Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Antal Ádám

Választási játékok

BSc alkalmazott matematikus szakdolgozat

Témavezető:

Jankó Zsuzsanna

Operációkutatás Tanszék

Budapest, 2016

Köszönetnyilvánítás

Legelőször szeretném megköszönni témavezetőmnek, Jankó Zsuzsannának, aki folyamatosan segített az év során, támogatott, valamint meglátásaival, ötleteivel, LaTeX-beli segítségével nagyban hozzájárult a szakdolgozatomhoz.

Nagyon köszönöm családomnak, akik támaszt nyújtottak, és lelkesítettek a munkában.

Külön köszönettel tartozom Bodó Alexandrának a sok megjegyzésért, konstruktív kritikáért hogy a dolgozat elnyerje végső formáját.

Megköszönöm ezenkívül barátaim türelmét, főképpen Somogyi Rolandét, és Náray Miklósét, akik gyakran hallgatták lelkesedésem a téma iránt.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A választáselmélet egy tág, szavazásokat és ahhoz kapcsolódó jelenségeket vizsgáló résztepület, mely a játékelmélethez, azon belül pedig a mechanizmustervezéshez tartozik. Mint azt látni fogjuk, sok érdekességet rejt, a gyakorlati felhasználása pedig igen széleskörű. Ami leginkább a témánkhoz kötődik az nem a parlamenti vagy az arányos választási rendszerek lesznek, noha figyelembe kell vennünk, hogy ezek az elméletet erősen ösztönzik. Főleg az elméleti háttér kerül a középpontba: milyen szempontokat vehetünk figyelembe, valamint tervezéskor milyen feltételeket jelöljünk ki ezek közül, hogy teljesüljön. Mindeközben kevésbé hangsúlyosan vesszük figyelembe a társadalomtudományi oldalát a témának, mivel célunk a természettudományok irányából közelíteni, hogy megismerjük az összefüggéseket.

Történelmi távlatokban elhelyezve a választás elmélete mindig is foglalkoztatta az embereket, de csak a XX. században kezdték el vizsgálni mélyebb tudományos eszközökkel. Mivel minden politikai rendszernek része, így különös, hogy miért csak ilyen későn tették fel a szavazáselmélet nagyobb kérdéseit, ami iránt mi is érdeklődünk. Legkorábbi írásos munka Nicolas de Condorcet nevéhez fűződik, aki már a XVIII. században fogalmazott meg állításokat. A klasszikus eredmények a XX. század első felében születtek, de mind a mai napig jelennek meg új szavazáselméleti cikkek.

A 2. fejezetben precízen bevezetjük, mit értünk választási rendszer alatt, sok tulajdonságot sorolunk fel, amikkel elemezhetjük ezeket, és néhány egyszerűbb állítást foglmazunk meg és bizonyítunk.

A 3. fejezetben a nagyobb eredményeket vesszük sorba: a May, a Campbell-Kelly, az Arrow, és a Gibbard-Satterhwaite-tételek mind egy-egy súlyos állítást hordoznak, melyek következményei döntően befolyásolják a témát, és meghúzzák a voksolások határait.

A 4. fejezetben sok gyakorlatban alkalmazott választási rendszert nézünk, amiket elemzünk a 2. fejezet eszközeivel, és levonjuk a következtetéseket. Az utolsó alfejezetében a 3. fejezetben megfogalmazott állításokat egészítjük ki, és nézünk példákat illetve ellenpéldákat.

A 5. fejezet kitekintés, amiben a szavazóerő fogalmának szempontjából vizsgáljuk a választásokat. Egy külön fejezetben foglalkozunk vele, mert más meggondolások szolgálnak a hozzáállás alapjául, mint a 2. fejezetben.

2. fejezet

Választási játékok

2.1. Bevezetés

A kooperatív játékokkal kapcsolatos bevezetés alapjául Solymosi jegyzete szolgált. [7]

A játékosok halmaza legyen egy nemüres, véges halmaz, amit N-nel fogunk jelölni. Elemeit megszámozzuk, azaz: $N = \{1, 2, \ldots n\}$.

2.1.1. Definíció. Játékosok egy halmazát *koalíció*nak hívjuk.

Speciálisan N-et nagykoalíciónak, $\varnothing$-t pedig üres koalíciónak. Megengedjük, hogy a játékosok bármely társulása létrejöjjön. A nemüres koalíciók halmazát $\mathcal{N}$-nel fogjuk jelölni, így $\mathcal{N} = 2^N \backslash \{\varnothing\}$.

A modell megadásához kell még, hogy megadjuk egy S koalíció kimeneteleinek halmazát. Számítsába vehetjük akár a koalíciót alkotó emberek együttműködésének minőségét is, viszont mi alapvetően csak a koalíció meglétére szorítkozunk, és ehhez egy olyan értéket rendelünk, amit a koalíció tagjai a legjobb esetben együttműködve el tudnak érni. Definiálhatunk még a játékosokhoz különböző U_i hasznossági függvényeket. Ezzel mi nem foglalkozunk, viszont fontos megemlíteni, hogy a modell mögött húzódnak az egyes játékosok döntésének okai. Az i játékos a és b helyzet közül az a-t fogja választani, ha $U_i(a) > U_i(b)$. Tehát feltesszük, hogy minden játékos eldönti, hogy számára mi az alkalmasabb, anélkül, hogy a hasznossági függvényt definiálnánk.

A koalíciókon alapuló játékok attól függően, hogy a különböző hasznosságok a játékosok között átválthatók-e vagy nem, beszélhetünk NTU (*non transferable utility*) és TU (*transferable utility*) játékokról. Utóbbival fogunk foglalkozni, így azt pontosan definiáljuk.

2.1.2. Definíció. (N, v) pár TU-játék, ahol N a szavazók (játékosok) halmaza, valamint a $v : 2^N \to \mathbb{R}$ ún. koalíciós függvény, amire kikötjük hogy $v(\varnothing) = 0$.

A továbbiakban játék alatt TU-játékot fogunk érteni.

A koalíciós függvény minden $S \subseteq N$ koalícióra megadja az értékét annak a maximális hasznosságnak, amit a koalíció tagjai el tudnak érni $N \backslash S$-től függetlenül. Jelöljük $\mathcal{G}^N$-nel az N játékoshalmazon értelmezett koalíciós függvények halmazát. A koalíciós függvény skálája önkényes, nekünk csak a relatív sorrend számít. Ez indokolja a következő definíciót:

2.1.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (N, v) játék *stratégiailag ekvivalens* az (N, w) játékkal, ha $\exists \alpha > 0$ és $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ számok, hogy $w(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$ $\forall S \in \mathcal{N}$-re teljesül.

2.1.4. Állítás. *A stratégiai ekvivalencia ekvivalenciarelációt definiál a $\mathcal{G}^N$ halmazon.*

A bevezetésben foglalt állításokat bizonyítás nélkül közöljük.

2.1.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy (N, v) játék:

- additív, ha $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ $\forall S \in \mathcal{N}$-re.
- szuperadditív, ha $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ ahol $S, T \subseteq N$ és $S \cap T = \varnothing$

Additív játékokkal olyan helyzetek modellezhetők, ahol a játékosok semmilyen együttműködése nem tudja növelni a hasznukat. Tetszőleges koalíció v általi értékét egyértelműen definiálja a v-nek az adott szavazókon, mint egyelemű koalíción felvett értéke.

Szuperadditív játékok ezzel szemben pont olyan helyzeteket demonstrál jól, amelyek esetében akár két játékos összefogása is növeli a közös értéküket. Elsősorban a szuperadditív játékokkal fogunk foglalkozni.

2.1.6. Állítás. *Az additív, és szuperadditív játékok halmaza külön-külön zárt a stratégiai ekvivalenciára nézve.*

2.1.7. Állítás. *Egy (N, v) játék pontosa akkor szuperadditív, ha $\forall S \in \mathcal{N}$-re és az S bármely $\mathcal{T}$ partíciónálására nézve $v(S) \geq \sum_{T \in \mathcal{T}} v(T)$ igaz.*

2.1.8. Definíció. Az (N, v) játék:

- monoton, ha $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$ $\forall S, T \in \mathcal{N}$-re;
- 0-monoton, ha $S \subseteq T \Rightarrow v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(\{i\}) \leq v(T)$ $\forall S, T \in \mathcal{N}$-re;
- szimmetrikus, ha $|S| = |T| \Rightarrow v(S) = v(T)$ $\forall S, T \in \mathcal{N}$-re;
- egyszerű, ha $v(N) = 1$, és $v(S) \in \{0, 1\}$ $\forall S \in \mathcal{N}$-re.

2.1.9. Állítás. *Ha egy (N, v) nemnegatív játék (v értéke nemnegatív) szuperadditív, akkor monoton.*

Bizonyítás. Ha egy tetszőleges T halmaz előáll egy S és egy $T \setminus S$ diszjunkt halmaz uniójaként, akkor a szuperadditivitás miatt:

$$v(T) \geq v(S) + v(T \setminus S) \geq v(S)$$

illetve mivel v nemnegatív, alulról becsülünk. Tehát tetszőleges $S \subset T$-re $v(S) \leq v(T)$, azaz v monoton. $\square$

2.1.10. Állítás. *A következők teljesülnek:*

- *A 0-monoton játékok halmaza zárt a stratégiai ekvivalenciára.*
- *Tetszőleges játék stratégiailag ekvivalens egy monoton játékkal, tehát a monoton játékok halmaza nem zárt erre az ekvivalenciára nézve.*
- *Minden szuperadditív játék 0-monoton.*
- *Minden nemnegatív szuperadditív játék monoton.*

Most definiáljuk a témánkat érintő játékcsaládot:

2.1.11. Definíció. (N, v) pár egy választási játék, ha egyszerű, szuperadditív TU-játék.

Az 1 és 0 értékekre a továbbiakban győzelemként, illetve vereségként fogunk hivatkozni.

2.1.12. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy koalíció *győző*, ha a tagjai igent szavaznak, akkor az lesz a választás kimenetele is.
A győző koalíciók halmazát $\mathcal{W}$-vel jelöljük. Formálisan:

$$\mathcal{W} = \{S | S \subseteq N, v(S) = 1\}$$

Hasonlóan definiálhatjuk a *blokkoló* vagy *vesztő* koalíciót is: ha a tagjai nemet szavaznak, akkor az lesz a választás kimenetele is.

2.1.13. Következmény. $S \subset T$

$$S \text{ győző} \Rightarrow T \text{ győző}$$

$$S \text{ vesztő} \Rightarrow T \text{ vesztő}$$

2.1.14. Definíció. Egy szavazót *kritikus szavazó*nak nevezzük egy győző vagy vesztő koalícióra nézve, ha döntésének megváltoztatásával a választás kimenetele is megváltozik, feltéve, hogy a koalíció még mindig ugyanúgy szavaz a kritikus szavazó kivételével. Azaz:

$$i \text{ kritikus } S\text{-ben} \Leftrightarrow S \in \mathcal{W}, S \backslash \{i\} \notin \mathcal{W}$$

2.1.15. Definíció. Egy szavazó *nullszavazó*, ha sosem kritikus.

2.1.16. Definíció. *Minimális győző (vesztő) koalíciónak* nevezzük azt a győző (vesztő) koalíciót, amelynek minden tagja kritikus szavazó. A minimális győző koalíciók halmazát $\mathcal{M}$-el jelölve:

$$\mathcal{M} = \{S | S \in \mathcal{W}, \forall i \in S : S \backslash \{i\} \notin \mathcal{W}\}$$

2.1.17. Állítás. *A győzelmi koalíciók száma, amiben egy adott játékos kritikus megegyezik a vesztő koalíciók számával, amiben szintén kritikus az adott szavazó.*

Bizonyítás. Legyen $S \ni i$-t tartalmazó koalíció. Jelöljük T-vel $N \setminus S$-t. Ha S győző koalíció, és i kritikus szavazója, akkor ha i megváltoztatja döntését, akkor a végeredmény is megváltozik, így $T \cup \{i\}$ vesztő koalíció.
Megfordítva, ha S vesztő koalíció, és i kritikus szavazó, akkor ha i döntésének megváltoztatásával, a végeredmény igen lesz, így $T \cup \{i\}$ győző koalíció.
Ezáltal létesítettünk egy bijekciót a győző és vesztő koalíciók között, amiben i kritikus. □

2.1.18. Definíció. *Sebezhetetlen* a koalíció, ha nincs kritikus tagja.

2.2. Tulajdonságok

Legyen A véges, különböző alternatívák halmaza, és legyen L az A-n megadható összes lehetséges rendezés. Az i. szavazó preferenciáit az $\prec_i \in L$ rendezés adja meg, azaz $a \succ_i b$, ha az i szavazó a-t előbbre rangsorolja b-nél. [19] [15]

2.2.1. Definíció. Az $F : L^N \to L$ függvényt *közjóléti függvénynek* (szavazatösszegző függvénynek, vagy social welfare function, SWF) nevezzük.

A közjóléti függvény n szavazó sorrendjéből állít elő egy végső sorrendet.

2.2.2. Definíció. A $G : L^N \to A$ függvényt *voksolási függvénynek* (social choice function, SCF) nevezzük.

Ez nem összekeverendő a szavazatösszegző függvénnyel. Fontos különbség, hogy míg a közjóléti függvény teljes rendezést ad, addig a voksolási függvény, ennél kevesebbet: csak egy győztest. A továbbiakban *választási rendszernek* fogjuk hívni ezt a kategóriát együttvéve. A választási rendszerre kimondott állítások és tételek a közjóléti és a voksolási is függvényre is igazak, feltéve, hogy teljesülnek a követelmények mindkét típusra.

2.2.3. Definíció. Az n szavazó által adott rendezések vektorát: $\pi = (\prec_1, \prec_2, \ldots, \prec_n)$-t *választási profilnak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy π és $\pi' = (\prec'_1, \prec'_2, \ldots, \prec'_n)$ azonosan rendezik az $a, b \in A$ lehetőségeket, ha $\forall i \in N : a \prec_i b \Leftrightarrow a \prec'_i b$

2.2.4. Megjegyzés. Egyes helyeken a voksolási függvényt nem az A, hanem 2^A halmazba való leképezésként definiálják. [2] Így akár több győztest is kijelölhet a voksfüggvény. Speciális esetben feltehetjük, hogy egyértékű, azaz minden profilra egyelemű részhalmazát adja ki az alternatíváknak.

A voksolási függvényekkel kapcsolatban definiáljunk először néhány egyszerű, ésszerű feltételt:

2.2.5. Definíció. A G voksolási függvény *anonim*, ha a választók felcserélhetőek, de ugyanazt az az alternatívát hozza ki eredményül. Azaz, ha valamely $l \in L^N$-re, és $a \in A$-ra $G(l) = a$, akkor tetszőleges π permutációra, ami az L^N-beli l vektor elemeit cseréli meg: $G(\pi(l)) = a$.

Az anonimitás praktikus feltétel, ha azt szeretnénk, hogy a voksolás a játékosok szempontjából "igazságos" legyen. A választók megcserélése esetén, nem számít, milyen címkével látjuk el az adott szavazót, a győztes nem számít a preferenciák sorrendjétől, csak maguktól a preferenciáktól. Alább található egy gyengébb változata az feltételnek:

2.2.6. Definíció. *Diktátornak* nevezzük az i. szavazót, ha egyedül meghatározza a szavazás kimenetelét, azaz adott $l \in L^N$ rendezésvektorra, ha $\forall b \in A \backslash \{a\}$-ra $a \succ_i b$, akkor $G(l) = a$. Ha létezik ilyen szavazó, akkor *diktatúrának* nevezzük a rendszert, ha pedig nem, akkor *diktátormentesnek*.

Amint később látni fogjuk, sok tulajdonság között fennállnak összefüggések, például ha elvárjuk, hogy egy rendszer diktátormentes legyen, akkor más, ésszerű tulajdonságok nem teljesülhetnek (3.3.1 tétel). Triviális, hogy diktatórikus voksolási függvény nem lehet anonim, így az anonimitás gyengébb tulajdonság.

2.2.7. Definíció. Egy G voksolási függvény *neutrális*, ha az alternatívák megcserélhetőek, azaz tetszőleges $\pi : A \to A$ permutációra, ha valamely $l \in L^N$-ből az l_i-kben rendezett alternatívákra alkalmazzuk π-t, (ezt nevezzük $\widetilde{l}$-nek), akkor $G(\widetilde{l}) = \pi(a)$, ha eredetileg $G(l) = a$.

2.2.8. Definíció. Egy szavazatösszegző függvény *egyhangú*, hogy ha minden szavazó A-t előrébb helyezi, mint B-t, akkor a végső sorrendben is A előrébb áll, mint B.

2.2.9. Definíció. Egy választási függvény *Pareto-hatékony*, ha egy profilra sem ad olyan eredményt a választás, amely egy vagy több játékos számára szigorúan jobb, míg a többi játékosnak nem rosszabb.

2.2.10. Állítás. *Ha egy választási rendszer Pareto-hatékony, akkor egyhangú.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy közjóléti függvény Pareto-hatékony, de nem egyhangú. Ekkor létezik ellenpélda az egyhangúságra: vegyünk olyan P profilt, amelyben mindenkinek $A > B$ a preferenciája, de a végső sorrendben $B > A$ áll. Ekkor cseréljük meg a végeredményben A-t és B-t, így egy olyan végeredményt kapunk, amit szigorúan jobb a játékosoknak. $\square$

Ha a voksolási függvényt a korábbi, 2.2.4 megjegyzés szerint definiáljuk (több győztes), akkor a következő tételt kapjuk:

2.2.11. Tétel. (Moulin) *[14] Legyen az m az A alternatívák halmazának elemszáma, és n a szavazók száma. Ha van olyan $1 < r \leq m$, hogy $r|n$, akkor nem létezik ilyen paraméterekkel neutrális, anonim, és Pareto-hatékony voksolási függvény, ami pontosan egyértékű.*

Ezt a tételt nem bizonyítjuk.

2.2.12. Definíció. Egy közjóléti függvényre teljesül a *lényegtelen alternatíváktól való függetlenség* feltétele, hogy ha az összegzésben A előrébb került, mint B, akkor még ha a választók módosítják is a döntésüket A és B relatív helyzetét meghagyva (tehát aki idáig A-t preferálta B-nél, az meghagyja ezt a sorrendet, és fordítva), akkor a módosított választás is A-t előrébb rangsorolja, mint B-t.

Sokszor csak IIA-ként (Independence of Irrelevant Alternatives) hivatkozunk erre a feltételre.

2.2.13. Állítás. *Ha egy választási rendszer egyhangú és teljesül az IIA, akkor neutrális.*

Ezt az állítást nem bizonyítjuk.

2.2.14. Definíció. *Monotonnak* nevezünk egy szavazatösszegző függvényt, ha a szavazatösszegzés után egy A jelölt helyzete vagy nem módosul, vagy előrébb kerül, ha egy vagy több szavazó A-t a sorrendjében előrébb helyezte. *Szigorúan monoton*, ha ténylegesen előrébb kerül.

Nézzünk egy összefüggést ezen tulajdonságok között:

2.2.15. Állítás. *A monotonitás és a lényegtelen alternatíváktól való függetlenség feltételéből következik az egyhangúság.*

Bizonyítás. Indirekt feltesszük, hogy a rendszer nem egyhangú, de teljesülnek rá a feltételek. Mivel nem egyhangú, ezért létezik ellenpélda, azaz olyan eset, amikor minden szavazó A-t előrébb sorolja B-nél, de a szavazatösszesítés B-t előrébb sorolja A-nál.

Változtassuk meg a szavazatokat akképpen, hogy B sorszámát növeljük meg a szavazók listáján addig, amíg A elé nem kerül. A monotonitás miatt, mivel B helyezését növeltük a szavazatokban, így az összesítés után is csak előrébb kerülhet, így B még mindig A előtt lesz az összesítésben.

Most fogjuk A-t és csökkentsük a sorszámát, B eredeti helyére téve. Az IIA feltétel miatt, mivel a relatív sorrendek megmaradtak, $B > A$ igaz lesz továbbra is. Viszont az eredeti szavazatokban A-t és B-t kicseréltük, így ugyanazt kapjuk, ha a végeredményben A-t helyettesítjük B-vel (és fordítva). Ekkor $A > B$ teljesül, ami ellentmondás. $\square$

2.2.16. Definíció. A jelölteket egy az egy ellen mérkőztetjük. Ha létezik ezek közül olyan jelölt, aki minden másik jelölt ellen nyert ezekben a futamokban, akkor őt *Condorcet győztesnek* nevezzük.

2.2.17. Definíció. Azt mondjuk, hogy teljesül *Condorcet kritériuma* (Condorcet-kiterjesztés vagy Condorcet-konzisztens) egy választási rendszerre, ha mindig a Condorcet győztest jelöli ki győztesnek, amennyiben létezik. Egy közjóléti függvény *Condorcet-hatékonysága* az a valószínűség, hogy a Condorcet-jelölt kerül ki győztesen, amennyiben létezik ilyen.

A Condorcet-hatékonyság Condorcet rendszerek esetében triviálisan 1, míg nem ilyen rendszerek esetében szigorúan kisebb. Szintén Condorcet-ről elnevezett kritérium, de az előzőtől független:

2.2.18. Definíció. *Condorcet vesztő kritériuma* azt mondja ki, hogy Condorcet vesztes soha nem lehet győztese egy választásnak. Condorcet vesztesnek nevezzük azt a jelöltet, akit mindenki más legyőz egy az egy elleni külön szavazásokban.

2.2.19. Definíció. *Többségi kritérium* azt mondja ki, hogy ha egy jelölt a szavazatok legalább felét megszerezte, akkor ő lesz a győztes.

2.2.20. Definíció. Egy voksolási függvény *klónfüggetlen*, ha egy alternatíva helyett sok másik ún. *klón* alternatívát hozzáadva az A alternatívák halmazába nem változik meg az eredmény.

Utóbbi definíciót legkönnyebben egy példán keresztül érthetjük meg. Sok esetben a választás rendszerén keresztül éri manipuláció a meghozandó döntést, mint például ha az emberek nagy része elfogadna egy alternatívát, akkor ha ehelyett több hasonló alternatívát ajánlunk fel nekik, ezek a szavazatok szétosztódhatnak az alternatívák között. Például egy abszolút többségi szavazás erősen ki van téve az ilyenfajta manipulációnak, és ennek ellenére az az egyik leggyakrabban alkalmazott rendszer (ld. 4.3.7 példa). Nem klónfüggetlen rendszer tehát hasonló (vagy akár ugyanolyan) alternatívák között különbséget tesz. [18]

2.2.21. Definíció. *Részvételi kritérium* azt mondja ki, hogy egy adott szavazatok b halmazához hozzáveszünk még egyet úgy, hogy arra a szavazatra $A > B$ teljesül, akkor a győztes nem változhat A-ról B-re.

A kritérium neve (*participation criterium*) onnan ered, hogy amennyiben egy közjóléti függvény nem teljesíti ezt, előállhat olyan eset, hogy egy szavazó azzal juttatja előre az ő általa preferált jelöltet, ha távolmarad a szavazástól, ahelyett, hogy rá adna le egy szavazatot. Ismert még a *no-show paradox* kifejezés is erre a jelenségre.

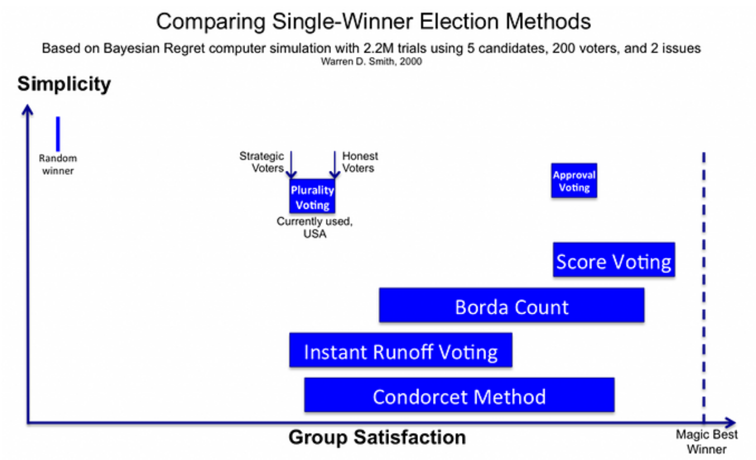
Egy egyszerű példa a többségi szavazás, ahol megszabhatják például, hogy a szavazók legalább 50%-a részt kell hogy vegyen a szavazáson. Ekkor ha mondjuk a szavazók minősített többsége támogat egy jelöltet, akkor az őt nem támogatók jobban járnak, ha nem szavaznak (így nem érik el ugyanis az érvényességi küszöböt), minthogy szavazzanak, és ezzel érvényessé tegyék az általuk nem preferált jelölt győzelmét.

2.2.22. Definíció. Voksolási függvény *konzisztens*, hogy ha a választókat két diszjunkt, S és T halmazba sorolva külön-külön folytatnánk le a szavazást, és ugyanazt az eredményt kapnánk, akkor a választást $S \cup T$-re megismételve szintén ezt a győztest kapjuk.

2.3. Egyéb tulajdonságok

A választási játékok témakörében még más egyéb tulajdonságok is fontosak lehetnek, ilyen például a *polinomiális időben* való kiszámítása az eredménynek. Mint azt később látni fogjuk, vannak olyan rendszerek, amelyek tulajdnoságai előnyösebbé teszik másokkal szemben, viszont a gyakorlatban (például akár már 10 alternatívát tartalmazó esetben is) használhatatlanok. A polinomialitásra a rendszerek tárgyalásánál nem, csak a 4.3 alfejezetben térünk ki.

Szubjektívabb ötlet a választási rendszereket a választók *elégedettsége* alapján összehasonlítani. Ezen témakör kapcsolódik a társadalomtudományokhoz, valamint erősen kötődik a modellhez, ahogyan az elégedettséget mérjük. Példaként egy statisztikai alapokon nyugvó hozzáállást mutat a következő ábra,de kiemeljük, hogy a megadott paramétereken belül értelmezzük az eredményt, valamint itt a teljesség igénye nélkül hasonlítottak össze néhányat a választási rendszerek közül. [16]



A *választóerő* legegyenletesebb eloszlása is fontos szempont lehet. Erről bővebben az 5. fejezetben olvashatunk, de fontos itt is megemlíteni, hogy a választóerő sok választási rendszerben egy koalíció kezében összepontosulhat, és például a nem anonim rendszerek esetében számít, hogy melyik szavazó melyik.

2.4. Alappéldák

Miután a különféle választási rendszereket néznénk meg, tekintsük a következő alappéldákat. Ezekből a játékokból indulunk ki, és használjuk majd az utána következő klasszikus eredményekhez.

2.4.1. Példa. (Egyszerű többségi szavazás) A szavazók N halmazának egy igen/nem döntést kell hoznia, úgyhogy mindenki szavazata egyet ér. Egyszerű többségi elvet használunk, azaz a szavazatok több mint felének igennek kell lennie. Továbbra is 1 jelenti az elfogadást, 0 az elutasítást. Ekkor tetszőleges $S \subseteq N$-re:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| < |N|/2 \\ 1, & \text{ha } |S| \geq |N|/2 \end{cases}$$

Ez a példa finomítható, mégpedig több ponton is. Előfordulhat hogy arra van szükségünk, hogy a szavazóknak ne ugyanannyit érjen a szavuk, tehát súlyozzuk őket:

2.4.2. Példa. (Súlyozott többségi szavazás) $G = (N, (w_i)_{i \in N}, q)$, ahol N az n szavazó halmaza, akiknek $w_1, w_2, \ldots w_n > 0$ mennyiségű szavazatuk van. Kvótának nevezzük a q-t, ennyi szavazat kell, hogy egy koalíció eltudja dönteni a kimenetelét egy választásnak, valamint $w = \sum_{i=1}^{n} w_i$ jelöléssel $w \geq q > w/2$ teljesül.

A súlyozott választási játék is egyszerű választási játék, ahol $S \subseteq N$-re:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sum_{i \in S} w_i \geq q \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

A konstans egy súlyozással, és az $|N|/2$ kvótával kapjuk a súlyozatlan esetet. Sokszor bonyolultabban választjuk ki a végeredményt, mint hogy összeszámláljuk a szavazatokat, valamint több válaszlehetőség közül is akarunk választani. Ezekre az általánosabb esetekre mutatunk majd később néhány példát.

A súlyozott többségi szavazásokat, mint játékokat gyakran egyszerűbb jelöléssel használjuk: egy vektorba soroljuk fel a következő paramétereket: első számként a kvótát, majd utána csökkenő sorrendben a súlyokat. Így pl. az egyszerű többségi szavazás 5 emberre a $[3|1,1,1,1,1]$ játék.

2.4.3. Példa. (Páronkénti játszmák) A Páronkénti játszmák azt a jelöltet nyeri meg győztesként, aki mindegyik más jelöltet megver egy az egy elleni játszmákban. Ez például megvalósulhat úgy, hogy mindenki sorrendbe állítja a jelölteket, és ha két tetszőleges x és y jelöltet nézünk meg, eldöntjük, hogy azon szavazókból van-e több, akik $x > y$-ként, vagy fordítva rendezték a két kiválasztott alternatívát. Látható, hogy a páronkénti játszmákból a Condorcet-győztes kerül ki győztesen, amennyiben létezik.

Angolul *Pairwise Majority Rule*-ként (PMR) emlegetik, és csak a Condorcet győztessel rendelkező profilokon definiáljuk.

3. fejezet

Fontosabb eredmények

3.1. May-tétel

3.1.1. Tétel. (May) *[13] Két alternatíva, és páratlan számú választó esetén az egyszerű többségi szavazás az egyetlen anonim, neutrális, és monoton voksolási függvény. Két alternatíva és tetszőleges számú szavazóra pedig ez az egyetlen anonim, neutrális, és szigorúan monoton voksolási függvény, ami viszont megenged döntetlent.*

Bizonyítás. Az egyszerű többségi szavazás triviálisan kielégíti ezeket a feltétleket.
Az egyértelműséget indirekt bizonyítjuk, tegyük fel, hogy van olyan voksolási függvény, ami nem egyszerű többségi. Ekkor vegyünk egy ilyen rendszert, és tekintsük egy olyan profilban, amiben az x jelölt nyer, noha a másik, y jelöltnél kevesebb szavazata van. Ilyen létezik, hiszen nem minden rendszer egyszerű többségi. Ekkor adjunk x-nek át annyi szavazatot y-tól, hogy pontosan forduljon meg a sorrend. Ekkor a monotonitás miatt x még mindig nyer, de a neutralitás és az anonimitás feltétele miatt y-nak kéne nyernie.
Hasolóan bizonyítható az az eset is, amikor y és x holtversenyben vannak. □

A May tétel gyakorlatilag azt a benyomásunkat erősíti meg, hogy két alternatíva közül egyszerűen választhatjuk azt, amire többen szavaznak. Ha több alternatívát adunk a választáshoz, amint látni fogjuk, jócskán bonyolítja a helyzetet, és sajnos negatív eredményt fogunk kapni.

3.2. Condorcet rendszerek

3.2.1. Definíció. Legyen $\mathcal{D}_{Condorcet} \subset L^N$ halmaz azon profilok halmaza, amelyekben létezik Condorcet-győztes.

A következő tulajdonságokat a tételhez fogjuk használni:

3.2.2. Definíció. Egy G voksolási függvény *erősen monoton*, ha egy P profilt úgy módosítunk P'-re, hogy egy szavazó $\leq_i$ preferenciáját $\leq'_i$-re cserélve: $\forall y : G(P) \geq_i y \Rightarrow G(P') \geq'_i y$ teljesül, akkor $G(P) = G(P')$

3.2.3. Definíció. Egy G voksolási függvény *lefelé monoton*, ha egy P profilt úgy módosítunk P'-re, hogy egy szavazó $\leq_i$ preferenciáját $\leq_i'$-ra úgy cseréljük, hogy egy $G(P) = b$-től különböző alternatíva helyzését csökkentjük, akkor a győztes nem változik: $G(P) = G(P')$.

3.2.4. Definíció. Egy G voksolási függvény *monoton*, ha egy P profilt úgy módosítunk P'-re, hogy egy szavazó $\leq_i$ preferenciáját $\leq_i'$-ra úgy cseréljük, hogy egy a győző alternatívát előrébb soroljuk, akkor a győztes nem változik: $G(P) = G(P')$.

Megjegyzendő, hogy közjóléti függvényekre másképp definiáltuk a monotonitást.

3.2.5. Lemma. *[2] Az alábbi következtetés fennáll a voksolási függvényekre: Taktikázásbiztos $\Rightarrow$ erős monoton $\Leftrightarrow$ lefelé monoton $\Rightarrow$ monoton.*

Bizonyítás. Az első következtetéshez tegyük fel, hogy nem manipulálható a szavazás, de nem erősen monoton. Vegyük a következő hozzárendelést: $<_i \rightarrow <_i'$, mely előrébb helyezi a győztes a alternatívát úgy, hogy a veszít, és b nyer. (Ilyen hozzárendelés létezik, mivel nem teljesül az erős monotonitás). Ha $b >_i a$, akkor a szavazó jobban jár, ha a nem őszinte $<_i'$ preferencia szerint szavaz (ezzel b nyer). Ha pedig $a >_i b$ teljesül, akkor az eredeti, $<_i'$ helyett jobban jár a $<_i$ prefereniával. Ezzel ellentmondva a taktikázásbizotsságnak.

Az ekvivalenciához azt kell látni, hogy bármely módosítás, amit a lefelé monotonitás megenged, azzal kihozható olyan P' profil, amit az erős monotonitásban feltettünk. Ez visszafelé is igaz, hiszen ha egy nem győző alternatívát a sorrendbe lejjebb helyezve teljesül az erős monotonitás feltétele.

Az utolsó következtetés pedig szintén egyszerűen látszik, hiszen ha egy nem győző alternatívát hátrébb sorolunk, akkor továbbra sem nyer, ami a voksolási függvények monotonitási tulajdonsága. $\square$

3.2.6. Lemma. *Az A alternatívák halmaza álljon az $a, b, c_1, c_2, \dots c_{m-2}$ lehetőségekből, ahol $m \geq 3$, és legyen F lefelé monoton voksolási függvény, ami A-ba hat. Legyen P egy profil, amelyre $f(P) = a$. Ekkor létezik olyan P^* profil, amelyre $f(P^*) = a$, és:*

- *$\forall i$-re ahol $a >_i b$, $>_i^* = a > b > c_1 > \dots > c_{n-2}$ és*
- *$\forall i$-re ahol $b >_i a$, $>_i^* = b > a > c_1 > \dots > c_{n-2}$.*

Bizonyítás. Figyeljük P szavazóit, és tegyük a rendezésük legaljára c_1-t, és ezt végezzük el az összes szavazóra. Ezt ismételjük meg minden c_i-re. Ekkor a rendezés pont úgy néz ki, mint ahogy azt fent definiáltuk, továbbá a lefelé monotonitás miatt $f(P^*) = a$. $\square$

3.2.7. Tétel. (Campbell-Kelly) *[3] Tekintsük az összes $G : \mathcal{D}_{Condorcet} \rightarrow A$ voksolási függvényt, ahol az alternatívák száma legalább három. A Páronkénti játszmák anonim, neutrális és taktikázásbiztos, és páratlan sok szavazó esetén az egyetlen ilyen.*

Bizonyítás. Amennyiben létezik Condorcet-győztes, a rendszer őt fogja kihozni nyertesnek, így a PMR anonim és neutrális. Hogy lássuk, hogy taktikázásbiztos, nézzük az i. szavazó (őszinte) szavazatát: ebben $y >_i x$, ahol x a Condorcet-győztes. Ha egy megváltoztatott szavazatot ad le, nem tudja módosítani x és y közötti meccs kimenetelét (hiszen ő már y-t segítette), így x biztosan legyőzi y-t, és y nem lehet Condorcet-győztest.

Az egyértelműséghez ismét indirekt jutunk el. Tekintsünk a G neutrális, anonim és taktikázásbiztos voksfüggvényt, ami a $\mathcal{D}_{Condorcet}$ felett van értelmezve. Ha $G \neq PMR$, akkor legyen $P \in \mathcal{D}_{Condorcet}$ tetszőleges profil, aminek Condorcet-győztese b. Ekkor fennáll: $b \neq a = G(P)$.

Mivel G taktikázásbiztos, emiatt lefelé monoton (3.2.5 lemma). Alkalmazhatjuk ekkor a 3.2.6 lemmát P-re, így kapva P^*-ot ($P^* \in \mathcal{D}_{Condorcet}$ és $G(P^*) = a$). Így:

- $\forall i$-re ahol $a >_i b$, $>_i^* = a > b > c_1 > \cdots > c_{n-2}$ és
- $\forall i$-re ahol $b >_i a$, $>_i^* = b > a > c_1 > \cdots > c_{n-2}$.

Mivel b volt eredetileg a Condorcet győztes, és a és b relatív helyzetei megmaradtak, ezért több $b >_i^* a$ szavazat van, mint amennyi $a >_i^* b$. Egyesével cseréljük meg a és b helyzetét a $b >_i^* a$-képp rendező szavazatokban, amíg nem lesz annyi $b >_i^* a$ szavazat, mint amennyi $a >_i^* b$ eredetileg volt. Mivel n páratlan, a profil $\mathcal{D}_{Condorcet}$ halmazban marad. A monotonitás miatt még mindig a nyer, viszont a és b helyzetét megcseréltük, így a neutraitás és anonimitás miatt b-nek kéne nyernie. Ellentmondásra jutottunk, azaz a Páronkénti játszma valóban az egyetlen ilyen típusú voksolási függvény. □

Láttuk tehát, hogy ez a (szűkített értelemben) legjobb kiterjesztése a kétalternatívás esetnek, viszont a Condorcet-rendszerekkel kapcsolatban negatív eredményeink is vannak:

3.2.8. Állítás. *Minden legalább három alternatívát tartalmazó Condorcet-típusú rendszer megsérti a konzisztencia kritérumát.*

3.2.9. Tétel. (Moulin (1988)) *Minden Condorcet-kiterjesztés megsérti a részvételi kritériumot.*

Nem kell feltétlenül Condorcet-kiterjesztésnek lenni a rendszernek, tekintsük a következő a tételt:

3.2.10. Tétel. *Legyen n elegendően nagy páratlan szám, és az alternatívák száma legyen legalább 4. Ha F neutrális, anonim $\mathcal{D}_{Condorcet}$ felett, akkor taktikailag manipulálható, vagy megsérti a konzisztencia kritériumát.*

3.3. Arrow-tétel

Tekintsük a következő, a diktatúrát jobban megvilágító tételt:

3.3.1. Tétel. (Arrow tétele) *[1] Ha az alternatívák száma legalább három, akkor nem létezik olyan teljes rendezést adó választási rendszer, amely egyszerre teljesítené a lényegtelen alternatívától való függetlenséget, a diktátormentességet, és az egyhangúságot.*

Bizonyítás. A tételt olyan formában fogjuk belátni, hogy feltesszük az IIA-t és az egyhangúságot, és igazoljuk, hogy ekkor a rendszer diktatúra. A tétel sokfajta bizonyítása közül Geanakoplosét ismertetjük, amihez használjuk először a következő lemmát: [8]

3.3.2. Lemma. (Extremális lemma) *[19] Ha egy választási rendszer kielégíti az IIA-t és az egyhangúságot, valamint ha a szavazók egy adott jelöltet vagy az első vagy az utolsó helyre tesznek, akkor a szavazatösszesítés után az adott jelölt vagy az első, vagy az utolsó helyre kerül.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy az A jelöltet mindenki első, vagy utolsó helyre sorolta, de léteznek olyan B és C jelöltek, hogy $B > A > C$. A lényegtelen alternatíváktól való függetlenség feltétele alapján A relatív pozíciója nem változik meg, ha minden szavazó megváltoztatja B és C helyzetét C-t előrébb téve a rendezésükben, mint B-t. Ekkor viszont minden szavazó C-t preferálja B-vel szemben, és így az egyhangúság miatt, $C > B$ a végső rendezésben is. Viszont a kiindulásunk az volt, hogy $B > A > C$, ebből $B > C$, és ez ellentmondás. □

Definiáljuk P_i választási profilok egy sorozatát. P_0 legyen az a profil, amiben mindenki egy adott C jelöltet utolsónak állít. P_i legyen az a profil, amiben az első i szavazó C-t első helyre rakja, míg a többi szavazó az utolsó helyre. P_i és P_{i+1} között az csak az i. szavazó sorrendje különbözik, aki az elsőről az utolsó helyre rakja C-t.

Az extremális lemmát használva a P_i profilokra azt kapjuk, hogy C vagy első, vagy utolsó helyen lesz a szavazatösszegzés után. A monotonitás miatt ekkor lesz egy olyan k szám, hogy P_i profilok $i < k$-ra az összegzés C-t utolsó helyre rakja, míg $i \geq k$ esetén pedig első helyre. Ekkor a k. szavazó dönti el ebben a profilban C helyét.

Most megmutatjuk, hogy a k. szavazó ebben a profilban bármelyik két jelölt közötti sorrendet eldöntheti. Legyen A és B két másik jelölt. Válasszuk ki az egyiket, ez legyen A. Konstrulájunk egy új profilt, P'-t amiben a k. szavazó $A > C > B$ rangsorolja a három jelöltet, és legyen a többi szavazónak a sorrendje tetszőleges úgy, hogy C-t az első vagy utolsó helyen hagyja, a korábbiaknak megfelelően. A független alternatíváktól való mentesség miatt a szavazatösszegzés A-t előrébb teszi, mint C-t, mivel A és C relatív helyzetei megegyeznek P_{k-1}-ben lévővel, ahol C utolsó helyre került. Hasonlóképpen $C > B$, mivel a relatív helyzetek megegyeznek a P_k-ban lévővel. Így $A > C > B$ lesz az eredmény, ha a k. szavazó $A > C > B$-t szavaz. Ez az indoklás ugyanígy igaz, ha a k. szavazó $B > C > A$-t szavaz, tehát a k. szavazó dönti el a B és A sorrendjét. Ez tetszőleges C-t nem tartalmazó párra igaz, tehát C-t nem tartalmazó párokra a k. szavazó el tudja dönteni.

De ez ugyanúgy elmondható, ha C helyett egy másik, mondjuk D-re alkalmazzuk ezt a gondolatmenetet. Legyen a j. az a szavazó, amelyik el tudja dönteni mindegyik, D-t nem tartalmazó párra, hogy mi legyen sorrendjük. Feltettük, hogy legalább három különböző jelöltre lehet szavazni, mondjuk most ezek legyenek az A, C és D. Ekkor ha $j \neq k$, akkor a k. szavazó nem tudja megváltoztatni A és C relatív helyzetét, viszont erre képes volt korábban, amikor a P_{j-1}-t és P_j-t hasonlítottuk össze. Tehát $j = k$, azaz a k. szavazó minden pár relatív helyzetét el tudja dönteni, azaz diktátor. □

3.4. Gibbard-Satterhwaite tétel

A. Gibbard és M. A. Satterthwaite egymástól függetlenül bizonyították ezt a tételt. [9] [17] Hasonlóan az Arrow-tételhez, ez is azt mondja, hogy a diktatúra az egyetlen feltételeknek megfelelő választási rendszer. Ebben az esetben viszont a manipulálhatóságot vizsgáljuk. A bizonyításhoz, valamint a tétel pontos kimondásához már korábban definiáltuk a szükséges tulajdonságokat, egy új jelölést vezetünk csak be.

3.4.1. Definíció. Legyen S szavazók egy halmaza. Azt mondjuk, hogy S gátolja B-t A-val szemben (jelölés: $A \succ_S B$), hogy ha minden S-beli szavazó A-t előrébb helyezi a sorrendjében, mint B-t, akkor B nem lesz megválasztva.

3.4.2. Tétel. (Gibbard-Satterthwaite) *Ha legalább három jelölt van, minden egyhangú és taktikázásbiztos választási rendszer diktatúra.*

Bizonyítás. [19] Könnyen látható, hogy $A \succ_S B$-hez elég mutatni egy olyan profilt, hogy ha S minden szavazója $A > B$-t szavaz, a többi szavazó mind $B > A$ sorrendet állít fel, akkor B nem kerül megválasztásra. (Hiszen a maradék szavazó szűkebb részhalmaza sem képes megválasztani B-t, ha az S-en kívüli összes szavazó nem tudta - az egyhangúság miatt.)

3.4.3. Állítás. *Legyen A, B és C három, egymástól különböző jelölt, és S legyen a szavazók olyan halmaza, hogy $A \succ_S B$ teljesül. Legyen $S = P \cup Q$, ahol P és Q diszjunkt halmazok. Ekkor vagy $A \succ_P C$ vagy $C \succ_Q B$ teljesül.*

Bizonyítás. Használva az állítást megelőző gondolatot elég egy speciális esetet néznünk. Tekintsük a profilt:

P	Q	R
A	C	B
B	A	C
C	B	A
⋮	⋮	⋮

Ahol A, B és C jelölteken kívül minden más jelöltet utánuk raktunk sorrendbe. Az egyhangúság miatt csak A, B és C közül kerülhet ki a győztes, de ezek közül is a feltettük, hogy $A \succ_S B$, így a korábbi megjegyzésünk miatt B nem lehet győztes.

Amennyiben A nyer, $A \succ_P C$, hiszen P minden szavazója $A > C$-t szavaz, míg a többiek fordítva rendezik, de nem C, hanem A győzött.

Fordítva: amennyiben C nyer, $C \succ_Q B$ teljesül hasonló gondolatmenettel. □

A következő lépés, hogy belátjuk, nincs szükség B-re, tetszőleges D-re $A \succ_S D$ és $D \succ_S B$ teljesülni fognak, ha $A \succ_S B$ valamely B-re. Az előző állítást használva $P = S$ választással következményként kapjuk ezt, ugyanis szavazók egy üres halmaza nem tud blokkolni egy jelöltet, így $A \succ_S D$ kell, hogy teljesüljön. Fordítva, ha P-t választjuk üres halmaznak, akkor $D \succ_S B$ igaz.

A blokkolás fordítva is működik, azaz $A \succ_S B$, akkor $B \succ_S A$. Mert ha pl. C egy tetszőleges harmadik jelölt, akkor előző lépésben leírtak miatt $A \succ_S C$ is igaz. Újra használva, most a másik szerepre: $B \succ_S C$, majd újra, ismét az első szerepre: $B \succ_S A$.

Diktátor halmaznak fogjuk nevezni minden olyan S halmazt, amelyre teljesül, hogy $A \succ_S B$, minden A-B párra. Belátjuk, hogy van egyelemű diktátor halmaz, azaz diktátor.

3.4.4. Állítás. *Ha S diktátor halmaz, és $S = P \cup Q$, ahol P és Q nemüres diszjunkt halmazok, akkor vagy P vagy Q diktátor halmaz.*

Bizonyítás. Ehhez először azt lássuk be, hogy ha $A \succ_S B$, akkor S diktátor halmaz. Legyenek C és D tetszőleges jelöltek, be kell látnunk, hogy ekkor $C \succ_S D$. Hasonlóan a korábbi gondolathoz, itt is kicserélgetjük az elemeket, és belátjuk, hogy tetszőleges párt meg tudunk csinálni, hiszen ha $A = D$, akkor megcseréljük A-t és B-t, majd kicseréljük B-t D-re. Hasonlóan, ha $B = C$. Egyéb esetekben pedig kicseréljük A-t C-re, B-t pedig D-re, és kész vagyunk.

Tehát tudjuk, hogy ha $A \succ_S B$ teljesül valamilyen A,B-re, akkor mindegyik párra, és így diktátor halmaz S. Ekkor használva az 3.4.3 állítást kapjuk, hogy vagy $A \succ_P C$ vagy $C \succ_Q B$, azaz, mivel vagy P-ben, vagy Q-ban van blokkolás, így tetszőleges blokkolás is van bennük, tehát az egyik diktátor halmaz. $\square$

A tételt lefelé haladó indukcióval bizonyítjuk. Tudjuk, hogy az egész halmaz diktátor halmaz, hiszen ha mindenki egy adott, A jelöltet ír az első helyre, akkor az nyer, ugyanis az egyhangúság szerint ha minden szavazóra $A > B$ teljesül, akkor a végső sorrendben is ilyen irányban kell állnia a relációnak. Ez mindegyik másik B jelöltre igaz, így az összes szavazó halmaza diktátor halmaz. Ekkor vegyük a teljes halmaz egy $P \cup Q$ nemüres, diszjunkt felbontását, és az előző állítás értelmében tudjuk, hogy az egyik halmaz diktátor halmaz. Legyen ez a P. Mivel egyik halmaz sem üres, P elemeinek a száma szigorúan kisebb, mint az összes szavazók száma, továbbá legalább 1 elemet tartalmaz. Ismételjük meg ezt a lépést P-vel, véve egy $P' \cup Q'$ felbontást. Hasonló elgondolással kapjuk a P' halmazt, aminek szintén nemüres diktátor halmaz, és szigorúan kevesebb eleme van, mint P-nek. Folytatva a lépéssorozatot eljutunk addig, amíg a $P*$ halmazig, ami egyelemű, és diktátor halmaz, tehát az egyetlen elem benne diktátor. $\square$

3.4.5. Megjegyzés. Létezik bizonyítás végtelen számosságra is.

4. fejezet

Választások

Miután definiáltuk a választási játék fogalmát, most ismertetünk néhány fontosabb választási rendszert. Ezeket nem feltétlenül formálisan nézzük meg, valamint a dolgozat terjedelmére való tekintettel nem tudunk minden tulajdonságra bizonyítást vagy ellenpéldát szolgáltatni. [20] [15]

4.1. Többségi módszerek

Relatív többség

A May-tétellel megismerkedtünk a két alternatívás esettel. Ha páros sok szavazó van, lehetséges döntetlen, de ettől eltekintve ez a módszer mindig célra vezet.

Ha legalább 3 induló van, akkor könnyen elképzelhető, hogy egyik jelölt sem szerzi meg a szavazatok legalább felét, így a győztes szigorú értelemben ebben az esetben nincs definiálva. Az *relatív többségi* (simple majority) választás ennek a kézenfekvő általánosítása: azt választjuk meg, aki a legtöbb szavazatot kapta, még akkor is, ha nem kapja meg a szavazatok legalább felét. Ezt másnéven *First-past-the-post* votingnak nevezzük. Alkalmazzák ezt az egyszerű elvet olyan esetekben is, amikor több embert kell megválasztani, akkor a k legtöbb szavazatot kapott embert jelölik ki győztesként. (Ez az ún. Single non-transferable vote vagy SNTV rendszer). Ez a világon használt legelterjedtebb rendszer, a magyarországi választási rendszernek is részét képezi. Ennek ellenére van olyan kritérium, amit nem teljesít, nézzünk erre példákat:

4.1.1. Példa. A relatív többségi szavazás nem Condorcet-rendszer:

80 szavazó esetében 41 szavazat kellene a győzelemhez, és legyenek a választók preferenciái a következők:

30	27	23
A	B	C
B	A	B
C	C	A

A példában a relatív többségi nyertes A, hiszen mindenki egy szavazatot ad le, mégpedig az általa legszimpatikusabbnak ítélt jelöltet, így A nyer 30 szavattal, viszont a rendszernek B a Condorcet-győztese, hiszen A-t 50-30, C-t pedig 57-23 arányban győzi le.

A relatív többségi szavazás teljesíti a többségi kritériumot, monoton, egyhangú és konzisztens, nem teljesíti azonban a klónfüggetlenséget (ld. 4.3.7 példa), és a Condorcet vesztő kritériumát sem.

Szekvenciális szavazás

A *szekvenciális szavazás* a relatív többségi egy változata. Több lépcsőben választjuk ki a győztest, minden fordulóban csökkentve a jelöltek számát. A 4.1.1. példában tehetjük azt, hogy a második fordulóban A és B jelölt között döntünk többségi módszerrel, így B nyer.

Nevezhetjük többlépcsős szavazásnak is, van kétfordulós (előfordulós) szavazás is. Igen elterjedt módosítás, például az Egyesült Államokban ha egy párton belül többen is indulnának a választáson, előválasztásokat tartanak, hogy melyikük induljon az országos elnökválasztáson.

Ezzel még mindig nem lesz Condorcet-rendszer, de Condorcet-vesztő kritériuma teljesülni fog. A többlépcsős rendszer aszimmetriája miatt sérül a monotonitás, és a konzisztencia, valamint tudunk példát mutatni a részvételi kritérium és a lényegtelen alternatíváktól való függetlenség megsértésére is.

4.2. Preferencia alapú választások

A korábban definiált közjóléti függvények, és voksolási függvények mentén továbbhaladva, most olyan rendszereket fogunk tekinteni, ahol a választók egy teljes rendezést adnak preferenciaként, és azt nézzük meg, ebből hogyan alakul a végleges sorrend, vagy hogyan választunk ki egyetlen győztest. Ezekre a rendszerekre teljesülni fognak a korábban látott tételek (Arrow, Gibbard-Satterthwaite).

Ide soroljuk még a gyenge rendezéseket adókat is, valamint azokat, amelyek független minősítést kérnek a jelöltekről.

Az ilyen rendszereket nevezzük *preferencia alapúnak* (vagy *preferential voting*-nak).

Minősített párok

Ez a Páronkénti játszmák egy egyszerű általánosítása. Készítünk egy rendezést a jelölteken, és megkülönböztetjük az egy az egy elleni győzelmeket a következőféleképpen: Nézzük a legnagyobb különbséggel rendelkező párt (pl. A megverte B-t 20 szavazó esetén 18-2-re). Ekkor a rendezésben feltesszük, hogy $A > B$. Haladunk tovább úgy, hogy megtartsuk a rendezés tranzitivitását, és így ha olyan feltétel jönne, ami a korábbiaknak ellentmond, akkor azt nem vesszük figyelembe. Ha több ugyanolyan arányú nyertes van, akkor a rendszer lehet, hogy több győztest is kihoz. Ha van Condorcet győztes, akkor ez a módszer őt határozza meg, de ha nincs, akkor is megjelöl egy vagy néhány győztest, akik viszont nem a Condorcet-vesztesek. Emellett a többségi kritérium, a klónfüggetlenség, valamint a montonitás is jellemzi ezt a rendszert. Megsérti azonban a konzisztencia és a részvételi kritériumot, erre nézzünk egy példát:

4.2.1. Példa. A minősített párok megsérti a részvételi kritériumot Tekintsük a következő két profilt, és aztán vizsgáljuk meg a két profil unióját.

7	6	3	9	8	6
A	B	C	A	B	C
B	C	A	C	A	B
C	A	B	B	C	A

Tekintsük először az első szavazást. Összegezve az alternatívák párjait, és sorrendbe állítva, a következőt kapjuk (indexben írva az elfogadás mértékét): $B >_{13} C$, $A >_{10} B$ és $C >_9 A$. Így az első kettőt használva teljes rendezést kapunk: $A > B > C$.

A második szavazásban a következő súlyokkal kapjuk a párokat: $A >_{17} C$, $C >_{15} B$ és $B >_{14} A$, azaz az összesítésben $A > C$ és $C > B$ áll, amiből $A > C > B$ az eredmény, itt is A a nyertes.

Tekintsük most a közös választást, 39 szavazóval. Itt a megfelelő párok súlyai: $A >_{24} C$, $B >_{21} C$ és $B >_{20} A$. Ezek tranzitív relációt határoznak meg, mégpedig: $B > A > C$-t, azaz az összesítésben B a nyertes, noha mindkét részszavazásban A nyert.

Hare módszer

A *Hare módszer* (vagy *instant-runoff voting, IRV*) teljes rendezést használ. A szavazatok alapján megnézzük, hogy melyik az a jelölt, akire a legkevesebben szavaztak első helyen. Töröljük a jelöltet a halmazból leszűkítve a szavazók rendezését, és ismételjük ezt a lépést. Az utolsó lépésben egyszerű többséggel döntünk a megmaradt két jelölt között. Abban az esetben, ha az összegzéssel holtversenyt kapnánk az utolsó helyen, mindegyik ilyen jelöltet elimináljuk. Ekkor előfordulhat, hogy valaki úgy nyer, hogy az utolsó fordulóban nincs abszolút többsége, csupán az összes többi jelölt kiesett.

Nézzünk egy példát a Hare módszerre, amiben azt is látni fogjuk, hogy nem teljesíti sem a lényegtelen alternatíváktól való függetlenséget, sem a monotonitást.

4.2.2. Példa. Hare módszer

4	3	2	2
A	C	C	B
B	B	A	C
C	A	B	A

Elsőkörben senki nem éri el a hatos kvótát. A legkevesebb első hellyel rendelkezett közül B-t töröljük, így C nyer 7-4-re. Ha azonban két szavazó megváltoztatja döntését

$B > C > A$-ra, a $C > B > A$-ra szavazott három közül, ezt kapjuk:

4	4	2	1
A	B	C	C
B	C	A	B
C	A	B	A

Ekkor először C-t töröljük, és a választást A nyeri 6-5-re úgy, hogy A és C relatív helyzete egyetlen szavazatban sem lett megváltoztatva.

4.2.3. Példa. Hare módszer

6	5	4	1
B	C	A	A
C	A	C	B
A	B	B	C

Ebben a profilban A-t és C-t ejtjük ki, mivel senki nem érte el a kvótát. Így B nyer.

Ha egy ember megváltoztatja szavazatát, és B-t előrébb sorolja A-nál (utolsó oszlop):

6	5	4	1
B	C	A	B
C	A	C	A
A	B	B	C

Ekkor szintén nincs meg a kvóta, A-t töröljük, és a két megmaradt versenyző között C nyerne 9-7-re. Azaz annak ellenére, hogy egy jelölt előrébb került az egyik szavazatban, hátrébb került a végeredményben, tehát nem teljesül a monotonitás.

Nem igaz rá továbbá a konzisztencia, a részvételi kritérium és a Condorcet-kritérium. Viszont a Condorcet vesztő kritériumot, a többségi kritériumot, és a klónfüggetlenséget teljesíti.

Coombs módszer

Coombs módszere a Hare-éhoz hasonló, de a szavazatok összeszámlálása után a legtöbb utolsó helyre írt jelöltet töröljük a halmazból, és a rendezést szűkítve ismételjük az eljárást.

Ez a módszer nem feltétlenül adja ugyanazt az eredményt, mint a Hare módszer.

Bucklin módszer

A Bucklin módszer szintén teljes rendezés alapú. A választás előtt meghatározunk egy *kvótát* (ez lehet pl. 50%+1, 2/3). Először a választók első választását vesszük figyelembe. Ha így összegezve a szavazatokat kapunk egy kvótát elérő jelöltet, ő nyert, ha nem, akkor hozzáadjuk a választók második jelöltjét is. Így is összegzünk, és folytatjuk a jelöltek hozzáadását, amíg nem éri el legalább egy ember a kvótát. Ha több ember éri el a kvótát, azt választjuk ki, amelyiknek több szavazata van, egyenlőség esetén pedig folytatjuk a módszert.

Copeland

Condorcet eredeti választási rendszerének analógiájára csinálhatjuk azt is, hogy mindenkit mindenkivel versenyeztetünk, és ha valaki x páros választást nyert, y darabot vesztett, akkor $x-y$ lesz az állása. Ezeket rendezzük, és a legjobb arányúakat vesszük bele egyenként a rendezésbe, amíg teljes relációt nem kapunk.

Ez a választási rendszer az egyik legegyszerűbb, viszont a gyakorlatban ezt alig használják: bár Condorcet rendszer, az IIA-t, a klónfüggetlenséget, a konzisztenciát és a részvételi kritériumot is megsérti.

Páros játszmák

Ehhez a választási rendszerhez szükségünk van a jelöltek egy sorozatára/listájára*(agenda)*, ezt fogjuk használni. A jelölteket egymás után egy az egy ellen mérkőztetjük egymással. A győztes megy tovább, és a lista következő tagjával mérettetik meg. A nyertes az utolsó forduló győztese lesz. Ezt hívják *amendment voting*-nak.

Különböző sportágakban is gyakran előfordul ez a rendszer (angol:*sequential pairwise voting*). Például alkalmazzák csoportbontás után, pl. a futballigákban.

Ez valóban Condorcet típusú rendszer, viszont a választás győztese egyéb esetekben erősen függ a sorrendtől. A páros játszmák rendszere a többségi kritériumot, a Condorcet vesztő kritériumát és a monotonitást is teljesíti, viszont sem nem konzisztens, sem nem egyhangú.

Kemény-Young módszer

4.2.4. Definíció. (Kendall tau metrika) Definiáljuk két lineáris rendezés távolságát a következőképpen:

$$d_k(\succ, \succ') = |\{(a,b) \in A \times A | a \succ b \text{ és } b \succ' a\}|$$

Ez a metrika a lineáris rendezések közötti inverziókat számolja össze, és arra használjuk, hogy a szavazók elégedettségét mérjük vele a közös sorrend iránt.

Definiálhatjuk két profil távolságát is:

$$d_k(P, P') = \sum_{i=1}^{n} d(\succ_i, \succ_i') \text{ ahol } \succ_i \text{ a } P\text{, a } \succ_i' \text{ pedig a } P' \text{ profil megfelelő tagja}$$

4.2.5. Definíció. Adott $\succ$ rendezéshez tartozó egyhangú profil az az $U^{\succ}$ profil, amelynek minden eleme $\succ$.

Ekkor a Kemény-Young eljárás megadja azt az egyhangú $U^{\succ}$ profilhoz tartozó $\succ$ rendezést, amelyre $d_k(P, U^{\succ})$ minimális, azaz a lehető legkisebb távolságra van a profil rendezéseitől inverziók tekintetében. Az eljárást nem fejtjük ki.

Látható, hogy a rendezésben a Condorcet-győztesnek kell az első helyen állnia, amennyiben létezik, ellenkező esetben a $d_k(P, U^{\succ})$ szigorúan csökkenne, ha feljebb raknánk Condorcet-győztest a $\succ$ rendezésben.

4.2.6. Tétel. (Young, Levenglick (1978)) *Kemény-eljárás az egyetlen neutrális, és konzisztens Condorcet-kiterjesztés.*

Ez talán ellentmondást jelentene korábbi megállapításainkkal, (3.2.8 állítás) viszont a Kemény-Young eljárás valójában nem közjóléti függvény, mert nem egyértelmű a függvény értéke. Így nem közjóléti függvényként értelmezve, hanem olyan függvényként, ami rendezések egy halmazát adja vissza (ami minimalizálja a távolságot a profiltól a d_k metrika szerint), így valóban lehet egyszerre Condorcet-kiterjesztés és konzisztens.

A Kemeny-Young az ismertetett eljárások közül az egyetlen, ami exponenciális futásidejű, így nagyobb rendszerekre nem alkalmazható, viszont közelítő algoritmusok is ismertek.

A rendszer hátterét adó metrika miatt nem lesz konzisztens, klónfüggetlen, a részvételi kritériumot sem teljesíti, de a monotonitás igaz.

Schulze módszer

Vizsgáljunk meg a jelöltek halmazán képzett összes párt. Definiáljuk egy d függvényt, ami tetszőleges A és B jelöltekre megadja azon szavazatok számát, amiben a válaszók $A > B$-ként rendezték a két jelöltet (hasonlóan a minősített pároknál). Ezzel definiálhatunk a szavazást reprezentáló gráfot. Vegyünk egy teljes, irányított gráfot, melynek a csúcsai az alternatívák, és minden (A, B) élére írjuk rá a megfelelő $d(A, B)$ értékeket. Legyen egy út értéke a legkisebb él értéke. Ekkor a Schulze módszer $A > B$-t ad ki eredményül, ha $d(A, B) > d(B, A)$. Belátható, hogy egy tranzitív rendezést kapunk, ha ezt minden párra elvégezzük. [18]

Ha $d(A, B) = d(B, A)$, akkor a módszer A-t és B-t egyenlőként rendezi.

A Schulze módszerét nem részletezzük, az ezt végrehajtó algoritmus, melyet Schulze a cikkében leír $O(n^3)$ lépésben megadja a nyertest.

Schulze módszere jól kiszűri a klónokat, monoton, és Condorcet-rendszer is, viszont nem konzisztens és nem teljesül a részvételi kritérium.

4.2.1. Pontozásos módszerek

Rendezéses rendszerek

4.2.7. Definíció. A $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots w_n)$ valós számokat tartalmazó vektor. A vektort *pontszámvektor*nak, elemeit *pontértékeknek* nevezzük. $\mathbf{w}$ *rendes*, ha $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$, és $w_1 > w_n$. A vektorhoz tartozó *pontszámítási szabály*: a legelső helyezett w_1, a második w_2 és stb. pontszámot kap, ezeket egy jelöltre összeadjuk, és a győztes a legnagyobb pontszámú alternatíva lesz. *Rendes pontszámítási szabály* a rendes pontszámvektor által indukált pontszámítási szabály.

Néha azt is megkövetelhetjük, hogy a pontszámok nemnegatívak legyenek. A gyakorlatban használt legtöbb pontszámítási vektor ilyen. Néhány példa:

- Borda: $\mathbf{w} = (n, n-1, n-2, \dots 1)$

- Relatív többségi szavazás: $\mathbf{w} = (1, 0, \dots 0)$
- Anti-pluralitás: $\mathbf{w} = (1, 1, \dots 1, 0)$
- k-elfogadási: $\mathbf{w} = (1, 1, \dots 1, 0, \dots 0)$, ahol k darab egyes szerepel a vektorban
- Formula 1: $\mathbf{w} = (25, 18, 15, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 0, \dots 0)$

A szabály gyakran az, hogy veszik a legkisebb pontszámú alternatívát, és azt kizárják a rendezésből. Újraszámlálják a szavazatokat, és újra kiveszik a legalacsonyabb pontszámú jelöltet. A végén lehet, hogy egy jelölt marad, vagy valaki abszolút többséget szerez, ekkor őt jelöljük ki győztesként.

Erre példa *Baldwin* módszere, ahol minden körben a legkisebb Borda pontszámú játékost kivesszük a rendezésből, és az utolsó körben megmaradt alternatíva lesz a nyertes. A *Nanson*-szavazás ettől abban különbözik, hogy minden körben kivesszük a rendezésből az átlagos Borda pontszám alatt lévő jelölteket, és ezt addig ismételjük, míg végül egy lehetőség marad csak. Ez a két rendszer Condorcet-rendszer.

A teljesség igénye nélkül további példák: Alternative Vote, Hare módszer, Single Transferable Vote (STV), Instant Run-off Voting (IRV), és a Ranked Choice Voting (RCV).

4.2.8. Definíció. *Összetett pontozási szabálynak* nevezzük pontszámvektorok egy w_i sorozatát, azzal a módszerrel, hogy összegezzük a pontszámokat w_1 vektor szerint, és ha egyenlőség lenne, akkor w_2 vektor pontszámai döntenék el a helyezést. Ha maradnának egyenlő pontszámok, akkor w_3-t használnánk, és így tovább, amíg nem kapunk n nem-egyenlő számot, ami megadja a sorrendet az alternatívák között.

Bizonyítás nélkül közlünk néhány ehhez kapcsolódó állítást:

4.2.9. Tétel. (Smith, 1973; Young 1975) *[21] Az anonim, neutrális, és konzisztens voksfüggvények pontosan az összetett pontozási szabályok.*

Nézzük a leggyakrabban alkalmazott pontozást: a Bordát. Az előző tétel mellett más tulajdonságát is tekinthetjük, pl. nem teljesíti az IIA-t:

4.2.10. Példa. Tekintsünk a következő profilt:

5	3
A	C
B	B
C	A

Ekkor A, B és C rendre 18, 16 és 14 pontot szereznek. Ha azonban a második oszlopban C és B sorrendjét felcseréljük, (C és A relatív sorrendje megmarad), akkor a következőt kapjuk:

5	3
A	B
B	C
C	A

Ekkor a pontok rendre: 18, 19 és 11 lesznek: Tehát noha A és C relatív sorrendje nem változott, a szavazatösszegzés után mégis megfordult a sorrendjük, azaz nem teljesül az IIA.

Az ellenpéldákat nem fejtjük ki, de a Borda-pontozás nem Condorcet-rendszer, valamint nem teljesíti sem a többségi kritériumot, sem a klónfüggetlenséget, viszont a részvételi és Condorcet vesztő kritériumát igen.

Skálaszavazás

A *range voting* (vagy *score voting*) is pontozásos módszer, azonban ahelyett, hogy azonosítanánk a helyezetteket az alternatívák teljes rendezésén, megengedjük, hogy ők maguk minősítsék azokat.

Az egyik legegyszerűbb eset, hogy a játékosok minden jelöltet értékelnek egy skálán. Ezeket a pontokat szummázzuk egy jelötre, majd a legtöbb ponttal rendezlkező lesz a nyertes.

Ez az egyik legelterjedtebb szavazási módszer, használják sportversenyeknél, az oktatásban, vagy éppen különböző éttermeket, vagy filmeket rangosoroló honlapoknál is (pl. IMDB). Ennél egy fokkal összetettebb rendszert használnak pl. mű- és toronyugróknál, ahol 3 zsűri pontoz, az összeget pedig felszorozzák az ugrás nehézségével, így kapva egy súlyozott pontszámokból álló listát.

A skálaszavazás, teljesíti az Arrow-tétel feltételeit,(v.ö. Arrow-tétel (3.3.1))) így az diktatórikus rendszer, viszont több előnyös tulajdonsága van, és miatt sokan javasolják politikában alkalmazott választások lebonyolítására: klónfüggetlen, monoton, konzisztens és a részvételi kritériumot is teljesíti.

A skálaszavazás egyik hátránya, hogy nem biztos, hogy a vélemények jól tükröződnék a számokban (nem biztos, hogy mindenkinek ugyanazt jelenti az 3/5-ös értékelés). A műugró zsűrik például egy tréningen vesznek részt, amiben meghatározzák milyen szempontokat vegyenek figyelembe. Másrészt erősen manipulálható a szavazás: ha a számunkra kevésbé szimpatikus jelölteket irreálisan alacsonyabb pontszámmal látjuk el, erősen növeljük a preferált alternatívánk győzelmének esélyét. A skálaszavazás nem Condorcet-rendszer, Condorcet vesztő kritériumát, valamint a többségi kritériumot sem elégíti ki.

Osztási szavazás

A skálaszavazáshoz hasonló rendszer *(cumulative voting)*. A szavazók pontozzák a jelölteket azzal a feltétellel, hogy összesen meghatározott számú pontjuk van. Ez lehet pl. egy egész szám (mintha többet szavaznának) és csak egészre darabolhatják, de lehet akár 1, amit tetszőleges valós részekre oszthatnak szét. A pontok összegét veszik alapul az eredménynél, a legtöbbet kapott lesz a győztes. Ez gyakorlatilag a skálaszavazás speciális esete, de sok előbb tárgyalt rendszer felfogható az osztási szavazás speciális esetének, amikre egy újabb alternatívát (senki) hozzáadva vezethetjük vissza.

Használják vállalatoknál vezérigazgató választásakor: minden alkalmazott a beosztása alapján kap k darab szavazatot. Előfordulhatnak erős frakciók, így akár adhatják egyetlen jelöltnek az összes pontjukat is a szavazók.

Monoton, konzisztens a részvételi kritérium teljesítő, de az IIA-t, a Condorcet és a többségi kritériumot megsértő rendszer.

4.2.2. Jóváhagyás alapú

A rendezésektől eltérő hozzáállást fogunk nézni: a szavazók kijelölik a szavazók egy részhalmazát, amik tartalmazzák a számukra elfogadható jelölteket. Ez az úgynevezett *approval voting* [12]. Nincs megmondva, hogy hány embert kell megjelölniük - lehet, hogy senkire se, lehet, hogy mindenkire szavaznak. Variációi a választásnak: megszabhatják pl. a minimális vagy maximálisan megjelölendő jelöltek számát.

A szavazatokat százalék formájában összegzik, mégpedig úgy, hogy a szavazók hány százaléka tartotta elfogadhatónak az adott alternatívát. Egy jelöltre ezt nevezzük *jóváhagyási arány*nak. Bizonyos esetekben egy előre megadott kvótát kell elérni, pl. 50%-ot, máskor pedig meghatározott számú győztest szeretnénk, és a jóváhagyási arány szerinti rendezett lista elején lévő k alternatívát jelöljük meg győztesnek. Ekkor például előfordulhat, hogy döntetlenek alakulnak ki. Ilyenkor célszerű egy többfordulós módszerrel ötvözni (külön szavaztatjuk a szavazókat a két jelölt között), így kapva végleges eredményt. Amennyiben kvótát kell elérni, előfordulhat hogy senki se éri el kvótát, vagy az is, hogy többen elérik, tehát a nyertesek száma nem előre meghatározott.

Ha a közjóléti függvényeket gyenge rendezésen is értelmezzük, akkor a következő tételt kapjuk:

4.2.11. Tétel. *[12] Egy gyenge rendezést adó közjóléti függvény pontosan akkor elfogadási szavazás, ha egyhangú, anonim, független a lényegtelen alternatíváktól.*

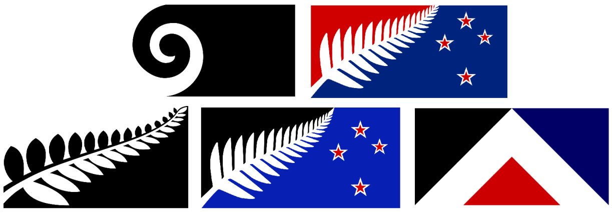
Az egyhangúságot kiterjesztjük a nem összehasonlíthatóságnál is, egyébként nem teljesítené ezt a kritériumot.

Az elfogadási szavazás nem Condorcet-szavazás, és a Condorcet vesztő kritériumát sem teljesíti. Klónfüggetlen, monoton, konzisztens, és teljesíti a részvételi kritériumot.

Jóváhagyás alapú rendszerek vannak például cégeknél új alkalmazottak felvételénél. Van egy minimum követelmény, hogy jelentkezzen az állásra, és ezen felül több interjúztató véleménye alapján kerülhetnek be dolgozók. Ki-ki szavaz a jelöltekről: ki az, akit el tudnak fogadni, és a végén összegezve (akár kvótás, akár a legmagasabb jóváhagyási arányt kapott k darab) kerülnek be a jelöltek a céghez.

Jóváhagyás alapján jobban lehet reprezentálni az emberek harmadik lehetőségeit (pl. pártszavazások), viszont nem rendezi relatívan a jelölteket. Gyakorlatilag az ókori Spártában is így szavaztak. Azt a jelöltet választották meg, aki esetén a legnagyobb volt a tömeg kiabálása.

4.2.12. Példa. Nézzünk egy példát egy összetettebb szavazási rendszerre: az új zélandi zászló referendumára.



4.1. ábra. Az új zászlók

2015-től 2016-ig tartottak Új Zélandon a népszavazást, abban a kérdésben, hogy a lakosság szeretne-e új zászlót az országnak. A régi zászló tartalmazta az Egyesült Királyság zászlóját, ami kiváltó oka volt a referendum megtartásának. Kétfordulós voksolási rendszert írtak ki, először az új zászlóról döntöttek, majd arról, hogy maradjon-e a régi, vagy ez a kiválasztott legyen az új lobogó.

2015 szeptemberére választotta ki a felelős bizottság a szavazásra bocsátott zászlókat, melyeket az 4.1. ábrán láthatunk. A motívumok közül sok hasonló is akad: a páfrány 3 típusban is szerepel, így ha egyszerű többségi szavazást írtak volna ki, a szavazatok megoszlódtak volna a hasonló alternatívák között. Mivel politikailag fontos volt a kérdés, ezért egy elfogadási rendszert készítettek, ami skálaszavazáson alapult. Egyedi szavazatokat adhattak le a választók: tetszőleges számú zászlót kiválaszthattak, és azokat rangsorolhatták. Ebben a rendszerben ha nem rangsoroltak egy alternatívát, akkor az a listájuk legaljára került. Ezekre a szavazatokra alkalmazták a Hare módszert, ezzel figyelembe véve az emberek másodlagos alternatíváit, és végül a nyertes a jobb alsó kék-fekete páfrány lett a dél keresztje motívummal. (Relatív többségi szavazás alapján a felső sor jobb oldali zászlója nyert volna.)

Másodszor a lobogó lecseréléséről szavaztak: az új és a régi zászló közül kellett dönteni. A végeredmény 56.7%-kal a zászló megtartása lett.

4.3. Ellenpéldák, manipuláció

A következő két példában bemutatjuk, hogy az ismertetett választási rendszerek mennyire különböző eredményeket adhatnak.

Egyértelműség

4.3.1. Példa. 5 különböző jelölt van (A-E), és a következő sorrendekre ennyien szavaztak:

36	24	20	18	8	4
A	B	C	D	E	E
D	E	B	C	B	C
E	D	E	E	D	D
C	C	D	B	C	B
B	A	A	A	A	A

Végezzük el néhány korábban ismertetett rendszerre a szavazatösszegzést:

1. Abszolút többségi: Nincs többségi győztes.

2. Egyszerű többségi: A-t jelölték meg legtöbben első helyen, így A győztes.

3. Többfordulós: Ha a két legtöbb szavazatot elért ember között rendezzük meg a második fordulóját a választásnak, akkor azt kapnánk eredményül, hogy B megveri A-t 110-74-re, így B nyer.

4. Hare módszer: Mindig a legkevesebb első hellyel rendelkező embert zárjuk ki. Először E-t 12 első hellyel. Ezután összesítve A 36, B 32, C 24, D-nek pedig 18 első helye van, így D-t töröljük. A 36, B 32, C pedig 42 első helye után B-t vesszük ki, és A és C között pedig C nyer 110-74-re.

5. Borda pontozás: Ellenőrizhető, hogy a jelölteknek a következő lesz a pontszámuk:

A	B	C	D	E
254	312	324	382	378

   D lesz a győztes.

6. Condorcet: E Condorcet győztes, mert megveri mindegyik jelöltet. (A-t 74-36, B-t 66-44, C-t 72-38, D-t pedig 56-54 arányban)

Ez a példa jól mutatja, hogy ebben az esetben a rendszertől függően bármelyik jelöltet ki tudjuk hozni győztesnek. Minden kritériumot teljesítő választás nincs, és felmerülhet a kérdés, hogy mégis mit használjunk a gyakorlatban. Erre azt a választ lehet adni, hogy használjuk azt, amit az adott helyzet megkövetel. Van ahol a klónfüggetlenség fontosabb, mint a konzisztencia, és fordítva - a lényeg, hogy a voksolás megalkotói tisztában legyenek a rendszerük jellemzőivel, és határaival.

Manipuláció

A következő példában a választás manipulációját elemezzük.

4.3.2. Példa. Tekintsük a következő Hare-módszer szerint lezajló választást.

8	6	5
A	B	C
B	C	D
C	A	A
D	D	B

Ebben a példában a Hare-módszer szerint először D-t (0 első helyezettel), majd C-t elimináljuk, aztán A nyerne a következő lépésben 13-6-ra. Tegyük fel azonban, hogy a B-C-A-D-re szavazott 6 ember közül egy megcseréli B és C sorrendjét. Tekintsük a módosított a táblázatot a szavazatokkal:

8	5	5	1
A	B	C	C
B	C	D	B
C	A	A	A
D	D	B	D

Nézzük most milyen eredményt hoz Hare szerinti választás. Hasonlóan az előbbihez, most is D-t vesszük ki először 0 első hellyel, viszont utána B-t elimináljuk ki, mivel neki csak 5 első helye van, C-nek pedig 6. Az utolsó lépésben C megveri A-t 11-8-ra, így az az egy szavazó, aki módosította a sorrendjét biztosította, hogy C-t jelölje meg a Hare-metódus eredményképp, és nem A-t. Ez annak ellenére történt, hogy a szavazók többsége B-t előrébb helyezi, mint C-t.

Ahogy a példában látható, néha kis módosítás is elég hogy a végeredményben nagy változásokat okozzunk. Mivel a manipuláció kiküszöbölhetetlen (vagy legalábbis ebben az esetben), nézhetjük a kimenetel profilokról való függését a taktikázáson keresztül.

Ha nem manipulálható egy rendszer, akkor azért is árat kell fizetni: más, ésszerű feltételek nem teljesülnek, és így igazából nem kapunk praktikus rendszert. Az, hogy egy rendszer elméletileg manipulálható, még nem jelenti azt, hogy ezt a gyakorlatban is meg lehet tenni, ugyanis:

- Ahhoz, hogy manipuláljunk, az összes többi szavazó szavazatát ismernünk kell. Ez a gyakorlatban ritkán teljesül.

- Meg kell bizonyosodnunk arról, hogy más játékos nem akarja manipulálni a szavazást. Ha mégis így van, a játékelmélet más részterületén, nemkooperatív játékként modellezhetjük a helyzetet.

- Ki kell számolnunk, hogy megtudjuk, mit kell szavaznunk a kívánt eredmény eléréséhez.

A gyakorlat szempontjából az utolsó pont tűnik talán a legkevésbé fontosnak, viszont ezzel kapcsolatban több eredmény is született, ami mint elméleti problémát foglalkoztatott számos kutatót.

4.3.3. Definíció. (Manipuláció probléma) Tegyük fel, hogy minden szavazó szavazata ismert, az az egy P profil a manipulátor szavazatának kivételével. A feladat: tud-e úgy szavazni a manipulátor, hogy egy adott jelölt győzzön, és ha igen, akkor mit kell szavaznia?

A manipuláció problémájának sok változata van, ilyen például a *koalíciós manipuláció probléma*: szavazók egy halmaza a manipulátor, ismerik a többi szavazó szavazatát. A kérdés az, hogy belássuk, hogy tudnak-e úgy szavazni, hogy egy adott jelölt nyerjen.

4.3.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy szavazási rendszer kielégíti a *BTT feltételeket*, ha:

- polinomiális időben futtatható
- minden P profilhoz, és alternatívához a rendszer egy $S(P,a)$ pontszámot rendel úgy, hogy a legnagyobb pontszámú jelölt győz.
- a következő monotonitás szabály érvényes: Ha módosítjuk a szavazást úgy, hogy tetszőleges a-ra ha minden szavazó nem helyezett előrébb olyan b jelöltet, melyre $a > b$ fennállt eredetileg, akkor a módosított P' profilra $S(P,a) < S(P',a)$ teljesül, azaz a pontszám nem csökkenhet ilyen esetben.

4.3.5. Tétel. (Bartholdi (1989)) *A manipulációs probléma polinomiális időben megoldható a BTT feltételeket teljesítő rendszerekre.*

Útmutatás: a-t legelőre rakva, a többi jelöltre megnézzük a pontszámokat, és mindig olyanokat rakunk a következő helyre, akik nem győzik így le a-t, belátható, hogy ez a konstruktció jó, és polinomiális időben meghatározható a válasz.

Meglehetősen nagy irodalma van a manipulációs kérdésnek, és külön-külön minden rendszert elemezhetünk. Amennyiben egy manipulátor van, a legtöbb rendszerről polinomiális időben eldönthető, hogy manipulálható-e: például a Copeland, a Borda, a többségi ilyenek. Ha több manipulátor van, már nagyobb számítási gátba ütközünk: a Borda, a Baldwin, és az STV is NP-belinek feladatnak bizonyul.

4.3.6. Tétel. *A koalíciós manipulációs probléma a súlyozott többségi szavazásra NP-teljes.*

Útmutatásként: a partícionálási problémára vezetjük vissza, hiszen adott koalíció w_i súlyait kell felosztani több jelölt között úgy, hogy semelyik másik ne nyerjen a preferált a-val szemben.

A gyakorlatban használnak olyan választási rendszereket, amik végeredményét nem tudjuk polinomiális időben kiszámolni. Noha ezek valóban nem használhatók sok alternatíva/szavazó esetén, mégis a komplexitásuk adja, hogy a választás a gyakorlatban nem lesz manipulálható. [6]

A manipuláció témaköréhez tartozik a taktikai nevezés is. A taktikus nevezés azt jelenti, hogy a választási rendszerünkben az alternatívák között több hasonló alternatívát adunk meg. Amennyiben a rendszerre nem teljesül a klónfüggetlenség, következő problémák állhatnak fent.

4.3.7. Példa. 1969-ben egy kanadai kisváros, Thunder Bay nevéről tartottak szavazást. Egy új név nagyon népszerű lett: a Lakehead. A választást megalkotók nem akartak változást a város nevében, így három alternatívát adtak a névre: Thunder Bay, Lakehead, és The Lakehead. Mivel csak egy szavazatot lehet leadni, és mint az várható volt, a régi nevet elutasítók megosztódtak a két új név között, és így végül a város nevét nem változtatták meg. A végső arányok jól tükrözik a szavazók igényét: 15870 - Thunder Bay, 15302 - Lakehead, és 8377 - The Lakehead. [18]

5. fejezet

A választóerő

5.1. Definíciók

Az alábbiakban a 2.4.2 definíció jelöléseit fogjuk használni.

5.1.1. Definíció. Legyen $G = (N, v)$ tetszőleges választási játék. Az *index* (*erőindex* vagy *válaszóerő*) egy $k : v \to \mathbb{R}_0^{+N}$ függvény.

Ez a függvény koalíciós függvényhez vektort rendel, azaz adott játék esetén minden szavazó egy nemnegatív számot kap. Ezt a számot nevezzük az adott játékos indexének. A továbbiakban azonos N játékoshalmazon dolgozunk, a játékok között csak a v koalíciós függvénnyel teszünk különbséget.

5.1.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy k index *anonim*, ha minden G választási játékra, és π játékosok permutációjára

$$k_i(\pi v) = k_{\pi(i)}(v) \text{ ahol } \pi v(S) = v(\pi(S)) \ \forall S \text{ koalícióra}$$

5.1.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy k index teljesíti a *nullszavazó axiómát*, ha egy nullszavazónak nem lehet ereje, azaz:

$$i \text{ nullszavazó } \Rightarrow k_i(v) = 0$$

Legyen G és G' két választási játék közös szavazóhalmazzal (N). Jelöljük a koalíciós függvényeiket v-vel és w-vel. Ekkor definiálhatjuk az $G \vee G'$ és $G \wedge G'$ játékokat, melynek koalíciós függvényei $v \vee w$ és $v \wedge w$, ahol tetszőleges S koalícióra

$$(v \vee w)(S) = \max\{v(S), w(S)\} \quad \text{és} \quad v \wedge w(S) = \min\{v(S), w(S)\}$$

Ezek a választási játékok jól modelleznek olyan helyzeteket, mikor egy döntés megszületésének több kritériuma van, és mindegyiket teljesítenie kell a koalíciónak.

5.1.4. Definíció. A k indexre teljesül az *átviteli axióma*, ha $k_i(v) + k_i(w) = k_i(v \vee w) + k_i(v \wedge w)$ $\forall i \in N$

Végül pedig két karakterisztikus definíció:

5.1.5. Definíció. (Shapley teljes érték axióma) Tetszőleges (N, v) választási játékra

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = 1$$

5.1.6. Definíció. (Banzhaf teljes érték axióma) Tetszőleges (N, v) választási játékra

$$\sum_{i \in N} psi_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i \in N} \sum_{S \ni i} v(S) - v(S \setminus \{i\})$$

5.2. Indexek

Fontosabb indexek

Arányos index

A legegyszerűbb módszer a szavazók választóerejéhez, ha a rendszerből adódó súlyokkal definiáljuk a szavazók erejét. Például a súlyozott többségi szavazásnál az adott w_i súlyokat kapják meg a szavazók, leosztva persze az összsúllyal.

Megmutatható, hogy ez a triviális index mentes sok paradoxontól, ami a többi indexnél fennáll, viszont majd arra is látunk példát, amikor nem reprezentálja jól a relatív erőket, például kevés ember esetén.

A Shapley-Shubik index

A Shapley-Shubik módszer a következő. A szavazók sorban szavaznak. Amint a szavazás kimenetele biztos (pl. 2/3 elérése - ez a rendszertől függ), azonnal lezárul a választás. Azt a szavazót, aki a döntő szavazatot leadta (az utolsót), *pivot* szavazónak fogjuk nevezni. Egy szavazó Shapley-Shubik indexe azon esetek száma, amelyben pivot szavazó, leosztva az összes eset számával.

$$\Phi_i = \sum_{S \ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus \{i\}))$$

Mivel a sorrend fontos, n szavazó esetén $n!$ sorrend lesz, így a Shapley-Shubik index számolása már kisebb esetekben is nagy számolókapacitást vehet igénybe. Jóllehet, a kerekített érték a faktoriálisra vonatkozó becsléssel könnyen kiszámítható. Amennyiben szebb esetünk van, egyszerűbb lesz a számolás(v.ö. 5.5.2 tétel).

A Shapley-index a TU-játékok Shapley-értékéből származik, viszont a részletesebb levezetést itt nem közöljük.

A Penrose-Banzhaf index

Banzhaf elgondolása is hasonló volt, viszont annyiban módosította Shapley elképzelését, hogy mivel a legtöbb szavazási rendszerben nem sorban zajlik a szavazás, így a végső döntésben nem is kell számításba venni, hogy eredetileg hogyan, milyen sorrendben szavaztak. Ezért nem érdemes sorrendbe rakni a szavazókat, hanem az összes győző koalíciót kell tekinteni, és azokat az esetek összeszámolni, ahol kritikus a szavazó.

Tehát egy adott szavazó Banzhaf indexe: azon esetek száma, amikor a szavazó kritikus egy győző koalícióban. Az összes eset száma n szavazó esetén 2^{n-1}, mivel annyi darab részhalmaza van a szavazóknak, aminek i része.

$$\psi_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \ni i} v(S) - v(S \backslash \{i\})$$

Speciálisan a súlyozott játéknál: tegyük fel, hogy egy győző koalíciónak x szavazat van, és egy q kvótát kell elérni. Szükségképpen $x \geq q$. Ekkor a koalíciónak $x - q$ plusz szavazata van, így kritikus szavazó csak az lesz, akinek több mint $x - q$ szavazata van.

Megjegyzés: Straffin indexnek is hívják az általános alakját, amennyiben nem 1/2-1/2 az esélye, hogy a többi szavazó hogyan szavaz. Mi ezt az általánosított változatát nem tárgyaljuk.

Egyéb indexek

1. *A Coleman indexből* két típus van: kezdeményező (initiate) index azon esetek száma, amiben a választó kritikus egy vesztő koalícióra nézve, míg a megakadályozó (prevent) index a győző koalícióra nézve kritikus eseteket számolja össze.

2. *A Johntson index*: Míg a Banzhaf indexnél egy S koalícióra nézve ugyanakkora súllyal került számításba, addig Johntson által számolt érték fordított arányos a koalíció elemszámához képest. Ez jobban kedvez a kisebb koalícióknak, viszont a koalíciók mögötti valószínűségi egyformák.

3. *A Deegan-Packel* indexe a Johntson egy módosítása. Valójában azok helyett a koalíciók helyett, amiben a szavazó kritikus, csak azokat számoljuk össze, amelyek minimális győző koalícióknak tagja.

4. *Holler Public Good Index*-et röviden csak PGI-nek hívják. Ez az index Banzhaf egy módosítása, amiben csak a minimális győző koalíciókat vesszük számításba, viszont a Deegan-Packellel ellentétben nem kap fordítottan arányos értéket a minimális győző koalíció létrehozásáért.

5.3. Jellemzés

A dolgozat terjedelmére való tekintettel összefoglalunk néhány fontosabb eredményt.

A feltett axiómák jól karakterizálják a két példát:

5.3.1. Tétel. (Dubey(1975)) *A Shapley-Shubik index az egyetlen anonim választóerő, ami teljesíti a nullszavazó, az átviteli és a Shapley teljes érték axiómát.*

5.3.2. Tétel. (Dubey és Shapley(1979)) *A Banzhaf index az egyetlen anonim választóerő, ami teljesíti a nullszavazó, az átviteli és a Banzhaf teljes érték axiómát.*

Az imént definiált indexek racionális feltételekből indultak ki, de amint látni fogjuk, más, szintén ésszerű feltételeket nem teljesítenek. Vizsgáljuk most az indexeket a következő három eset szempontjából, amikben módosítjuk a választási játékot (más forrás paradoxonként hivatkoznak rá):

1. Jelöljük (N_{ij}, v_{ij})-vel azt a játékot, amiben az i. és a j. szavazót összevonjuk, azaz úgy tekintünk rá, mintha egy szavazó lenne. (súlyok esetén összeadjuk a súlyukat). Ekkor indexeik is így viselkednének, azaz $k_i(v) + k_j(v) \geq k_{ij}(v)$ (*Property of size*).

2. Ha új tagokat adunk hozzá az N halmazhoz, az nem növelheti egyik szavazó erejét sem. (*Property of new members*)

3. Ha két koalíció nem fog össze, az nem növelheti egyikük választóerejét sem. (*Property of quarelling members*)

Valójában a három fontosabb index közül csak az arányos index kerüli el ezeket a paradoxonokat, Shapley és Banzhaf indexei mindhárom paradoxont magukban hordozzák.[10]

Ezek az esetek a valóságban is megjelenhetnek, és fontos, hogy a választási rendszerek korábban tárgyalt tulajdonságai mellett újabb jellemzést kaphatunk az indexeket használva.

5.3.3. Példa. A gyakorlatban hozott példa az 1958-as formálódó Európai Unió Miniszteri Tanácsának választási rendszere. Ebben, amint láthatjuk, példát kapunk a nullszavazó paradoxonra.

A tanács felépítése: Németország, Franciaország és Olaszország 4, Belgium, Hollandia 2, Luxemburg pedig 1 súllyal szavaz. A súlyok összege 17, a kvóta 12. A paritásokat vizsgálva vegyük észre, hogy Luxemburg nullszavazó: nincs olyan eset, amiben döntése változtatna az eredményen. Ez az indexeken is megmutatkozik: a 4 súllyal bíró szavazók Shapley indexe 23.3%, a 2 súlyúaké 15%, és Luxemburgé 0%.

Új szavazó hozzáadása már valóban megváltoztatná a helyzetet, ha ugyanis egy 1 súlyú szavazót adunk hozzá, a paritásokat megvizsgálva is látszik, hogy lesz erejük a döntéshez (indexük 5.7%-ra nő).

Korábban nem láthattunk olyan esetet, ahol nullszavazó létezése adódott volna, viszont az indexek vizsgálata rávilágít erre.

Sőt a következő tétel is teljesül, de ezt bizonyítás nélkül közöljük:

5.3.4. Tétel. *[11] A nullszavazó axiómából következik az új tagok paradoxona.*

5.4. A politikai erő

Az axiomatikus bevezetés helyett más irányból is el lehet jutni ezekhez az indexekhez a politikai erőn keresztül is. A politikai erőről való intuíció az, hogy A-nak politikai hatalma van B felett, ha A rá tudja venni B-t, hogy tegyen meg valamit, amit B egyébként nem tenne meg. [4] Ez valószínűségekkel is felírható, de mint azt később látni fogjuk, igencsak körülhatárolható, valószínűségektől mentes definíciót kapunk. A-nak ilyen értelemben politikai hatalma van, ha módosíthatja egy adott döntés kimenetelének valószínűségét. Ez lehet kis beleszólás, vagy teljes hatalom a döntés felett (1 vagy 0 valószínűség).

Formálisan: legyen A egy rögzített választó, és $s_i \in S$ a világ különböző állapotainak halmaza, ami a többi játékos szavazatainak kombinációból áll, továbbá legyen W a világ állapotainak valószínűségi változója, ezzel a jelöléssel $\mathrm{P}(W = s_i)$ az esélye, hogy a világ s_i állapotban van. Jelöljük H-val az A szavazó politikai erejének indikátor valószínűségi változóját, ami vegyen fel egyet olyan helyzetben, ha A képes eldönteni a szavazást (így $H : S \to [0, 1]$ függvény). A döntés kimenetele többféle is lehet, mi az igen/nem típusúakra szorítkozunk most.

Kézenfekvő definíciónak tűnik, hogy a politikai erő H várható értéke legyen: (teljes várható érték tételt alkalmazva)

$$Power(A) = E(H) = \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}} \varepsilon\, \mathrm{P}(H = \varepsilon) = \mathrm{P}(H = 1) = \sum_{s_i\in\mathcal{S}} \mathrm{P}(W = s_i)\mathrm{P}(H = 1|W = s_i) \tag{5.1}$$

Hogy ezt egyszerűbben kezeljük, vezessük be a következő jelölést. $\mathrm{P}(H = 1|W = s_i)$-t jelöljük $\mathbb{I}(s_i)$-nek, mint az W-re vonatkozó feltételes valószínűségi változót. Mivel a választási rendszert ismerjük, ha tudjuk a többi szavazatot, el tudjuk dönteni mi a kimenetel, így $\mathbb{I}$ indikátor változó lesz. [5]

Feltettük, hogy a választók 1/2-1/2 eséllyel szavaznak igent, vagy nemet, de ez a feltételezés elhagyható, és így a modell kiterjeszthető.

$\mathbb{I}$ annak az indikátor változója, hogy ha a világ s_i állapotban van, A el tudja-e dönteni a választás kimenetelét, ez pedig megfeleltethető a v koalíciós függvénnyel, amit a 2.1.11 definícióban írtunk.

5.5. Blokkok és koalíciók

Egészen idáig koalíciókról beszéltünk, ami szavazók egy nem erősen kötött halmaza. *Blokknak* nevezzük szavazók egy olyan halmazát, amelyek mindig együtt szavaznak. Gyakorlatilag egy ilyen blokkot visszavezethetjük egy kevesebb szavazóból álló választásra, ahol a blokkot egyetlen szavazó reprezentálja, nagyobb erővel.

5.5.1. Példa. Adott egy héttagú testület, amiben 3 ember blokkot alkot. Számoljuk ki a Shapley-Shubik indexüket, ha 4 szavazat kell az elfogadáshoz.

Legyen a blokk X, a többi négy ember pedig A, B, C és D. Ekkor vegyük ezen 5 ember permutációit. Az $XABCD$ alakú permutációkban A a pivot szavazó, ez 6 esetben fordul elő

A-nál, összesen 24 esetben A, B, C és D-vel. Szintén ennyi esetben lesznek pivot szavazók az $ABCDX$ alakúakban. A blokk pivot a fennmaradó $120 - 2 \cdot 24 = 72$ esetben. Így a blokk indexe: $\frac{72}{120} = \frac{3}{5}$, azaz a blokk tagjai egyenként $\frac{1}{5}$ jut, a többieké pedig $\frac{12}{120} = \frac{1}{10}$. A blokk tagjainak indexe kétszerese lett a blokkon kívüli szavazókénak.

Ha 4 ember állna össze, a hatalmuk teljes, így nekik $\frac{1}{4}$ lesz az indexük, míg a többieké 0.

Mivel $n!$ darab esetet kell megvizsgálni hamar nagy számokhoz juthatunk. A következő tétel segít leegyszerűsíteni a számolást.

5.5.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy egy n szavazónak kell szavaznia egy kérdésről. Az n szavazó között van egy x nagyságú blokk, valamint q a kvóta, azaz legalább q szavazat kell a támogatáshoz. Legyen $q > \frac{n}{2}$. Ekkor a blokk Shapley-Shubik indexe:*

$$\begin{array}{cc} \dfrac{x}{n-x+1} & \text{ha } x \leq n-q+1 \\ \dfrac{n-q+1}{n-x+1} & \text{ha } n-q+1 \leq x \leq q \\ \dfrac{x}{n-x+1} & \text{ha } q \leq x \end{array}$$

Bizonyítás. Tekintsük a blokkot egyetlen szavazónak, aminek a súlya a tagjainak az összege, és így alkalmazzuk rá a Shapley-Shubik érték kiszámátísára vonatkozó eljárást. Írjuk fel sorban az n darab szavazót úgy, hogy az első legyen a leginkább a döntés mellett, az utolsó pedig a legkevésbé. Mivel q a kvóta, emiatt a pivot szavazó a q. lesz a sorban. Mivel a blokk tagjait úgy tekintjük, mintha egy emberként szavaznának, így a sorrendben egymás mellé rakjuk őket, mégpedig az $i, i+1, \ldots i+x-1$ helyeken. Az i blokk-kezdőérték $n-x+1$ fajta lehet.

Amikor x $\leq n-q+1$ a blokk szavazói csak akkor kerülnek a pivot helyre, ha $i = q-x+1, q-x+2, \ldots q$, azaz az összes $n-x+1$ hely közül x darab lesz jó kiindulás. Mivel minden permutáció egyformán valószínű, így az esetek $\frac{x}{n-x+1}$ részében lesz pivot a blokk.

Amikor $n-q+1 \leq x \leq q$, akkor a legkisebb hely akkor is $q-x+1$ lesz, viszont a legnagyobb elem már $n-x+1$. Így hasonlóképpen a blokk indexe: $\frac{(n-x+1)-(q-x+1)+1}{n-x+1} = \frac{n-q+1}{n-x+1}$.

Amennyiben $q \leq x$, a blokknak teljes kontrollja van a szavazás felett, így a blokk indexe 1 (az ehhez tartozó képletből egy egynél nagyobb szám jön ki). $\square$

Vizsgáljuk most meg a másik gyakran előforduló indexet: a Banzhaf-ot.

5.5.3. Példa. Tekintsünk egy öttagú testületet, melyben van egy vezető. A vezetőnek, X-nek, két szavazat van, míg a többi négy tag 1-1 szavattal rendelkezik, ők legyenek A, B, C és D. A kvóta 4 szavazat. Számoljuk ki a Penrose-Banzhaf indexeit a szavazóknak. (Az 2.4.2 példa után definiált jelöléssel: elemezzük az [4|2,1,1,1,1] játékot.)

Legkevesebb 4 szavazat kell egy győző koalícióhoz. 4 szavazata van az $ABCD$ koalíciónak, és annak a hat koalíciónak, ami X-ből és még két másik tagból áll. Mindegyik esetben mindenki kritikus szavazó. Ez idáig 6 eset X-nek, és 4 a többinek. 5 szavazatot tartalmazó koalíciók az $XABC$, $XABD$, $XACD$, és $XBCD$. Mindegyikben csak X a kritikus szavazó, ez további 4 eset X-nek. $XABCD$ sebezhetetlen koalíció.

Ez összesen 26 eset. Ebből X 10-et, a többi szavazó 4-4-et birtokol. Így az indexeik: $(\frac{10}{26}, \frac{4}{26}, \frac{4}{26}, \frac{4}{26}, \frac{4}{26})$.

Ahogy látható, a Banzhaf index számolása sem könnyű, viszont algoritmikusan könnyebb, programozhatóbb. A súlyozott többségi szavazáshoz már internetes kalkulátorok is készültek.

5.5.1. Az amerikai elnök: egy alkalmazás

Bemutatunk egy alkalmazást a Shapley-Shubik indexre. Az amerikai választási rendszer igen gyakran a célkeresztbe kerül, amikor a választások igazságosságát mérlegelik az elemző. Egy kiragadott kérdéssel foglalkozunk csak: Mekkora erőt képvisel a döntéshozásban az elnök?

Az amerikai elnök egy dologgal van kitüntetve: az elnöki vétóval. Az amerikai törvényhozás három lépcsőjét figyeljük csak most: A Képviselőház 435 emberből áll, itt egyszerű többséghez 218, minősített többséghez 290 szavazat kell. A Szenátus 100 emberből áll, ebből 51 és 67 az egyszerű illetve a minősített többség határa. Miután mindkét szerv egyszerű többséggel megszavazta a javaslatot, az az elnökhöz kerül, aki átnézi, és élhet elnök vétójával. Elnöki vétó esetén a két másik szerv csak minősített többséggel fogadhatja el a törvényt, így ehhez jóval nagyobb egyetértés szükséges a Képviselőházban és a Szenátusban egyaránt.

Összesen 536 ember sorrendjét kell megnéznünk (az elnökkel együtt). Tegyük fel, hogy x darab képviselő és y darab szenátor előzi meg az elnököt a rendezésben. Őket $(x+y)!$ féleképpen rendezhetjük el, míg az elnök után lévőket pedig $(535-x-y)!$ féleképpen. Mivel $\binom{435}{x}$ féleképp választhatjuk ki a képviselőház tagjait, valamint $\binom{100}{y}$ a szenátorokat, így $N_{x,y}$-al jelölve adott (x, y) párra a rendezések száma:

$$N_{x,y} = (x+y)!(535-x-y)!\binom{435}{x}\binom{100}{y}$$

Ahhoz hogy megkapjuk a rendezések számát, ahol az elnök pivot szavazó, össze kell adni ezeket az $N_{x,y}$ tagokat az összes (x, y) párra, ahol egyszerű, de nem minősített többség van - a többi esetben, szavazati jog híján, nem kerül pivot helyzetbe. Azaz a p elnök indexe:

$$\Phi(p) = \sum_{i=218}^{435}\sum_{j=51}^{100} N_{x,y} - \sum_{i=290}^{435}\sum_{j=67}^{100} N_{x,y}$$

Tekintettel az $N_{x,y}$ nagyságrendjére, valamint a számítás bonyolultságára, ennek csak a közelítő összegével foglalkozunk. Matlab programcsomaggal kiszámolható a mennyiség, ami 0.16 körüli érték, azaz az elnök Shapley-Shubik indexe 16%.

Ahogy az alkalmazásból látszik, kicsit összetettebb esetben ezeket az indexeket nem könnyű kiszámolni.

Irodalomjegyzék

[1] Arrow, K. J.: A Difficulty in the Concept of Social Welfare. Journal of Political Econmomy 58 (4): 328-346 (1950)

[2] Felix Brandt, Vincent Conitzer, Ulle Endriss, Jérôme Lang, Ariel D. Procaccia: Handbook of Computational Social Choice. Cambridge University Press, 1-144 (2016)

[3] Campbell, D. E. and Kelly, J. S. Strategy-Proofness Characterization of Majority Rule. Economic Theory, 22(3), 557-568 (2003)

[4] Dahl, R. A.: The concept of power. Behavioral Science, 2(3), 201-215. (1957)

[5] Sreejith Das: Voting Power Techniques: What do they measure? Springer, (2014)

[6] Piotr Faliszewski, Edith Hemaspaandra, Lane A. Hemaspaandra: Using Complexity to Protect Elections. Communications of the ACM, Novermber 2010, vol 53, No 11. 74-82 (2010)

[7] Forgó Ferenc, Pintér Miklós, Simonovits András, Solymosi Tamás: Kooperatív játékelmélet. Elektronikus jegyzet, 1-21 (2006)

[8] Geanakoplos, J.: Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem. Econ. Theory 26, 211-215 (2005)

[9] Gibbard, A.: Manipulation of voting schemes: a general result. Econometrica 41, 587-600 (1973)

[10] Kóczy Á. László: Proportional power is free from paradoxes. (2004)

[11] Kóczy Á. László: Measuring voting power: The paradox of new members vs. the null player axiom. (2008)

[12] Francois Maniquet, Philippe Mongin: Approval voting and Arrow's impossibility theorem, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 519-531 (2014).

[13] Kenneth O May: A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision. Econometria, vol. 20, No. 4. 680-684 (1952)

[14] Moulin, H.: The Strategy of Social Choice. Amsterdam: North Holland. (1983)

[15] Hannu Nurmi: Voting Systems for Social Choice, Research Gate. (2009)

[16] William Poundstone: Gaming the Vote, Hill & Wang. (2008)

[17] Satterthwaite, M. A.: Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. J. Econ. Theory 10, 187-217 (1975)

[18] Markus Schulze: A new monotonic, clone-independent, reversal symmetric, and condorcet-consistent single-winner election method, Springer-Verlag 267-303 (2010)

[19] Végh László, Pap Júlia, Király Tamás: Játékelmélet jegyzet. Elektronikus jegyzet 44-48 (2013)

[20] W. D. Wallis: The Mathematics of Elections and Voting, Springer, 2014

[21] H. P. Young: Social Choice Scoring Functions, SIAM Journal on Applied Mathematics. Vol. 28, No. 4, 824-838 (1975)