Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Gál Attila Péter

Reguláris és erősen reguláris gráfok

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Szőnyi Tamás

egyetemi tanár

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2015

Előszó

Szakdolgozatomban olyan gráfokkal foglalkozom, amelyek csúcsainak fokszámára adunk feltételeket. Először azt tesszük fel, hogy bármely két csúcs foka egyenlő. Ezeket a gráfokat hívjuk reguláris gráfoknak. A későbbiekben pedig még több megkötést teszünk majd, ebben a részben az erősen reguláris gráfokkal fogok foglalkozni. A lineáris algebra segítségével több olyan állítást is bebizonyítok, melyek segítségével eljutok a Hoffman-Singleton és a barátság tételig. Ennek segítségével pedig néhány első évben tanult gráfelméleti állítást és tételt vizsgálok meg újra és egészítek ki.

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Szőnyi Tamásnak, akinek a segítségére mindig számíthattam és tanácsaival mindig segítette munkámat, továbbá szeretnék köszönetet mondani Héger Tamásnak is, akinek a megjegyzései szintén segítették a dolgozat elkészülését.

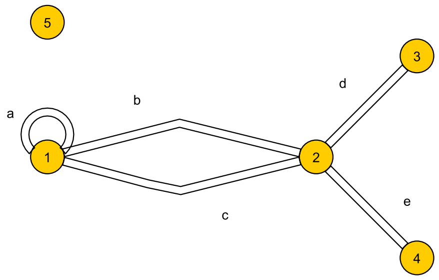
Tartalomjegyzék

1. fejezet

Alapismeretek

1.1. Gráfelméleti bevezető

A bevezető [1] segítségével készült.

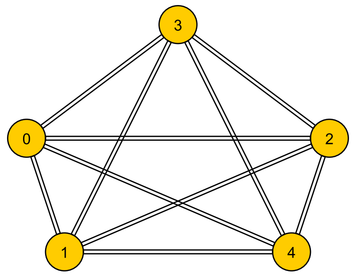


1.1. ábra.

1.1.1. Definíció. ***Gráfnak*** *nevezünk egy $G = (V, E)$ rendezett párt, ahol $V(G)$ egy nemüres halmaz, a csúcsok halmaza, $E(G)$ pedig az élek családja, melynek elemei a csúcshalmazból képzett legfeljebb kételemű halmazok.*
A fenti gráfban: $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G) = \{a, b, c, d, e\}$.

Minden $e \in E$ élhez hozzárendeljük a végpontjait: $\{v_i, v_j\}$.
A fenti gráfban például $e \mapsto \{2, 4\}$.
Ha $v_i = v_j$, akkor az élt ***hurokélnek*** *nevezzük. A fenti példában "a" egy hurokél.*
Ha $e_1 \in E$ és $e_2 \in E$ illetve v_i-t és v_j-t e_1 és e_2 is összeköti, akkor ezeket ***többszörös élnek*** *nevezzük. Példában: "c" és "b" többszörös élek.*

Egyszerű gráfnak *nevezzük azt a gráfot, ahol nincsenek hurokélek és többszörös élek. Egy csúcs* ***izolált****, ha nem illeszkedik egyetlen élre sem. Példánkban ilyen az 5-ös csúcs. A G gráf* ***teljes gráf****, ha benne tetszőleges csúcs bármely másik csúccsal össze van kötve. Az n csúcsú teljes gráf jele: K_n.*



1.2. ábra. A K_5, azaz az 5 csúcsú teljes gráf.

1.1.2. Definíció. *Egy G gráfot* ***páros gráfnak*** *nevezünk, ha $V(G)$ felbontható 2 részre, A,B úgy, hogy minden él egyik végpontja A-ban, másik végpontja B-ben van. Teljes páros gráfnak azt a páros gráfot nevezzük, ahol minden A-beli pont össze van kötve minden B-belivel.*

1.1.3. Definíció. *Egy hurokélmentes* ***gráf*** l***-színezhető****, ha csúcsait meg lehet színezni l színnel úgy, hogy nincs két egyforma színű szomszédos csúcs.*

1.1.4. Definíció. *Egy csúcs* ***fokszáma*** *a belőle kiinduló élek száma. A hurokél a csúcs fokszámát kettővel növeli. Egy v_i csúcs fokát $d(v_i)$-vel fogjuk jelölni. A maximális fokszámot Δ-val, a minimálisat pedig δ-val szokás jelölni.*

1.1.5. Állítás. *A fokszámok összege egyenlő az élszám kétszeresével, azaz*

$$\sum_{v_i \in V(G)} d(v_i) = 2|E|.$$

Bizonyítás. Mivel minden élnek pontosan két végpontja van, így amikor a fokszámokat számoljuk, minden élt kétszer kell, hogy számoljunk. Ebből adódik az állítás. $\square$

1.1.6. Következmény. Páratlan fokú csúcsok száma mindig páros.

1.1.7. Definíció. *$G = (V, E) \cong G' = (V', E')$, azaz a két gráf* ***izomorf****, ha megadható V és V' között egy olyan bijekció, hogy G-ben tetszőlegesen választva két csúcsra igaz, hogy ha össze vannak kötve, akkor a nekik megfelelő csúcsok G'-ben is szomszédosak és ugyanannyi él fut közöttük, mint az eredeti gráfban, illetve ha nem szomszédosak, akkor G'-ben sem.*

1.1.8. Definíció. *Legyen $G' = (V', E')$ és $G = (V, E)$. Ekkor G' a G* ***részgráfja****, ha $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$ illetve egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra G'-ben, ha G-ben is.*

1.1.9. Definíció. *A $G' = (V', E')$* ***egyszerű részgráf komplementerén*** *a $G = (V, E)$ gráfban azt a $G^* = (V^*, E^*)$ gráfot értjük, ahol $V^* = V'$ és $E^* = E \backslash E'$. Egy tetszőleges egyszerű G gráf* ***komplementerén*** *azt a $\bar{G}$ gráfot értjük, amit úgy kapunk, hogy G-t a $|V|$ csúcsú teljes gráf részgráfjának tekintjük, és erre nézzük a komplementerét az előbb leírtak szerint.*

1.1.10. Definíció. *Egy $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{s-1}, e_s, v_s$ sorozatot* ***sétának*** *nevezünk, ha v_{i-1},v_i csúcsokat az e_i él köti össze. Ha az élek különböznek, akkor* ***vonalnak*** *nevezzük. Ha a csúcsok is különbözőek, akkor* ***útnak****. A sétában, ha $v_0 = v_s$, akkor* ***körsétáról*** *beszélünk, ha itt az élek különböznek, akkor* ***körvonal****, és ha még a csúcsok is különbözőek (persze $v_0 = v_s$ egyezést kivéve), akkor* ***kör****nek hívjuk. Út vagy kör* ***hosszán*** *az őt alkotó élek számát értjük.*

1.1.11. Definíció. *Egy gráfot* ***összefüggőnek*** *nevezünk, ha tetszőleges v, w csúcsra van $v \to w$ séta.*

1.1.12. Megjegyzés. Összefüggőség eldöntéséhez elég, ha egy fix v csúcsból nézzük, tetszőleges w-be létezik-e $v \to w$ séta.

1.1.13. Definíció. *Egy gráf* ***átmérőjén*** *azt a legkisebb $d \geqq 1$ egész számot értjük, melyre a gráf tetszőleges csúcsából van legfeljebb d hosszúságú út a gráf bármely másik csúcsába.*

1.2. Gráfok leírása mátrixszal

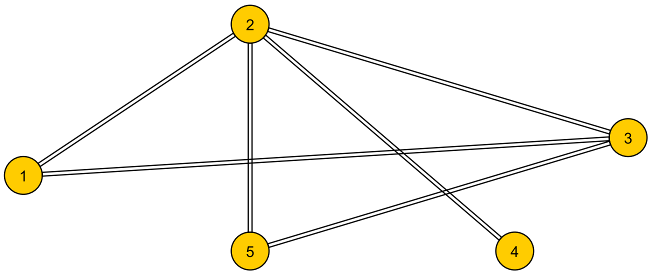
1.2.1. Definíció. *Egy irányítatlan, egyszerű G gráf $M = (m_{ij})$* ***szomszédsági mátrixán (adjacencia-mátrixán)*** *az alábbi $|V| \times |V|$ nagyságú mátrixot értjük:*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{, ha az i. és j. csúcs össze van kötve} \\ 0 & \textit{, ha az i. és j. csúcs nincsen összekötve} \end{cases}$$

1.2.2. Megjegyzés. M mindig szimmetrikus.

1.2.3. Állítás. *Ha A a G gráf adjacencia-mátrixa, akkor A^s elemei a következők: a_{ij} az i csúcsból j-be menő s hosszúságú séták száma.*

Bizonyítás. [1] alapján:
Teljes indukcióval fogjuk bizonyítani. Először nézzük $s = 2$-re: ekkor ha $(A^s)_{ij}$ elemét a^s_{ij}-vel jelöljük, akkor ez $s = 2$ esetén az i. sor és j. oszlop skalárszorzata. Ekkor a szorzatban az l. tag pontosan akkor 1, ha van v_i-ből v_l-be és v_l-ből v_j-be vezető él, 0, ha nincs ilyen.Ha ezeket összegezzük, akkor pont a v_i-ből v_j-be vezető 2 hosszú séták számát kapjuk meg. Most tegyük fel, hogy $s > 2$ és $s - 1$-re igaz az állítás. Ekkor $A^s = A^{s-1}A$ és a^s_{ij}-t az A^{s-1} i. sorának és A j. oszlopának a skalárszorzataként kaphatjuk meg. A szorzatban a k. tag a v_i-ből v_k-ba vezető $s - 1$ hosszú séták számának és v_k-ből v_j-be vezető élek számának szorzata. Ezeket összegezve minden k-ra pontosan a v_i-ből v_j-be menő s hosszú séták számát kapjuk, hiszen az összes lehetséges k-ra összeadjuk a tagokat. $\square$



1.3. ábra.

1.2.4. Példa. Az 1.3 gráf szomszédsági mátrixa:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.5. Példa. A K_n teljes gráf adjacencia-mátrixa: $(J - I)$, ahol J a csupa egyesekből álló mátrix, I pedig az egységmátrix.

1.3. Algebrai bevezető

[2] segítségével:

1.3.1. Definíció. *A $\mathbb{T}$ test egy $(\mathbb{T}, +, *)$ struktúra, ahol $\mathbb{T}$ az összeadásra $(+)$ nézve kommutatív csoport, a szorzás $(*)$ kommutatív, asszociatív, $*$-ra nézve minden nem nulla elemnek van inverze, és a $*$ disztributív $+$-ra.*

A továbbiakban $A \in \mathbb{T}^{nxn}$, ahol $\mathbb{T}$ test, $v \in \mathbb{T}^n$.

1.3.2. Definíció. *Egy λ skalárt az A mátrix* ***sajátértékének*** *nevezünk, ha létezik olyan nem-nulla v vektor, melyre teljesül:*

$$Av = \lambda v \tag{1.1}$$

1.3.3. Definíció. *Egy $v \neq 0$ vektor az A mátrix* ***sajátvektora****, ha létezik olyan λ szám, melyre teljesül (1.1).*

1.3.4. Definíció. *Egy λ-hoz tartozó összes sajátvektor és a $\underline{0}$ vektor alteret (****sajátalteret****) alkot.*

1.3.5. Definíció. *Egy λ sajátérték* ***geometriai multiplicitása*** *az általa feszített sajátaltér dimenziója.*

1.3.6. Definíció. *A $p(\lambda) := det(A - \lambda I)$ n-edfokú polinom az A* ***karakterisztikus polinomja****, melynek gyökei a sajátértékek.*

1.3.7. Definíció. *Egy λ sajátérték* ***algebrai multiplicitása*** *n, ha λ n-szeres gyöke a karakterisztikus polinomnak.*

1.3.8. Állítás. *Ha A szimmetrikus, azaz $A^T = A$, akkor minden sajátértéke valós és algebrai multiplicitása megegyezik a geometriai multiplicitással.*

1.3.9. Tétel. (Főtengelytétel) *Egy A mátrixnak akkor és csak akkor létezik ortonormált sajátbázisa, ha A szimmetrikus.*

1.3.10. Tétel. (Gersgorin) *Jelölje $B(k, r)$ azt a zárt gömböt, melynek középpontja k, sugara r. Ekkor egy A mátrix minden λ sajátértékére teljesül: $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} B(k_i, r_i)$, ahol $k_i = a_{ii}$, r_i pedig az $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$.*

Bizonyítás. Nézzük az $Av = \lambda v$ egyenletet. Legyen v-ben a maximális abszolút értékű koordináta $v_i : 0 \neq |v_i| = \max\limits_{j=1\ldots n} |v_j|$. Nézzük az $Av = \lambda v$ i. komponensét:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = a_{ii} v_i + \sum_{j \neq i} a_{ij} v_j = \lambda v_i$$

$$|a_{ii} - \lambda||v_i| = |\sum_{j \neq i} a_{ij} v_j| \leqq \sum_{j \neq i} |a_{ij}||v_j| \leqq \sum_{j \neq i} |a_{ij}||v_i| \leqq |v_i| \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = |v_i| r_i.$$

□

1.3.11. Állítás. *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix, melynek λ a legnagyobb sajátértéke. Ekkor $\forall\ u \in \mathbb{R}^n$ vektorra igaz az*

$$u^T A u \leqq \lambda |u|^2$$

egyenlőtlenség.
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az u a λ-hoz tartozó sajátvektora A-nak.

Bizonyítás. [5] alapján:
Mivel A szimmetrikus, így 1.3.9 következtében A-nak létezik ortonormált sajátbázisa. Jelöljük a bázist $v_1, \ldots v_n$-nel, a hozzájuk tartozó sajátértékeket pedig $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$-nel. Ekkor u felírható ezeknek a vektoroknak a lineáris kombinációjaként:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,$$

ahol $\alpha_i \in \mathbb{R}$, illetve teljesül a következő:

$$|u|^2 = u^T u = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \underbrace{v_i^T v_j}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2,$$

ahol $\delta_{ij} = 1$, ha $i = j$ és 0 különben. Tehát:

$u^T A u = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^T\right) A \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^T\right) \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{A v_j}_{\lambda_j v_j}\right) =$
$\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda_j v_i^T v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \leqq \lambda |u|^2$.
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\lambda_i < \lambda$ esetén $\alpha_i = 0$, ami azt jelenti, hogy u benne van a λ sajátvektorai által generált altérben. □

1.3.12. Példa. Nézzük a K_5 teljes gráf adjacencia-mátrixát:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ennek a 4 egyszeres, a -1 négyszeres sajátértéke, a 4-hez tartozó egyik sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

a -1-hez tartozók: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Ezek lineárisan függetlenek, tehát a -1 geometriai és algebrai multiplicitása is 4.

1.4. A Perron-Frobenius tétel

A következőkben nemnegatív elemű mátrixokra vonatkozó fogalmakat, tételeket tekintünk át bizonyítások nélkül [6] és [9] segítségével.

1.4.1. Definíció. *Az $A * 0$ azt jelenti, hogy az A mátrix minden a_{ij} elemére teljesül, hogy $a_{ij} * 0$, ahol $* \in \{=, <, >, \leqq, \geqq, \}$.*

1.4.2. Definíció. *Egy A négyzetes mátrixot **reducibilisnek** nevezünk, ha létezik egy P permutáló mátrix, hogy :*

$$PAP^T = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}, \ vagy \ PAP^T = \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix},$$

ahol O a csupa 0 elemből álló mátrix.
*A-t **irreducibilisnek** nevezzük, ha nem létezik ilyen P mátrix.*

1.4.3. Tétel. *Az $A \geqq 0$ mátrix irreducibilis, akkor és csak akkor, ha $\forall\ i, j$-re $\exists\ k_{i,j}$, hogy $(A^{k_{i,j}})_{ij} > 0$.*

1.4.4. Definíció. *Egy $A \geqq 0$ irreducibilis mátrix **primitív**, ha egyetlen legnagyobb abszolút értékű sajátértéke van.*

1.4.5. Tétel. *$A \geqq 0$ akkor és csak akkor primitív, ha létezik $1 \leqq k \in \mathbb{N}$, hogy*

$$A^k > 0.$$

1.4.6. Tétel. (Perron-Frobenius) *Legyen T egy irreducibilis mátrix. Ekkor létezik T-nek egy pozitív, valós λ_{max} sajátértéke, melyre:*

$$|\lambda| \leqq \lambda_{max}$$

$\forall\ \lambda$ sajátértékre.
λ_{max} algebrai és geometriai multiplicitása egyszeres, a hozzá tartozó sajátvektor minden eleme pozitív, és ez a sajátvektor konstans szorzótól eltekintve egyértelmű.
Ha T még primitív is, akkor:

$$|\lambda| < \lambda_{max}$$

is teljesül minden λ sajátértékre.
Ha a mátrixnak k darab λ_{max} abszolút értékű sajátértéke van, akkor ezek λ_{max}-nak a k-adik komplex egységgyökökkel vett szorzatai.

Most vizsgáljuk meg, hogy a gráfok szomszédsági mátrixaira mikor teljesülnek a fenti tulajdonságok:

1.4.7. Állítás.

1. *Egy nem összefüggő gráf szomszédsági mátrixa reducibilis.*

2. *Egy összefüggő gráf szomszédsági mátrixa irreducibilis.*

3. *Egy összefüggő páros gráf adjacencia-mátrixa irreducibilis, de nem lehet primitív.*

4. Összefüggő, nem páros gráf szomszédsági mátrixa pedig primitív.

Bizonyítás.

1. Mivel egy nem összefüggő G gráf csúcsait megfelelően számozva A szomszédsági mátrixa felírható blokkdiagonális alakban (ahol legalább 2 blokk van), így teljesül rá a reducibilitás definíciója.

2. Mivel a gráf összefüggő, így 1.2.3 állításból és az 1.4.3 tételből azonnal következik.

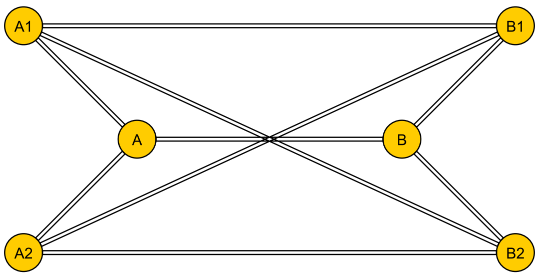
3. Az irreducibilitás az előzőből következik. Ahhoz, hogy nem primitív, használjuk fel a 1.2.3 és a 1.4.5 tételeket. Vegyük észre, hogy az A mátrix páratlan hatványánál minden egy osztályban szereplő pontpárnak megfelelő elem az adjacencia-mátrixban 0, hasonlóan páros hatványra, ekkor minden különböző komponensben szereplő pontnak megfelelő elem 0. Ekkor viszont nem létezhet a 1.4.5 tételben szereplő k.

4. Ha nem páros a gráf, akkor létezik a gráfban egy páratlan hosszú kör. Ekkor tetszőleges két csúcs között létezik páratlan hosszú séta. Ez igaz, mivel ha a két csúcs a körön fekszik, jó irányba elindulva találunk páratlan sétát. Ha az egyik pont a körön van, a másik pedig nincs, akkor vegyünk egy tetszőleges sétát a két csúcs között. Ez biztosan létezik, mivel összefüggő a gráf. Ha a séta páros hosszú, akkor a körön körbemenve megváltoztatható a paritása. Két nem a körön levő csúcs esetében is teljesen hasonlóan járhatunk el. Így tetszőleges csúcspárra létezik páratlan hosszú séta, amely összeköti őket, ezért a 1.4.5 miatt igaz lesz az állítás. □

2. fejezet

Reguláris gráfok

2.1. Alapfeladat



2.1. ábra.

Nézzük a következő feladatot! [3] alapján:

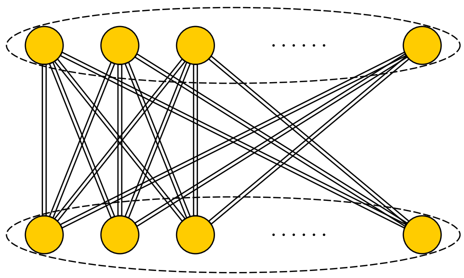
2.1.1. Feladat. Egy csoportról azt tudjuk, hogy mindenkinek pontosan 3 másik barátja van, de nincs 3 olyan ember, akik közül mindenki mindenkinek a barátja lenne. Ekkor legalább hányan vannak ebben a csoportban?

Feleltessük meg az embereket egy gráf csúcsainak, a barátok pedig legyenek a gráf szomszédos csúcsai. Tehát a feladat szerint egy olyan gráfot keresünk, ahol minden csúcs foka három, és a gráf nem tartalmaz K_3-at.
Vegyünk két összekötött csúcsot, legyenek ezek A és B. A-nak is és B-nek is $2-2$ szomszédja van, ezek A_1, A_2 és B_1, B_2. A_i, $i \in \{1,2\}$ B-vel és B_i, $i \in \{1,2\}$ A-val nem lehet

összekötve, hiszen ekkor lenne a gráfban K_3. Ezek szerint 6 csúcs biztosan kell.
Ha B_1 és B_2 A_1 és A_2 szomszédai is, akkor elég is ez a hat csúcs. (2.1 ábra).

2.1.2. Feladat. Vegyük az általánosabb esetet, ahol minden csúcs k másik csúccsal áll kapcsolatban, és nincs a gráfban K_3!

Az előzőhöz teljesen hasonlóan látható, hogy ekkor a csúcsok száma legalább $2k$, és ez elég is, ha veszünk egy $2k$ csúcsú teljes páros gráfot, ahol a partíciók mérete megegyezik. Más $2k$ csúcsú gráf nem is lehet megoldása a feladatnak, hiszen vegyünk egy v_1 pontot, ennek biztosan van k darab különböző szomszédja, a szomszédai közül vegyünk egy v_2 csúcsot, ennek v_1-en kívül van $k-1$ olyan szomszédja, ami nincs összekötve v_1-el. Ez minden csúcsra elmondható, így a gráf $2k$ méretű páros gráf, a fokszám megszorításból pedig következik, hogy teljes.



2.2. ábra.

Később az erősen reguláris gráfoknál még visszatérünk erre a feladatra.

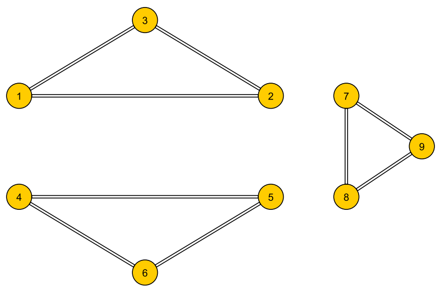
A továbbiakban mindig egyszerű, irányítatlan gráfokról lesz szó.

2.1.3. Definíció. (Reguláris gráf) *Az előző feladatokban szereplő gráfokat, melyekben minden csúcs foka azonos, mégpedig k, k-reguláris, vagy egyszerűen reguláris gráfoknak nevezzük.*

2.1.4. Példa. A K_n teljes gráf $(n-1)$-reguláris.

2.1.5. Megjegyzés. K_n a legkevesebb csúccsal rendelkező $(n-1)$-reguláris gráf.

2.1.6. Példa. 1.1.6 következmény miatt egy $2k+1$ reguláris gráf csúcsainak a száma mindig páros.



2.3. ábra. Egy 2-reguláris gráf.

2.2. A reguláris gráfok tulajdonságai

2.2.1. Állítás.

1. Egy G gráf pontosan akkor k-reguláris, ha adjacencia-mátrixának az $\underline{\mathbf{1}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor sajátvektora, a hozzá tartozó sajátérték pedig k.

2. A G k-reguláris gráf pontosan akkor összefüggő, ha k egyszeres sajátérték.

3. Legyen G összefüggő k-reguláris. Ekkor $-k$ akkor és csak akkor sajátérték, ha G reguláris páros gráf.

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy G k-reguláris, adjacencia-mátrixát jelöljük A-val. Ekkor A minden sorában pontosan k darab egyes áll, a többi elem pedig 0. Ekkor $A \cdot \underline{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} k \\ \vdots \\ k \end{pmatrix}$, tehát k sajátérték, $\underline{\mathbf{1}}$ pedig sajátvektor. Megfordítva: Ha az $\underline{\mathbf{1}}$ sajátvektor, a hozzá tartozó sajátérték pedig k pontosan azt jelenti, hogy a mátrix sorösszegei egyenlőek k-val, azaz mivel A szomszédsági mátrix, így minden sorában pontosan k darab 1-es szerepel, tehát minden csúcs foka k.

2. Először tegyük fel, hogy G összefüggő. Ekkor 1.4.7 állítás miatt teljesül a 1.4.6 tétel irreducibilis mátrixokra vonatkozó része, tehát $\exists\ \lambda_{max}$ sajátérték, mely egyszeres multiplicitású, és maximális. 1.3.10 tétel miatt a sajátértékek benne vannak $B(0,k)$-ban,

így $\lambda_{max} = k$.
Most a másik irányhoz indirekt tegyük fel, hogy k egyszeres sajátérték, de a gráf nem összefüggő. Ekkor azonban adjacencia-mátrixa felírható a következő blokkos alakban:

$$B_l = \begin{pmatrix} B^{i_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B^{i_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B^{i_l} \end{pmatrix},$$

ahol B^{i_j} $i_j \times i_j$-es, az i_j darab csúcsból álló j. komponenshez tartozó négyzetes mátrix. Mivel G k-reguláris, így $B_l \underline{v}_j = kv_j$, ahol v_j az az n dimenziós oszlopvektor, melynek B^{i_j}-hez tartozó komponensei 1-esek, a többi 0. Ezek minden $j \in \{1 \ldots l\}$-re lineárisan függetlenek. Ekkor azonban a k sajátértékhez tartozik l darab lineárisan független sajátvektor, tehát geometriai multiplicitása legalább l, ami ellentmondás.
(*Ebből a gondolatmenetből az is kiolvasható, hogy ha k l-szeres sajátérték, akkor a gráf l komponensből áll.*)

3. Először jegyezzük meg, hogy az összefüggőség fontos, hiszen egy olyan gráfnál például, ahol az egyik komponens reguláris páros gráf, a másik pedig egy reguláris nem páros gráf is teljesül, hogy a $-k$ sajátérték (az egyenletben a nem páros gráfhoz tartozó komponens sorainak megfelelő elemei a sajátvektornak legyenek 0-k).
Tehát G összefüggő. Ha G reguláris páros gráf, n és m nagyságú osztályokkal, akkor adjacencia-mátrixa a következő alakú: $A = \begin{pmatrix} 0 & A' \\ (A')^T & 0 \end{pmatrix}$, ahol $A' \in \{0,1\}^{n \times m}$ mátrix, melyre teljesül, hogy minden sorában és oszlopában k darab 1-es van (hiszen k-reguláris). Ekkor a mátrixnak sajátértéke a $-k$, méghozzá a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$ sajátvektorral, ahol a -1-esek száma n, az 1-eseké pedig m.
Nézzük a másik irányt:
Tegyük fel tehát, hogy $-k$ sajátértéke A-nak. Vegyünk egy $-k$-hoz tartozó normált sajátvektort, jelöljük v-vel és legyen az u vektor olyan, hogy $u_i := |v_i|$. Ekkor u-ra is igaz, hogy hossza 1. Ekkor:

$$-k = v^T A v = \sum_{i,j} a_{ij} v_i v_j,$$

tehát a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva
$k = |-k| = |\sum_{i,j} a_{ij} v_i v_j| \leqq \sum_{i,j} a_{ij} |v_i||v_j| = u^T A u \leqq k$.

Az utolsó egyenlőtlenségben 1.3.11 állítás miatt u a k-hoz tartozó sajátvektor. A 1.4.6 tétel következménye, hogy u minden eleme pozitív. A háromszög-egyenlőtlenségnél pedig akkor van egyenlőség, ha $v_i v_j = |v_i v_j| = |v_i||v_j|$ vagy $v_i v_j = -|v_i v_j|$ ha az i és j csúcsok szomszédosak. Mivel $-k < 0$, így a 2. egyenlőség teljesül. Így két csúcs akkor és csak akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő koordináták v-ben ellenkező előjelűek, ami két osztályra osztja így a gráfot, tehát a gráf páros. $\square$

3. fejezet

Erősen reguláris gráfok

3.1. Bevezető

Térjünk vissza a 2.1.1 feladatra. A feladat megoldásánál definiált gráf amellett, hogy reguláris, rendelkezik még egy erősebb tulajdonsággal is. Akár az első, akár az általánosabb feladatnál igaz volt, hogy nem csupán a szomszédok száma egyezett meg minden pontnál, de két összekötött csúcs közös szomszédjainak a száma és két nem-összekötött csúcs közös szomszédainak a száma is független a két pont választásától.
Nézzük tehát a $2k$ csúcsú teljes páros gráfot! Itt pontosan az egy osztályban levő csúcsok a nem-összekötöttek, tehát az ő közös szomszédainak a száma k. Két külön osztályban levő csúcsok össze vannak kötve, közös szomszédaik nincsenek.

3.1.1. Definíció. *Egy G gráfot (n, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráfnak nevezünk, ha n csúcsú, k reguláris, két összekötött pont közös szomszédjainak száma λ, két összekötetlené pedig μ.*

3.2. Erősen reguláris gráfok tulajdonságai

[4] alapján: A következőekben néhány egyszerűen adódó feltételt, illetve korlátot vizsgálunk meg.

3.2.1. Állítás. *Ha van (n, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráf, akkor:*

$$k(k - \lambda - 1) = (n - k - 1)\mu.$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy x csúcsot és számoljuk meg kétféleképpen az olyan $\{y, z\}$ éleket, ahol y össze van kötve x-szel, z pedig nincsen. Először is egy rögzített x csúcs $(n-k-1)$ darab ponttal nincsen összekötve (jelöljük ezeket z-vel), velük pedig μ közös szomszédja van (ezek legyenek az y-nal jelölt csúcsok), így az $\{y, z\}$ élek száma $(n-k-1)\mu$. Másrészt viszont x-nek k darab y szomszédja van, ezek pedig $(k-\lambda-1)$ olyan ponttal vannak összekötve, amelyek x-szel nincsenek. □

3.2.2. Állítás. *Ha egy erősen reguláris gráf nem összefüggő, akkor komponensei azonos méretű teljes gráfok.*

Bizonyítás. Vegyünk tehát egy ilyen gráfot. Ennek két komponense között nem halad él, így a közös szomszédjainak a száma is két olyan csúcsnak, amely két különböző komponensben van 0 kell, hogy legyen. Így $\mu = 0$-t kapjuk. Most 3.2.1 miatt $k(k-\lambda-1) = 0$, amiből a triviális $k = 0$ esettől eltekintve azt kapjuk, hogy $\lambda = k - 1$. A komponensek pedig K_{k+1} teljes gráfokból állnak, mert egy csúcs szomszédai között nem lehet két összekötetlen, hiszen $\mu = 0$. □

3.2.3. Megjegyzés. Ugyanígy, ha egy erősen reguláris gráfban $\mu = 0$, akkor komponensei azonos méretű teljes gráfok.

3.2.4. Állítás. *Erősen reguláris gráf komplementere is erősen reguláris, a következő paraméterekkel:*

$$\bar{k} = n - 1 - k,\ \bar{\lambda} = n - 2k + \mu - 2,\ \bar{\mu} = n - 2k + \lambda.$$

Bizonyítás. A G gráf komplementerében is n csúcs van, illetve $\bar{k} = n-k-1$ is egyértelmű. $\bar{\lambda}$ meghatározásához az eredeti G gráfban két nem szomszédos csúcshoz kell megszámolnunk azokat a pontokat, melyek egyikkel sincsenek összekötve. Ebből $n - (2k - \mu) - 2$ van. $\bar{\mu}$ meghatározása hasonlóan működik, itt két összekötött csúcshoz keresünk olyan csúcsokat, melyek nincsenek egyikkel sem összekötve, így kapjuk $n - 2k + \lambda$-t. □

3.2.5. Állítás. *Legyen az erősen reguláris gráf adjacencia-mátrixa A. Ekkor A^2 a következő alakú:*

- *főátlóban k-k állnak,*
- *főátlón kívül λ, ha i és j szomszédok,*

- *főátlón kívül μ, ha i és j nem szomszédok.*

Bizonyítás. Az állítás következik a 1.2.3 állításból.
Ugyanis nézzük a főátlót: itt A^2-ben egy csúcsból az önmagába menő 2-hosszú séták számát keressük. Mivel a gráf k-reguláris, így ez k.
Most nézzünk két összekötött csúcsot, A-ban itt szerepel 1-es. A definícióból azonnal következik, hogy közös szomszédaik száma λ, ami 2-hosszú sétákat jelent, azaz a négyzetre emelés után itt kapunk λ-t. Ahol 0 állt A-ban, az két nem összekötött csúcsot jelölt, a négyzetre emelés után pontosan itt kapunk μ-ket. $\square$

Ez felírható a következőképpen:

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A), \tag{3.1}$$

ahol I az egységmátrix, J pedig a csupa egyesekből álló mátrix. A regularitás is felírható

$$AJ = JA = kJ \tag{3.2}$$

alakban, hiszen minden sorban és oszlopban pontosan k darab 1-es szerepel A-ban.

3.2.6. Állítás. *A (3.1) és a (3.2) egyenletek teljesülése ekvivalens a gráf erősen-regularitásával, illetve regularitásával.* $\square$

Rendezzük át a (3.1) egyenletet:

$$A^2 - kI - \lambda A = \mu(J - I - A),$$

szorozzuk be jobbról az egyenletet az $\underline{\mathbf{1}}$ vektorral:

$$A^2\underline{\mathbf{1}} - kI\underline{\mathbf{1}} - \lambda A\underline{\mathbf{1}} = \mu(J - I - A)\underline{\mathbf{1}}.$$

Tudjuk, hogy A-nak és J-nek is sajátvektora az $\underline{\mathbf{1}}$, a hozzá tartozó sajátértékek pedig rendre k és n. Ebből:

$$k^2\underline{\mathbf{1}} - k\underline{\mathbf{1}} - \lambda k\underline{\mathbf{1}} = \mu(n\underline{\mathbf{1}} - \underline{\mathbf{1}} - k\underline{\mathbf{1}}),$$

amiből pedig a következőt kapjuk:

$$k(k - \lambda - 1) = \mu(n - k - 1),$$

amit pedig már az előbb bebizonyítottunk elemi eszközökkel.
Vizsgáljuk tovább A-t, illetve a (3.1) egyenletet.

Vegyünk egy k-tól különböző másik sajátértéket! Legyen ez ρ, a hozzá tartozó sajátvektor pedig $\mathbf{v}$. Mivel A szimmetrikus, így a főtengelytétel miatt $\mathbf{v}$ merőleges $\underline{\mathbf{1}}$-re, tehát $\mathbf{v}$ J-nek is sajátvektora, 0 sajátértékkel. Most alkalmazzuk $\mathbf{v}$-re (3.1)-t:

$$A^2 v = kIv + \lambda Av + \mu(J - I - A)v,$$

$$\rho^2 v = kv + \lambda\rho v - \mu v - \mu k v,$$

ebből pedig:

$$\rho^2 = (k - \mu) + (\lambda - \mu)\rho.$$

Ez egy másodfokú egyenlet ρ-ra, melynek megoldásai ($r > s$):

$$r, s = \frac{\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}}{2}. \tag{3.3}$$

Ez akkor is teljesül, ha a gráf nem összefüggő, azaz k multiplicitása legalább kettő, hiszen ilyenkor $\mathbf{v}$-t tudnánk $\underline{\mathbf{1}}$-re merőlegesen választani k sajátalterében. Legyen r multiplicitása f, s-é pedig g. Ekkor teljesül a következő:

$$n = f + g + 1,\ 0 = \mathrm{Trace}(A) = k + fr + gs, \tag{3.4}$$

ahol a mátrix nyoma, azaz $\mathrm{Trace}(A)$ a sajátértékek összege. Mivel a $k = \mu = \lambda$ nem lehetséges, így az egyenletrendszer egyértelműen megoldható:

$$f = n - g - 1,$$

$$g = \frac{k + (n-1)r}{s - r},$$

amibe behelyettesítve a 3.3 eredményt kapjuk a következő tételt:

3.2.7. Tétel. (Integralitási vagy egészségi feltétel) *Egy (n, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráf esetén, ha f és g a k-tól különböző két sajátérték multiplicitását jelöli, akkor teljesül a következő:*

$$f, g = \frac{1}{2}\left(n - 1 \pm \frac{(n-1)(\mu - \lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu)}}\right), \tag{3.5}$$

és az f, g számok nemnegatív egészek. $\square$

3.2.8. Állítás. *Ha a sajátértékekre $k > r > s$ teljesül, akkor $(k - r)(k - s) = n\mu$.*

Bizonyítás. $(k - r)(k - s) = k^2 - k(s + r) + rs$, de a gyökök és együtthatók összefüggését használva: $rs = \frac{k-\mu}{-1} = \mu - k$ és $r + s = \lambda - \mu$. Így $(k - r)(k - s) = k^2 - k(\lambda - \mu) + \mu - k = k(k - \lambda - 1) + k\mu + \mu$, felhasználva 3.2.1 állítást teljesül az egyenlőség. $\square$

3.3. Példák erősen reguláris gráfokra

A példák előtt előtt tekintsük át a véges testek alapfogalmait [7] segítségével.

3.3.1. Tétel. *Minden véges test elemszáma prímhatvány.*

3.3.2. Tétel. *Véges test multiplikatív csoportja ciklikus.*

3.3.3. Tétel. (Homomorfizmustétel) *Ha G és H csoportok, $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor* $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\mathrm{Ker}(\varphi)$, *azaz* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *izomorf a G csoport* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *szerinti faktorcsoportjával. Ha G véges, akkor* $|\mathrm{Im}(\varphi)| = \frac{|G|}{|\mathrm{Ker}(\varphi)|}$.

3.3.4. Állítás. *Legyen C egy véges ciklikus csoport. Ha $d \mid |C|$, akkor C-nek d darab olyan c eleme van, hogy $c^d = 1$.*

3.3.5. Állítás. *$\mathbb{F}_q$-ban két négyzetelem szorzata négyzetelem, két nem-négyzetelem szorzata is négyzetelem, egy nem-négyzetelem és egy négyzetelem szorzata pedig nem-négyzetelem.*

3.3.6. Példa. A *Paley-gráf*:

Legyen $q = p^n$, $0 < n \in \mathbb{N}$, p prím és $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Vegyük az $\mathbb{F}_q$ test elemeit. Legyenek ezek a P_q gráf csúcsai, két csúcsot pedig kössünk össze akkor, ha különbségük nem-nulla négyzetelem. Mivel -1 négyzetelem, ha $q \equiv 1 \bmod 4$, így egyszerű, irányítatlan gráfot kapunk.

3.3.7. Állítás. *P_q erősen reguláris gráf a következő paraméterekkel:*

$$n = q,\ k = \frac{q-1}{2}, \lambda = \frac{q-5}{4},\ \mu = \frac{q-1}{4}.$$

Bizonyítás. $\mathbb{F}_q$-nak q eleme van, így ennyi csúcs is van, tehát $n = q$. Vegyük észre, hogy elég megvizsgálni egy csúcs szomszédait, hiszen eltolással megkapjuk a többit:

$$(i + s) - (j + s) = i - j = x^2$$

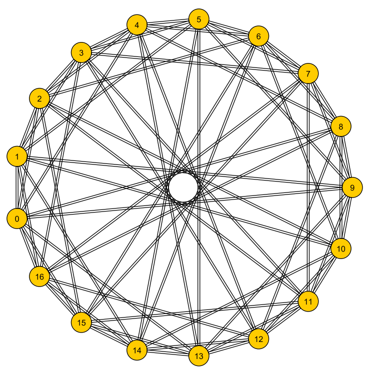
$\mathbb{F}_q$-ban, ahol i, j csúcsok, $s \in \mathbb{F}_q$, x^2 négyzetelem. Vizsgáljuk meg a 0 csúcs szomszédjait, tehát keressük a $j - 0 = x^2$ megoldásait, azaz a kérdés, hogy hány négyzetelem van $\mathbb{F}_q$-ban. Az $\mathbb{F}_q$ multiplikatív csoportja $\mathbb{Z}_{q-1}$, ahol $q - 1 = 4l$, $l \in \mathbb{N}$. Mivel $2 \mid 4l$, így 3.3.4 állítás miatt 2 azon elemek száma, melyeknek négyzete 1. Itt a négyzetre emelés egy endomorfizmus, azaz önmagába képző homomorfizmus, melynek magja tehát kételemű, 3.3.3 tétel

miatt a négyzetelemek száma, és így a 0 csúcs foka: $k = \frac{q-1}{2}$.
Tudjuk, hogy négyzetelemmel való osztáskor nem-négyzetelemből nem-négyzetelemet, négyzetelemből négyzetelemet kapunk, és u és v csúcsoknak ugyanannyi közös szomszédja van, mint 0-nak és $(v-u)$-nak, így két esetet kapunk.

1. 0 és 1 közös szomszédai,

2. 0 és z közös szomszédai, ahol z egy nem-négyzetelem.

Nézzük az elsőt. 0 és 1 közös szomszédai x^2-1 alakú négyzetelemek, tehát keressük az $x^2-1=y^2$, azaz az $x^2-y^2=1$ egyenlet megoldásait $\mathbb{F}_q$-ban, ahol $x \neq 0,\ \ y \neq 0$. $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=1$, legyen $c=x-y\neq 0$, tehát $x=\frac{c+\frac{1}{c}}{2}=\frac{c^2+1}{2c}\ \forall\ c\neq 0$, ebből $q-1$ darab van. Mivel $x\neq 0$, így $c^2+1\neq 0$-t kapjuk, és mivel -1 négyzetelem $\mathbb{F}_q$-ban, így ez 2 megoldást jelent. Hasonlóan az $y\neq 0$ feltétel miatt is kiesik 2 megoldás, tehát összesen $q-5$ megoldást találtunk az egyenletre. Mivel itt x^2 illetve y^2 szerepel, így ha (x,y) pár megoldás, akkor az egyenletben $(-x,y),(x,-y),(-x,-y)$ ugyanazt a csúcsot adják, így $\lambda=\frac{q-5}{4}$.
Most vizsgáljuk meg 0 és k közös szomszédait, ebből az $x^2-y^2=z$ egyenletet kapjuk. Itt pontosan ugyanúgy járunk el, mint az előbb, és vizsgáljuk meg az $x=0$ és az $y=0$ eseteket. Ezekből a $-z=y^2$ és $z=x^2$, de ezeknek nincsen megoldása, mivel z nem négyzetelem, tehát a 2. egyenlőség nem teljesülhet, és $-z=-1\cdot z$ és -1 négyzetelem, z nem, így ez sem teljesülhet, tehát összesítve: $\mu=\frac{q-1}{4}$-et kapjuk. $\square$



3.1. ábra. A P_{17} Paley-gráf

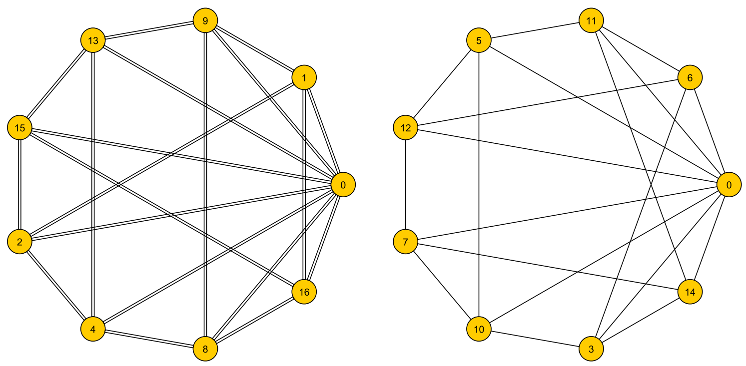
Jegyezzük meg, hogy P_q-ban a legnagyobb teljes részgráf mérete egyenlő a legnagyobb üres részgráf méretével. Valóban, ha egy nem-négyzetelemmel szorzunk, akkor éllel összekötött csúcsok össze nem kötött csúcsba mennek. Magyarán a Paley gráf izomorf a komplementerével. A következőkben a P_{17} Paley gráfot fogjuk megvizsgálni.

3.3.8. Tétel. (Ramsey) *Minden $k, l \geqq 2$ természetes számhoz létezik N, hogy minden $n \geqq N$ esetén az n csúcsú teljes gráf éleit 2 színnel (pirossal és kékkel) tetszőlegesen színezve vagy lesz k darab csúcs, amelyek között minden él piros, vagy lesz l darab csúcs, melyek között minden él kék. A legkisebb ilyen N-et $R(k, l)$-el jelöljük.*

Elsőben tanultuk, hogy $R(3, 4) = 9$, és hogy $R(k, l) \leqq R(k-1, l) + R(k, l-1)$, ha $k, l \geqq 3$ (Ez Erdős és Szekeres eredménye). Ezt felhasználva: $R(4, 4) \leqq 18$. Itt egyenlőség akkor teljesülne, ha tudnánk mutatni egy 17 csúcsú teljes gráfot, melynek 2 színnel megszínezve az éleit nincsen benne olyan K_4, amely egy színű lenne. A P_{17} gráf ilyen, ugyanis ha vesszük az éleit, mint egyik szín, a másik szín pedig kösse össze P_{17} nem-szomszédos csúcsait, tehát fogalmazzuk meg a következő állítást:

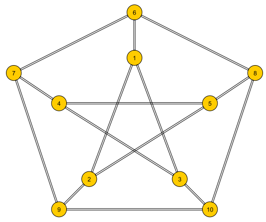
3.3.9. Állítás. *P_{17}-ben nincsen K_4, sem 4 pontú független csúcshalmaz.*

Bizonyítás. A szimmetria miatt elég azokat a 4 csúcsú részgráfokat megvizsgálni, melyekben benne van a 0 csúcs. A nem nulla négyzetszámok $\mathbb{F}_{17}$-ben a következők: $1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16$, tehát ezek 0 szomszédai. A következő ábra a 0 és a 0 szomszédai által feszített részgráf, az elsőben P_{17} szomszédos, a másodikban P_{17} nem-szomszédos csúcsai vannak összekötve ebben a részgráfban. Ezek közül egyikben sincsen K_4. $\square$



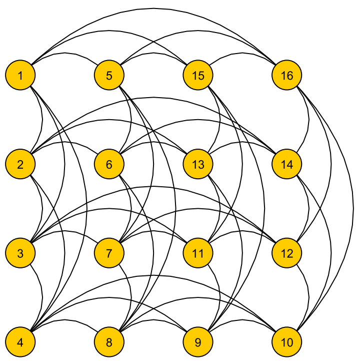
3.2. ábra. A 0 és a 0-val szomszédos, és nem szomszédos csúcsok által alkotott részgráfok

3.3.10. Példa. A Petersen-gráf $(10, 3, 0, 1)$ paraméterű erősen reguláris gráf.



3.3. ábra. A Petersen-gráf

3.3.11. Példa. Az $L_2(m)$ *négyzetháló* gráf két m csúcsú teljes gráf összegeként áll elő a következő módon:
$L_2(m) = K_m \oplus K_m$, a gráf csúcsai: (v, v') párok, és két ilyen csúcsot akkor kötünk össze, ha valamelyik koordinátájában megegyeznek.



3.4. ábra. Az $L_2(4)$ négyzetháló gráf.

3.3.12. Állítás. $L_2(m)$ *erősen reguláris a következő paraméterekkel:*

$$n = m^2,\ \ k = 2(m-1),\ \ \lambda = m-2,\ \ \mu = 2.$$

Bizonyítás. Mivel a gráfot elképzelhetjük úgy, hogy egy négyzethálón helyezkednek el a csúcsai, és kettőt pontosan akkor kötünk össze, ha egy sorban, vagy oszlopban vannak, így ebből $n = m^2$ azonnal adódik. Egy csúcsnak egy sorban és egy oszlopban is pontosan $m-1$ darab szomszédja van, így $k = 2(m-1)$. Két csúcs akkor nincs összekötve, ha nincsenek sem egy sorban sem egy oszlopban, ezeknek pontosan 2 közös szomszédjuk van, ahol az egyik oszlopa metszi a másik sorát, és fordítva, tehát $\mu = 2$. Végül pedig két csúcs szomszédos, ha egy sorban vagy egy oszlopban vannak, tehát közös szomszédaik a sor/oszlop többi eleme, így $\lambda = 2$. $\square$

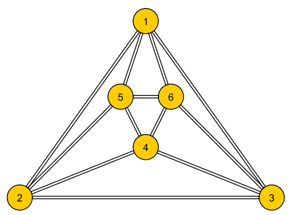
3.3.13. Példa. A $T(m)$, $(m \geqq 4)$ *trianguláris* gráf:

A gráf csúcsai egy m elemű halmaz 2-elemű részhalmazai. Ezek szomszédosak, ha a részhalmazok nem diszjunktak. Ez felfogható úgy is, mint egy K_m teljes gráf élgráfja, mivel az élgráfban a csúcsok az eredeti gráf éleinek felelnek meg, és ezek akkor vannak összekötve, ha az eredeti gráfban a két élnek volt közös végpontja.

3.3.14. Állítás. *$T(m)$ erősen reguláris a következő paraméterekkel:*

$$n = \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}, \ k = 2(m-2), \ \lambda = m-2, \ \mu = 4.$$

Bizonyítás. Egy halmaz kételemű részhalmazainak a száma $\binom{m}{2}$, ami pontosan a csúcsok száma. Rögzítsünk le egy $\{a, b\}$ részhalmazt, és vizsgáljuk meg a szomszédait. Ekkor a és b „mellé” is pontosan $m-2$ „párt” tudunk még választani, így $k = 2(m-2)$. Most nézzünk két nem-összekötött csúcsot, legyenek $\{a_1, b_1\}$ és $\{a_2, b_2\}$, ahol $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$ és $a_1 \neq b_2$, $b_1 \neq a_2$. Ezek közös szomszédai az $\{a_1, b_2\}, \{b_1, a_2\}, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}$, azaz $\mu = 4$. Vegyünk két összekötött csúcsot, $\{a, x\}$, $\{a, y\}$, ahol $x \neq y$, ezek közös szomszédai pontosan az $\{a, z\}$ alakú részhalmazok, ahol $z \neq x, y$ és $z \neq a$, ebből $m-3$ darab van, és van még $\{x, y\}$ is. $\square$



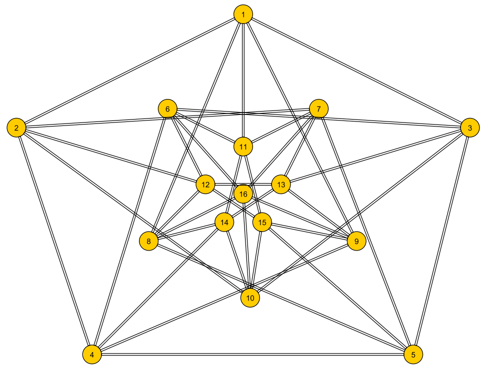
3.5. ábra. A $T(4)$ trianguláris gráf.

3.3.15. Megjegyzés. A $T(5)$ trianguláris gráf a komplementere a Petersen-gráf.

3.3.16. Példa. A *Clebsch-gráf*:

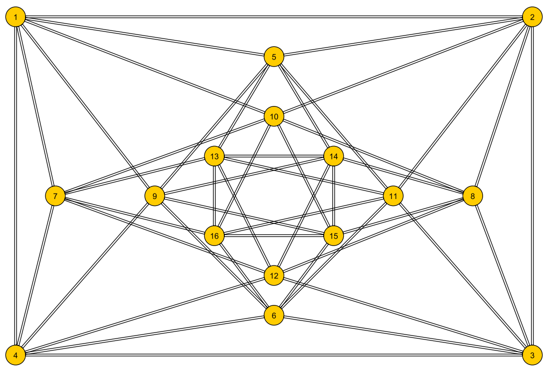
Csúcsai az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz páros sok elemű részhalmazai. Két ilyen halmazt – legyenek ezek A, B – összekötünk, ha szimmetrikus differenciájuk 4, azaz: $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) = 4$.

3.3.17. Állítás. *A Clebsch-gráf egy* $(16, 5, 0, 2)$ *paraméterű erősen reguláris gráf.*



3.6. ábra. A Clebsch-gráf

3.3.18. Példa. A *Shrikhande*-gráf egy $(16, 6, 2, 2)$ paraméterű erősen reguláris gráf.



3.7. ábra. A Shrikhande-gráf

3.3.19. Megjegyzés. A Shrikhande-gráfot megkapjuk $L_2(4)$-ből az úgynevezett switching segítségével. Az eljárás pedig a következő: Vegyük a G gráfot, és válasszuk ki a csúcsok egy C halmazát, és változtassuk meg a szomszédságokat a következőképp:

- Ha egy él mindkét végpontja vagy C-ben, vagy $G\backslash C$-ben van, akkor ne változtassunk rajta,
- ha egy él egyik végpontja C-ben, a másik $G\backslash C$-ben van, akkor töröljük,
- végül pedig két olyan csúcs amelyek közül az egyik C-ben, a másik $G\backslash C$-ben van, de nincsenek összekötve, most legyenek szomszédosak.

Ha $L_2(4)$-ben a C halmaz a 4 diagonális pont, akkor megkapjuk így a Shrikhande gráfot. Jegyezzük még meg, hogy a Shrikhande gráf és az $L_2(4)$ paraméterei megegyeznek, de nem izomorfak. Ez példa arra, hogy két azonos paraméterekkel rendelkező erősen reguláris gráf nem feltétlenül izomorf.

Most vizsgáljuk meg megint a 3.5 egyenletben kapott multiplicitásokat:

$$f, g = \frac{1}{2}\left(n - 1 \pm \frac{(n-1)(\mu-\lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu-\lambda)^2 + 4(k-\mu)}}\right).$$

Tudjuk, hogy ezek egészek, tehát vizsgáljuk meg az eseteket:

1. A tört számlálója 0, azaz
$$(n-1)(\mu-\lambda) = 2k \tag{3.6}$$
teljesül. $\mu - \lambda = 0$ esetén $k = 0$ teljesülne, tehát a gráfban nem létezik él, ebből $n = \frac{2k}{\mu-\lambda} + 1 > k + 1$, hiszen $n - 1 \geqq k$, de egyenlőség esetén $n = 1$, $k = 0$-t kapnánk 3.6 miatt. Ebből az következik, hogy csakis a $\mu = \lambda + 1$ eset állhat fenn, tehát $n = 1 + 2k$. Most 3.2.1 állításból:
$$k(k - \lambda - 1) = k(\lambda + 1),$$
tehát
$$k = 2\lambda + 2,$$
azaz
$$k = 2\mu,$$
amivel már megadtuk az erősen reguláris gráf paramétereit. Az ilyen gráfokat hívjuk **konferenciagráfoknak**.

2. A következő lehetőség az, hogy a gyökjel alatt négyzetszám áll, legyen ez a^2, továbbá $a \mid ((n-1)(\mu-\lambda) - 2k)$, azaz a osztja a számlálót, végül pedig $n - 1$ ugyanolyan paritású, mint az egész tört. Ennek egyik fontos következménye a következő állítás:

3.3.20. Állítás. *Ha az előzőekben a 2. eset teljesül, akkor a sajátértékek biztosan egészek, tehát nem-egész sajátértékek esetén a gráf biztosan konferenciagráf.*

Bizonyítás. Mivel 3.5 egyenletben ugyan az a kifejezés szerepel a nevezőben, mint a 3.3 egyenletben, továbbá, ha $(\lambda - \mu)$ páros, illetve páratlan, akkor a gyökvonás eredménye is neki megfelelő paritású lesz, tehát r, s sajátértékek egészek. □

A következő tétel van Linttől és Seideltől származik, és ez egy szükséges feltételt ad a konferenciagráfokra nézve:

3.3.21. Tétel. *Egy konferenciagráfban a csúcsszámnak két négyzetszám összegének kell lennie.*

3.4. A Hoffman-Singleton tétel

[5] segítségével:

3.4.1. Állítás. *Egy 2 átmérőjű gráfnak, amelynek legnagyobb foka k, legfeljebb $k^2 + 1$ darab csúcsa lehet. Ha pontosan ennyi csúcsa van, akkor a gráf erősen reguláris a következő paraméterekkel:* $(k^2 + 1, k, 0, 1)$.

Bizonyítás. Induljunk ki egy rögzített c csúcsból. Ennek legfeljebb k szomszédja lehet, és mindegyik szomszédjának további legfeljebb $k - 1$ szomszédja lehet. Az utóbbi csúcsok nem lehetnek összekötve további új csúcsokkal, mert akkor a c-től vett távolságuk 3 lenne, ami nem lehetséges. Ez így $1 + k + k(k - 1) = 1 + k^2$. Most nézzük azt az esetet, amikor egyenlőség áll fenn. Ekkor c-ből pontosan k darab csúcs érhető el 1 éllel, továbbá c minden szomszédjának van további $k - 1$ különböző szomszédja. Ebből az következik, hogy a gráf k-reguláris és az is, hogy c szomszédainak a szomszédjai is mind különbözőek. Két összekötött csúcsnak nem lehet közös szomszédja. Nézzünk két nem-összekötött csúcsot, mondjuk c-t és egy szomszédjának egy olyan szomszédját, amely nem c. E két csúcsnak csakis 1 közös szomszédja van, és mivel a c csúcsot tetszőlegesen választhatjuk, így már adódik az állítás. □

3.4.2. Definíció. *Egy gráf* ***bőségén*** *a legrövidebb körének hosszát értjük.*

3.4.3. Állítás. *Legyen G egy k-reguláris gráf, melynek bősége 5. Ekkor G-nek legalább $k^2 + 1$ csúcsa van. Ha pontosan ennyi pontból áll, akkor a gráf erősen reguláris* $(k^2 + 1, k, 0, 1)$ *paraméterrel.*

Bizonyítás. Induljunk ki megint egy rögzített c csúcsból. Tudjuk, hogy c-nek pontosan k szomszédja van és ezen k darab csúcs minden további $k - 1$ szomszédja különböző, különben sérülne a bőségre tett feltétel. A gráfnak így legalább $k^2 + 1$ pontja van. Ha egyenlőség áll fenn, egyrészt tudjuk, hogy két szomszédos csúcsnak nem lehet közös szomszédja, mert ekkor háromszög keletkezne, de C_4 sem lehet, másrészt a konstrukcióból következik, hogy két nem-összekötött csúcsnak pontosan 1 közös szomszédja van. □

3.4.4. Tétel. (Hoffman-Singleton tétel)
Ha G egy $(n, k, 0, 1)$ paraméterű erősen reguláris gráf, akkor k csak $2, 3, 7,$ vagy 57 lehet.

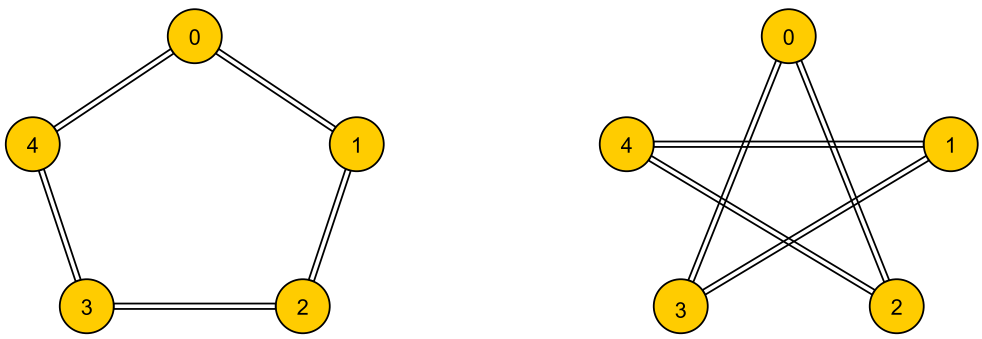
Bizonyítás. Először jegyezzük meg, hogy 3.2.1 állításból adódik, hogy $n = k^2 + 1$. Használjuk fel 3.5 eredményt, eszerint:

$$\frac{1}{2}\left(n - 1 \pm \frac{(n-1)(\mu - \lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu)}}\right) = \frac{1}{2}\left(k^2 \pm \frac{k^2 - 2k}{\sqrt{4k - 3}}\right)$$

nemnegatív egészek. Ekkor az egyik eset, ha $k^2 - 2k = 0$, tehát $k = 2$, vagy $\sqrt{4k - 3}$ egész szám, ami osztja $k^2 - 2k$-t, tehát $4k - 3$ osztja $(k(k-2))^2$-t. Most belátjuk, hogy $4k - 3$ osztja 225-öt, ekkor készen vagyunk, mivel $225 = 3^2 \cdot 5^2$, tehát $4k - 3 \in \{9, 25, 225\}$, mert négyzetszám (itt a $4k - 3 = 1$ esetet kizárhatjuk, ekkor két csúcsot kapunk, amelyek szomszédosak, így a $\mu = 1$ feltétellel ellentmond). Tekintsük a $256k^2(k-2)^2 - (64k^3 - 208k^2 + 100k + 75)(4k - 3)$ kifejezést, ezt osztja $4k - 3$, és a kifejezés pont 225-öt ad eredményül. $\square$

3.4.5. Megjegyzés. A $k = 2$ eset az ötszög, a $k = 3$ a már ismert Petersen-gráf, a $k = 7$ eset a Hoffman-Singleton-gráf, amit a következőkben fogunk megkonstruálni, a $k = 57$ eset pedig mind a mai napig megoldatlan. (A tétel arról nem mond semmit, hogy létezik-e a $(3250, 57, 0, 1)$ paraméterű erősen reguláris gráf.)

3.5. A Hoffman-Singleton-gráf



3.8. ábra. Az ötszög (P_m) és a csillag gráf (Q_x)

A következő konstrukció Robertsontól származik.
Vezessük be a következő jelöléseket:

Legyen P_m egy ötszög, illetve Q_x az 5-pontú csillag gráf, úgy, hogy $0 \leqq m \leqq 4, 0 \leqq x \leqq 4$ (3.8 ábra).
Jelöljük az m. ötszög csúcsait az $[m, b]$ párossal, (azaz m. ötszög b. csúcsa), és ugyanígy a csillagokét is, (x, y)-nal. A Hoffman-Singleton gráf pedig álljon ezekből a részgráfokból, illetve ötszög és egy csillag között akkor és csak akkor menjen él, ha (x, y)-ra és $[m, b]$-re teljesül a következő:

$$y \equiv mx + b \pmod 5.$$

Ebből következik, hogy a gráfnak $10 \cdot 5 = 7^2 + 1 = 50$ csúcsa van, és egy adott csúcsra egy ötszögből vagy csillagból a képlet pontosan megmondja, hogy egy másik csillag/ötszög mely pontjával legyen összekötve. A konstrukcióból következik, hogy a gráf 7-reguláris. Az is következik a konstrukcióból, hogy a gráfban nincsen háromszög.
Azt kéne még belátnunk, hogy nincsen négyszög sem, ezt indirekten fogjuk.
Tegyük fel tehát, hogy van a gráfban 4 hosszú kör. Ez többféleképp is elhelyezkedhet aszerint, hogy az ötszögekből és csillagokból milyen éleket tartalmaz. Először nézzük meg azt az esetet, amikor a kör nem tartalmazza sem ötszög, sem csillag élét, azaz az négy hosszú kör csúcsai: $[m_1, b_1]$, (x_1, y_1) és $[m_2, b_2]$, (x_2, y_2), ahol $m_1 \neq m_2$, $x_1 \neq x_2$, és legyen a következőképpen összekötve:

$$y_1 \equiv m_1 x_1 + b_1 \pmod 5 \tag{3.7}$$

$$y_2 \equiv m_1 x_2 + b_1 \pmod 5 \tag{3.8}$$

$$y_1 \equiv m_2 x_1 + b_2 \pmod 5 \tag{3.9}$$

$$y_2 \equiv m_2 x_2 + b_2 \pmod 5 \tag{3.10}$$

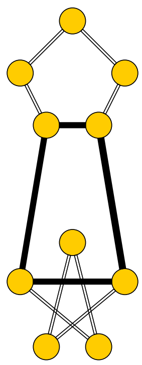
Ekkor $(3.7) - (3.8) - (3.9) + (3.10) \equiv 0 \pmod 5$, hiszen a bal oldalon 0-t kapunk, a jobb oldalon pedig $(m_1 - m_2)(x_1 - x_2)$ áll, ez pedig ellentmondás. Most nézzük azt az esetet, amikor az ötszögben és a csillagban $2-2$ szomszédos csúcs alkot egy C_4-et, tehát a kör csúcsai rendre $(x, y),\ (x, y-1),\ [m, b+2],\ [m, b]$ (3.9 ábra).

Ekkor ez a következő rendszert adja:

$$y \equiv mx + b \pmod 5$$

$$y - 1 \equiv mx + b + 2 \pmod 5,$$

ez azonban megint ellentmondáshoz vezet. A másik lehetőség pedig az
$(x, y),\ (x, y-1),\ [m, b-2],\ [m, b]$ 4 hosszú kör, azonban ez is ellentmondáshoz vezet az előzőhöz hasonlóan.



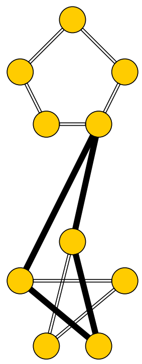
3.9. ábra.

Vizsgájuk meg az utolsó lehetőséget: az ötszögből egy pont egy csillagból két nem szomszédos ponttal van összekötve, így is előállhat C_4, ebből viszont a következőt kapjuk:

$$y \equiv mx + b \pmod 5$$

$$y \equiv mx + b + 4 \pmod 5$$

(3.10 ábra), ami ugyancsak ellentmondás.



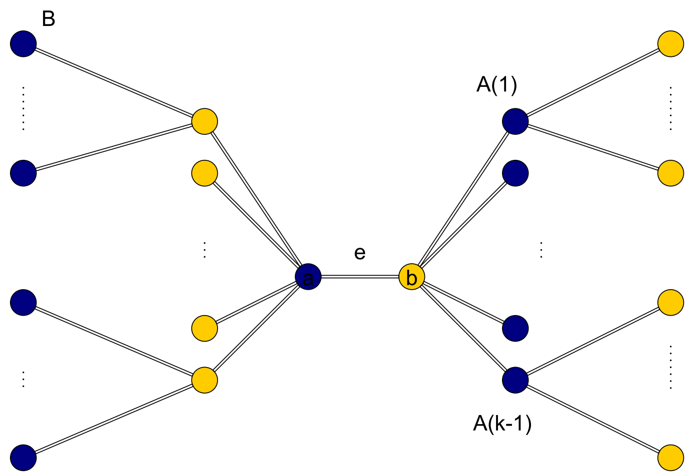
3.10. ábra.

3.6. A 6 bőségű k reguláris gráfok

Az előzőekhez hasonlóan igaz az alábbi tétel:

3.6.1. Tétel. *Egy 6 bőségű k reguláris gráfnak legalább $2k^2 - 2k + 2$ csúcsa van.*

Bizonyítás. Induljunk ki egy e élből és annak két végpontjából, legyenek ezek a és b. Vizsgáljuk meg a szomszédaikat: a-nak is és b-nek is van további $k - 1$ szomszédja, melyek mind különbözőek a bőségre tett megszorítás miatt. Nézzük a másodszomszédokat: ezekből mindkét "oldalon" $(k-1)(k-1)$ csúcs van, melyek még mindig különbözőek kell, hogy legyenek. Összeadva a csúcsokat adódik az állítás. □ Mielőtt alaposabban megvizsgálnánk az egyenlőtlenséget, tegyük fel, hogy a gráfnak pontosan $2k^2 - 2k + 2$ csúcsa van. Ezeket jól összekötve látható, hogy a gráf 2-színezhető (3.11 ábra).



3.11. ábra.

A következőkben szükségünk lesz a projektív sík fogalmára ([4] alapján).

3.6.2. Definíció. *Projektív síknak egy (Π, Λ) párost nevezünk, ahol Π nem-üres és elemei a "pontok", Λ pedig a Π részhalmazainak a halmaza, ezek lesznek az "egyenesek", és teljesül a következő 3 axióma:*

1. *Bármely két különböző ponthoz egy és csak egy egyenes tartozik amely mindkettőt tartalmazza.*

2. *Tetszőleges két különböző egyeneshez egy és csak pont tartozik, amelyet mind a két egyenes tartalmaz.*

3. Létezik 4 pont Π-ben, amelyek közül semelyik 3-at nem tartalmazza egy egyenes.

Egy projektív síkot q-adrendűnek, vagy végesnek nevezünk, ha teljesül még egy 4. axióma is:

4. Van olyan egyenes, amely $q + 1 = k$ pontot tartalmaz.

3.6.3. Állítás. *Legyen q prímhatvány. Ekkor $\mathbb{F}_q$ testre épített q-adrendű projektív síkra teljesülnek a következők:*

- *Minden egyenesen $q + 1 = k$ pont van.*
- *Minden pontot $q + 1 = k$ egyenes tartalmaz.*
- *A pontok és egyenesek száma $q^2 + q + 1 = k^2 - k + 1$.*

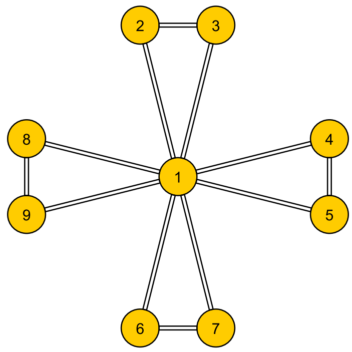
3.6.4. Definíció. *Egy P projektív sík illeszkedési gráfja egy G_P gráf, mely páros, egyik pontosztálya a projektív sík pontjainak, másik az egyeneseinek felel meg, összekötjük őket, ha a pont illeszkedik az egyenesre.*

3.6.5. Megjegyzés. Ez a gráf C_4-mentes, ez az első két axiómából következik.

Térjünk vissza a 3.11 ábrára. A következőkben belátjuk, hogy két egy színosztályba tartozó pontnak pontosan egy közös szomszédja van. Az egy „oszlopban" levő csúcsok nem lehetnek szomszédosak, így vegyük például $A(1)$-et és $A(k-1)$-et, nekik csak b a közös szomszédjuk. Az e él két végpontjára és egy tetszőlegesen választott másik ugyanolyan színű csúcsra is teljesül a feltevésünk, így csak egyetlen esetet kell megvizsgálnunk még. A szimmetria miatt elég belátni, hogy $A(1)$-nek és B-nek is pontosan egy közös szomszédja van. Mivel B-ből a jobboldali „oszlopba" $k - 1$ darab él megy, ott pedig $k - 1$ „kupac" van, így minden kupacba pontosan egy él mehet csak (különben keletkezne C_4, ami nem lehet), így $A(1)$ jobboldali szomszédai közül pontosan 1 van összekötve B-vel. Most ha az egyik ponthalmazt egyeneseknek, a másikat pontoknak feleltetjük meg, kettőt pedig összekötünk, ha illeszkednek, akkor egy projektív sík illeszkedési gráfját kapjuk.

3.7. A barátság-tétel

3.7.1. Definíció. *Szélmalom-gráfnak egy csúcsról lelógó háromszögek unióját nevezzük.*



3.12. ábra. A 9 csúcsú szélmalom-gráf

Nézzük a következő érdekes állítást. Egy társaságban, ha bármely 2 embernek pontosan egy közös barátja van, akkor biztosan van egy ember, aki mindenkinek a barátja, és a társaságban nem lehet páratlan számú ember. A fent definiált szélmalom-gráf pont ilyen. Fogalmazzuk meg a következő tételt:

3.7.2. Tétel. (Barátság tétel) *Egy egyszerű G gráfban, ha tetszőleges 2 csúcsnak pontosan 1 közös szomszédja van, akkor létezik egy v csúcs, amely a gráf összes pontjával szomszédos, továbbá $|V| = 2l + 1$, ahol $l \in \mathbb{N}$.*

A tétel bizonyításánál [8] gondolatmenetét követtem.

Bizonyítás.

Indirekt módon fogjuk belátni a tételt. Először tegyük fel, hogy nem létezik a tételbeli v csúcs. Most belátjuk, hogy ebben az esetben a gráfunk reguláris lesz. Először azt mutatjuk meg, hogy 2 nem szomszédos csúcs foka megegyezik. Legyen v_1 és v_2 ilyen, $d(v_1) := k$ tehát $d(v_1) = d(v_2)$-t szeretnénk belátni. A feltételből következik, hogy a gráfban nem lehet C_4, azaz 4 hosszú kör, hiszen ekkor benne 2 szemközti csúcsnak 2 közös szomszédja is lenne.

Nézzük v_1 szomszédait: jelöljük őket $u_1, \ldots, u_k$-val. Tudjuk, hogy v_2 közülük pontosan 1-gyel van összekötve, legyen ez u_1, továbbá u_1 is szomszédos kell legyen $u_2, \ldots u_k$ valamelyikével, legyen mondjuk u_2. Most vizsgálódjunk v_2 felől: v_2 és u_2 közös szomszédja u_1, v_2 és u_i, $i \neq 2$ közös szomszédai pedig további $k - 1$ csúcs, melyek különbözőek, hiszen nincsen a gráfban C_4, ebből pedig következik, hogy $d(v_2) = k$. Az indirekt feltevés miatt azonban tetszőleges csúcsra létezik vele nem szomszédos csúcs, így ez minden pontra elmondható, tehát a gráf k-reguláris, továbbá mivel v_1-gyel szomszédos csúcsok fokának az összege k^2, és v_1-et kivéve minden csúcsnak pontosan 1 közös szomszédja van v_1-gyel, így minden csúcsot egyszer számoltunk, v_1-et pedig k-szor, így a csúcsok száma $n = k^2-(k-1)$

Nézzük meg a $k = 1$ és $k = 2$ esetet. Ezek csakis szélmalom-gráfok lehetnek, tehát csak $k \geqq 3$ teljesülhet. Legyen A a G szomszédsági mátrixa. Ekkor 1.2.3 állítás miatt $A^2 = kI + (J - I)$. J-nek az n 1-szeres sajátértéke, a 0 pedig $n - 1$-szeres. Tehát A^2-nek a sajátértékei a $k - 1 + n = k^2$, amely egyszeres és $k - 1$, amely $(n - 1)$-szeres. Mivel A szimmetrikus, így A sajátértékei a k, amely egyszeres és a $\pm\sqrt{k-1}$, amely összesen $i + j = n - 1$-szeres. Nézzük A nyomát:

$$\mathrm{Trace}(A) = k + i\sqrt{k-1} - j\sqrt{k-1} = k + \sqrt{k-1}(i - j) = 0,$$

ahol $i + j = n - 1$. Mivel $k \neq 0$, így $j \neq i$

$$\sqrt{k-1} = \frac{k}{j-i},$$

azaz $k - 1$ négyzetgyöke racionális. Belátjuk, hogy ekkor egész is:
Írjuk fel $\sqrt{k-1} = \frac{p}{q}$ alakban, ahol a $\frac{p}{q}$ tört már nem egyszerűsíthető tovább, tehát q a legkisebb olyan természetes szám, melyre $q\sqrt{k-1} \in \mathbb{N}$. Tegyük fel indirekt, hogy $\sqrt{k-1} \notin \mathbb{N}$. Ekkor $l = \lfloor\sqrt{k-1}\rfloor \in \mathbb{N}$, melyre $0 < \sqrt{k-1} - l < 1$ és nézzük $n = q(\sqrt{k-1}-l)$-et. Ekkor egyrészt $n \in \mathbb{N}$, másrészt $n\sqrt{k-1} = q(\sqrt{k-1}-l)\sqrt{k-1} = q(k-1) - l(q\sqrt{k-1})$, ami szintén természetes szám, de $n < q$, ami ellentmond q választásának. Ekkor viszont: $\sqrt{k-1}(i - j) = k = (\sqrt{k-1})^2 + 1$, amiből $\sqrt{k-1} = 1$, tehát $k = 2$, amit viszont kizártunk, tehát ellentmondásba keveredtünk, ezzel beláttuk a tételt. □

3.7.3. Definíció. *Egy projektív sík illeszkedési mátrixán azt az A mátrixot értjük, ahol a sorok a pontoknak, az oszlopok az egyeneseknek felelnek meg, $a_{ij} = 1$, ha az i pont illeszkedik a j egyenesre, 0 különben.*

3.7.4. Állítás. *Ha egy projektív sík A illeszkedési mátrixa szimmetrikus, akkor a* $\mathrm{Trace}(A) \neq 0$ *teljesül.*

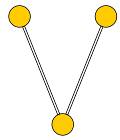
Bizonyítás. Mivel A szimmetrikus, így $A^2 = AA^T = J + qI$, mivel a szorzat eredményében a főátlóban minden pontra megszámoltuk, hogy hány egyenes tartalmazza, főátlón kívül pedig két különböző pontra megnéztük hány egyenes tartalmazza mindkettőt, ezt pedig az első axióma mondja meg. Ekkor viszont használjuk fel a barátság-tétel bizonyításának második részét $k = q + 1$-re, ahol láttuk, hogy $\mathrm{Trace}(A) \neq 0$. □

3.7.5. Megjegyzés. Egy erősebb korlát is teljesül A nyomára, mégpedig az, hogy Trace(A) $\geqq q+1$.

Nézzük a 3.7 tétel egy másik alkalmazását is. Elsőben tanultuk Erdős C_4-mentes gráfok élszámára adott becslését:

3.7.6. Tétel. *Egy n csúcsú egyszerű, C_4-et nem tartalmazó gráf élszámára teljesül a következő:*

$$|E| := e =\leqq \frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3}).$$

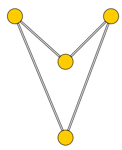


3.13. ábra. A „V”-k, amiket leszámlálunk

Bizonyítás.

A bizonyítás alapötlete, hogy számláljuk le a „V”-ket (3.13 ábra). A „hegyüknél” számolva így $\sum_{x\in V}\frac{d(x)(d(x)-1)}{2}$-t kapunk, hiszen minden csúcshoz a szomszédai közül kell 2-t kiválasztanunk.

Most számoljuk meg a végüknél őket. Vegyük észre, hogy 2 véghez vagy 0 vagy 1 „V”



3.14. ábra. Ilyen nem lehetséges

tartozhat, 2 nem (3.14 ábra), tehát ezekből legfeljebb $\frac{n(n-1)}{2}$ lehet. Így a következőt kapjuk:

$$\sum_{x\in V}\frac{d(x)(d(x)-1)}{2} \leqq \frac{n(n-1)}{2} \tag{3.11}$$

amiből:

$$\sum_{x\in V}(d(x))^2 - \sum_{x\in V} d(x) \leqq n(n-1).$$

Mivel $\sum_{x\in V} d(x) = 2e$ és $\sum_{x\in V}(d(x))^2 \leqq n\left(\frac{\sum_{x\in V} d(x)}{n}\right)^2$, ebből a következőhöz jutunk:

$$4e^2 - 2en - n^2(n-1) \leqq 0,$$

amiből már következik a tétel. □

Vizsgáljuk meg, hogy lehet-e egyenlőség a becslésben. Ekkor először is a bizonyításban 2 véghez pontosan 1 „V” tartozik, ami azt jelenti, hogy bármely két pontnak egy közös szomszédja van. Továbbá a második becslésnél, ahol a négyzetes és számtani közép közti egyenlőtlenséget használtuk azt kapjuk, hogy minden csúcs foka egyenlő, tehát a gráf k reguláris. Ekkor azonban teljesülnek a barátság-tétel feltételei, amiből már következik, hogy a becslésben sem állhat egyenlőség.

Irodalomjegyzék

[1] Katona Gyula Y.-Recski András-Szabó Csaba, *A számítástudomány alapjai*, Typotex, 2006

[2] Freud Róbert, *Lineáris algebra*, Elte Eötvös kiadó, 2007

[3] Szőnyi Tamás, Bérczi Gergely, Gács András, Hraskó András, *Reguláris gráfok*, *Új matematikai mozaik*, Typotex, 2002

[4] Szőnyi Tamás, *Szimmetrikus struktúrák*, http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/_SZONYI_Szimm_strukt.pdf

[5] Tamás Héger, Péter Sziklai , *Linear algebraic methods in graph theory*

[6] Rózsa Pál, *Lineáris algebra és alkalmazásai* , Tankönyvkiadó, Budapest 1991

[7] Kiss Emil *Bevezetés az algebrába*, Typotex, 2007

[8] Martin Aigner, Günter M. Ziegler *Bizonyítások a könyvből*, Typotex, 2004

[9] http://www.math.harvard.edu/library/sternberg/slides/1180912pf.pdf