Ponthalmazok projektív terekben

A *klub*ok jellemzése véges test fölötti projektív terekben

Szakdolgozat

Készítette:

Császár Anett

matematika alapszak, alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Sziklai Péter

habilitált egyetemi docens

Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2015

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Sziklai Péter Tanár Úrnak, akinek köszönhetően egy számomra teljesen új és érdekes területet ismertem meg. Köszönöm a sok segítséget és az időt, amit a Tanár Úr rám szánt a dolgozat írása közben. Valamint azért is hálás vagyok, hogy egészen az utolsó simításokig tanácsaival és építő megjegyzéseivel elősegítette és végigkísérte a dolgozat készülését.

Továbbá, óriási köszönettel tartozom családomnak, különösen szüleimnek és testvéreimnek a dolgozat készülése közben és az egyetemi évek alatt Tőlük kapott lelki támogatásért, szeretetért és türelemért.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Klubnak egy speciális tulajdonságú ponthalmazt nevezünk a t-dimenziós q^h (ahol $h \geq 2$) elemű test fölötti projektív tér egy egyenesén. Tekintsük a t-dimenziós q^h-rendű projektív tér egy q-adrendű részgeometriáját. Ezt a részgeometriát fogjuk vetíteni egy ezen kívül eső, de a t-dimenziós, q^h-rendű projektív térbeli centrumból a tér egy projektív egyenesére. A klubot a részgeometria pontjainak vetülete fogja alkotni ezen az egyenesen. A klubnak sok érdekes tulajdonságát fogom kimondani és bebizonyítani, ennek egy eszköze a részgeometria koordinátázása lesz. A dolgozatban külön kitérek a $t = 2$ esetre, azaz amikor a projektív síkon belül vetítünk, majd ezután, pontosabban ezzel párhuzamosan fogom tárgyalni a tetszőleges t-dimenziós projektív tér esetét. Mivel ez a témakör geometriai és algebrai alapokra épül, a könnyebb követhetőség érdekében előzőleg bevezetem a szükséges előismereteket, ezt fogja felölelni az 1. fejezet. A 2. fejezet pedig kizárólag a klubok részletes tárgyalásáról fog szólni.

Fontosnak tartom megjegyezni, hogy a dolgozat nem meríti ki minden részletében a klubok témakörét, ugyanis ez korántsem teljesen kiaknázott terület, akadnak még mindeddig fel nem ismert tulajdonságok. Fancsali Szabolcs és a témavezetőm, Sziklai Péter jelenleg is kutatnak ezen a területen, az ő 2008-ban megjelent publikációjukra támaszkodtam a 2. fejezet megírásakor.

1. fejezet

Elméleti alapozás

A dolgozat magját a 2. fejezet alkotja, aminek megértéséhez fontosnak tartom, hogy minden ott használt definíciót, tételt előzőleg bevezessek. Először a szükséges algebrai, majd projektív geometriai fogalmakat tárgyalom.

1.1. Véges testek

Szeretném megjegyezni, hogy ebben a szakaszban Kiss Emilnek az irodalomjegyzékben szereplő [5] könyvét használtam fel.

Mivel a 2. fejezetben véges testek fölötti projektív térbeli ponthalmazokkal fogok foglalkozni, most vezetem be az ezek alapjául szolgáló fogalmakat a Galois-elméletből. Mielőtt rátérnék a véges testekkel kapcsolatos ismeretek tárgyalására, bevezetem a test és a testbővítés fogalmát, amik kulcsfontosságú szereppel fognak bírni a későbbiekben. A gyűrű fogalmára nem lesz szükségem a dolgozatban, csak abból a célból vezetem be, hogy a testet definiálhassam.

1.1. Definíció. Gyűrű*nek nevezünk egy* $(R, +, \cdot)$ *hármast, ahol* R *egy halmaz,* $+$ *az összeadásnak,* $\cdot$ *a szorzásnak nevezett kétváltozós műveletek, amelyekre teljesülnek az alábbiak:*

- $(R, +)$ *Abel-csoport (azaz* $+$ *asszociatív és kommutatív művelet, amelyre nézve létezik nullelem és minden elemnek létezik ellentettje);*
- $\cdot$ *asszociatív művelet, azaz* $\forall a, b, c \in R : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$*;*
- *érvényes a disztributivitás, azaz* $\forall a, b, c \in R :$
  $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ *és* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

1.2. Definíció. *Egy gyűrűt* test*nek nevezünk, ha a szorzásra nézve kommutatív, egységelemes és minden nemnulla elemének létezik inverze. Ha a szorzásra nézve a kommutativitás nem teljesül,* ferdetest*ről beszélünk.*

1.3. Definíció. *Az L test* bővítés*e a K testnek, ha K részhalmaza L-nek, és K maga is test az L-beli műveletekre nézve. Jelölés: $L|K$.*

1.4. Definíció. *Legyen $L|K$ testbővítés és $\alpha, \beta, \ldots$ az L-nek elemei. A K és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemek által* generált bővítés*nek nevezzük az L test legszűkebb olyan résztestét, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket is tartalmazza. Jelölés: $K(\alpha, \beta, \ldots)$.*

Ezek egy speciális esete a K fölött egy elemmel generálható testbővítés (jelölés: $K(\alpha)$), melyet *egyszerű bővítés*eknek nevezünk.

$K(\alpha, \beta, \ldots)$ mindig létezik, hiszen ez pontosan az L összes olyan résztesteinek metszete, melyek a K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazzák.

1.5. Definíció. *Az $L|K$ testbővítést* véges bővítés*nek nevezzük, ha az L-nek, mint a K fölötti vektortérnek a dimenziója véges. Ezt a dimenziót hívjuk a bővítés* fok*ának. Jelölés: $|L : K|$.*

1.6. Tétel (A testbővítések fokának szorzástétele)**.** *Ha $M|L$ és $L|K$ testbővítések, akkor $M|K$ akkor és csak akkor véges bővítés, ha $L|K$ és $M|L$ véges bővítések és $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.*

1.7. Tétel. *Legyen $L|K$ bővítés és $\alpha \in L$, amely gyöke egy nem nulla, K-beli együtthatós polinomnak (elnevezés: α* algebrai*). Ekkor:*

1. *egyértelműen létezik egy normált, $K[x]$-beli m_α polinom, hogy tetszőleges $f \in K[x]$ esetén $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow m_\alpha | f$;*

2. *m_α a legalacsonyabb fokú nem nulla $K[x]$-beli polinom, amelynek α gyöke;*

3. *m_α irreducibilis K fölött;*

4. *ha α gyöke egy irreducibilis $g \in K[x]$ polinomnak, akkor g és m_α egymás konstans-szorosai. Továbbá, ha g normált, akkor $g = m_\alpha$.*

1.8. Definíció. *A tételben szereplő m_α polinomot az $\alpha \in L$ algebrai elem K fölötti* minimálpolinom*jának nevezzük. Továbbá, α* foka *K fölött az α K fölötti minimálpolinomjának a foka (jel: $gr_K\alpha$).*

1.9. Állítás. *Ha $L|K$ testbővítés és $\alpha \in L$, akkor a $K(\alpha)$ foka K fölött $gr_K\alpha$, ha α algebrai K fölött, és végtelen egyébként.*

1.10. Állítás. *Ha $L|K$ véges bővítés és $\alpha \in L$, akkor α algebrai K fölött és α foka osztója a bővítés fokának.*

Ezen alapdefiníciók után most rátérek a véges testekre.

1.11. Definíció. *Egy q elemű testet* véges test*nek nevezünk. Jelölés: $GF(q)$.*

A véges testek következő tulajdonságait a későbbiekben felhasználom, bár hivatkozni nem fogok rájuk, itt nem bizonyítom be őket.

1.12. Állítás. *Egy $GF(q)$ véges test fölötti n-dimenziós V vektortérnek q^n eleme van.*

1.13. Állítás. *Minden véges test elemszáma prímhatvány.*

1.14. Tétel. *Minden p^n prímhatványra pontosan egy $q = p^n$ elemű test létezik (izomorfizmus erejéig).*

1.15. Tétel. *Véges test multiplikatív csoportja ciklikus. (Egy csoportot ciklikusnak nevezünk, ha egy alkalmas elemének az egész kitevőjű hatványaiból áll.)*

1.2. Projektív geometriai alapok

Most rátérek a projektív geometriai alapfogalmak tárgyalására, majd bevezetem a projektív tér koordinátázását homogén koordináták segítségével. Ehhez a szakaszhoz az irodalomjegyzékben szereplő Csikós Balázs - Kiss György [2], Kiss György - Szőnyi Tamás [3] és Hajós György [6] könyveit, valamint a [4] jegyzetet használtam fel.

1.2.1. A projektív sík és tér alaptulajdonságai

1.16. Definíció. *A háromdimenziós valós* projektív tér *a háromdimenziós euklideszi tér kibővítése ideális térelemekkel. Minden egyeneshez hozzátartozik pontosan egy végtelen távoli pont, ezt* ideális pont*nak nevezzük. Két egyeneshez pontosan akkor tartozik ugyanaz az ideális pont, ha a két egyenes párhuzamos. A projektív tér pontjai az euklideszi tér pontjai az ideális pontokkal kibővítve.*
Egy projektív egyenes *vagy egy euklideszi egyenes az ideális pontjával kibővítve, vagy egy euklideszi sík ideális pontjainak halmaza. Ez utóbbit* ideális egyenesnek *nevezzük.*
Egy projektív sík *vagy egy euklideszi sík az ideális egyenesükkel kibővítve, vagy az összes ideális pont halmaza a téren. Ez utóbbit* ideális sík*nak hívjuk.*

Az n-dimenziós (valós) projektív teret jelölje: $PG(n, \mathbb{R})$.

Mivel a későbbiekben véges testek fölötti projektív tereket fogok vizsgálni, ezért bevezetem a következő definíciót és jelölést:

1.17. Definíció. *Legyen V egy $\mathbb{F}$ ferdetest feletti vektortér. Nevezzük ekvivalensnek a $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ vektorokat, ha van olyan $\lambda \in \mathbb{F}$ skalár, amelyre $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{w}$ teljesül. Ez ekvivalenciareláció, melynek ekvivalenciaosztályainak halmazát a* V vektortérhez asszociált projektív tér*nek nevezzük. (Jelölés: P(V)). Az ekvivalenciaosztályok kölcsönösen egyértelműen felelnek meg V egydimenziós lineáris altereinek. Egy nem nulla $\boldsymbol{v} \in V$ vektor ekvivalenciaosztályát $[\boldsymbol{v}]$-vel jelöljük és a projektív tér $\boldsymbol{v}$ által meghatározott pontjának fogjuk hívni. A $P(V)$ projektív tér egy projektív altere a V valamely W alteréhez asszociált $P(W)$ projektív tér.*

1.18. Megjegyzés. *A V vektortérhez asszociált P(V) projektív tér dimenziója eggyel kisebb a vektortér dimenziójánál, azaz dim(P(V)) = dim(V)-1.*

Érdemes megjegyezni, hogy a $P(V)$ 0-dimenziós alterei éppen az 1-dimenziós alterekhez asszociált projektív terek, vagyis $P(V)$ pontjai. Továbbá, egy n-dimenziós projektív tér 1-, 2- és $(n-1)$-dimenziós altereit rendre egyeneseknek, síkoknak és hipersíkoknak nevezzük.

Az előbbiek értelmében nyilván $[\mathbf{v}] = [\mathbf{w}] \Leftrightarrow \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$ ($\lambda \neq 0$ skalár). A definícióból még az is következik, hogy például $(1:2:3)$ és $(2:4:6)$ a $PG(2, \mathbb{R})$ két azonos pontja, de $(1:2:3)$ és $(2:4:5)$ nem.

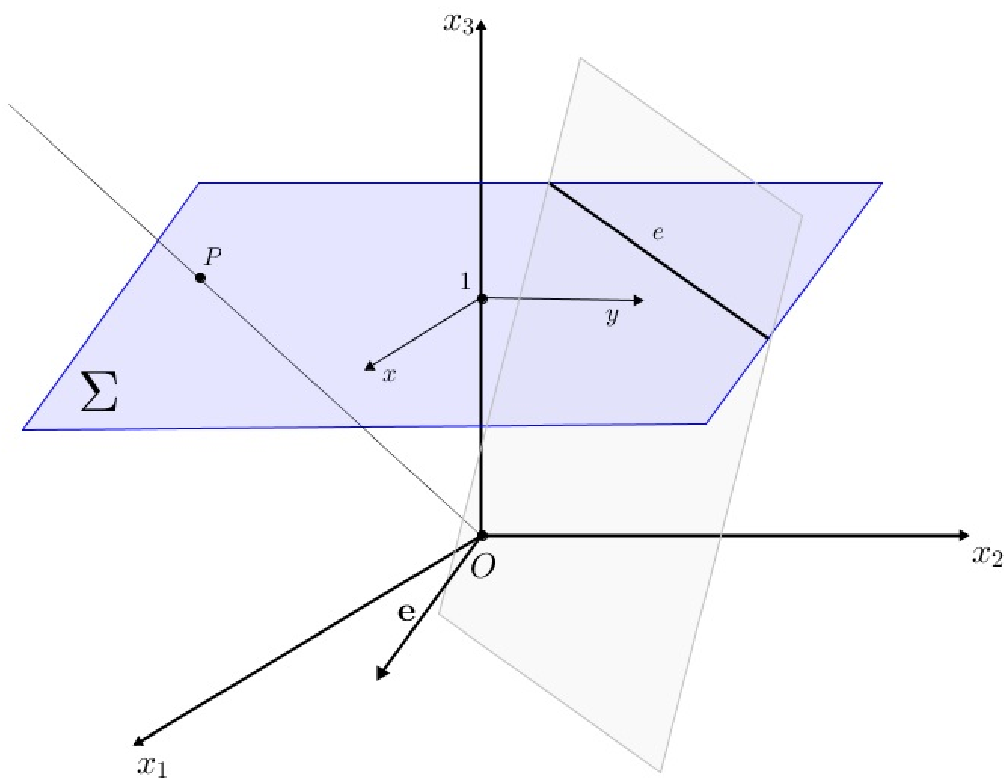
Az előbb leírtak a projektív sík homogén koordinátázását adják meg (dim(V)$=3$ esetén), ahol egy tetszőleges síkbeli P pont homogén koordinátái $(x_1 : x_2 : x_3)$ lesznek. Ha az x_3 koordináta nem nulla, akkor az x_3 koordinátával leoszthatjuk a többi koordinátát, így minden síkbeli P pont homogén koordinátája $(\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1)$ alakra hozható. Az $x_3 = 0$ homogén koordinátájú pontokat ideális pontoknak nevezzük.

A vektortér origón átmenő hipersíkjai meghatározhatóak egy normálvektorukkal, amely ebben az esetben is érzéketlen egy λ skalárral való szorzásra. A projektív sík esetében ez a sík egyeneseinek homogén koordniátáit fogja megadni (melyet $(e_1 : e_2 : e_3)$-vel jelölünk).

1.19. Megjegyzés. *A projektív síkon a következő tulajdonságok teljesülnek:*

- *a $\boldsymbol{v}$ vektor által meghatározott pont akkor és csak akkor illeszkedik a $\boldsymbol{w}$ vektor által meghatározott egyenesre, ha $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$;*
- *a $\boldsymbol{v}$ és a $\boldsymbol{w}$ vektorok által meghatározott pontok összekötő egyenesét a $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ vektor határozza meg;*

- *a* $\boldsymbol{v}$ *és a* $\boldsymbol{w}$ *vektorok által meghatározott egyenesek metszéspontját a* $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ *vektor határozza meg;*
- *az* $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ *és* $\boldsymbol{w}$ *vektorok által meghatározott pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha vegyesszorzatuk* 0 *(azaz, ha* $\boldsymbol{uvw} = 0$*);*
- *az* $\boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{v}$ *és* $\boldsymbol{w}$ *vektorok által meghatározott egyenesek akkor és csak akkor illeszkednek egy ponthoz, ha* $\boldsymbol{uvw} = 0$*.*



1.1. ábra. Közönséges pont és egyenes homogén koordinátái a projektív síkon

Abban az esetben, ha $V = \mathbb{F}^{n+1}$, a $P(\mathbb{F}^{n+1})$ n-dimenziós projektív teret $PG(n, \mathbb{F})$-el jelöljük. Ha $\mathbb{F}$ a q elemű véges test (azaz $GF(q)$), akkor $PG(n, q)$-val jelöljük a $GF(q)$ feletti n-dimenziós projektív teret (ennek precíz definíciójára mindjárt rátérek).

A későbbiekben szükségem lesz arra, hogy axiomatikusan leírjam a projektív síkot, valamint kelleni fog a dualitás elve is:

1.20. Definíció (Projektív sík 2. definíciója)**.** *A projektív sík egy* (P, E, I) *illeszkedési struktúra (ahol* P *és* E *diszjunkt halmazok,* P *elemeit pontoknak,* E *elemeit egyeneseknek nevezzük,* $I \subset P \times E$ *pedig egy illeszkedésnek nevezett reláció), amely kielégíti a következő axiómákat:*

(A1) bármely két különböző pontján pontosan egy egyenes megy át;

(A2) bármely két különböző egyenesére pontosan egy pont illeszkedik;

(A3) minden egyenesre legalább három pont illeszkedik;

(A4) minden ponton legalább három egyenes megy át.

1.21. Állítás (Dualitás elve)**.** *Adott egy állítás, amely a projektív sík pontjainak és egyeneseinek illeszkedéséről szól. Ha ebben az állításban felcseréljük a pontok és az egyenesek szerepét, akkor az így kapott állítás is igaz lesz a duális síkon. Ennek általánosítása is igaz: ha egy n-dimenziós projektív tér i-dimenziós altereire vonatkozó tétel bebizonyítható az illeszkedési axiómákból, akkor a tételben i-t $(n - i - 1)$-re kicserélve a tétel szintén levezethető lesz az illeszkedési axiómákból.*

Ez alapján tehát az n-dimenziós projektív tér pontjai és hipersíkjai egymás duálisai. Vegyük észre, hogy a 1.20. Definícióban szereplő (A1)-(A2) és (A3)-(A4) axiómák is egymás duálisai. Ezért ha egy tétel levezethető belőlük, akkor annak a duálisa is. A most következő állításban ezeket fel is használom:

1.22. Megjegyzés. *Ha a projektív síknak van $q + 1$ pontú egyenese, akkor minden egyenesén $q + 1$ darab pont van és minden pontján $q + 1$ darab egyenes megy át, valamint a projektív sík összesen $q^2 + q + 1$ egyenest és $q^2 + q + 1$ pontot tartalmaz. Ebből következik, hogy ha a projektív sík valamelyik egyenesén véges sok pont van, akkor ugyanannyi pont van a sík minden egyenesén, továbbá minden pontján ugyanannyi egyenes megy át. A projektív sík* rend*jének nevezzük q-t, ha a projektív síknak van $q + 1$ pontú egyenese.*

Bizonyítás. Legyen e az az egyenes a projektív síkon, amely a $q + 1$ pontot tartalmazza, jelöljük ezeket a pontokat rendre $P_1, P_2, \ldots, P_{q+1}$-el. Legyen Q egy ezektől eltérő pont, tehát Q nem illeszkedik e-re. Ekkor alkalmazva az $(A1)$ axiómát, Q-t a $P_i, (i = 1, 2, \ldots, q + 1)$ pontokkal össze lehet kötni, s ezek a P_iQ egyenesek mind különbözők lesznek. Felhasználva az $(A2)$ axiómát, a P_iQ egyenesek pontosan $q + 1$ pontban metszik e-t, Q-n pontosan $q + 1$ darab egyenes megy át. Ennek a duálisa is igaz lesz: ha van egy R pont, amelyen $q + 1$ darab egyenes megy át, akkor minden R-en át nem menő egyenesen $q + 1$ darab pont van. Legyen most f egy e-től különböző egyenes a síkon. $(A2)$ miatt a két egyenesnek pontosan egy metszéspontja létezik. $(A4)$ miatt pedig ezen a ponton keresztülmegy legalább egy e-től és f-től különböző egyenes is, amelynek létezik $e \cap f$-től eltérő S pontja is $(A3)$ miatt. Mivel S nincs rajta e-n, ezért S-re $q + 1$ darab egyenes illeszkedik; de S az f-en sincs rajta, ezért

f-re is $q+1$ pont illeszkedik. Ezzel beláttam azt, hogy ha a projektív síknak van $q+1$ pontú egyenese, akkor minden egyenesén $q+1$ darab pont van.

Most azt fogom belátni, hogy a projektív sík egy pontján $q+1$ egyenes megy át. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges T pontot a síkon. Az $(A3)$ és $(A4)$ axiómák miatt van T-n át nem menő g egyenese a síknak. Az előzőek miatt g-n $q+1$ darab pont van, így a duális állítás miatt T-n $q+1$ egyenes megy át, ezzel ezt az állítást beláttam.

Már csak az hiányzik, hogy a projektív sík összesen q^2+q+1 darab pontból és ugyanennyi egyenesből áll. Ehhez rögzítsünk egy tetszőleges U pontot a síkon, az U-val összekötött pontokat fogjuk megszámolni. Ezzel $(A1)$ miatt a sík összes pontjának számát megkapjuk: U-n át $q+1$ egyenes megy, ezek mindegyikén $q+1$ darab pont van, amiből egy U. Így megszámolva a pontokat azt kapjuk, hogy $q\cdot(q+1)+1=q^2+q+1$ darab pontja van a projektív síknak. A duális állítás szerint pedig egyeneseinek száma is ugyanennyi. $\square$

A szakasz további részében kimondom az n-dimenziós projektív tér axiomatikus definícióját és számunkra fontosabb tulajdonságait.

1.23. Definíció. *Legyen $\mathcal{S}$ véges halmaz, $\mathcal{T}_i$ pedig $\mathcal{S}$ részhalmazainak egy-egy gyűjteménye, ahol $i=-1,0,1,\dots,n$. Az $\mathcal{S}$ halmazt* n-dimenziós véges projektív tér*nek nevezzük, melynek $\mathcal{T}_i$ részhalmazait $\mathcal{S}$* i-dimenziós alterei*nek nevezzük, ha ezek a részhalmazok a következő axiómákat kielégítik:*

(A1) az egyetlen -1-dimenziós altér az üres halmaz, azaz $\mathcal{T}_{-1}=\{\emptyset\}$;

(A2) az egyetlen n-dimenziós altér $\mathcal{S}$, azaz $\mathcal{T}_n=\{\mathcal{S}\}$;

(A3) a 0-dimenziós alterek $\mathcal{S}$ egyelemű részhalmazaival egyeznek meg;

(A4) ha $i\neq j$, akkor $\mathcal{T}_i$ és $\mathcal{T}_j$ diszjunktak, valamint, ha $i\leq j$, akkor $\mathcal{T}_i\subseteq\mathcal{T}_j$;

(A5) alterek metszete is altér;

(A6) bármely két $\mathcal{T}_i$ és $\mathcal{T}_j$ altérre fennáll:

$$i+j=dim(\mathcal{T}_i\cap\mathcal{T}_j)+dim(\mathcal{T}_i\cup\mathcal{T}_j);$$

*(A7) létezik $n+2$ általános helyzetű pont a térben, azaz közülük semely $n+1$ nincs egy $(n-1)$-dimenziós altérben (*hipersík*nak egy $(n-1)$-dimenziós alteret nevezünk).*

A 1.22. Megjegyzés általánosításaként kimondom az alábbi állítást tetszőleges n-dimenziós q-adrendű projektív térre:

1.24. Állítás. *A $PG(n,q)$ tér pontjainak száma* $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Bizonyítás. A $GF(q)$ véges test feletti n-dimenziós projektív tér pontjainak száma megegyezik a $GF(q)$ feletti $(n+1)$-dimenziós V vektortér 1-dimenziós altereinek számával. V-ben $|V| = q^{n+1}$ darab pont van összesen a 1.12. Állítás alapján, így $|V \setminus \{\mathbf{0}\}| = q^{n+1} - 1$. Egy 1-dimenziós térben pedig $q-1$ darab pont van (a $\mathbf{0}$-t nem számolva bele). Így az $(n+1)$-dimenziós V vektortérhez asszociált n-dimenziós projektív tér minden pontját $q-1$ darab vektorral lehet reprezentálni, így $PG(n,q)$ pontjainak száma:

$$\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = q^n + q^{n-1} + \ldots + q + 1.$$

□

1.25. Állítás. *A $PG(n,q)$ tér k-dimenziós altereinek száma (ahol $0 \leq k \leq n-1$):*

$$\frac{(q^{n+1}-1) \cdot \Big((q^{n+1}-1)-(q-1)\Big) \cdot \Big((q^{n+1}-1)-(q^2-1)\Big) \cdot \ldots \cdot \Big((q^{n+1}-1)-(q^k-1)\Big)}{(q^{k+1}-1) \cdot \Big((q^{k+1}-1)-(q-1)\Big) \cdot \Big((q^{k+1}-1)-(q^2-1)\Big) \cdot \ldots \cdot \Big((q^{k+1}-1)-(q^k-1)\Big)}.$$

Bizonyítás. Egy k-dimenziós alteret $k+1$ darab lineárisan független pont határoz meg. $PG(n,q)$ összes pontjából kiválasztható $k+1$ darab lineárisan független pontból álló halmazok száma:

$$\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \cdot \Big(\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - 1\Big) \cdot \Big(\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - \frac{q^2-1}{q-1}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - \frac{q^k-1}{q-1}\Big).$$

Egy k-dimenziós altér összes pontjából kiválasztható $k+1$ darab lineárisan független pontból álló halmazok száma:

$$\frac{q^{k+1}-1}{q-1} \cdot \Big(\frac{q^{k+1}-1}{q-1} - 1\Big) \cdot \Big(\frac{q^{k+1}-1}{q-1} - \frac{q^2-1}{q-1}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\frac{q^{k+1}-1}{q-1} - \frac{q^k-1}{q-1}\Big).$$

A kettőt egymással elosztva megkapjuk a különböző k-dimenziós alterek számát:

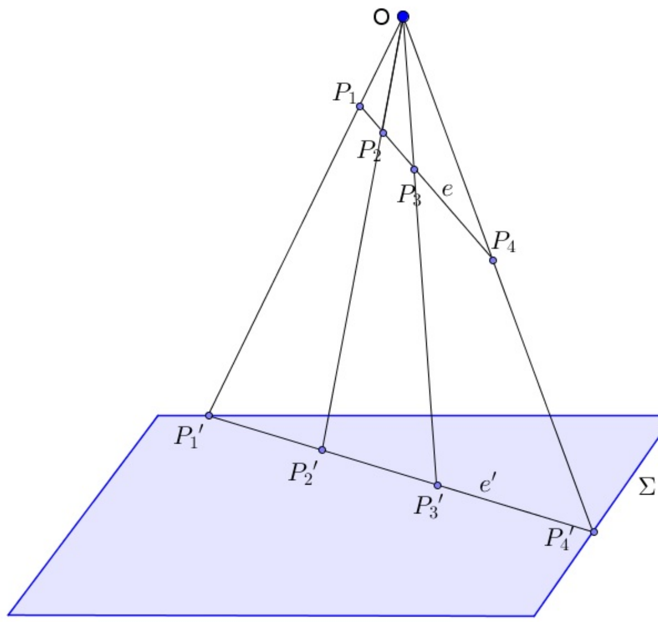
$$\frac{(q^{n+1}-1) \cdot \Big((q^{n+1}-1)-(q-1)\Big) \cdot \Big((q^{n+1}-1)-(q^2-1)\Big) \cdot \ldots \cdot \Big((q^{n+1}-1)-(q^k-1)\Big)}{(q^{k+1}-1) \cdot \Big((q^{k+1}-1)-(q-1)\Big) \cdot \Big((q^{k+1}-1)-(q^2-1)\Big) \cdot \ldots \cdot \Big((q^{k+1}-1)-(q^k-1)\Big)}.$$

□

1.2.2. Centrális vetítés

A 2. fejezetben tetszőlegesen nagy dimenziós projektív terekben fogok centrálisan vetíteni, de most a 3-dimenziós esetre mondom ki a definíciót a könnyebb elképzelhetőség kedvéért (és hogy ábrán mindezt be is tudjam mutatni):

1.26. Definíció. *$PG(3, \mathbb{R})$-ben adott egy Σ képsík és egy $O \notin \Sigma$ vetítési centrum. Egy $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ pontra lézetik OP egyenes. Legyen $P' = OP \cap \Sigma$, ekkor P'-t a P* centrális vetület*ének nevezzük (P' függ a Σ-tól és a centrumtól).*



1.2. ábra. Egyenes centrális vetülete a projektív térben

1.27. Megjegyzés. *Általánosítva, mindez nagyobb dimenzióban annyiban fog változni, hogy ha egy n-dimenziós projektív tér egy k-dimenziós alterére vetítünk, akkor a centrum egy $(n - k - 1)$-dimenziós altér lesz.*

A centrális vetítés fontos tulajdonsága, hogy megtartja az illeszkedéseket, az egyeneseket, de nem tartja meg a szöget, a hosszt és az arányokat.

A későbbiekben vetítés alatt mindig centrális vetítést fogok érteni.

1.2.3. Kettősviszony

A kettősviszonynak egy későbbi bizonyításban hasznát fogom venni, ezért definiálom fontosabb tulajdonságaival együtt, melyek közül a legelőnyösebb, hogy a centrális vetítés megtartja a kettősviszonyt is.

1.28. Definíció. *Legyenek A,B,C,D négy különböző pont (akár ideális pont is lehet köztük) egy egyenesen és O egy, az egyenesre nem illeszkedő pont. Legyenek az **a,b,c,d** vektorok az*

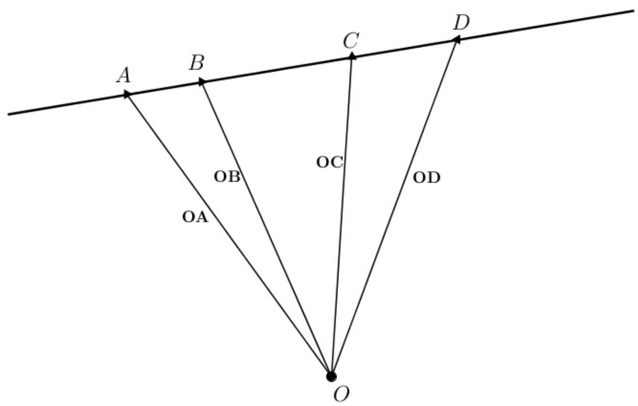
*OA, OB, OC, OD vektorokkal párhuzamosak. Mivel ezek a vektorok ugyanabban a síkban helyezkednek el, léteznek olyan nemnulla $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ számok, hogy **c** $= \lambda_1$**a** $+ \lambda_2$**b** és **d** $=$ μ_1**a** $+ \mu_2$**b** fennállnak. Ekkor a négy pont* kettősviszony*ának nevezzük az alábbi értéket:*

$$(ABCD) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Fontos megjegyezni, hogy az

$$(ABCD) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

érték sem az O pont, sem az **a,b,c,d** irányvektorok megválasztásától nem függ, ezért az $\mathbf{a} = OA, \mathbf{b} = OB, \mathbf{c} = OC, \mathbf{d} = OD$ választás is megfelel.



1.3. ábra. Négy különböző kollineáris pont kettősviszonya

A következő állítás fontos következménye az, hogy egy projektív egyenest három különböző pontja egyértelműen meghatározza, ezt több ízben fel fogom használni a későbbiekben.

1.29. Állítás. *Ha adott egy projektív egyenesen három különböző pont (A, B és C), valamint egy 0-tól és 1-től eltérő λ testelem, akkor egyértelműen létezik olyan D pont az egyenesen, amelyre a négy pont kettősviszonya $(A, B, C, D) = \lambda$.*

Bizonyítás. Először azt nézzük meg, miért írjuk elő, hogy négy pont kettősviszonya nem veheti fel a 0 és az 1 értékeket. 0 azért nem lehet, mert ha $(ABCD) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\mu_1} = 0$ (ahol $\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$ és $\mathbf{d} = \mu_1\mathbf{a} + \mu_2\mathbf{b}$), akkor valamelyik együttható 0. Ebből az következik, hogy két pont egybeesik. Ha $(ABCD) = 1$, akkor $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$-ből $C = D$ következne. Most legyenek adottak az A, B és C kollineáris pontok, adott a λ testelem, $\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$, és keressük D-t (ahol $\mathbf{d} = \mu_1\mathbf{a} + \mu_2\mathbf{b}$). $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\mu_1}$-ból azt kapjuk, hogy $\mu_1 = \lambda\lambda_1$ és $\mu_2 = \lambda_2$. Most nézzük az egyértelműséget. Tegyük fel, hogy egy $D \neq D'$ pontra is teljesül, hogy $(ABCD') = \lambda$, és legyen **d'** $= \delta_1\mathbf{a}+\delta_2\mathbf{b}$. Ekkor $(ABCD') = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} : \frac{\delta_2}{\delta_1} = \lambda$-ból azt kapjuk, hogy $\delta_2 = \frac{\lambda_2\delta_1}{\lambda_1\lambda}$, vagyis **d'** $= \delta_1\mathbf{a} + \delta_2\mathbf{b} = \delta_1\mathbf{a} + \frac{\lambda_2\delta_1}{\lambda_1\lambda}\mathbf{b} = \frac{\delta_1}{\lambda\lambda_1}(\lambda\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}) = \frac{\delta_1}{\lambda\lambda_1}\mathbf{d}$, azaz D és D' egybeesnek. □

Négy egy egyenesre eső közönséges pont kettősviszonyát osztóviszonyok hányadosaként is fel lehet írni, ami pedig irányított szakaszok előjeles hosszának hányadosaként határozható meg (ezt felülvonással jelölöm), tehát:

1.30. Állítás. *Ha A, B, C, D négy kollineáris közönséges pont, akkor*

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}.$$

Fontos, hogy ez az állítás véges test fölötti projektív terek esetében nem érvényes, hiszen ott nem létezik a hossz fogalma.

1.2.4. Az affin sík és tér alaptulajdonságai

Az affin sík, illetve tér fogalmára is szükségem lesz a későbbiekben. Az affin és a projektív tér közötti legfőbb eltérés az, hogy az affin tér esetében a párhuzamos egyenesek, illetve a párhuzamos síkok a végtelenben nem metszik egymást, hanem vagy egybeesnek vagy nincs metszéspontjuk (és egyenesek esetében azok nem kitérők). Az affin sík definícióját axiomatikusan mondom ki:

1.31. Definíció. *Ha egy (P, E, I) projektív sík ideális egyenesét az összes rajta lévő ponttal együtt elhagyjuk, akkor a megmaradt pontok és egyenesek halmazai (P' és E') az $I' \subset P' \times E'$ relációval kielégítik a következő axiómákat:*

(A1) bármely két különböző ponton pontosan egy egyenes megy át;

(A2) ha egy P pont nem illeszkedik egy e egyenesre, akkor pontosan egy olyen egyenes létezik, amely P-re illeszkedik, de nem megy át egy olyan ponton sem, amelyen e átmegy;

(A3) minden egyenesre legalább két pont illeszkedik;

(A4) minden ponton legalább három különböző egyenes megy át.

Az ezen axiómákat kielégítő pontokból és egyenesekből álló (P', E', I') struktúrát affin sík*nak nevezzük.*

Tehát a projektív sík előáll az affin sík és az ideális egyenes (l_∞) uniójaként.

Ha az affin síknak van olyan egyenese, amelyre q pont illeszkedik, akkor összesen q^2 pontot és $q^2 + q$ darab egyenest tartalmaz (mert az ideális egyenest $q + 1$ darab pontjával együtt eltöröltük), valamint minden egyenesén q darab pont van (mert az ideális pontot kitöröltük) és minden pontján $q + 1$ darab egyenes megy át. Ekkor az affin sík rendje q. A q-adrendű affin síkot $AG(2, q)$-val jelöljük. A projektív síkbeli koordináták homogenitása miatt feltehetjük, hogy az $AG(2, q)$-beli pontok harmadik koordinátája 1, így az affin sík pontjait két koordinátával leírhatjuk.

Az előzőek alapján az n-dimenziós, q-adrendű projektív tér előáll a q-adrendű, n-dimenziós affin tér és az ideális hipersík (H_∞) uniójaként, azaz $PG(n, q) = AG(n, q) \cup H_\infty$. Továbbá, $AG(n, q)$ pontjainak száma pontosan q^n, amit úgy kapunk, hogy $PG(n, q)$ összes pontjának számából kivonjuk az ideális hipersík pontjainak számát (felhasználva a 1.24. Állítást): $\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - \frac{q^n-1}{q-1} = q^n$.

2. fejezet

A klubok jellemzése

Miről fog szólni ez a fejezet? Először a q^h-adrendű projektív sík egy projektív egyenesére fogunk vetíteni egy q-adrendű projektív részsíkot. Ezen az egyenesen egy q^2+1 pontból álló speciális tulajdonságú ponthalmazt fogunk klubnak nevezni, melynek érdekes tulajdonságait mutatom be. Azt lehet sejteni, hogy mindez nemcsak a projektív síkon lesz igaz, hanem tetszőleges t-dimenziós projektív téren is, ezért a 2-dimenziós esettel párhuzamosan vezetem végig a t-dimenziós esetet is. A könnyebb ábrázolhatóság és átláthatóság kedvéért a t-dimenziós esetben az ábrákat 3-dimenzióban rajzoltam meg (nagyobb dimenzióban nem is tudnám). Azért kell külön tárgyalni a két esetet, mert van néhány olyan tulajdonsága a kluboknak, ami a projektív síkon igaz és bebizonyítható, de már 3-dimenzióban sem látszik, hogy teljesülne.

Szeretném megjegyezni, hogy ennek a fejezetnek a kidolgozásában leginkább Sziklai Péter - Fancsali Szabolcs [1] cikkére támaszkodtam, de Kiss György - Szőnyi Tamás [3] könyvét is felhasználtam.

2.1. Alaphelyzet

A továbbiakban $GF(q^h)$ (ahol q prímhatvány) jelöli $GF(q)$ h-adfokú bővítését, ahol $h \geq 2$ természetes szám. Így $PG(t, q^h)$ jelöli a q^h-adrendű, t-dimenziós projektív teret.

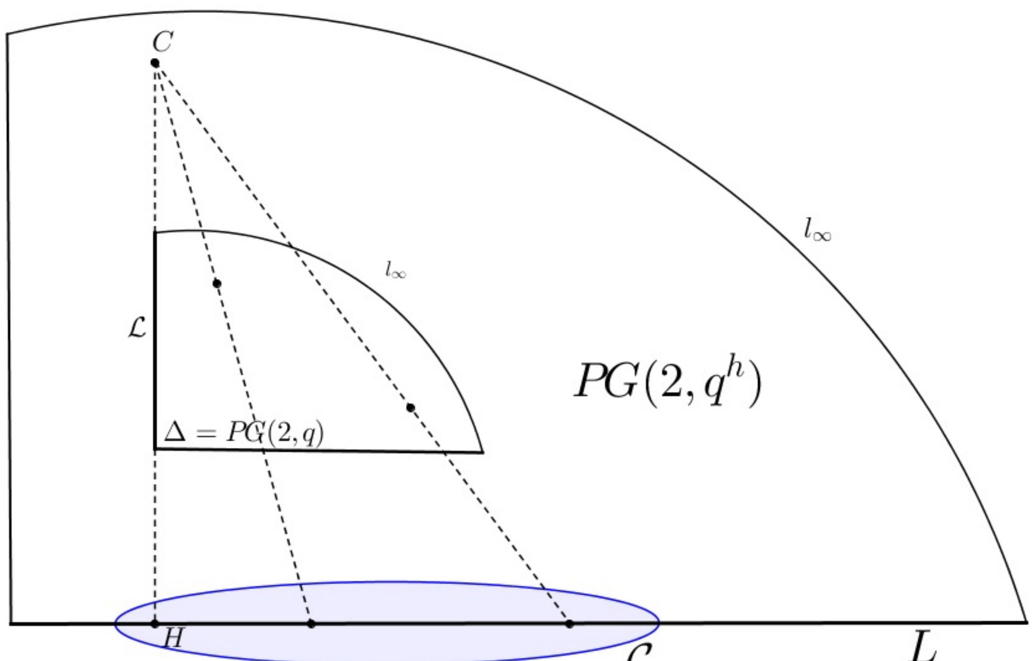
2.1.1. A $PG(2, q^h)$ projektív síkon

A $PG(2, q^h)$ projektív síkon jelöljünk ki egy L egyenest, azaz $L = PG(1, q^h)$. Továbbá legyen Δ a $PG(2, q^h)$ egy q-adrendű részsíkja, azaz $\Delta = PG(2, q)$.

2.1. Definíció. *Egy $\mathcal{C}$ L-beli ponthalmazt* klub*nak nevezünk, ha létezik $\Delta = PG(2,q)$ résszíkja $PG(2,q^h)$-nak, és Δ egy meghosszabbított egyenesének Δ-n kívül eső részén létezik egy C pont, melyből nézve Δ képe L-en $\mathcal{C}$.*

Tehát a Δ részsík pontjainak C centrumból vett vetülete lesz L-en a $\mathcal{C}$ klub. Vegyük észre, hogy ilyen vetítéssel $\mathcal{C}$-nek lesz egy speciális pontja. Ez pedig az a pont lesz, ami annak a Δ-beli egyenesnek a képe, amelynek meghosszabbításán elhelyezkedik a C centrum (erre az egyenesre ezentúl $\mathcal{L}$-ként fogok utalni). Éppen ezért $\mathcal{L}$ mind a $q+1$ pontjának vetülete egyetlen pont lesz, ezt a speciális pontot H-val jelölöm (H=head).

2.2. Definíció. *A H pontot nevezzük a $\mathcal{C}$ klub* fej*ének.*



2.1. ábra. $\Delta = PG(2,q)$ vetítése C-ből L-re

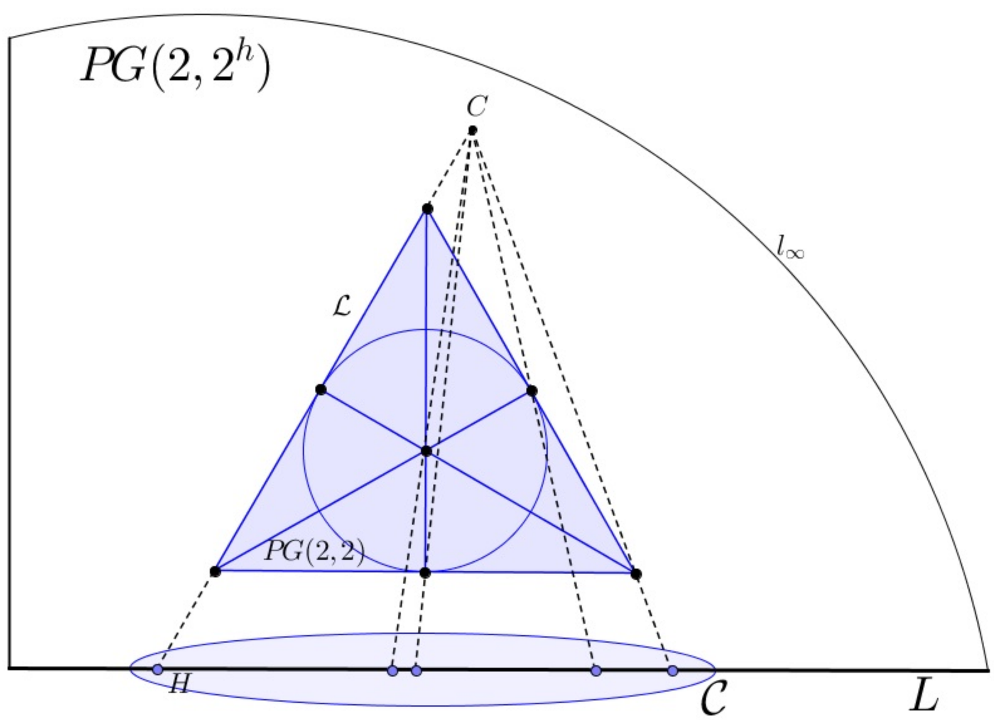
2.3. Állítás. *A $\mathcal{C}$ klubnak q^2+1 darab pontja van.*

Bizonyítás. A $\Delta = PG(2,q)$ részsíknak összesen q^2+q+1 darab pontja van, ebből $q+1$ darab van $\mathcal{L}$-en. Ennek a $q+1$ pontnak a képe egyetlen pont lesz L-en. A részsík maradék q^2 pontjának (melyeket nem tartalmaz $\mathcal{L}$) egyértelmű képe lesz L-en. Így azt kapjuk, hogy q^2+1 pontból áll a $\mathcal{C}$ klub. □

Fontos megjegyezni, hogy annak meghatározása, hogy melyik pont a fej, mindig a klub konstrukciójától függ. Ugyanis ugyanannak a klubnak a különböző konstrukciói által meghatározott fejek különbözőek lehetnek. Később be fogjuk látni, hogy két eset állhat elő: vagy a klub bármelyik pontja játszhatja a fej szerepét, vagy csakis egy pont lehet a fej minden konstrukcióban. Tehát ezentúl amikor azt mondom, hogy a $\mathcal{C}$ klubnak a feje a H pont, mindig azt fogom érteni, hogy a H pont a $\mathcal{C}$ klub adott konstrukciója által meghatározott fej.

Vetítsünk ugyanabból a centrumból egy másik $PG(2, q)$ részsíkot L-re. Ekkor nem feltétlenül kapunk másik klubot, sőt, ha a centrumot megváltoztatjuk, akkor is kaphatjuk ugyanazt a $\mathcal{C}$ klubot. Miért? Ez is a konstrukciótól függ.

Példaként a *Fano-sík*ot az előbb leírt módon vetítem. Fano-síknak a kételemű test feletti $PG(2, 2)$ projektív síkot nevezzük. Pontjainak és egyeneseinek a száma 7, valamint minden egyenesén 3 darab pont van és minden pontján 3 darab egyenes megy át. Egy tetszőleges egyenesének meghosszabbításán vegyük fel a centrumot, onnan vetítsük a Fano-sík pontjait $L = PG(1, 2^h)$-ra. A $\mathcal{C}$ klub feje annak a három pontból álló egyenesnek a vetülete, amelynek meghosszabbításán felvettük a centrumot. Az előző, 2.3. Állítás alapján a klub 5 pontból áll.



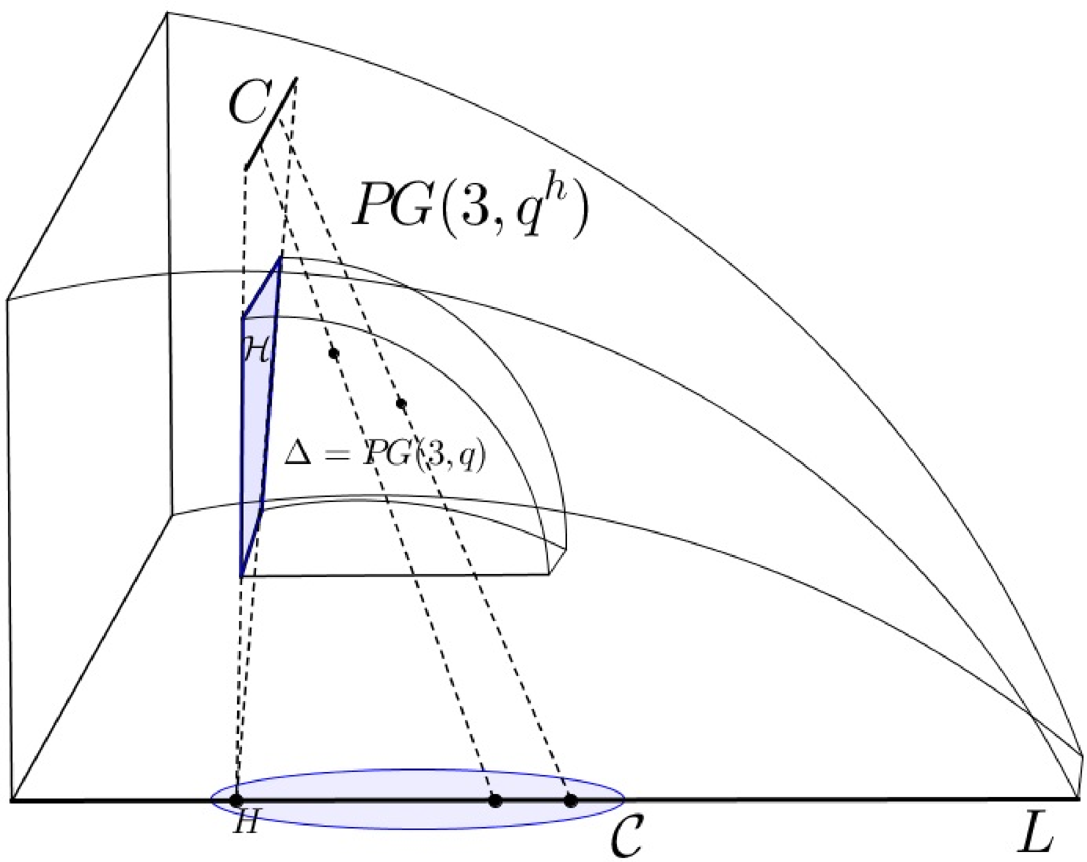
2.2. ábra. A Fano-sík vetítése C-ből L-re

2.1.2. A $PG(t, q^h)$ projektív téren

Most azt vizsgálom, hogyan néz ki mindez egy kettőnél nagyobb dimenziós, q^h-adrendű projektív téren (ahol $h \geq 2$).

Most a t-dimenziós, q^h-adrendű projektív térből indulok ki. Itt is egy $L = PG(1, q^h)$ egyenesre fogunk vetíteni. Legyen Δ egy q-adrendű részgeometriája $PG(t, q^h)$-nak, valamint legyen C egy $(t-2)$-dimenziós résztér Δ egy "megnyújtott" hipersíkjának Δ-n kívül eső részén.

2.4. Definíció. *Ha létezik egy fentebb leírt $\Delta = PG(t, q)$ részgeometria a $PG(t, q^h)$ projektív téren, valamint egy C résztér, úgy, hogy C-ből Δ-t vetítjük L-re, az így kapott pontok halmazát L-en a $\mathcal{C}$ t-*klub*nak nevezzük.*



2.3. ábra. $\Delta = PG(3, q)$ vetítése C-ből L-re

Itt a t-klub feje Δ azon hipersíkjának a képe lesz, amelynek meghosszabbításán helyezkedik el a C centrum. Ezt a hipersíkot $\mathcal{H}$-val jelölöm. Itt is igaz, hogy a t-klub konstrukciójától függ az, hogy melyik pont lesz a H fej a klubban.

Mindez a $t = 3$-dimenziós esetben annak felel meg, hogy $\Delta = PG(3, q)$, a C centrum pedig egy egyenes Δ-nak egy "megnyújtott" síkján. Innen vetítjük Δ-t L-re, az így kapott pontok halmaza lesz a $q^3 + 1$ pontból álló 3-klub L-en.

2.5. Állítás. *A $PG(t, q^h)$ projektív tér esetében a klub pontjainak száma pontosan $q^t + 1$.*

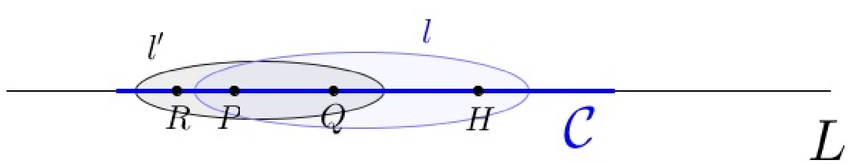
Bizonyítás. A $\Delta = PG(t, q)$ részsíknak összesen a 1.24. Állítás alapján $q^t + q^{t-1} + \ldots + q + 1$ darab pontja van. Ebből q^t darab nincs $\mathcal{H}$-n. Ezeknek a pontoknak egyértelmű lesz a képük L-en. A többi $q^{t-1} + \ldots + q + 1$ darab pont $\mathcal{H}$-n helyezkedik el. Mivel a centrum eggyel kisebb dimenziós, mint $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$-t vetítve L-re annak összes pontjának képe egyetlen pont lesz. Így L-en a Δ-beli pontok vetületeit megszámolva azt kapjuk, hogy a $\mathcal{C}$ klubnak pontosan $q^t + 1$ darab pontja van. □

2.2. Részegyenesek

Jelentős szerepet játszanak az L-beli részegyenesek, melyek fontos eszközként fognak szolgálni későbbi állításokban és bizonyításokban. A továbbiakban részegyenes alatt mindig L-beli q-adrendű $PG(1, q)$ projektív egyenest fogok érteni. A részegyenesek között különbséget teszünk, reguláris és nemreguláris részegyeneseket különböztetünk meg:

2.6. Definíció. *Azt az L-beli l $PG(1, q)$ részegyenest, amelyet a $\mathcal{C}$ $(t-)$klub teljesen magában foglal, úgy, hogy l egy Δ-beli egyenes képe,* reguláris részegyenes*nek nevezzük. Viszont azt az L-beli l' részegyenest, amelyet a $\mathcal{C}$ $(t-)$klub teljesen tartalmaz, de semely Δ-beli egyenesnek sem képe,* nemreguláris részegyenes*nek nevezzük.*

A részegyenesek regularitása is függ a klub konstrukciójától, ugyanis egy adott konstrukcióban reguláris részegyenes egy másik konstrukcióban nemreguláris lehet.



2.4. ábra. Példa reguláris (l) és nemreguláris (l') részegyenesre

Vegyük észre, hogy a fejet minden reguláris részegyenes tartalmazni fogja. Ugyanis bármely reguláris részegyenes ősképének és a fej ősképei halmazának a metszete nem az üres halmaz. Nemreguláris részegyenesek és a fej kapcsolatáról viszont nem tudunk semmit mondani, mivel bizonyos nemreguláris részegyenesek ősképei tartalmaznak $\mathcal{H}$-beli (vagy $\mathcal{L}$-beli) pontot, míg mások nem.

Kis kitérőben szeretném bevezetni az ív és az ovális fogalmát, melyeket mindjárt fel is használok.

2.7. Definíció. Ív*nek nevezzük a projektív sík olyan ponthalmazát, amelynek nincs három egy egyenesen lévő pontja. Ha az ív k pontból áll, akkor* k-ív*ről beszélünk.* Ovális*nak nevezzük az olyan ívet, amelynek minden pontjában egyetlen az oválist az adott pontban metsző egyenese van.*

Megjegyzem, hogy a q-adrendű síkok oválisai éppen a $(q+1)$-ívek.

2.8. Tétel (Segre)**.** *Ha q páratlan, akkor $PG(2,q)$ minden oválisa másodrendű görbe.*

Mit lehet tudni a nemreguláris részegyenesekről? Azt, hogy $q+1$ pontból állnak, amelyek közül semely három őssképe nem illeszkedik egy egyenesre. Ebből következik, hogy a $t=2$-dimenziós, páratlan q-adrendű projektív sík esetében a nemreguláris részegyenesek Δ-beli oválisok vetületei, így Segre tétele szerint csak (nem elfajuló) kúpszeletek lehetnek.

A következő állítás a reguláris részegyenesek számát határozza meg, elég az általános t-dimenziós esetre kimondani.

2.9. Állítás. *A $\mathcal{C}$-beli reguláris részegyenesek száma $PG(t,q^h)$-ben pontosan $\frac{q^t(q^t-1)}{q(q-1)}$.*

Bizonyítás. Δ összes egyenesének különböző $\mathcal{C}$-beli részegyenes lesz a képe, azokat az egyeneseket kivéve, amelyeket a $\mathcal{H}$ hipersík tartalmaz (ezek egyetlen pontba, a fejbe vetülnek). Számoljuk meg, hogy hány egyenes van Δ-ban, és hány egyenese van $\mathcal{H}$-nak, a két szám különbsége lesz a klubbeli reguláris részegyenesek száma. Ehhez felhasználjuk a 1.25. Állítást. $\Delta = PG(t,q)$ egyenesei a részgeometria 1-dimenziós alterei, amiből az állítás alapján pontosan

$$\frac{(q^{t+1}-1)\Big((q^{t+1}-(q-1)\Big)}{(q^2-1)\Big((q^2-1)-(q-1)\Big)} = \frac{(q^{t+1}-1)(q^{t+1}-q)}{(q^2-1)(q^2-q)} = \frac{(q^{t+1}-1)(q^t-1)}{(q^2-1)(q-1)}$$

darab van. Ugyanígy $\mathcal{H}$ egyeneseinek száma:

$$\frac{(q^t-1)\Big((q^t-(q-1)\Big)}{(q^2-1)\Big((q^2-1)-(q-1)\Big)} = \frac{(q^t-1)(q^t-q)}{(q^2-1)(q^2-q)} = \frac{(q^t-1)(q^{t-1}-1)}{(q^2-1)(q-1)}.$$

A kettő különbsége:

$$\frac{(q^{t+1}-1)(q^t-1)}{(q^2-1)(q-1)}-\frac{(q^t-1)(q^{t-1}-1)}{(q^2-1)(q-1)}=\frac{(q^t-1)(q^{t+1}-q^{t-1})}{(q^2-1)(q-1)}=\frac{(q^t-1)q^{t-1}}{q-1}=\frac{(q^t-1)q^t}{(q-1)q}.$$

Tehát $\Delta\backslash\mathcal{H}$ egyeneseinek L-re vett vetülete reguláris részegyenes, melyek száma így $\frac{q^t(q^t-1)}{q(q-1)}$.

□

2.3. $L = PG(1, q^h)$ koordinátázása és következményei

Az $L = PG(1, q^h)$ egyenest fogom koordinátázni az 1. fejezetben bevezetett homogén koordináták segítségével. Ehhez először jelöljünk ki $\mathcal{C} \subset L$-ben a H fejtől eltérő másik két pontot, legyenek ezek P és Q.

2.3.1. A $PG(2, q^h)$ projektív síkon

2.10. Állítás. *Az $L = PG(1, q^h)$ projektív egyenes $GF(q^h) \cup \{\infty\}$ elemeivel koordinátázható a következő módon:*

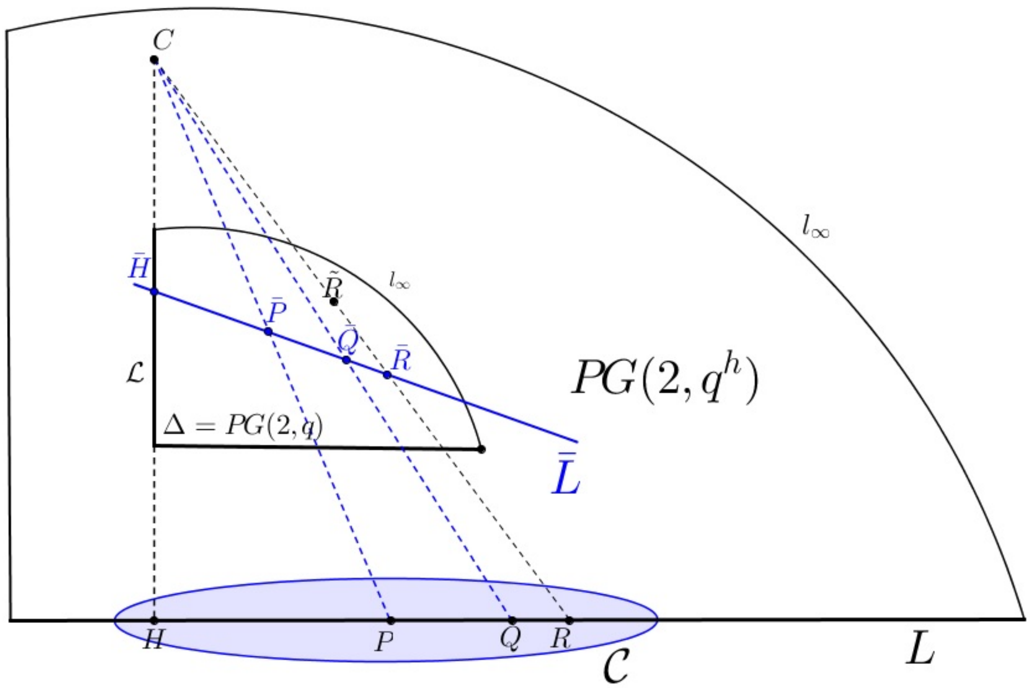
- *$P = 0$, $Q = 1$ és $H = \infty$ (azaz H ideális pont);*
- *a klub pontjai a H fej kivételével így koordinátázhatók:*
  $\mathcal{C}\backslash\{H\} = \{a_1 + a_2\omega : a_1, a_2 \in GF(q), \omega \in GF(q^h)\backslash GF(q)$ *alkalmas rögzített elem*$\}$.

Ezen konstrukcióban a $GF(q) \cup \{\infty\} \subseteq L$ részegyenes reguláris.

Bizonyítás. Minden $\mathcal{C}\backslash\{H\}$-beli pontnak egyértelmű a Δ-beli ősképe, így a P és a Q pontokét jelölje $\bar{P}$ és $\bar{Q}$. Továbbá $\bar{L}$ jelölje a $PG(2, q^h)$-beli $\bar{P}\bar{Q}$ egyenest (ne csak a Δ-ba eső részét tekintsük, hanem a $PG(2, q^h)\backslash\Delta$-beli meghosszabbítását is). Megjegyzem, hogy ez az egyenes létezik, hiszen sem P, sem Q nem a fej és nem is esnek egybe. Ennélfogva $\bar{L}$ nem tartalmazza a C centrumot, így C-ből vetítve $\bar{L}$-t, annak képe egyértelmű lesz (L), L és $\bar{L}$ tehát kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. Sőt, létezik az $L \cap \bar{L}$ pont $PG(2, q^h)$-ban (ha L és $\bar{L}$ párhuzamosak, akkor a metszéspontjuk az ideális egyenesen helyezkedik el; ha nem párhuzamosak, a metszéspontjuk közönséges pont).

Most fogjuk koordinátázni a projektív síkot. Mindegy, hogy L-en vagy $\bar{L}$-on belül koordinátázunk, én az $\bar{L}$-on belüli esetet fogom végigvezetni. Homogén koordináták segítségével először a Δ pontjait koordinátázzuk a következő módon:

$$\Delta = \{(x_1 : x_2 : x_3) : x_1, x_2, x_3 \in GF(q)\}\backslash\{(0 : 0 : 0)\}.$$



2.5. ábra. L ősképe $\bar{L}$

Ekkor legyenek $\bar{P} = (0 : 0 : 1)$, $\bar{Q} = (1 : 0 : 1)$, azaz mindkettő közönséges pont. Az általuk meghatározott egyenest a két pont koordinátavektorainak keresztszorzataként kaphatjuk meg a 1.19. Megjegyzés alapján. Azaz ha $[\bar{\mathbf{p}}]$ jelöli a $\bar{P}$ és $[\bar{\mathbf{q}}]$ a $\bar{Q}$ pontot, akkor

$$[\bar{\mathbf{p}}] \times [\bar{\mathbf{q}}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0 : 1 : 0)_e = \bar{L}.$$

Ebből következik, hogy $\bar{L}$-ra csak azok a pontok fognak illeszkedni, melyek homogén koordinátái középső eleme 0 (ez felel meg az y tengely szerinti koordinátának Descartes-féle koordináta-rendszerben ábrázolva), hiszen ekkor lesz a két koordinátavektor skaláris szorzata 0, ami éppen azt mutatja, hogy a pontot az egyenes tartalmazza.

A $\mathcal{C} \subseteq L$ klub ősképét jelöljük $\bar{\mathcal{C}}$-sal. Nyilván $\bar{\mathcal{C}}$ is klub, melyet úgy kapunk, hogy C-ből Δ-t $\bar{L}$-ra vetítjük. Δ pontjainak homogén koordinátái ($\mathcal{L}$ pontjait kivéve) $(a_1 : a_2 : 1)$ alakúak, ahol $a_1, a_2 \in GF(q)$ (hiszen a kistest szerint kell őket koordinátázni). Továbbá, a H fej ősképét $\bar{H}$-sal jelölve $\bar{H} = (1 : 0 : 0)$. Mivel a C centrum Δ-n kívül esik, annak homogén koordinátája $(-\omega : 1 : 0)$ valamely $GF(q^h) \backslash GF(q)$-beli ω elemre. Mik lesznek az $(a_1 : a_2 : 1)$ homogén koordinátájú Δ-beli pontok $\bar{L}$-ra vett vetületeinek homogén koordinátái? Ehhez legyen egy tetszőleges (de $\mathcal{L}$ pontjaitól, valamint $\bar{P}$-tól és $\bar{Q}$-tól eltérő) $\tilde{R} \in \Delta$ pont homogén koordinátája $(a_1 : a_2 : 1)$, ahol $a_1, a_2 \in GF(q)$. $\bar{L}$-ra vett vetületének, $\bar{R}$-nak a homogén koordinátája pedig $(b : c : 1)$ alakú, ahol b-ről egyelőre annyit tudunk, hogy nem feltétlenül kistestbeli elem, mindjárt kiderül, mi is pontosan; c pedig 0-val egyenlő, hiszen egy pont akkor illeszkedik $\bar{L}$-ra, ha a koordinátavektoraik skaláris szorzata 0, ez pedig csak akkor fordulhat elő, ha $c = 0$. Két lépésben számoljuk ki a kívánt $\bar{R}$ koordinátát: először kiszámoljuk a $C\tilde{R}$ egyenes homogén koordinátáit, majd $\bar{L}$ és $C\tilde{R}$ metszéspontját, az lesz $\bar{R}$. Tehát:

$$C\tilde{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\omega & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 \end{vmatrix} = (1 : \omega : -\omega a_2 - a_1)_e$$

és

$$\bar{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & \omega & -\omega a_2 - a_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\omega a_2 + a_1 : 0 : 1),$$

azaz az $(a_1 : a_2 : 1)$ homogén koordinátájú Δ-beli pontok $\bar{L}$-ra vett vetületeinek homogén koordinátái $(a_1 + \omega a_2 : 0 : 1)$ alakúak lesznek, ahol $a_1, a_2 \in GF(q)$ és $\omega \in GF(q^h) \backslash GF(q)$.

Most kiszámolom az $\mathcal{L}$ egyenes koordinátáit:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\omega & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0 : 0 : 1)_e$$

lesz az egyenes homogén koordinátája a C és a $\bar{H}$ pontok koordinátavektorai keresztszorzataként kiszámolva.

Tehát a $\bar{\mathcal{C}}$ klub mit tartalmaz? Egy $\bar{H} = (1 : 0 : 0)$ fejből (amelyre ideális pontként tekintünk) és egy $AG(1, q^h)$ affin egyenesből tevődik össze. Jobban megnézve $AG(1, q^h)$-t azt látjuk, hogy benne egy $GF(q)$ fölötti 2-dimenziós vektortér sűrűsödik össze. $\bar{L}$-t is megfeleltethetjük affin egyenesnek, ha kizárjuk belőle a $\bar{H}$ fejet (azaz $\bar{L} \backslash \bar{H} = AG(1, q^h)$). Alkalmazzuk a következő leképezést (ez izomorfizmus): $(x : 0 : 1) \mapsto x$ minden $x \in GF(q^h)$-ra, amikor L-re vetítünk. Ekkor ez a 2-dimenziós vektortér $GF(q)$ fölötti, melyet az 1 és ω generálnak.

Már közel járunk, hogy teljesen belássuk az állítás L koordinátázására vonatkozó részét, amellyel együtt az is ki fog jönni, hogy a $GF(q) \cup \{\infty\}$ részegyenes reguláris ezen konstrukció szerint. Ezekhez vegyünk fel egy $S \in L$ pontot, melynek őésképe $\bar{S} = CS \cap \bar{L}$. A fentiek alapján legyen S koordinátája s, ha $\bar{S}$ koordinátája $(s : 0 : 1)$ volt (ahol $s \in$

$GF(q^h)$). Ugyanezt az állítást alkalmazva kapjuk, hogy $P = 0$, $Q = 1$, és $H = \infty$, valamint a $\mathcal{C}$ klub többi pontjának koordinátái $\bar{\mathcal{C}}$ pontjainak első koordinátái lesznek. Ezzel készen van $L = PG(1, q^h)$ koordinátázása. A $GF(q) \cup \{\infty\} \subset L$ részegyenes pedig pontosan a $\Delta \cap \bar{L}$ részegyenes C-ből nézett, L-re vett vetülete, aminek ősképe teljesen $\bar{\mathcal{C}}$-ban van, így $GF(q) \cup \{\infty\}$-t is teljesen tartalmazza $\mathcal{C}$. A definíció alapján tehát $GF(q) \cup \{\infty\}$ reguláris részegyenes, így a bizonyítás teljes. □

Részegyenesek regularitásáról többet is mondhatunk. A következő állítás kimondja, hogy milyen tulajdonságú részegyenesek lesznek biztosan regulárisak, vagy legalábbis teljesen benne a klubban.

2.11. Állítás. *Legyen $l = PG(1, q)$ egy részegyenes L-ben. Ekkor:*

- *l akkor és csak akkor reguláris részegyenese a $\mathcal{C}$ klubnak, ha $l \cap \mathcal{C}$ tartalmazza a klub fejét és rajta kívül még két $\mathcal{C}$-beli pontot;*
- *ha $l \cap \mathcal{C}$ tartalmaz négy fejtől eltérő klubbeli pontot, akkor l-et teljesen lefedi a $\mathcal{C}$ klub;*
- *ha a $\mathcal{C}$ klub nem ekvivalens egy q^2-rendű részegyenessel, akkor minden teljesen $\mathcal{C}$-beli részegyenes reguláris.*

Fontos, hogy mindezek az állítások a klub egy fix konstrukciójában érvényesek, ezért rögzítsük $\mathcal{C}$ egy tetszőleges konstrukcióját, ahol H a fej, melyet egy l $\mathcal{C}$-beli részegyenes tartalmaz.

Bizonyítás. Először az első állítást bizonyítjuk. Az az irány triviális, hogy ha l reguláris részegyenese a klubnak, akkor $l \cap \mathcal{C}$ tartalmazza a klub fejét és rajta kívül még két $\mathcal{C}$-beli pontot. Ugyanis l összes pontját tartalmazza a klub, melyek között van a fej is. A másik irány bizonyítása: $l \cap \mathcal{C}$ tartalmazza a H fejet és még két különböző pontot, P-t és Q-t. Jelölje P és Q egyértelmű ősképeit $\bar{P}$ és $\bar{Q}$, valamint H-nak $\bar{H}$ ősképét válasszuk meg $\mathcal{L}$ pontjai közül annak a pontnak, amelyik kollineáris $\bar{P}$-sal és $\bar{Q}$-sal. A klubnak egy reguláris részegyenese (amelynek ősképe a $\bar{H}$, $\bar{P}$ és $\bar{Q}$ pontok által meghatározott egyenes) tartalmazza mindhárom pontot, H-t, P-t és Q-t is. Mivel egy L-beli, három pont által meghatározott részegyenes egyértelmű, ennek és l-nek meg kell egyeznie. Ezzel az első állítást beláttuk.

A második állításhoz l tartalmazzon négy különböző, fejtől eltérő pontot, legyenek ezek A, B, P és Q. L-et koordinátázzuk a 2.10. Állítás alapján, ami szerint $H = \infty$, $P = 0$, $Q = 1$, $A = a_1 + a_2\omega =: a$ és $B = b_1 + b_2\omega =: b$, ahol $a_1, a_2, b_1, b_2 \in GF(q)$ és $\omega \in GF(q^h) \setminus GF(q)$. Mivel A, B, P és Q kollineárisak, létezik ennek a négy pontnak kettősviszonya, jelöljük azt

y-nal: $y := (ABPQ) = \frac{0-a}{-(b-0)} : \frac{1-a}{-(b-1)}$, amiből $ab(1-y)+yb-a=0$ adódik. Mivel a négy pont l-beli, $y \in GF(q)$. Helyettesítsük vissza az $a = a_1 + a_2\omega$-t és $b = b_1 + b_2\omega$-t, így ω-ra másodfokú egyenletet kapunk $GF(q)$-beli együtthatókkal:

$$[(1-y)(a_2b_2)]\omega^2 + [(1-y)(a_1b_2 + b_1a_2) + b_2y - a_2]\omega + (1-y)a_1b_1 + b_1y - a_1 = 0.$$

Nézzük először azt az esetet, amikor ω^2 együtthatója 0. Ez csak akkor fordulhat elő, ha $y = 1$, vagy ha $a_2b_2 = 0$. Tudjuk, hogy y nem lehet 1, hiszen akkor $(b_2 - a_2)\omega + b_1 - a_1 = 0$-ból azt kapnánk, hogy $a = b$, ami nem lehet, mert A és B két különböző pont. Ha viszont $a_2b_2 = 0$, akkor a_2 és b_2 valamelyike 0, azaz $a \in GF(q)$ vagy $b \in GF(q)$. Viszont $ab(1-y)+yb-a = 0$-ból az adódik, hogy ha $a \in GF(q)$ vagy $b \in GF(q)$, akkor a másik is $GF(q)$-beli. Így a $GF(q) \cup \{\infty\}$ az egyetlen q-adrendű részegyenes, amely tartalmazza mind a négy pontot. A 2.10. Állításban pedig beláttuk, hogy $GF(q) \cup \{\infty\}$ reguláris részegyenes, azaz teljesen a klubban van. Most nézzük azt az esetet, amikor $a_2b_2 \neq 0$. A

$$x^2 + \frac{(1-y)(a_1b_2 + b_1a_2) + b_2y - a_2}{(1-y)(a_2b_2)}x + \frac{(1-y)a_1b_1 + b_1y - a_1}{(1-y)(a_2b_2)}$$

polinom ω minimálpolinomja (hiszen normált, legalacsonyabb fokú $GF(q)$-beli együtthatós polinom, irreducibilis $GF(q)$ fölött és gyöke az ω), és mivel ez másodfokú polinom, ω foka 2. A 2-dimenziós $\{x + y\omega : x, y \in GF(q)\}$ vektortér így épp $GF(q^2)$, ami $GF(q)$ másodfokú bővítése (hiszen a bővítés foka 2). Fontos, hogy mindez csak páros h-ra lesz igaz, hiszen a testbővítések fokának szorzástételéből következik, hogy a 2 osztója h-nak. Most tekintsük az A, B, P, Q pontok által meghatározott részegyenes pontjait. Azon R pontokat (R koordinátája r) tartalmazza a részegyenes, amelyekre az A, R, P, Q pontok kettősviszonya $y \in GF(q) \cup \{\infty\}$. Tehát a kettősviszony: $y = (ARPQ) = \frac{0-a}{0-r} : \frac{1-a}{1-r}$. Milyen értékeket vehet föl r? Ha $y = 0$, akkor $r = 1$. Ha $y = \infty$, akkor $r = 0$. Az $y = 1$ esetet az előbb kizártuk, mert akkor $r = a$ lenne, pedig R és A különböző pontok. $r \neq \infty$, hiszen ekkor $y = \frac{-a}{1-a}$ állna fenn, és ekkor y csak akkor $GF(q)$-beli, ha $a \in GF(q)$, ekkor pedig a részegyenes pont a $GF(q) \cup \{\infty\}$ részegyenessel egyezik meg (ami az előzőek alapján reguláris). Amikor r-et számoljuk ki ($r = \frac{a}{y(1-a)+a}$, ahol $y \in GF(q) \cup \{\infty\}$), az előbbiek alapján $GF(q^2)$-en belül számolunk. Szóval a klubon belül lesz az R pont is, úgyhogy az A, R, P, Q pontokon átmenő részegyenes teljesen a klubban lesz, ezzel befejeztük a bizonyítást. □

2.12. Következmény. *Egy klubnak és egy $PG(1, q)$ részegyenesnek csak $0, 1, 2, 3$ vagy $q + 1$ darab közös pontja lehet.*

Ez az előző állítás második pontjának következménye, miszerint ha a metszet legalább négyelemű, akkor az egész részegyenes a klubban van, mind a $q + 1$ pontjával együtt.

2.13. Következmény. *Ha a $\mathcal{C}$ klub nem egyezik meg egy q^2-rendű $PG(1, q^2)$ részegyenessel, akkor a fej nem függ a klub konstrukciójától, azaz a fej állandó a $\mathcal{C}$ klub minden lehetséges konstrukciójában.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk. Legyen két részsík, melyekhez tartozó centrumok C_1 és C_2. C_1-ből Δ_1-et, C_2-ből Δ_2-t vetítjük L-re úgy, hogy ugyanazt a $\mathcal{C}$ klubot kapjuk mindkét részsík vetületeként. Indirekt tegyük fel, hogy a klub két konstrukciója két különböző fejet eredményez, legyen ez H_1 és H_2. A 2.11. Állítás alapján tudjuk, hogy minden teljesen a klubban lévő részegyenes reguláris (függetlenül a klub konstrukciójától), úgyhogy minden reguláris részegyenes H_1-et és H_2-t is tartalmazza. Viszont H_2 ősképe egyértelmű Δ_1-beli pont az első konstrukcióban (ahogy H_1 ősképe is a második konstrukcióban), így minden L-beli reguláris részegyenes nem tartalmazhatja H_2-t. Ellentmondásra jutottunk, hiszen a fejet minden reguláris részegyenes tartalmazza. $\square$

A következő állításhoz szükségem lesz néhány fogalomra, ezeket most vezetem be.

2.14. Definíció. *Egy $M = (P, K, I)$ illeszkedési struktúrát (ahol P és K diszjunkt halmazok, P elemeit pontoknak, K elemeit köröknek nevezzük, $I \subset P \times K$ pedig egy illeszkedésnek nevezett reláció),* Möbius-sík*nak nevezünk, ha kielégíti a következő axiómákat:*

(A1) három különböző pont egyértelműen meghatároz egy kört;

(A2) egyértelműen létezik adott kört egy adott pontjában metsző és egy másik adott ponton átmenő kör;

(A3) létezik négy olyan pont, amelyek nem illeszkednek egy körre.

Az euklideszi sík és a sík körei Möbius-síkot alkotnak, ahogy az euklideszi térben egy gömbfelszín pontjai és a gömbön lévő körvonalak is. A Möbius-sík helyett szokás a körgeometria elnevezést használni. Bizonyítás nélkül mondom ki a következő tételt:

2.15. Tétel. *Ha egy véges Möbius-síknak van $q + 1$ pontból álló köre, akkor:*

- *a síkon összesen $q^2 + 1$ pont van;*
- *a síkon összesen $q(q^2 + 1)$ kör van;*
- *a sík minden körén $q + 1$ pont van;*
- *a sík minden pontján $q(q + 1)$ kör megy át.*

A q számot a Möbius-sík rend*jének nevezzük.*

Ezt úgy is lehet mondani, hogy az M Möbius-sík egy $3-(q^2+1,q+1,1)$-blokkrendszer, ami azt jelenti, hogy összesen q^2+1 pontja van, $q+1$ pontból áll egy blokkja (azaz köre), és bármely három különböző pontjára egyetlen blokk (kör) illeszkedik.

2.16. Megjegyzés. *Ha a $\mathcal{C}$ klub megegyezik egy $PG(1,q^2)$ részegyenessel, akkor a klub az összes részegyenesével együtt Möbius-síkot alkot.*

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy teljesülnek a Möbius-sík tulajdonságai, azaz a klub a részegyeneseivel $3-(q^2+1,q+1,1)$-blokkrendszert alkot. Tudjuk, hogy a $\mathcal{C}$ klub q^2+1 pontú halmaz, ahogy a Möbius-sík is. A Möbius-sík körei $q+1$ pontból állnak, csakúgy, mint a klubbeli részegyenesek. Továbbá, tudjuk, hogy három pont egyértelműen meghatároz egy kört, ami részegyenesekre is igaz. □

2.17. Következmény. *Ebben az esetben klubnak és részegyenesnek a metszete csak $0,1,2$ vagy $q+1$ darab pontból állhat, azaz itt a 3 pontból álló metszet esete nem lép fel. Tehát ha a metszet legalább háromelemű, akkor az egész részegyenes a klubban van.*

2.18. Definíció. *A q-adrendű projektív sík $\sqrt{q}$-adrendű részsíkját* Baer-részsík*nak nevezzük.*

2.19. Definíció. Blokkoló halmaz*nak olyan projektív síkbeli ponthalmazt nevezünk, amelyet minden projektív síkbeli egyenes metsz, de nem tartalmaz teljes egyenest.*

2.20. Tétel (Bruen, Pelikán)**.** *Ha a q-adrendű projektív sík blokkoló halmazai pontosan $q+\sqrt{q}+1$ pontúak, akkor a blokkoló halmaz pontjai Baer-részsíkot alkotnak.*

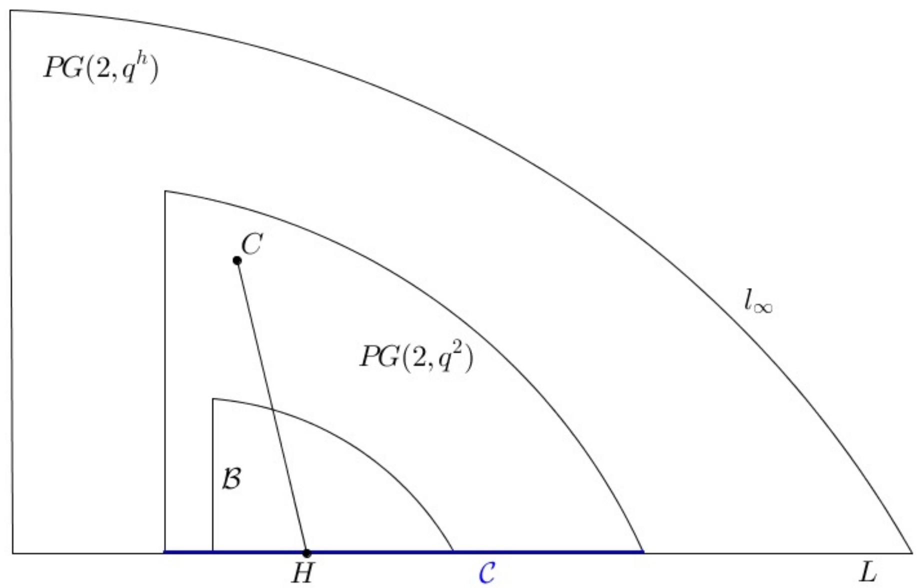
Ebből az következik, hogy a projektív sík minden pontjára illeszkedik olyan egyenes, amely a Baer-részsíkhoz tartozik. Ennek az állításnak a duálisa is igaz, vagyis a projektív sík minden egyenesében van olyan pont, amely a részsík pontja. Innen látszik, hogy egy Baer-részsík és egy projektív síkbeli egyenes metszete csak 1 vagy $q+1$ pontból állhat. Azaz, ha a metszet legalább kételemű, akkor $q+1$ elemű.

A Baer-részsík definiálása a következő állítás miatt volt szükséges:

2.21. Állítás. *Ha a $\mathcal{C}$ klub megegyezik egy q^2-rendű, $PG(1,q^2)$ részegyenessel, akkor:*

- *a $\mathcal{C}$ klub bármelyik pontja lehet a fej;*
- *$\mathcal{C}$ minden teljesen a klubban lévő l részegyenesére teljesül, hogy létezik a klubnak olyan konstrukciója, amely szerint l reguláris, és létezik olyan konstrukciója is, amely szerint l nemreguláris.*

Bizonyítás. Először rögzítsük a klubnak egy konstrukcióját. Abból indulunk ki, hogy ha a $\mathcal{C}$ klub megegyezik egy q^2-rendű, $PG(1, q^2)$ részegyenessel, akkor a klub a $PG(2, q^2)$ részsík egy Baer-részsíkjának vetülete. Ugyanis a vetítendő q-adrendű részsík ekkor egy $q^2 + q + 1$ pontból álló blokkoló halmaz, ami a 2.20. Tétel értelmében Baer-részsík. A C centrum $PG(2, q^2)$-en belül, de a Baer-részsíkon kívül helyezkedik el.



2.6. ábra. $PG(2, q^2)$ egy $\mathcal{B}$ Baer-részsíkja

Mivel $PG(2, q^2)$ minden pontjára illeszkedik a Baer-részsíkhoz tartozó egyenes, létezik olyan CH egyenes, amely a Baer-részsíkot $q + 1$ pontban metszi, ahol H a $PG(1, q^2)$ részegyenes egy pontja. Ez éppen azt jelenti, hogy H a klub feje. Ezzel azt is beláttuk, hogy a klubban bármelyik pontot kinevezhetjük a fejnek. Valamely rögzített l klubbeli részegyeneshez tudunk őt tartalmazó Baer-részsíkot választani, ekkor l reguláris részegyenes lesz. Hasonlóan következik, hogy tudunk csinálni olyan konstrukcióját a $PG(1, q^2)$ klubnak, amely szerint egy tetszőleges l részegyenese nemreguláris: válasszuk meg a H fejet olyan pontnak, amelyet nem tartalmaz l. Mivel minden reguláris részegyenes tartalmazza a fejet, l-nek nemregulárisnak kell lennie. $\square$

2.22. Állítás. *Ha a $\mathcal{C}$ klub megegyezik egy $PG(1, q^2)$ részegyenessel, akkor a klub q-adrendű részegyeneseinek a száma pontosan $(q^2 + 1)q$.*

Bizonyítás. A bizonyítás arra az előző fejezetben belátott állításra épül, hogy egy projektív egyenest három különböző pontja egyértelműen meghatároz. Ebből következik, hogy egy részegyenest is egyértelműen meghatározza három különböző pontja. Mivel egy klubnak q^2+1 pontja van, ennek három pontból álló részhalmazát $\binom{q^2+1}{3}$-féleképpen választhatjuk ki. Egy részegyenes $q+1$ pontjából hármat pedig $\binom{q+1}{3}$-féleképp választhatunk. A q-adrendű részegyenesek száma ezek hányadosaként számítható ki:

$$\frac{\binom{q^2+1}{3}}{\binom{q+1}{3}} = \frac{(q^2+1)q^2(q^2-1)}{(q+1)q(q-1)} = q(q^2+1).$$

□

2.23. Következmény. *Ha a $\mathcal{C}$ klub megegyezik egy $PG(1,q^2)$ részegyenessel, akkor a klub nemreguláris részegyeneseinek a száma pontosan q^3-q^2.*

Bizonyítás. A klubbeli nemreguláris részegyenesek számát megkapjuk az összes részegyenesek számának és a reguláris részegyenesek számának különbségeként (felhasználva az előző állítást és a 2.9. Állítást): $(q^2+1)q - q(q+1) = q^3 - q^2$. □

2.3.2. A $PG(t,q^h)$ projektív téren

2.24. Állítás. *Az $L = PG(1,q^h)$ egyenest $GF(q^h) \cup \{\infty\}$ elemeivel koordinátázhatjuk úgy, hogy:*

- *$P=0$, $Q=1$ és $H=\infty$;*
- *$\mathcal{C} \setminus \{H\} = \{a_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + \ldots + a_t\omega_t : a_i \in GF(q)$ $(i=1,2,\ldots,t)$ és $\omega_j \in GF(q^h) \setminus GF(q)$ $(j=2,3,\ldots,t)$ alkalmas rögzített elemek$\}$.*

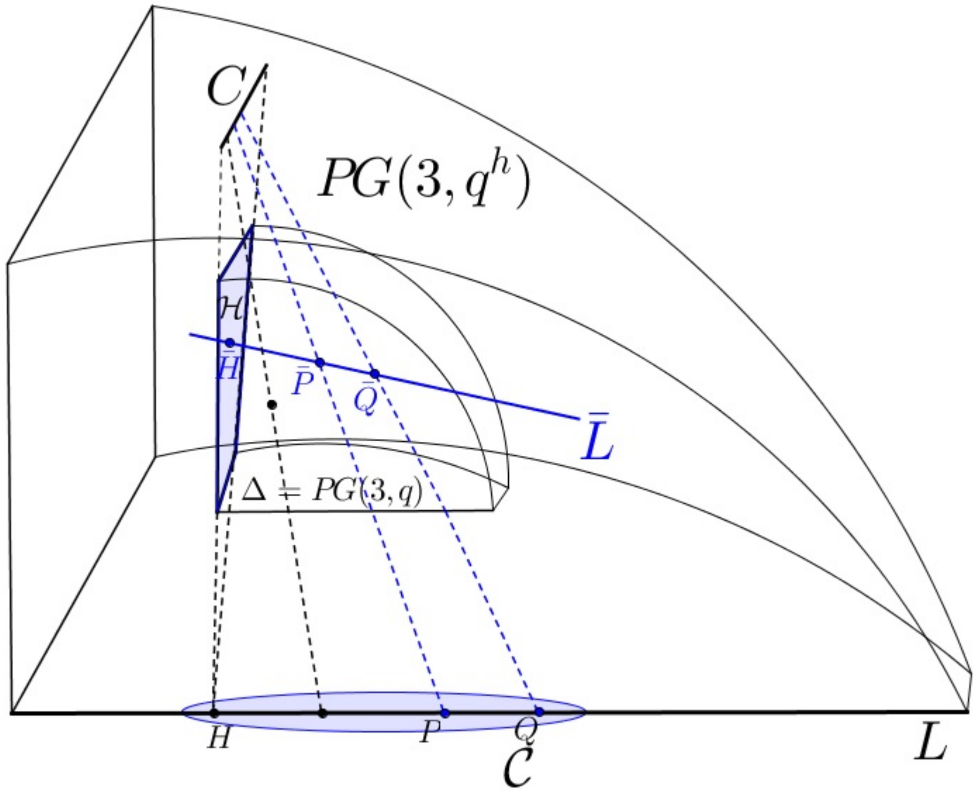
Ebben a konstrukcióban a $GF(q) \cup \{\infty\} \subseteq L$ részegyenes reguláris.

Bizonyítás. A bizonyítás az előző 2-dimenziós esethez hasonló lépésekben történik, ezért ezt teljesen precízen nem fogom belátni.

Most is vegyünk fel két különböző, a fejtől eltérő pontot a $\mathcal{C}$ klubban, ezeknek egyértelmű $\Delta = PG(t,q)$-beli ősképeit jelölje $\bar{P}$ és $\bar{Q}$. Legyen L egyértelmű ősképe az $\bar{L} = \bar{P}\bar{Q}$ egyenes. Mivel P és Q különbözők és egyikük sem a fej, $\bar{L}$ nem metsz bele a C centrumba, amely most egy $t-2$-dimenziós résztere $PG(t,q^h)$-nak.

Homogén koordinátákkal koordinátázhatjuk a $PG(t,q^h)$ teret. Először Δ-t koordinátázva annak pontjai ilyen alakúak:

$$\Delta = \{(x_1 : x_2 : \ldots : x_{t+1}) : x_i \in GF(q), (i=1,2,\ldots,t+1)\} \setminus \{(0:\ldots:0)\},$$



2.7. ábra. A $t = 3$ esetben a vetítés

majd legyenek $\bar{P} = (0 : 0 : \ldots : 0 : 1)$, $\bar{Q} = (1 : 0 : 0 : \ldots : 0 : 1)$. $\mathcal{H}$-val jelöltem a $\mathcal{C}$ klub H fejének ősképei halmazát, ami Δ azon hipersíkja, amelynek meghosszabbításán található a centrum. A $\mathcal{H}$ hipersík homogén koordinátáját $[0 : 0 : \ldots : 0 : 1]$-el jelölöm, továbbá $\bar{L} = span\{\bar{P}, \bar{Q}\}$ (ahol $span\{x_1, \ldots, x_n\}$-el jelölöm az $x_1, \ldots, x_n$ vektorok által kifeszített alteret). Mivel C diszjunkt Δ-tól, ezért így koordinátázható:

$$C = span\{(-\omega_2 : 1 : 0 : \ldots : 0), (-\omega_3 : 0 : 1 : 0 : \ldots : 0), \ldots, (-\omega_t : 0 : \ldots : 0 : 1 : 0)\},$$

ahol $\omega_j \in GF(q^h) \backslash GF(q) (j = 2, \ldots, t)$.

A $\mathcal{C}$ klub ősképe az $\bar{L}$ egyenesen a $\bar{\mathcal{C}}$ klub. Egy tetszőleges $\Delta \setminus \mathcal{H}$-beli pont koordinátája $(a_1 : a_2 : \ldots : a_t : 1)$ alakú, ahol $a_i \in GF(q)(i = 1, 2, \ldots, t)$. Egy ilyen pont vetülete $\bar{L}$-on $(a_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + \ldots + a_t\omega_t : 0 : 0 : \ldots : 0 : 1)$, ahol $\omega_j \in GF(q^h) \backslash GF(q)$ $(j = 2, 3, \ldots, t)$. $\bar{L}$ összes pontjának koordinátája ilyen alakú, a $\bar{H}$-t kivéve, amire $(1 : 0 : 0 : \ldots : 0)$ koordinátájú ideális pontként tekintünk.

A $t = 2$-dimenziós esethez hasonlóan itt is érvényes az az állítás, hogy a $\bar{\mathcal{C}}$ klubra úgy is tekinthetünk, mint egy $AG(1, q^h)$-ba sűrűsödött $GF(q)$ fölötti t-dimenziós vektortér és egy ideális pont uniója. Tehát ha $\bar{L}$-ból kizárjuk a $\bar{H}$ fejet, $\bar{L}$ maradék pontjainak halmaza megfeleltethető egy $AG(1, q^h)$ egyenesnek. Mikor pedig L-re vetítünk, minden $x \in GF(q^h)$ esetén egy $(x : 0 : 0 : \ldots : 0 : 1)$ pont képe L-en x lesz. Így tehát a t-dimenziós vektortér $GF(q)$ fölötti vektortér, melyet az 1 és $\omega_2, \ldots, \omega_t$ generálnak, és tartalmazza $GF(q)$ elemeit. Az előbbi leképezést alkalmazva minden $R \in L$ pontot tudunk úgy koordinátázni, hogy annak $\bar{R} = CR \cap \bar{L}$ ősképének első koordinátája lesz R koordinátája. Ez alapján $P = 0$, $Q = 1$ és $H = \infty$ lesz. Mivel $\mathcal{C}$-beli pont ősképe csak $\bar{\mathcal{C}}$-beli lehet, így az L-beli $GF(q) \cup \{\infty\}$ részegyenes a $\Delta \cap \bar{L}$ részegyenes vetülete, így reguláris részegyenes lesz. Ezzel az állítás mindkét részét beláttuk, így a bizonyítás teljes. $\square$

2.25. Állítás. *Rögzítsük le a $\mathcal{C}$ klub egy konstrukcióját, amelyben H a fej és l L-nek egy q-adrendű részegyenese. Ekkor az áll fenn, hogy l akkor és csak akkor reguláris részegyenes a klubban, ha $l \cap \mathcal{C}$ tartalmaz három különböző klubbeli pontot, melyből egy a fej.*

Bizonyítás. Az az irány triviális (a reguláris részegyenes defiíciójából következik), hogy ha l reguláris részegyenes, akkor $l \cap \mathcal{C}$ tartalmazza a fejet és másik két klubbeli pontot. Hiszen minden reguláris részegyenes tartalmazza a fejet, és mivel teljesen a klubban vannak, a metszet $q+1$ elemű lesz. A másik irányt nézzük: ha l és a klub metszete tartalmaz három klubbeli pontot, melyek egyike a H fej, akkor l reguláris részegyenes. Ehhez a másik kettő klubbeli pont legyen P és Q. P egyértelmű ősképét jelöljük $\bar{P}$-sal, Q-ét pedig $\bar{Q}$-sal. $\bar{H}$-t válasszuk meg H ősképei közül annak a pontnak, amelyik a $\bar{P}\bar{Q}$ egyenes és $\mathcal{H}$ metszete által meghatározott. Tudjuk, hogy létezik a $\bar{P}\bar{Q} \cap \mathcal{H}$ metszet, mivel egyrészt P és Q nem esnek egybe, így nem metszik C-t, másrészt hipersíknak és egyenesnek létezik metszete, ami egy pont. Előzőleg már többször szerepelt, hogy három pont által meghatározott L-beli részegyenes egyértelmű. L-ben tekintsük azt a részegyenest, amely a $\bar{P}\bar{Q}$ Δ-beli egyenes vetülete, amely reguláris, valamint H, P és Q által meghatározott. Ez a részegyenes és l megegyezik, tehát l is reguláris. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] Fancsali Szabolcs - Sziklai Péter: *Description of the clubs*, Annales Univ. Sci. Sect. Mat., Vol. 51, 141-146, 2008
(http://www.cs.elte.hu/ sziklai/cikk/clubs.pdf)

[2] Csikós Balázs - Kiss György: *Projektív geometria*, Polygon Jegyzettár, Szeged, 2011

[3] Kiss György - Szőnyi Tamás: *Véges geometriák*, Polygon Könyvtár, Szeged, 2001

[4] *Alkalmazott Modul Jegyzet - Geometriai transzformációk*, ELTE, 2013
(http://www.cs.elte.hu/ szeghy/files/MBSJ.pdf)

[5] Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, Typotex, Budapest, 2007

[6] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999