Q egyeneshez legfeljebb $k = n$ pontot tudunk találni, ilyen Q egyenes pedig h van, tehát $h \cdot c$ egy felső becslés az ilyen tulajdonságú (p, Q) párok számára. Egy adott p pontot nézve belőle pontosan $k = n$ pont az M pontjai felé megy, de $\deg(p) > n$, tehát van legalább egy megfelelő egyenes hozzá, M-en kívüli pont $v - n$ van, tehát az előbbi tulajdonsággal rendelkező (p, Q) párokra $(v-n) \cdot 1 = v - n$ alsó becslés, így

$$h \cdot n \geq v - n,$$
$$h \geq \frac{v-n}{n}.$$

Az előzőekben b-re írt alsó becslést folytatva:

$$b = \cdots \geq n^2 + 1 + h \geq n^2 + 1 + \frac{v-n}{n}.$$

- $v = n^2 - n + 2$

$$b \geq n^2 + 1 + \frac{n^2 - 2n + 2}{n} > n^2 + 1 + \frac{n^2 - 2n}{n} = n^2 + n - 1 = B(v)$$

- $n^2 + 1 \geq v \geq n^2 - n + 3$

$$b \geq n^2 + 1 + \frac{n^2 - 2n + 3}{n} > n^2 + 1 + \frac{n^2 - 2n}{n} = n^2 + n - 1 = B(v) - 1$$

$$b \geq B(v)$$

- $n^2 + n + 1 \geq v \geq n^2 + 2$

$$b \geq n^2 + 1 + \frac{n^2 - n + 2}{n} > n^2 + 1 + \frac{n^2 - n}{n} = n^2 + n = B(v) - 1$$

$$b \geq B(v)$$

III. eset: $\boxed{k < n}$ $(n \geq 3)$

Egy tetszőleges $p \in V$ ponton átmenő egyenesek alapján becsülve v-t:

$$v \leq 1 + \deg(p) \cdot (k-1) \leq 1 + \deg(p) \cdot (n-2),$$

így $\forall p \in V$ pontra

$$\deg(p) \geq \frac{v-1}{n-2} \geq \frac{n^2 - n + 1}{n-2} > \frac{n^2 - 2n}{n-2} = n.$$

Az I.1.8. Lemmában szereplő egyenlőség bal oldalának triviális alsó becslése ezek alapján $v \cdot (n+1)$, jobb oldalának triviális felső becslése $b \cdot k \leq b \cdot (n-1)$, amiből

$$b \geq v \cdot \frac{n+1}{n-1}.$$

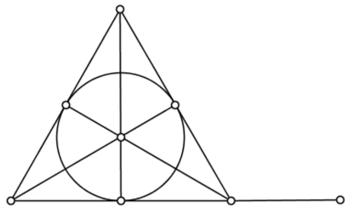
A pontszám $v \geq n^2 - n + 2$, ekkor

$$b \geq (n^2 - n + 2) \cdot \frac{n+1}{n-1} > (n^2 - n)\frac{n+1}{n-1} = n^2 + n.$$

$$b \geq n^2 + n + 1 = \max_{n^2 - n + 2 \leq v \leq n^2 + n + 1} B(v).$$

Ezzel az összes esetben beláttuk a tételt. ■

Tekintsük a következő lineáris teret (E_2 és E_3 ábrájához hasonlóan a 2-pontú egyenesek nincsenek feltüntetve):



E_1

Klaus Metsch bebizonyította ([5]), hogy egy v pontból és $B(v)$ egyenesből (ahol $B(v)$ definíciója az előző tételben volt ismertetve) álló, E_1-től különböző nemdegenerált lineáris tér mindig megkapható projektív síkból néhány pont és a két pontnál kevesebb pontot tartalmazó egyenesek törlésével.

Irodalomjegyzék

[1] R. A. Fisher, *An examination of the different possible solutions of a problem on incomplete blocks*, Ann Eugenics 10 (1940) 52-75

[2] N. G. de Bruijn, P. Erdős, *On a combinatorical problem*, Indag. Math., 10, 1948, 421-423

[3] T. Szőnyi, *Szimmetrikus struktúrák,* egyetemi jegyzet, internetről letölthető: http://etananyag.ttk.elte.hu/request.php?81

[4] A. Hraskó (szerk.), *Új matematikai mozaik,* Typotex, 2002

[5] K. Metsch, *Linear spaces with few lines,* Discrete Mathematics 110 (1992) 215-222

[6] J. Spencer, *Coloring of the projective plane,* Discrete Mathematics 73 (1988/1989) 213-220

[7] Gy. Katona, A. Recski, Cs. Szabó, *A számítástudomány alapjai,* Typotex

[8] P. Erdős, R. C. Mullin, V. T. Sos, D. R. Stinson, *Finite linear spaces and projective planes,* Discrete Math. 47, 49-62 (1983).

[9] F. de Clerck, Gy. Károlyi, M. J. de Resmini, *Combinatorial structures,* 1993

[10] Wikipedia, *Linearer Raum (Geometrie),* http://de.wikipedia.org/wiki/Linearer_Raum_(Geometrie)