

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

# Interpolációs módszerek gyakorlati alkalmazása

szakdolgozat

Készítette: Balácsi Tamás  
ELTE TTK  
Alkalmazott matematikus  
BSc

Témavezető: Kovács Péter  
Tanársegéd  
ELTE IK  
Numerikus Analízis Tanszék



Budapest, 2015. december 31.

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Kovács Péternek, hogy elvállalta a konzulensi teendőket és felkeltette érdeklődésemet a téma iránt. Hálás vagyok, hogy mindig rendelkezésemre állt és iránymutatásával, szakmai tanácsaival, észrevételeivel hozzájárult a dolgozat elkészüléséhez.

Külön köszönettel tartozom családomnak, barátaimnak, akik az évek alatt melletttem álltak és támogattak. Nélkülük ez a szakdolgozat nem jöhetett volna létre.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
<b>2. Matematikai háttér</b>	<b>7</b>
2.1. Spline-interpoláció . . . . .	7
2.1.1. Lokális spline-ok . . . . .	8
2.1.2. Globális spline-ok . . . . .	10
2.1.3. B-spline-ok . . . . .	12
2.2. Numerikus módszerek . . . . .	20
2.2.1. Givens-forgatások . . . . .	20
2.2.2. QR-felbontás . . . . .	21
2.3. Legkisebb négyzetek módszere . . . . .	22
2.3.1. Általánosított inverz . . . . .	24
2.3.2. Túlhatározott egyenletrendszerek megoldása . . . . .	27
2.3.3. Alulhatározott egyenletrendszerek megoldása . . . . .	28
<b>3. EKG-jelek tömörítése</b>	<b>30</b>
3.1. Tömörítés alappontelhagyással . . . . .	31
3.2. Együtthatók kiszámolása legkisebb négyzetek módszerével . . . . .	32
3.3. Alappontok rangsorolása . . . . .	37
3.4. Tesztek, eredmények . . . . .	39
<b>4. Összefoglalás</b>	<b>43</b>
<b>Függelék</b>	<b>46</b>

# 1. fejezet

## Bevezetés

### Előszó

Jelen dolgozatban függvények közelítésével és numerikus módszerekkel foglalkozunk. A gyakorlatban számos esetben felmerül olyan probléma, ahol nagyon költségesen kiszámítható függvénnyel kellene számolnunk egy adott intervallumon belül. Ilyenkor azt tehetjük, hogy néhány pontban kiszámítjuk a függvény értékeit, majd interpoláljuk a függvényt, azaz megpróbálunk olyan könnyebben kiszámítható függvényt mondani, ami pontosan illeszkedik a kapott pontokra. Ezután az intervallum további pontjaiban már az új függvény értékeit használjuk, mint az eredetinek egy közelítését. Fontos megjegyezni, hogy egyenlőséget a két függvény között csak bizonyos pontokra, az úgynevezett interpolációs alappontokra írunk elő. Az, hogy az interpolációs polinom milyen jól közelíti az eredeti függvényt az alappontokon kívül, nagyban függ a használt interpolációs módszertől.

Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy példát! Tegyük fel, hogy egy EKG-vizsgálat során a szív elektromos jelenségeit akarjuk mérni, és ehhez rendelkezésünkre áll egy megfelelő mérőeszköz. A műszer megadott időközökben megméri a szívizom összehúzódásakor keletkező elektromos feszültséget, és feljegyzi azt. A vizsgálat befejeztével tehát egy diszkrét adatsorozatot kapunk, ami esetünkben másodpercenként körülbelül 350 mért adat. Nyilvánvaló, hogy ennyi adattal rendkívül idő- és tárigényes dolgozni, ezért alkalmazhatunk interpolációt. Ezzel a feladattal részletesebben a 3. fejezetben foglalkozunk. Más alkalmazásokban arra van szükség, hogy az alappontokban interpoláció helyett csak közelítsük az eredeti függvényt, úgymond approximáljuk. Ennek a feladatnak a megoldása történhet például legkisebb négyzetes közelítéssel, úgynevezett spline függvények segítségével vagy akár ortogonális polinomok használatával.

Mint látható, a probléma igen sokrétű. Teljességre törekvő összefoglalásuk lehetetlen lenne a szakdolgozat keretein belül, így csak a 3. fejezetben bemutatott algoritmus szempontjából leglényegesebb numerikus módszereket és fogalmakat fogjuk sorra venni. A 2. fejezetben olyan fogalmakkal ismerkedünk majd meg, mint a spline függvények, ezen belül is a számunkra fontosabb B-spline függvények, továbbá a legkisebb négyzetes közelítés módszere illetve fontosabb numerikus módszerek. A 3. fejezetben elérkezünk a fő motivációhoz, ami egy hatékony jelfeldolgozó eljárás ismertetése. Az algoritmus tetszőleges természetű periodikus jelre alkalmazható. A dolgozat készítése során a választás az EKG-jelekre esett, azonban mindenféle fennakadás nélkül alkalmazható akár az agyi tevékenységet regisztráló EEG-jeleken vagy a páciens ujjbegyén rögzített fotopletizmográfias (PPG) jeleken. Végül a 4. fejezetben egy rövid összefoglalását adjuk a tapasztaltaknak. Kis kitérőként először ismerkedjünk meg az EKG-jelek tulajdonságaival!

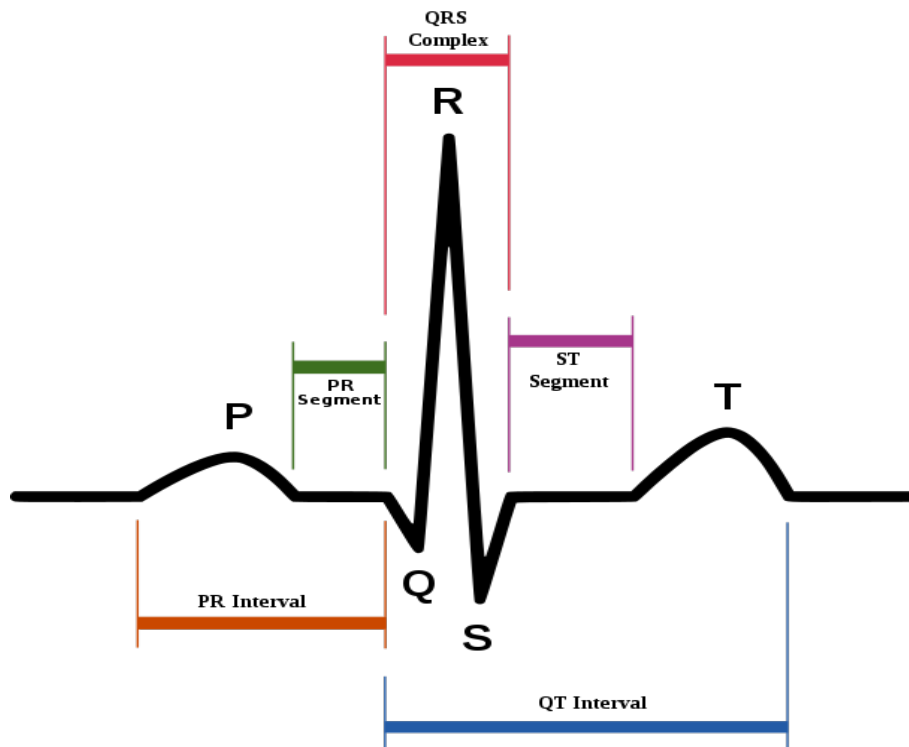
## Az EKG-jelekről

Az elektrokardiográfia (röviden EKG) egy non-invazív diagnosztikai eljárás, mely a szív működéséről ad hasznos információt. A szív elektromos jelenségeit vizsgálja a szívizom összehúzódásakor keletkező elektromos feszültség regisztrálásával.

A szív egy négy rekeszből álló pumpa, izomzata mintegy egymillió sejtből áll. Ezek jól koordinált együttműködése szükséges ahhoz, hogy a szív a szervezet megfelelő vérrellátását fenn tudja tartani. A sejtek közti együttműködés a depolarizált állapot (elektromos kisülés) terjedése útján valósul meg. A jobb pitvarban található a szív működés frekvenciáját meghatározó központ, a szinuszcsomó. Az itt lévő ún. ritmus adó (pacemaker) sejtek ingerléséhez szükséges küszöbszint változása miatt a szinuszcsomó autonóm módon percenként 40...200 elektromos impulzust állít elő. Ezek az impulzusok jól meghatározott irányokban terjednek szét a szív teljes izomzatán, depolarizálva az egyes sejteket. Ugyancsak jól meghatározott módon történik az egyes területek repolarizációja (elektromos újratöltődése). Ez az elektromos ingerület feljegyezhető. A páciens testére megadott pontokon elektródákat helyeznek el, az ezen „elvezetések” között fellépő feszültség értékeket szokás ábrázolni az idő függvényében. Ma már leginkább 12 elvezetéses EKG-felvételeket készítenek, a végtagokra illetve mellkasfalra elhelyezett elektródákkal.

Az így kapott EKG-hullám szabályos görbe, melynek egyedi sajátosságai vannak. A jel egy-egy szegmense gyakorlatilag egy-egy szívütésnek felel meg. Egy ilyen szeg-

mensen belül is megkülönböztetjük a részhullámokat, melyeket egységes, nemzetközi megállapodás alapján P, Q, R, S és T (néha még esetleg U) hullámoknak nevezünk. Minden hullám a szív egy meghatározott részének depolarizációját vagy repolarizációját jelenti. Az orvostudomány számára beszédes még az egyes hullámok mérete, köztük lévő távolság, stb.



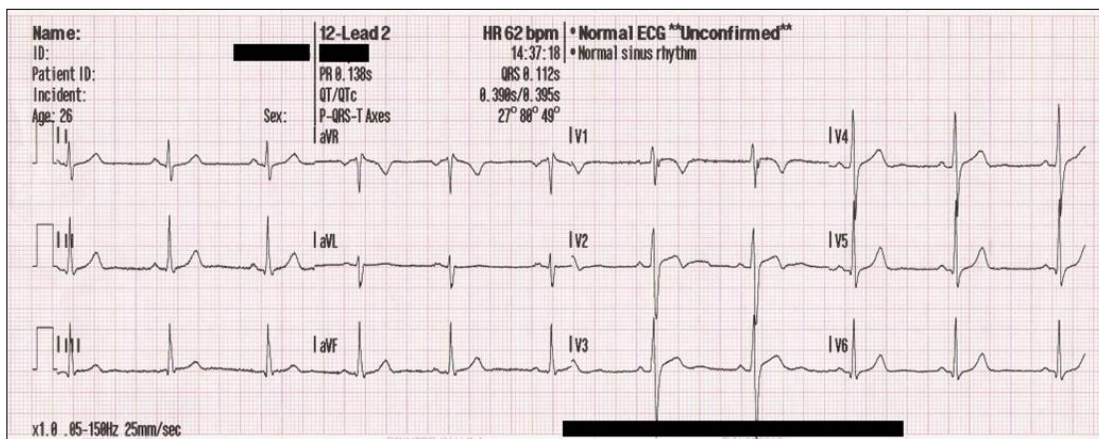
1.1. ábra. Egy szívütés sematikus ábrája.<sup>1</sup>

- P-hullám (pitvari hullám): pozitív amplitúdójú (1-2 mm), az ingerület pitvari terjedésének felel meg, időtartama 0,06-0,11 másodperc.
- P-Q távolság: átvezetési idő a pitvar és kamra között, időtartama 0,04-0,1 másodperc.
- QRS-komplexum (kamrai hullám): a kamrák depolarizációját jelöli (gyors lefolyású), kis negatív Q-hullámból (nem mindig észleljük), magas pozitív R-hullámból (kamraizomzat fő tömegének ingerületbe jutása, amplitúdója 10 mm) és negatív S-hullámból áll. Ez idő alatt megy végbe a kamra teljes munkaizomzatának depolarizációja. Időtartama 0,06-0,1 másodperc, amiből 0,03 másodperc az interventricularis septum (a kamrákat elválasztó sötény) depolarizációja, 0,055 másodperc a jobb kamra és 0,068 másodperc a bal kamra depolarizációja.

<sup>1</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/Electrocardiography>

- ST-szakasz: a kamrák lassú repolarizációs szakasza.
- T-hullám: elnyújtott közepes amplitúdójú hullám, a kamrák teljes repolarizációját jelzi, időtartama 0,20 másodperc.
- Q-T távolság: kamraizomzat depolarizációjának és repolarizációjának együttes időtartama.
- U-hullám: eredete bizonytalan, de jelezheti az interventricularis septum repolarizációját vagy a kamrák lassú újratöltődését. Időtartama 0,1-0,2 másodperc. Általában alacsony amplitúdójú, legtöbbször nincs is jelen.

A figyelmes Olvasónak feltűnhet, hogy a fenti amplitúdók milliméterben vannak megadva, holott itt elektromos potenciálokról van szó, melyet voltban (V) szokás mérni. Természetesen az elektrokardiográf a feszültség értékeket millivoltban (mV) jegyzi. A fent használt mennyiség, az orvosok által alkalmazott négyzetrácsos milliméter papír (lásd: 1.2. ábra) kockáira utal. A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy ezt a konvenciót használva 1 mm 0,1 mV-nak felel meg (vertikális irányban) illetve 40 millimásodpercnek (horizontális irányban).



1.2. ábra. Hagyományos, papíralapú EKG.<sup>2</sup>

<sup>2</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/Electrocardiography>

## 2. fejezet

# Matematikai háttér

### 2.1. Spline-interpoláció

A spline-interpoláció problémáját az alábbi módon fogalmazhatjuk meg.

Legyenek adva  $n \in \mathbb{N}$  és a  $t_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n + 1$  különböző számok (interpolációs alappontok), valamint az  $f(t_i) \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n + 1$  alappontokhoz tartozó számok. Mint ahogy a bevezetésben is utaltunk rá, ezek a számok rendszerint egy ismeretlen vagy igen költségesen számítható  $f$  függvény értékei.

A naiv (polinomillesztéses) felfogás szerint keressük azt a legfeljebb  $n + 1$ -edfokú polinomot, mely a megadott alappontokban a megadott függvényértékeket veszi fel. Belátható, hogy ilyen polinom mindig létezik és egyértelmű illetve megkonstruálására is számos módszer ismert (Lagrange-, Hermite<sup>3</sup>-interpoláció). Azonban, ha az interpoláló polinom fokszámát növeljük, gyakran azt tapasztalhatjuk, hogy a magasabb fokszámú polinomok erőteljes hullámzást mutatnak az alappontok környezetében. Olyannyira, hogy ránézésre sem hihető, hogy a függvényt jól közelítik. Érdekes problémákat vet fel az a kérdés, mely szerint az alappontok számát növelve, vajon található-e olyan pontrendszer-sorozat, melyen egyre pontosabban lehet közelíteni bármilyen folytonos függvényt. Esetleg létezik olyan folytonos függvény, melyet semmilyen pontrendszeren sem tudunk jól közelíteni? Ugyan ez a téma nem kapcsolódik szorosan a szakdolgozathoz, az érdeklődők kedvéért megjegyezzük, hogy mindkét kérdésre nem a helyes válasz. Az ide kapcsolódó két tétel, az approximációelmélet fontos tételei (Faber, Marcinkiewicz<sup>4</sup>), elolvasható például [6]-ban.

---

<sup>3</sup>Joseph-Louis Lagrange olasz matematikus (1736 – 1813), Charles Hermite francia matematikus (1822 – 1901).

<sup>4</sup>Georg Faber német matematikus (1877 – 1966), Józef Marcinkiewicz lengyel matematikus (1910 – 1940).



Visszatérve, lehetőségünk van a megadott pontrendszerre más típusú függvényeket is illeszteni. A spline-interpoláció alapötlete, hogy csak az egyes részintervallumokra alkalmazzunk polinomokat, az intervallumhatárokon pedig a polinomokat folytonosan illesszük. Lehetőség szerint a folytonosságot a deriváltakra is írjuk elő. Ily módon polinomok helyett, szakaszonként polinom függvényekkel, az ún. spline függvényekkel közelítünk.

A spline [ejtsd: „szplájn”] angolul dongát jelent, ami alatt azokat a fabordákat értjük, amikkel a kádár kirakja a hordó alakját. Spline-oknak hívják angol nyelvterületen azokat a hajlítható, görbíthető „vonalzókat” is, amelyekkel görbe vonal rajzolható. Itt most matematikailag hasonló dolog történik: az egyes részintervallumokban függvényíveket polinomokból készítünk, amelyeket „összevarrunk” az intervallumhatárokon valamilyen folytonossági követelmény szerint.

**2.1.1. Definíció.** Legyen adott  $I_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}\}$  az  $[a, b]$  intervallum egy felosztása (ahol  $t_0 = a$ ,  $t_{n+1} = b$ ) és  $k \in \mathbb{N}^+$ . Az  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k$ -adrendű spline az  $I_n$ -re vonatkozóan, ha:

- $s|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \mathbb{P}^{k-1}$ , azaz két szomszédos osztópont közötti intervallumon  $(k - 1)$ -edfokú polinom,
- $s \in C^{k-2}[a, b]$ , tehát a teljes intervallumon  $(k - 2)$ -szer folytonosan differenciálható.

**2.1.2. Jelölés.**  $S_k(I_n)$ -nel jelöljük az  $I_n$ -hez tartozó  $k$ -adrendű spline-ok halmazát.

Most térjünk rá arra, hogy miként lehet az interpolációs spline-okat meghatározni. Ennek háromféle megközelítése ismeretes, ezek a lokális-, globális- és B-spline-ok.

### 2.1.1. Lokális spline-ok

Ahhoz, hogy megadjuk az interpolációs spline függvényt, minden intervallumra elő kell állítanunk egy-egy  $k$ -adrendű polinomot. Feltéve, hogy a polinomokat az együtt-hatóikkal tároljuk el, a meghatározandó paraméterek száma  $(n + 1) \cdot k$ . Az előírt feltételek száma:  $(n + 1) \cdot k - (k - 2)$ , ugyanis van  $k - 2$  darab simasági feltétel az  $n$  darab belső pontban illetve  $2 \cdot (n + 1)$  darab interpolációs feltétel az  $n + 1$  darab intervallum két végpontjában. Összesen:  $(k - 2) \cdot n + 2 \cdot (n + 1) = (n + 1) \cdot k - (k - 2)$ . Innen látszik, hogy  $k - 2$  darab feltétel még hiányzik az egyértelműséghez. Ezeket a feltételeket általában a végpontokra adják meg.

Az irodalom a spline-okat gyakran fokszámuk segítségével definiálja, ám előfordul a renden keresztüli tárgyalási mód is. A 3. fejezetben bemutatott eljárás ez utóbbit használja. Ezért a dolgozatban, ha nem okoz félreértést, akkor a rendet használjuk a spline-ok definiálásához. A kettő közötti kapcsolat: fokszám = rend - 1. A gyakorlatban leginkább az első-, másod- és harmadfokú spline-okat szokták alkalmazni.

### **Elsőfokú, lineáris spline (k=2)**

Lineáris spline esetén a feltételek egyértelműen meghatározzák a spline-t. Tetszőleges  $[t_{i-1}, t_i]$  intervallumra:

$$\begin{aligned} s(t_{i-1}) &= a_i \cdot t_{i-1} + b_i = f(t_{i-1}), \\ s(t_i) &= a_i \cdot t_i + b_i = f(t_i). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ebből a két ismeretlenes egyenletrendszerből egyértelműen meghatározható  $a_i$  és  $b_i$ . Az eredmény egy töröttvonal. A számítógép nagyon gyakran így rajzolja ki a diszkrét értékeivel megadott függvényt. Ha a felbontás elég sűrű, akkor a vonalak törése nem annyira szembetűnő.

### **Másodfokú, kvadratikus spline (k=3)**

Másodfokú spline esetében  $k - 2 = 1$  feltétel hiányzik a spline egyértelmű felírásához. Ezt leggyakrabban az intervallum elején vagy végén a derivált megadásával szokták teljesíteni. Ekkor a spline egyértelműen meghatározható, ha például az egymás melletti intervallumokra másodfokú Hermite-interpolációt alkalmazunk. Amennyiben a derivált értékét nem ismerjük, egy másik lehetőség az első három alapponton átvett parabolával kezdeni. Ezután a spline már az előzőhöz hasonló módon meghatározható.

### **Harmadfokú, köbös spline (k=4)**

Harmadfokú spline esetében  $k - 2 = 2$  feltétel hiányzik a spline egyértelműségéhez. Ezt általában az intervallum elején és végén, peremfeltételek megadásával szokás teljesíteni. A leggyakrabban használt peremfeltételek ez esetben a következők:

1. Természetes peremfeltétel:  $s''(a) = s''(b) = 0$ .
2. Hermite-féle peremfeltétel:  $s'(a) = s_a, s'(b) = s_b$  előre megadott számok.

3. Periodikus peremfeltétel:  $s'(a) = s'(b)$  és  $s''(a) = s''(b)$ , (ekkor feltesszük, hogy  $s(a) = s(b)$  is teljesül).

A peremfeltételek megadásával a spline-interpolációs feladat egyértelműen megoldható.

### 2.1.2. Globális spline-ok

Ezúttal egy teljesen új megközelítést alkalmazunk. Ehhez tekintsünk vissza a már ismertetett  $S_k(I_n)$  térhez, és próbáljuk meg megállapítani a dimenzióját.

Az alábbi  $n + k$  darab speciális spline függvényeket globális spline-oknak fogjuk nevezni.

$$G := \{1, x, x^2, \dots, x^{k-1}, (x - t_1)_+^{k-1}, \dots, (x - t_n)_+^{k-1}\} \subset S_k(I_n), \text{ ahol}$$

$$(x - t_i)_+^{k-1} = \begin{cases} (x - t_i)^{k-1}, & \text{ha } x \geq t_i, \\ 0, & \text{ha } x < t_i. \end{cases} \quad (2.2)$$

**2.1.3. Tétel.**  $\dim(S_k(I_n)) = n + k$ .

**Bizonyítás.** A tétel igazolásához elegendő belátni, hogy a globális spline-ok épp a tér egy bázisát adják. Így először belátjuk, hogy  $G$  egy független rendszer, majd azt, hogy egyben generátorrendszer is. Vegyük tehát  $G$ -nek egy lineáris kombinációját, ami 0-val egyenlő.

$$g(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot x^i + \sum_{i=1}^n b_i \cdot (x - t_i)_+^{k-1} = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2.3)$$

Definíció szerint be kell látnunk, hogy az  $a_i$  illetve  $b_i$  együtthatók mind 0-val egyenlőek. A továbbiakban válasszunk  $y_1, y_2, \dots, y_k \in [t_0, t_1)$  különböző értékeket. Ekkor

$$g(y_j) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot y_j^i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (2.4)$$

az algebra alaptételéből következik, hogy  $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$ . Ezek után  $z_i \in (t_i, t_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  választással a következő adódik:

$$g(z_i) = b_i \cdot (z_i - t_i)_+^{k-1} = 0. \quad (2.5)$$

Mivel  $(z_i - t_i)_+^{k-1} \neq 0$ , ezért  $b_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  következik, ami épp a függetlenséget jelenti.

$G$  generátorrendszer mivolta abban nyilvánul meg, hogy tetszőleges  $s \in S_k(I_n)$  esetén, létezik  $G$  elemeinek olyan lineáris kombinációja, amely előállítja  $s$ -et.

$$s(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot x^i + \sum_{i=1}^n b_i \cdot (x - t_i)_+^{k-1}. \quad (2.6)$$

Ezt  $n$ -szerinti (a részintervallumok száma szerinti) teljes indukcióval igazoljuk. Az  $n = 0$  eset triviális, hiszen ekkor  $s$  egy  $k$ -adrendű polinom. Tegyük fel most, hogy  $n - 1$ -re igaz az állítás, azaz tetszőleges  $S_k(I_{n-1})$ -beli spline előáll a kívánt alakban. Legyen  $s$  egy tetszőleges  $S_k(I_n)$ -beli spline, és jelöljük  $s^*$ -gal az  $s$  leszűkítését a  $[t_0, t_n]$  intervallumra. Nyilvánvaló, hogy  $s^* \in S_k(I_{n-1})$ , így alkalmazhatjuk rá az indukciós feltevésünket:

$$s^*(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot x^i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \cdot (x - t_i)_+^{k-1}. \quad (2.7)$$

Illetve a két spline különbségére érvényes, hogy:

$$d(x) = s(x) - s^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [t_0, t_n] \\ k\text{-adrendű polinom,} & \text{ha } x \in [t_n, t_{n+1}] \end{cases} \quad (2.8)$$

A  $d$  függvény kielégíti az alábbi differenciálegyenletet a  $[t_n, t_{n+1}]$  intervallumon,

$$\begin{cases} d^{(k)}(x) = 0, \\ d^{(l)}(t_n) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, k-2 \end{cases} \quad (2.9)$$

melynek megoldása

$$d(x) = b_n \cdot (x - t_n)_+^{k-1}, \quad x \in [t_n, t_{n+1}], \quad (2.10)$$

vagyis

$$d(x) = b_n \cdot (x - t_n)_+^{k-1}. \quad (2.11)$$

Így (2.8)-at átrendezve kapjuk, hogy

$$s(x) = s^*(x) + b_n \cdot (x - t_n)_+^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot x^i + \sum_{i=1}^n b_i \cdot (x - t_i)_+^{k-1}. \quad (2.12)$$

Ezzel kész a bizonyítás.  $\square$

A tétel értelmében tehát az  $S_k(I_n)$  tér bármely eleme egyértelműen felírható globál-

lis spline-ok lineáris kombinációjaként. Noha a globális spline-okat könnyű meghatározni, a gyakorlatban mégsem ez a reprezentáció honosodott meg. Erre a célra sokkal alkalmasabbak a B-spline függvények, amelyeket a következő szakaszban ismertetünk.

### 2.1.3. B-spline-ok

**2.1.4. Definíció.** A  $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$  halmazt az  $f$  függvény tartójának nevezzük.

Mielőtt belekezdenénk a B-spline függvények tárgyalásába, terjesszük ki az  $I_n$  felosztást mindkét irányba. Az  $I_\infty := \{\dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \dots\}$  már az egész számegegyenes egy felosztását adja. A B-spline függvényeket ezen a felosztáson fogjuk értelmezni. A definíció sajátosságát az adja, hogy olyan spline függvényeket definiálunk, melyeknek kicsi a tartója.

**2.1.5. Definíció.** Legyen  $\tau := \{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}\} \subset I_\infty$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$ . A  $B_{i,k,\tau}(x)$ -szel jelölt  $k$ -adrendű spline függvényt, a  $\tau$  felosztásra vonatkozó,  $k$ -adrendű B-spline függvénynek nevezzük, ha kielégíti az alábbi rekurziót:

$$B_{i,1,\tau}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (2.13)$$

$k = 1$  esetén illetve

$$B_{i,k,\tau}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \cdot B_{i,k-1,\tau}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,k-1,\tau}(x) \quad (2.14)$$

$k \geq 2$  esetén, valamint a

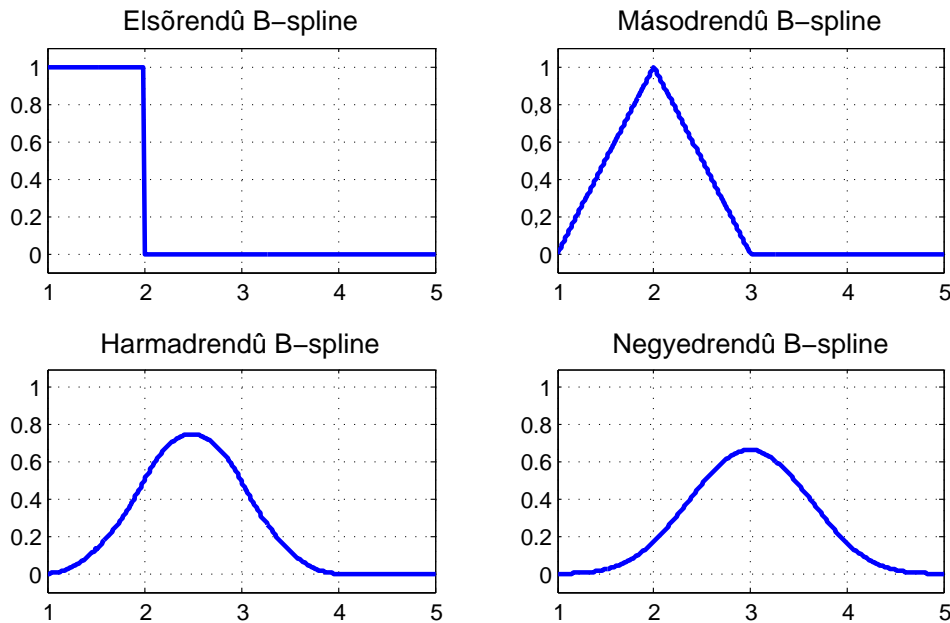
$$\frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} \quad \text{és} \quad \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i}$$

kifejezéseket 0-nak tekintjük, valahányszor

$$t_{i+k} - t_{i+1} = 0 \quad \text{illetve} \quad t_{i+k-1} - t_i = 0.$$

**2.1.6. Megjegyzés.** A teljes  $I_\infty$  felosztásra vonatkozó  $k$ -adrendű B-spline függvényt az egyszerűség kedvéért csak  $B_{i,k}$ -val fogjuk jelölni. ( $i \in \mathbb{Z}$ )

**2.1.7. Megjegyzés.**  $B_{i,1}$  egy lépcsős függvény, mely mindenütt 0, kivéve egy félig nyílt intervallumon  $[t_i, t_{i+1})$  (lásd: 2.1. ábra).



2.1. ábra. Alacsonyabb rendű B-spline-ok.

**2.1.8. Megjegyzés.** Egy  $k > 1$  rendű B-spline előáll két  $(k - 1)$ -edrendű B-spline lineáris kombinációjaként (lásd: 2.2. ábra).

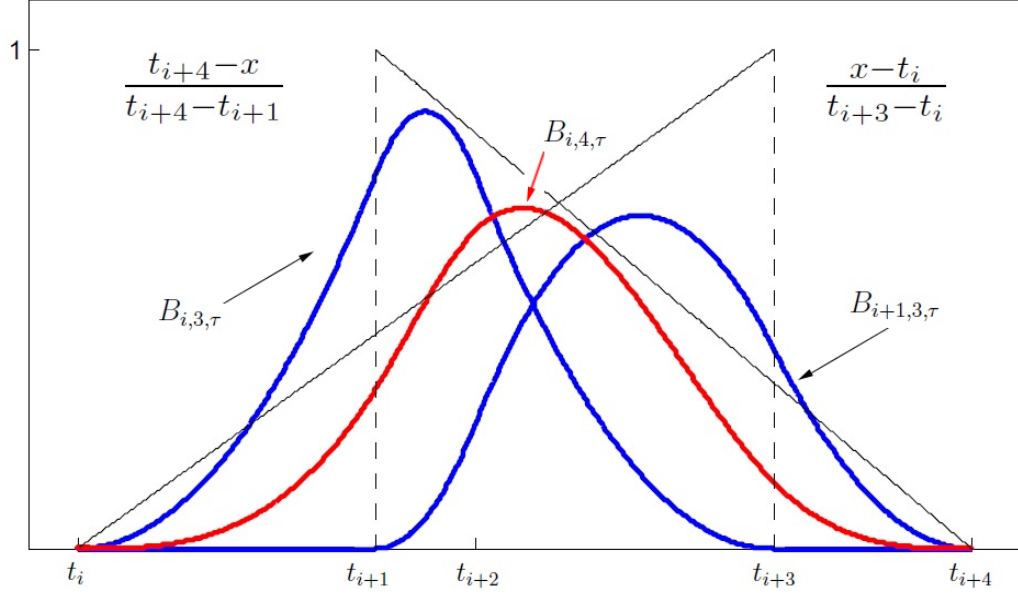
**2.1.9. Állítás.** A fent említett  $B_{i,k}$ -ra a következő állítások érvényesek:

1.  $\text{supp}(B_{i,k}) = [t_i, t_{i+k}]$ ,
2.  $B_{i,k}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ,
3.  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{i,k}(x) = 1$ .

**Bizonyítás.**

1. Vegyük észre, hogy a rekurzív formának köszönhetően  $B_{i,k}$  egy kombinációja a  $B_{i,1}, B_{i+1,1}, \dots, B_{i+k-1,1}$  elsőrendű B-spline-oknak, így  $B_{i,k}$  csak a  $[t_i, t_{i+k}]$  intervallumon vehet fel nemnulla értéket.
2.  $k$  szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ahogy már láttuk, a  $k = 1$  elsőrendű B-spline-okra az állítás triviálisan teljesült. Tegyük fel tehát, hogy  $k-1$ -edrendű ( $k > 1$ ) az állítás igaz, majd írjuk fel a  $k$ -adrendű B-spline definícióját:

$$B_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \cdot B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,k-1}(x). \quad (2.15)$$



2.2. ábra. B-spline függvények rekurzív definíciója.

Az előző pont tanulsága szerint  $B_{i,k-1}(x) = 0$ , ha  $x \notin [t_i, t_{i+k-1}]$ . Azonban ha  $x \in [t_i, t_{i+k-1}]$ , akkor a

$$\frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \quad (2.16)$$

kifejezés értéke nemnegatív illetve ekkor  $B_{i,k-1}(x)$  értéke egyaránt nemnegatív, az indukciós feltevésünk miatt. A másik tagra hasonló gondolatmenet mondható el.

3. Feltehető, hogy  $x \in [t_i, t_{i+1}]$ , ekkor:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{i,k}(x) &= \sum_{j=i-k+1}^i B_{j,k}(x) = \sum_{j=i-k+1}^i \frac{x - t_j}{t_{j+k-1} - t_j} \cdot B_{j,k-1}(x) + \\ &+ \sum_{j=i-k+1}^i \frac{t_{j+k} - x}{t_{j+k} - t_{j+1}} \cdot B_{j+1,k-1}(x). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Most cseréljük fel a futóindexet  $i - k + 1$ -ről  $i - k + 2$ -re a második szummában, és vegyük figyelembe, hogy  $B_{i-k+1,k-1}(x) = B_{i+1,k-1}(x) = 0$ . Mindez azt

eredményezi, hogy összevonhatjuk a két szummát.

$$\begin{aligned} \sum_{j=i-k+1}^i B_{j,k}(x) &= \sum_{j=i-k+2}^i \left( \frac{x-t_j}{t_{j+k-1}-t_j} + \frac{t_{j+k-1}-x}{t_{j+k-1}-t_j} \right) \cdot B_{j,k-1}(x) = \\ &= \sum_{j=i-k+2}^i B_{j,k-1}(x). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Végezetül nem csinálunk mást, mint rekurzíve felhasználjuk (2.18)-at.

$$\begin{aligned} \sum_{j=i-k+1}^i B_{j,k}(x) &= \sum_{j=i-k+2}^i B_{j,k-1}(x) = \sum_{j=i-k+3}^i B_{j,k-2}(x) = \\ &= \dots = \sum_{j=i}^i B_{j,1}(x) = 1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ezzel végeztünk az állítás bizonyításával.  $\square$

Az eddigiek ismeretében nyilvánvaló, hogy adott  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  esetén, az  $I_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}\}$  alappontrendszerre ( $t_0 = a, t_{n+1} = b$ ), azonnal meg tudunk határozni  $n - k + 2$  db lineárisan független B-spline függvényt ( $B_{i,k,I_n}(x), i = 0, \dots, n - k + 1$ ). Ahhoz, hogy megkapjuk az  $S_k(I_n)$  tér teljes bázisát, további  $2k - 2$  db lineárisan független spline-ra van szükségünk. Ezeket új alappontok  $t_{-k+1}, \dots, t_{-1}$  és  $t_{n+2}, \dots, t_{n+k}$  hozzávételével nyerjük, az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} t_{-k+1} &\leq t_{-k+2} \leq \dots \leq t_{-1} \leq t_0 = a, \\ b &= t_{n+1} \leq t_{n+2} \leq \dots \leq t_{n+k-1} \leq t_{n+k}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A következő két tétel döntő fontosságú lesz a B-spline-ok tanulmányozásában.

**2.1.10. Tétel. (Curry-Schoenberg<sup>5</sup>, 1947)** *Legyen  $f$  egy  $S_k(I_n)$ -beli spline,  $\tau = \{t_{-k+1}, \dots, t_{n+k}\}$  az  $I_n$  kibővítése (2.20) szerint. Ekkor egyértelműen léteznek olyan  $c_i$  együtthatók, hogy*

$$f(x) = \sum_{i=-k+1}^n c_i \cdot B_{i,k,\tau}(x), \quad (2.21)$$

*azaz minden spline felírható B-spline bázisban.*

---

<sup>5</sup>Haskell Curry amerikai matematikus (1900 – 1982), Isaac Jacob Schoenberg román származású amerikai matematikus (1903 – 1990).



**2.1.11. Megjegyzés.** A tételben szereplő  $c_i$ -t az  $f$   $i$ -edik B-spline együtthatójának nevezzük.

**Bizonyítás.** A 2.1.3. tételből ismeretes, hogy az  $S_k(I_n)$  tér dimenziója  $n + k$ . Így a fenti állítás igazolásához elég annyit belátni, hogy a fenti  $\tau$  alappontrendszerre illeszkedő  $n + k$  darab B-spline függvény valóban lineárisan független rendszert alkot. Ezt  $k$ -szerinti teljes indukcióval látjuk be. Az elsőrendű B-spline-ok esetében egyértelmű az állítás. A  $k > 1$  esetre be kell látni, hogy (2.22) akkor és csak akkor teljesül, ha  $a_i = 0$  minden  $i$ -re.

$$\sum_{i=-k+1}^n a_i \cdot B_{i,k,\tau}(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2.22)$$

A bizonyításhoz felhasználjuk a B-spline függvény deriváltjának képletét:

$$(B_{i,k,\tau}(x))' = (k-1) \cdot \left( \frac{1}{t_{i+k-1} - t_i} \cdot B_{i,k-1,\tau}(x) - \frac{1}{t_{i+k} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,k-1,\tau}(x) \right). \quad (2.23)$$

Ez utóbbi állítást szintén  $k$ -szerinti teljes indukcióval, valamint a szorzat deriválási szabályát felhasználva lehet igazolni. A bizonyítás technikai jellegű, új ötletet, ismeretet nem tartalmaz, így ezt a részt nem részletezzük. A teljes bizonyítás megtekinthető például [11]-ben a 86-87. oldalakon.

Visszatérve (2.22)-höz belátjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \sum_{i=-k+1}^n a_i \cdot B_{i,k,\tau}(x) \right)' = \sum_{i=-k+1}^n a_i \cdot B'_{i,k,\tau}(x) = \\ &= (k-1) \cdot \sum_{i=-k+1}^n a_i \cdot \left( \frac{B_{i,k-1,\tau}(x)}{t_{i+k-1} - t_i} - \frac{B_{i+1,k-1,\tau}(x)}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Mivel ez esetben  $k \neq 1$ , az következik, hogy:

$$0 = \sum_{i=-k+1}^n a_i \cdot \frac{B_{i,k-1,\tau}(x)}{t_{i+k-1} - t_i} - \sum_{i=-k+1}^n a_i \cdot \frac{B_{i+1,k-1,\tau}(x)}{t_{i+k} - t_{i+1}}. \quad (2.25)$$

Figyelembe véve, hogy  $x \in [t_0, t_{n+1}]$ ,  $B_{-k+1,k-1,\tau}(x) = B_{n+1,k-1,\tau}(x) = 0$  adódik, valamint egy  $i \rightarrow i + 1$  indexátmenetet végrehajtva a második szummában, (2.25) a

következő alakra hozható:

$$0 = \sum_{i=-k+2}^n \frac{a_i - a_{i-1}}{t_{i+k-1} - t_i} \cdot B_{i,k-1,\tau}(x). \quad (2.26)$$

Ebből az indukciós feltevésünket kihasználva  $a_i - a_{i-1} = 0$ ,  $i = -k + 2, \dots, n$  állítható. Ez tehát azt jelenti, hogy az összes  $a_i$  együttható megegyezik valamely  $\alpha \in \mathbb{R}$  számmal,  $i = -k + 1, \dots, n$ .

Mindez (2.22)-re vonatkoztatva az alábbiakat jelenti:

$$0 = \sum_{i=-k+1}^n a_i \cdot B_{i,k,\tau}(x) = \sum_{i=-k+1}^n \alpha \cdot B_{i,k,\tau}(x) = \alpha \cdot \sum_{i=-k+1}^n B_{i,k,\tau}(x) = \alpha. \quad (2.27)$$

Az utolsó pontnál felhasználtuk a 2.1.9. állítást. Végeredményben tehát minden  $i$ -re  $a_i = \alpha = 0$ -t kapunk. Ezzel teljes a bizonyítás.  $\square$

A fent szereplő  $t_{-k+1}, \dots, t_{-1}$  és  $t_{n+2}, \dots, t_{n+k}$  alappontok választásában szabadságunk van, azonban a gyakorlat számára érdemes az alábbiak szerint választani őket:

$$\begin{aligned} t_{-k+1} &= t_{-k+2} = \dots = t_{-1} = t_0 = a, \\ b &= t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+k-1} = t_{n+k}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ez a választás azt eredményezi, hogy az összes B-spline függvény eltűnik az  $[a, b]$  intervallumon kívül. Ezentúl, ha külön nem jelezzük,  $\tau$  alatt mindig az ily módon kiegészített alappontrendszer értjük. A  $t_1, \dots, t_n$  alappontokat belső alappontoknak hívjuk, a későbbi pontelhagyó algoritmus során egyedül ezek a csomópontok lesznek elhagyhatóak.

**2.1.12. Tétel.** *Legyen  $\tau = \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$  a számegyenes egy tetszőleges felosztása,  $\tau^* := \{t_i^*\}_{i=-\infty}^{+\infty} = \tau \setminus \{t_p\}$ , a  $t_p$  alappont elhagyásával kapott új alappontrendszer. Ekkor:*

$$B_{i,k,\tau^*}(x) = \begin{cases} B_{i,k,\tau}(x), & \text{ha } i \leq p - k - 1, \\ \frac{t_p - t_i}{t_{i+k} - t_i} \cdot B_{i,k,\tau}(x) + \frac{t_{i+k+1} - t_p}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,k,\tau}(x), & \text{ha } p - k \leq i \leq p - 1, \\ B_{i+1,k,\tau}(x), & \text{ha } i \geq p. \end{cases} \quad (2.29)$$

**Bizonyítás.** Írjuk fel a két pontrendszer közötti kapcsolatot.

$$\begin{aligned} t_i^* &= t_i, & \text{ha } i &\leq p-1, \\ t_i^* &= t_{i+1}, & \text{ha } i &\geq p. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$B_{i,k,\tau^*}$  lokális tulajdonságának köszönhetően, lévén csak a  $[t_i^*, t_{i+k}^*]$  intervallumon belül vehet fel nemnulla értéket, az állítás triviális az  $i \leq p-k-1$ ,  $i \geq p$  esetekben. A fennmaradó intervallumra  $k$  szerinti teljes indukcióval, valamint (2.14)-et felhasználva bizonyítunk.

$k = 1$  esetén az állítás triviális:

$$\begin{aligned} B_{p-1,1,\tau^*}(x) &= \frac{t_p - t_{p-1}}{t_p - t_{p-1}} \cdot B_{p-1,1,\tau}(x) + \frac{t_{p+1} - t_p}{t_{p+1} - t_p} \cdot B_{p,1,\tau}(x) = \\ &= B_{p-1,1,\tau}(x) + B_{p,1,\tau}(x). \end{aligned} \quad (2.31)$$

$k > 1$  esetén tegyük fel, hogy az alacsonyabb rendű B-spline-okra igaz az állítás. Ekkor felhasználva (2.14)-et és (2.30)-et, az alábbi mondható:

$$\begin{aligned} B_{i,k,\tau^*}(x) &= \frac{x - t_i^*}{t_{i+k-1}^* - t_i^*} \cdot B_{i,k-1,\tau^*}(x) + \frac{t_{i+k}^* - x}{t_{i+k}^* - t_{i+1}^*} \cdot B_{i+1,k-1,\tau^*}(x) = \\ &= \frac{x - t_i}{t_{i+k-1}^* - t_i} \cdot B_{i,k-1,\tau^*}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}^*} \cdot B_{i+1,k-1,\tau^*}(x) = \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

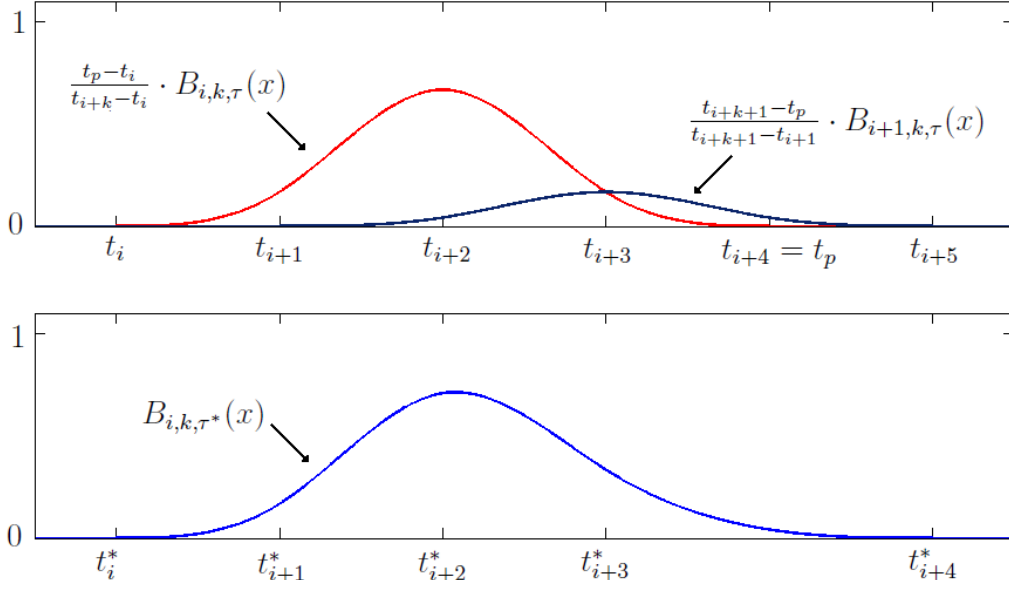
Ezután külön meg kell vizsgálni az  $i = p-k$ ,  $p-k+1 \leq i \leq p-2$  és az  $i = p-1$  eseteket.

Az  $i = p-k$  esetét láthatjuk a 2.3. ábrán. Ekkor ugyanis (2.32) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\dots = \frac{x - t_{p-k}}{t_{p-1} - t_{p-k}} \cdot B_{p-k,k-1,\tau^*}(x) + \frac{t_{p+1} - x}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} \cdot B_{p-k+1,k-1,\tau^*}(x) = \dots \quad (2.33)$$

Most használjuk ki indukciós feltevésünket, térjünk át a kibővített alappontrendszerre. Vegyük észre, hogy ebben az esetben  $B_{p-k,k-1,\tau^*}$  megegyezik  $B_{p-k,k-1,\tau}$ -val.

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{x - t_{p-k}}{t_{p-1} - t_{p-k}} \cdot B_{p-k,k-1,\tau}(x) + \frac{t_{p+1} - x}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} \cdot \frac{t_p - t_{p-k+1}}{t_p - t_{p-k+1}} \cdot B_{p-k+1,k-1,\tau}(x) + \\ &+ \frac{t_{p+1} - x}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} \cdot \frac{t_{p+1} - t_p}{t_{p+1} - t_{p-k+2}} \cdot B_{p-k+2,k-1,\tau}(x) = \dots \end{aligned}$$



2.3. ábra. Pontrendszerek kapcsolata.

$$\begin{aligned}
\dots &= \left( \frac{x - t_{p-k}}{t_{p-1} - t_{p-k}} \cdot B_{p-k,k-1,\tau}(x) + \frac{t_p - x}{t_p - t_{p-k+1}} \cdot B_{p-k+1,k-1,\tau}(x) \right) - \\
&- \frac{t_p - x}{t_p - t_{p-k+1}} \cdot B_{p-k+1,k-1,\tau}(x) - \frac{t_{p+1} - t_p}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} \cdot \frac{x - t_{p-k+1}}{t_p - t_{p-k+1}} \cdot B_{p-k+1,k-1,\tau}(x) + \\
&+ \frac{t_{p+1} - t_p}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} \cdot \left( \frac{x - t_{p-k+1}}{t_p - t_{p-k+1}} \cdot B_{p-k+1,k-1,\tau}(x) + \frac{t_{p+1} - x}{t_{p+1} - t_{p-k+2}} \cdot B_{p-k+2,k-1,\tau}(x) \right) \\
&+ \frac{t_{p+1} - x}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} \cdot B_{p-k+1,k-1,\tau}(x) = \dots
\end{aligned}$$

Használjuk fel most (2.14)-et a zárójeles tagok átalakítására.

$$\begin{aligned}
\dots &= B_{p-k,k,\tau}(x) - \frac{t_p - x}{t_p - t_{p-k+1}} \cdot B_{p-k+1,k-1,\tau}(x) + \frac{t_{p+1} - t_p}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} \cdot B_{p-k+1,k,\tau}(x) - \\
&- \frac{t_{p+1} - t_p}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} \cdot \frac{x - t_{p-k+1}}{t_p - t_{p-k+1}} \cdot B_{p-k+1,k-1,\tau}(x) + \frac{t_{p+1} - x}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} \cdot B_{p-k+1,k-1,\tau}(x) = \\
&= B_{p-k,k,\tau}(x) + \frac{t_{p+1} - t_p}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} \cdot B_{p-k+1,k,\tau}(x) + \left( \frac{t_{p+1} - x}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} - \frac{t_p - x}{t_p - t_{p-k+1}} - \right. \\
&- \left. \frac{t_{p+1} - t_p}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} \cdot \frac{x - t_{p-k+1}}{t_p - t_{p-k+1}} \right) \cdot B_{p-k+1,k-1,\tau}(x).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

A fenti első két tag éppen a tétel állítását adja. Annyit kell tehát még belátni, hogy a harmadik tagban szereplő zárójeles kifejezés értéke nulla.

$$\begin{aligned}
& \frac{t_{p+1} - x}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} - \frac{t_p - x}{t_p - t_{p-k+1}} - \frac{t_{p+1} - t_p}{t_{p+1} - t_{p-k+1}} \cdot \frac{x - t_{p-k+1}}{t_p - t_{p-k+1}} = \\
& = \frac{(t_{p+1} - x) \cdot (t_p - t_{p-k+1}) - (t_p - x) \cdot (t_{p+1} - t_{p-k+1}) - (t_{p+1} - t_p) \cdot (x - t_{p-k+1})}{(t_{p+1} - t_{p-k+1}) \cdot (t_p - t_{p-k+1})} = \\
& = \frac{t_{p+1} \cdot t_p + x \cdot t_{p-k+1} + t_p \cdot t_{p-k+1} + x \cdot t_{p+1} + t_{p+1} \cdot t_{p-k+1} + t_p \cdot x}{(t_{p+1} - t_{p-k+1}) \cdot (t_p - t_{p-k+1})} - \\
& - \frac{t_{p+1} \cdot t_{p-k+1} + x \cdot t_p + t_p \cdot t_{p+1} + x \cdot t_{p-k+1} + t_{p+1} \cdot x + t_p \cdot t_{p-k+1}}{(t_{p+1} - t_{p-k+1}) \cdot (t_p - t_{p-k+1})} = 0.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

A fennmaradó két eset hasonló gondolatmenettel látható be.  $\square$

## 2.2. Numerikus módszerek

### 2.2.1. Givens-forgatások

Numerikus algoritmusoknál gyakran felmerül az az igény, hogy egy vektor valamely elemét ortogonális műveletek segítségével kinullázzunk. Erre adnak lehetőséget a Givens<sup>6</sup>-forgatások. A módszer az alábbi  $G(i, j, \vartheta)$  forgatási mátrixon alapszik ( $i < j$ ):

$$G(i, j, \vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \tag{2.36}$$

melynek az  $I$  egységmátrixtól eltérő elemei  $c = \cos(\vartheta)$ ,  $s = \sin(\vartheta)$  az  $i$ -edik és  $j$ -edik sorokban illetve oszlopokban állnak.  $G(i, j, \vartheta)$  valójában egy  $\vartheta$  szögű forgatást valósít meg a  $\{(0, \dots, 0, \underbrace{u}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{v}_j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m \mid u, v \in \mathbb{R}\}$  hipersíkban.

---

<sup>6</sup>Wallace Givens amerikai matematikus (1910 – 1993).

Alkalmazzuk  $G(i, j, \vartheta)$ -t egy  $x \in \mathbb{R}^m$  vektorra:

$$y = G(i, j, \vartheta) \cdot x. \quad (2.37)$$

Ekkor:

$$y_k = x_k, \quad k \neq i, k \neq j, \quad (2.38)$$

illetve

$$\begin{aligned} y_i &= x_i \cdot c - x_j \cdot s, \\ y_j &= x_i \cdot s + x_j \cdot c. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Feltéve ha az  $y_j$  értékét nullára akarjuk állítani, elegendő a  $c = \cos(\vartheta)$ ,  $s = \sin(\vartheta)$  értékeket meghatároznunk, magára a  $\vartheta$  szögre nincs szükségünk. Könnyen leellenőrizhető, hogy ha  $x_j$  már eleve nulla, akkor  $c = 1$ ,  $s = 0$  választás megfelelő. Ellenkező esetben pedig:

$$q := \sqrt{x_i^2 + x_j^2}, \quad c := \frac{x_i}{q}, \quad s := -\frac{x_j}{q}. \quad (2.40)$$

Bár a Givens-forgatás nem egyértelmű, azaz adott  $x \in \mathbb{R}^m$  adott két eleméhez többféle mátrix is mondható, mellyel hasonló eredményre juthatunk, Givens-mátrix alatt ezentúl mindig a (2.36)-ben bemutatott, (2.40) feltételnek eleget tevő mátrixot értjük. Jelölésben mivel a  $\vartheta$  pontos értékét nem határozzuk meg, az egyszerűség kedvéért csak a két indexelő paramétert fogjuk kiírni.

## 2.2.2. QR-felbontás

Ebben a részben egy speciális kéttényezős mátrixfelbontásról lesz szó. Szeretnénk egy adott  $A$  mátrixot egy  $Q$  ortogonális, valamint egy  $R$  felső háromszögmátrix szorzatára bontani. Az így létrejött  $A = Q \cdot R$  felbontást nevezzük  $QR$ -felbontásnak. Az előállításban segítséget fognak nyújtani az imént megismert Givens-forgatások.

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  egy teljes oszloprangú mátrix, Givens-forgatásokkal alakítsuk át felső háromszögmátrix alakúra a következő lépések szerint. Először számoljuk ki az első oszlop,  $(n-1, n)$  indexpárjához tartozó Givens-mátrixot, jelöljük  $G_1$ -gyel. Szorozzuk be  $A$ -t balról  $G_1$ -gyel. Ezzel a lépéssel  $A$ -nak csak az utolsó két sora változik, valamint az első oszlop utolsó tagja kinullázódik. Ezután az eredményt szorozzuk be balról az első oszlop szerinti  $G_2 = G(n-2, n-1)$ -gyel, ezzel kinullázva az oszlop utolsó előtti elemét is. Ezt az eljárást folytatjuk, míg az első sorban már csak az első elem marad nemnulla, majd rátérve a következő oszlopra, végig ki tudjuk nullázni a

főátló alatti elemeket. A következő ábra szemlélteti, mit csinálunk voltaképpen.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a soron következő lépések nem fogják elrontani a már kinullázott elemeket. Amit kaptunk tehát:

$$\underbrace{G_s \cdot \dots \cdot G_2 \cdot G_1}_{\text{ortogonális}} \cdot A = R, \quad (2.41)$$

ahol  $s$  a forgatások száma. Nincs más dolgunk, mint átszorozni a megfelelő  $G$  mátrixok inverzével, ami jelen esetben egy transzponálást jelent.

$$A = \underbrace{G_1^T \cdot G_2^T \cdot \dots \cdot G_s^T}_Q \cdot R \quad (2.42)$$

Érezhető, hogy általános esetben ez a módszer nem túl hatékony, azonban például ritka mátrixok esetén mégis előnyösnek bizonyul. Ritka mátrixnak olyan mátrixot nevezünk, mely döntő többségben nullákat tartalmaz. A Givens-módszernek az a nagy előnye, hogy az  $(i, j)$  paraméterek megfelelő megválasztásával, a mátrix tetszőleges eleme nullázható ki. Így ebben az esetben elegendő csak a főátló alatti nemnulla elemeket kinullázni, mely viszonylag kevés forgatást eredményez a mátrix méretéhez képest.

## 2.3. Legkisebb négyzetek módszere

Ebben a szakaszban a legkisebb négyzetes közelítés problémájával foglalkozunk, melynek széles körű gyakorlati alkalmazása ismert. Jelöljük  $(x_i, y_i)$ -vel,  $i = 1, 2, \dots, N$  a különböző mérési alappontokat és hozzá tartozó értékeket. Feladatunk egy, az adott pontokhoz „legközelebb haladó”, adott típusú függvény meghatározása. Jelöljük  $\mathcal{F}$ -fel

azon függvények halmazát, melyek közül a „legjobban közelítőt” akarjuk meghatározni. Mielőtt felfednénk, mit takar a „legjobban közelítő” jelző, tisztázzuk az alábbi jelöléseket:  $\bar{x}$ -vel jelöljük az  $(x_1, \dots, x_N)^T$  vektort, egy adott  $\varphi \in \mathcal{F}$  esetén  $\varphi(\bar{x})$  a  $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N))^T$ , valamint  $\bar{y}$  az  $(y_1, \dots, y_N)^T$  vektort jelöli.

**2.3.1. Definíció. (Legkisebb négyzetes közelítés)** Azt mondjuk, hogy a  $\varphi^* \in \mathcal{F}$  függvény legkisebb négyzetes értelemben legjobb közelítése az  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  pontpároknak, ha  $\|\varphi^*(\bar{x}) - \bar{y}\|_2 \leq \|\varphi(\bar{x}) - \bar{y}\|_2$  minden  $\varphi \in \mathcal{F}$  függvény esetén. Más megfogalmazásban:  $\varphi^*$  minimalizálja a  $\sum_{i=1}^N (\varphi(x_i) - y_i)^2$  funkcionált.

Legyen most  $\mathcal{F}$  a legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok halmaza, keressük azt a  $P_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \cdot x^j$  legfeljebb  $n$ -edfokú polinomot, melyre a

$$\sum_{i=1}^N (P_n(x_i) - y_i)^2 \quad (2.43)$$

kifejezés minimális. Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban általában  $n \ll N$ , vagyis sokkal több mérés van, mint ahányad fokú polinommal közelíteni akarunk. A feladat megoldásához fogalmazzuk meg (2.43)-t egy kicsit másképp. Tekintsük a  $P_n(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  jelen esetben túlhatározott egyenletrendszert, mely a meghatározandó  $c_i$  együtthatókra nézve lineáris. Mátrix alakban felírva:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Egy  $A \cdot x = b$  tetszőleges lineáris egyenletrendszer általános megoldásán olyan megoldást értünk, mely minimalizálja a  $\|A \cdot x - b\|_2^2$  kifejezést. Vegyük észre (2.44)-ra vetítve ez épp a legkisebb négyzetes megoldás fogalmával ekvivalens. Az általános megoldást az úgynevezett Moore–Penrose<sup>7</sup>-féle általánosított inverz segítségével fogjuk definiálni a következő alfejezetekben, valamint megmutatjuk, hogy lehet megoldáshoz jutni túl- illetve alulhatározott rendszerek esetén.

---

<sup>7</sup>E. H. Moore amerikai matematikus (1862 – 1932), Roger Penrose brit matematikus (1931–).



### 2.3.1. Általánosított inverz

Egy tetszőleges  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mátrix általánosított inverzének meghatározásában segítségünkre lesz egy újabb, háromtenyezős mátrixfelbontás. Az  $A = U \cdot D \cdot V^T$  felbontást szinguláris felbontásnak nevezzük, ahol  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ortogonális mátrixok,  $D$  pedig egy  $n \times m$ -es valós diagonális mátrix.  $D$  diagonálisában a  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r > 0$  úgynevezett szinguláris értékek állnak, ahol  $r$  az  $A$  mátrix rangját jelöli illetve a  $d_i$  értékeket nullának választjuk amennyiben  $i > r$ .

**2.3.2. Tétel.** *Tetszőleges  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mátrix esetén létezik szinguláris felbontás.*

**Bizonyítás.** Tekintsük az  $A^T A$  mátrixot, mely szimmetrikus és pozitív szemidefinint, ezért ortogonális transzformációval diagonalizálható, sajátértékei pedig nemnegatív valós számok. Jelöljük  $d_i^2$ -tel a sajátértékeket, ekkor  $d_1^2 \geq d_2^2 \geq \dots \geq d_r^2 > 0$ . Legyen  $V$  a sajátvektorokból alkotott ortogonális mátrix, ekkor

$$A^T A = V \cdot D^2 \cdot V^T, \quad (2.45)$$

ahol  $D^2 = \begin{pmatrix} D_+^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D_+^2$  pedig a pozitív sajátértékekből álló diagonális mátrixot jelöli. Hasonlóan bontsuk szét a  $V = (V_+ \ V_0)$  mátrixot, ahol  $V_+ \in \mathbb{R}^{m \times r}$  a pozitív sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat tartalmazza. Azaz:

$$V_+^T \cdot A^T A \cdot V_+ = D_+^2, \quad (2.46)$$

átalakítva:

$$(D_+^{-1} V_+^T A^T) \cdot (A V_+ D_+^{-1}) = I. \quad (2.47)$$

Jelölje  $U_+ := A V_+ D_+^{-1}$  ortogonális mátrixot, ekkor

$$A = U_+ \cdot D_+ \cdot V_+^T. \quad (2.48)$$

Ezek után bővítsük ki az  $U_+$  mátrixot  $U := (U_+ \ U_0)$  ortogonális mátrixszá (például Gram-Schmidt-féle ortogonalizációval, lásd [6]), így

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V^T \quad (2.49)$$

adódik.  $\square$

A bizonyításból az is kiderült, hogy:

- Az  $U$  mátrix oszlopai az  $AA^T$  mátrix sajátvektoraiból alkotott teljes ortogonális vektorrendszer.
- A  $V$  mátrix oszlopai az  $A^T A$  mátrix sajátvektoraiból alkotott teljes ortogonális vektorrendszer.
- A szinguláris értékek az  $AA^T$  illetve  $A^T A$  mátrix sajátértékeinek négyzetgyökei.

**2.3.3. Definíció.** Ha  $d \in \mathbb{R}$ , akkor jelöljük  $d^+$ -szal az alábbi:  $d^+ = \frac{1}{d}$ , ha  $d > 0$  és 0 egyébként. Ha  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$  diagonális mátrix, akkor  $D^+ \in \mathbb{R}^{m \times n}$  szintén diagonális és  $(D^+)_{ii} := (D_{ii})^+$ ,  $i = 1, \dots, \min(n, m)$ . Ha  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  általános mátrix, akkor jelölje  $U \cdot D \cdot V^T$  az  $A$  mátrix szinguláris felbontását, és legyen  $A^+ \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , melyre  $A^+ = V \cdot D^+ \cdot U^T$ . Az  $A^+$  mátrixot az  $A$  mátrix általánosított inverzének vagy Moore–Penrose pszeudoinverzének nevezzük.

A pszeudoinverz jótékony hatásai közé tartozik az, hogy egyértelmű és bizonyos tulajdonságok alapján azonosítható. Erről szól a következő tétel.

**2.3.4. Tétel.** Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  egy általános mátrix,  $A^+ \in \mathbb{R}^{m \times n}$  az  $A$  általánosított inverze, ekkor:

1.  $A^+ \cdot A$  szimmetrikus,
2.  $A \cdot A^+$  szimmetrikus,
3.  $A \cdot A^+ \cdot A = A$ ,
4.  $A^+ \cdot A \cdot A^+ = A^+$ ,

illetve ha a  $B$  és  $C$  mátrixok rendelkeznek a fenti 4 tulajdonsággal, akkor  $B = C$ .

**Bizonyítás.** Jelöljük szintén  $U \cdot D \cdot V^T$ -tal az  $A$  mátrix szinguláris felbontását, ekkor:

1.  $(A^+ \cdot A)^T = A^T \cdot (A^+)^T = V \cdot D^T \cdot U^T \cdot U \cdot (D^+)^T \cdot V^T = V \cdot D^T \cdot (D^+)^T \cdot V^T = V \cdot (D^+ \cdot D)^T \cdot V^T$  illetve  $A^+ \cdot A = V \cdot D^+ \cdot U^T \cdot U \cdot D \cdot V^T = V \cdot D^+ \cdot D \cdot V^T$ .
2.  $(A \cdot A^+)^T = (A^+)^T \cdot A^T = U \cdot (D^+)^T \cdot V^T \cdot V \cdot D^T \cdot U^T = U \cdot (D^+)^T \cdot D^T \cdot U^T = U \cdot (D \cdot D^+)^T \cdot U^T$  illetve  $A \cdot A^+ = U \cdot D \cdot V^T \cdot V \cdot D^+ \cdot U^T = U \cdot D \cdot D^+ \cdot U^T$ .
3.  $A \cdot A^+ \cdot A = U \cdot D \cdot V^T \cdot V \cdot D^+ \cdot U^T \cdot U \cdot D \cdot V^T = U \cdot D \cdot D^+ \cdot D \cdot V^T$ .
4.  $A^+ \cdot A \cdot A^+ = V \cdot D^+ \cdot U^T \cdot U \cdot D \cdot V^T \cdot V \cdot D^+ \cdot U^T = V \cdot D^+ \cdot D \cdot D^+ \cdot U^T$ .

Azaz a fenti 4 tulajdonságot elegendő csak a  $D$  diagonális mátrixra igazolni, mely szemmel láthatóan teljesül.

Az egyértelműség bizonyításához a fenti tulajdonságokat és a transzponálás tulajdonságát fogjuk alkalmazni:

$$\begin{aligned}
B &\stackrel{4}{=} B \cdot A \cdot B \stackrel{2}{=} B \cdot B^T \cdot A^T \stackrel{3}{=} B \cdot B^T \cdot (A \cdot C \cdot A)^T \stackrel{T}{=} B \cdot B^T \cdot A^T \cdot C^T \cdot A^T \stackrel{T}{=} \\
&\stackrel{T}{=} B \cdot (A \cdot B)^T \cdot (A \cdot C)^T \stackrel{2}{=} B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot C \stackrel{4}{=} B \cdot A \cdot C \stackrel{4}{=} B \cdot A \cdot C \cdot A \cdot C \stackrel{1}{=} \\
&\stackrel{1}{=} (B \cdot A)^T \cdot (C \cdot A)^T \cdot C \stackrel{T}{=} A^T \cdot B^T \cdot A^T \cdot C^T \cdot C \stackrel{T}{=} (A \cdot B \cdot A)^T \cdot C^T \cdot C \stackrel{3}{=} \\
&\stackrel{3}{=} A^T \cdot C^T \cdot C \stackrel{T}{=} (C \cdot A)^T \cdot C \stackrel{1}{=} C \cdot A \cdot C \stackrel{4}{=} C.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Ezzel végeztünk a bizonyítással.  $\square$

Most már minden adott ahhoz, hogy definiáljuk egy tetszőleges lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

**2.3.5. Definíció.** Az  $A \cdot x = b$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  feladat általánosított megoldásán az alábbi  $x^+ \in \mathbb{R}^m$  vektort értjük:  $x^+ := A^+ \cdot b$ , ahol  $A^+$  az  $A$  mátrix Moore–Penrose-féle pszeudoinverze.

A 2.3.4. tétel miatt nincs kétségünk az  $x^+$  vektor létezése és egyértelműsége felől. A következő, 2.3.6. tétel pedig arról szól, hogy miért nevezhetjük jogosan általánosított megoldásnak.

**2.3.6. Tétel.** Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^+ = A^+ \cdot b$ , ekkor

1.  $\|A \cdot x^+ - b\|_2 \leq \|A \cdot x - b\|_2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^m$ , valamint
2. jelölje  $H = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|A \cdot x - b\|_2 = \|A \cdot x^+ - b\|_2\}$  a minimumhelyek halmazát, ekkor  $\forall x \in H$ ,  $x \neq x^+$  esetén  $\|x\|_2 > \|x^+\|_2$ .

**Bizonyítás.**

1. Megmutatjuk, hogy  $(A \cdot x - A \cdot x^+) \perp (A \cdot x^+ - b)$ :

$$\begin{aligned}
\langle A \cdot (x - x^+), A \cdot x^+ - b \rangle &= \langle x - x^+, A^T \cdot (A \cdot x^+ - b) \rangle = \\
&= \langle x - x^+, A^T \cdot (A \cdot A^+ - I) \cdot b \rangle = \langle x - x^+, A^T \cdot (A \cdot A^+ - I)^T \cdot b \rangle = \tag{2.51} \\
&= \langle x - x^+, (A \cdot A^+ \cdot A - A)^T \cdot b \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Így:

$$\begin{aligned} \|A \cdot x - b\|_2^2 &= \|A \cdot x - A \cdot x^+ + A \cdot x^+ - b\|_2^2 = \\ &= \|A \cdot x - A \cdot x^+\|_2^2 + \|A \cdot x^+ - b\|_2^2 \geq \|A \cdot x^+ - b\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Utóbbiból megkaptuk  $H$ -nak egy ekvivalens átírását is:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^m \mid A \cdot x = A \cdot x^+\}.$$

2. Hasonló gondolatmenettel megmutatjuk, hogy  $x^+ \perp (x - x^+)$ :

$$\begin{aligned} \langle A^+ \cdot b, x - x^+ \rangle &= \langle b, (A^+)^T \cdot (x - x^+) \rangle = \langle b, (A^+)^T \cdot (x - A^+ \cdot A \cdot x) \rangle = \\ &= \langle b, (A^+)^T \cdot (I - A^+ \cdot A) \cdot x \rangle = \langle b, ((I - A^+ \cdot A) \cdot A^+)^T \cdot x \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Itt felhasználtuk, hogy:  $x^+ = A^+ \cdot b = A^+ \cdot A \cdot A^+ \cdot b = A^+ \cdot A \cdot x^+ = A^+ \cdot A \cdot x$ .  
Ezzel együtt már világos, hogy:

$$\|x\|_2^2 = \|x - x^+ + x^+\|_2^2 = \|x - x^+\|_2^2 + \|x^+\|_2^2 \geq \|x^+\|_2^2, \quad (2.54)$$

valamint az is érthető, hogy  $x \in H$ ,  $x \neq x^+$  esetén  $\|x\|_2 > \|x^+\|_2$ .

Ezzel befejeztük a tétel bizonyítását.  $\square$

Általános esetben tehát az  $A \cdot x = b$  egyenletrendszer megoldása, a szinguláris felbontás birtokában lehetséges. Bizonyos speciális, persze igen gyakori esetekben azonban nem szükséges előállítani, a melleleg igen költséges szinguláris felbontást. A következőkben teljes rangú mátrixokkal foglalkozunk, ez esetben ugyanis gyorsabban számolható formulákat kapunk.

## 2.3.2. Túlhatározott egyenletrendszerek megoldása

**2.3.7. Tétel.** *Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n > m$  egy teljes rangú mátrix, azaz  $\text{rang}(A) = m$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ . A túlhatározott teljes rangú mátrix általánosított inverze  $A^+ = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T$ , az általánosított megoldás pedig  $x^+ = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b$ .*

**Bizonyítás.** Először megmutatjuk, hogy az  $A^T \cdot A$  kifejezés inverze valóban létezik és így  $x^+$  is. Mivel  $A$  teljes rangú és túlhatározott (több sora van, mint oszlopa), ezért

egyrészt az  $A^T \cdot A$  mátrix már egy  $m \times m$ -es szimmetrikus mátrix, másrészt nyilván invertálható, ugyanis belátható, hogy az  $A^T \cdot A \cdot x = 0$  homogén egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ekkor ugyanis  $\langle A^T \cdot A \cdot x, x \rangle = 0$ , amit átrendezve  $\langle A \cdot x, A \cdot x \rangle = 0$ -t kapunk, másképpen fogalmazva  $\|A \cdot x\|_2^2 = 0$ , tehát  $A \cdot x = 0$ .  $A$  teljes rangú mivolta miatt ebből  $x = 0$  következik, tehát az  $A^T \cdot A$  mátrix invertálható.

Ezután elég megvizsgálni, hogy az  $(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T$  mátrix valóban megfelel a 2.3.4. tételbeli tulajdonságoknak.

1.  $(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot A = I$ , nyilván szimmetrikus.
2.  $A \cdot (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T$  szintén szimmetrikus a szorzat transzponálása révén.
3.  $A \cdot (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot A = A \cdot I = A$ .
4.  $(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot A \cdot (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T = I \cdot (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T$ .

Ezzel beláttuk az állítást.  $\square$

Észrevehető, hogy az iménti  $x^+$  megoldást az  $A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$  egyenletrendszer megoldása adja. Ezt az egyenletet nevezzük Gauss<sup>8</sup>-féle normálegyenletnek, melyet úgy kapunk, hogy az eredeti egyenletünket balról beszorozzuk  $A^T$ -tal.

### 2.3.3. Alulhatározott egyenletrendszerek megoldása

**2.3.8. Tétel.** *Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $m > n$  egy teljes rangú mátrix, azaz  $\text{rang}(A) = n$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ . Az alulhatározott teljes rangú mátrix általánosított inverze  $A^+ = A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1}$ , az általánosított megoldás pedig  $x^+ = A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1} \cdot b$ .*

**Bizonyítás.** A bizonyítás menete analóg az előzővel.  $A$  most alulhatározott, azaz több oszlopa van, mint sora, így egyrészt  $A \cdot A^T$  egy  $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix, másrészt belátható, hogy invertálható. Vegyük az  $A \cdot A^T \cdot x = 0$  homogén egyenletrendszert, ekkor  $\langle A \cdot A^T \cdot x, x \rangle = 0$ . Átrendezve  $\langle A^T \cdot x, A^T \cdot x \rangle = 0$  és így  $\|A^T \cdot x\|_2^2 = 0$ , azaz  $A^T \cdot x = 0$ . Mivel most  $A^T$  oszlopai lineárisan függetlenek ( $A$  teljes rangú volt), ezért  $x$  csak a nullvektor lehet, azaz  $A \cdot A^T$  valóban invertálható.

Hátramaradt a 4 tulajdonság leellenőrzése.

1.  $A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1} \cdot A$  szimmetrikus a szorzat transzponálási szabálya révén.
2.  $A \cdot A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1} = I$  szimmetrikus.

---

<sup>8</sup>Carl Friedrich Gauss német matematikus, természettudós, csillagász (1777 – 1855).

$$3. A \cdot A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1} \cdot A = I \cdot A = A.$$

$$4. A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1} \cdot A \cdot A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1} = A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1} \cdot I = A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1}.$$

Ezzel befejeztük a tétel bizonyítását.  $\square$

Csakúgy, mint az előző pontban, most is lehet a Gauss-féle normálegyenlethez hasonló megoldási módszert adni. Ehhez vezessünk be egy új  $y$  változót. Legyen  $x = A^T \cdot y$ , ekkor az eredeti egyenlet a következő alakra hozható:  $A \cdot A^T \cdot y = b$ . A feladat tehát, ami az általánosított megoldást adja:

$$\begin{aligned} A \cdot A^T \cdot y &= b, \\ x &= A^T \cdot y. \end{aligned} \tag{2.55}$$

## 3. fejezet

# EKG-jelek tömörítése

Az utóbbi években számos algoritmus született EKG-jel tömörítésre. Egy összefoglalás tekinthető meg ezen törekvésekről [4]-ben. A technológiai fejlődésnek köszönhetően az egyszerű felhasználó számára is lehetővé válik az EKG-jelek mérése (okostelefonok, okosórák, stb.). A készülékek tárolási kapacitása és az átviteli sebesség maximális kihasználása érdekében érdemes tömöríteni az adatokat. Egy 24 órás EKG-vizsgálat (például Holter<sup>9</sup> monitorozás) során akkora mennyiségű adat keletkezik, mely ellehetetleníti egyrészt a hatékony tárolást, másrészt az esetleges további számításokat. Gondoljunk például egy hatalmas adatbázisra, ahol EKG-mérések millióit tárolják. A kapott eredményeket tömörítve megsokszorozható egy ilyen adatbázis kapacitása. Más alkalmazásokban arra van szükség, hogy az adatokat hatékonyan tudjuk küldeni, például rádió- vagy mobilhálózatokon keresztül, a világ egyik pontjáról a másikra. Nem elképzelhetetlen az az eset, amikor technológiailag elmaradottabb régiókból EKG-jeleket küldenek át egy távolabb fekvő, modern központ számára, további vizsgálatok céljából. Természetesen ennél a példánál sem mindegy, hogy mekkora adatot akarunk továbbítani.

A következő alfejezetekben a [13]-as cikkben kidolgozott algoritmust fogjuk tárgyalni. Az EKG-jel tömörítő eljárások alapvetően 3 különálló csoportba sorolhatók (lásd: [10]). Léteznek (1) direkt módszerek, (2) transzformációs módszerek és (3) paraméterbecslő módszerek. Az algoritmus, amivel a későbbiekben foglalkozunk, a második csoportba sorolható. Általában véve ezek az eljárások bázisfüggvények súlyozott összegeként próbálják meg reprezentálni a jelet. Következésképp, a további felhasználásokban elegendő már csak a bázisfüggvényekre és az eltárolt együtthatókra hivatkozni, melyek teljes mértékben meghatározzák az eredeti adatsorozatot.

---

<sup>9</sup>Norman J. Holter amerikai biofizikus (1914 – 1983).

A legjobb transzformáció az, mely a legkevesebb bázisfüggvénnyel képes előállítani az eredeti jelet, egy előre megadott hibahatár mellett. Természetesen a hatékonyság nagy mértékben függ magától a bázis megválasztásától. A B-spline függvények ideális választásnak tűnnek erre a célra, lokális tulajdonságaik miatt. Ekképpen a bázisfüggvények számát és alakját az alappontokból alkotott vektor definiálja, emellett lehetőségünk van lokális tulajdonságaik megváltoztatására is, az alappontok helyének módosításával. Az alappontok elhagyásával csökkentjük a bázisfüggvények számát. A következő alfejezetekben egyrészt megmutatjuk, hogyan lehet kiszámolni a szóban forgó B-spline együtthatókat, másrészt egy optimalizációs eljárást is alkalmazunk, az alappontok számának és helyzetének megválasztásához.

### 3.1. Tömörítés alappontelhagyással

A tömörítő eljárás alapötlete a következő: kezdetben interpoláljuk a jelet, melyhez nagyszámú B-spline függvényre és így sok alappontra van szükségünk. Az alappontokat ezután egyesével hagyjuk el, ezzel újabb közelítésekhez jutva. Az egyes közelítéseket azonban nem akarjuk egy előre megadott hibahatárnál jobban elrontani. A végső alappontok számát és helyét az iteráció végeztével, automatikusan kapjuk.

Az eddigi jelöléseket használva legyen  $f(x)$  a kezdő spline interpoláció, melyhez előre adottak az  $(x_j, y_j)$  értékpárok ( $f(x_j) = y_j, j = 1, \dots, N$ ), valamint a  $\tau = \{t_{-k+1}, \dots, t_{n+k}\}$  alappontrendszer:

$$f(x) = \sum_{i=-k+1}^n a_i \cdot B_{i,k,\tau}(x). \quad (3.1)$$

Az alappontokat ez esetben a jel mintavételezési pontjainak választjuk, a bázisfüggvények számának pedig meg kell egyeznie az adatok számával ( $n + k = N$ ), hogy biztosítsuk az interpolációt. Az alappontok meghatározásánál vegyük figyelembe (2.28)-et is.

Feladatunk meghatározni egy olyan,  $g(x)$ -szel jelölt spline-t, mely a lehető legkevesebb alappontra támaszkodik és melyre:

$$\max_x |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad (3.2)$$

ahol  $\varepsilon$  egy előre megadott nemnegatív valós szám. Jelöljük ehhez  $\tau^l$ -el  $\tau$ -nak egy olyan részsorozatát, melyet  $l$  darab alappont elhagyásával kapunk, valamint  $g_l(x)$  legyen a



$\tau^l$ -en értelmezett approximáció. A stratégiánk 3 fő lépésből áll:

1. Inicializálás:  $g_0(x) := f(x)$ , valamint  $\tau^0 := \tau$ .
2. Eldöntjük, melyik alappontot hagyjuk el  $\tau^l$ -ből, így megkapjuk  $\tau^{l+1}$ -et. ( $l = 0, 1, \dots$ )
3. Kiszámoljuk a  $g_{l+1}$  approximációt.

Megállunk az iterációval, amennyiben:

$$\max_x |f(x) - g_{l+1}(x)| \geq \varepsilon, \quad (3.3)$$

és ekkor  $g_l$  a megoldás. Az új spline approximációt minden iterációban a legkisebb négyzetes közelítés szerint számoljuk.

Eddig egyedül a rend megválasztásáról nem volt szó. Természetesen adódik, hogy ha túl alacsonynak választjuk, akkor a megoldásunk nem lesz kellőképpen sima. Viszont ha a rend túl nagy, a számítások is rendkívül idő- és tárigényessé válnak. Kísérletekkel kimutatták (lásd [13]), hogy a köbös spline-ok használata ( $k = 4$ ) egy jó kompromisszumot jelent a hatékonyság (számítási idő és szükséges memória), valamint az illesztés minősége között.

## 3.2. Együtthatók kiszámolása legkisebb négyzetek módszerével

A következőkben bemutatjuk, mi zajlik az egyes iterációkban. Ehhez az eredeti jelet periódusonként (jelen esetben szívütésenként) szegmentáljuk. Minden egyes szívütésre egy-egy közelítő eljárást alkalmazunk. Annak érdekében, hogy a folytonosságot ne szakítsuk meg, az első és utolsó pontot interpoláljuk, nem approximáljuk. Jelöljük  $y_j$ -vel a rendelkezésre álló mérési adatokat ( $j = 1, \dots, N$ ) és  $x_j$ -vel a megfelelő indexeket.

Az alappont elhagyó algoritmus  $l$ -edik iterációjában meg kell találnunk a  $k$ -adrendű  $g_l(x)$  splinet és annak  $c^l$  együtthatóit, adott  $\tau^l = \{t_{-k+1}^l, \dots, t_{m+k}^l\}$  esetén.

$$g_l(x) = \sum_{i=-k+1}^m c_i^l \cdot B_{i,k,\tau^l}(x), \quad (3.4)$$

ahol  $m = n - l$ , valamint a  $g_l$  spline legkisebb négyzetes értelemben közelíti a mérési

adatainkat. Hasonlóan, mint (2.43)-nél, a

$$\sum_{j=2}^{N-1} (y_j - g_l(x_j))^2 \quad (3.5)$$

kifejezést kell minimalizálnunk, azzal a feltétellel, hogy

$$g_l(x_1) = y_1, \quad g_l(x_N) = y_N. \quad (3.6)$$

Kihasználva (2.28)-et, az első és utolsó együtthatót azonnal megkapjuk:

$$c_{-k+1}^l = y_1, \quad c_m^l = y_N. \quad (3.7)$$

Így (3.5) helyett a következő kifejezést minimalizáljuk:

$$\sum_{j=2}^{N-1} \left( \bar{y}_j - \sum_{i=-k+2}^{m-1} c_i^l \cdot B_{i,k,\tau^l}(x_j) \right)^2, \quad (3.8)$$

ahol

$$\bar{y}_j = y_j - c_{-k+1}^l \cdot B_{-k+1,k,\tau^l} - c_m^l \cdot B_{m,k,\tau^l}, \quad j = 2, \dots, N-1. \quad (3.9)$$

Ezáltal a probléma az alábbi  $c_i^l$ , ( $i = -k+2, \dots, m-1$ ) B-spline együtthatók meghatározására redukálódik, melyeket a következő túlhatározott egyenletrendszer általánosított megoldásaiként kapunk.

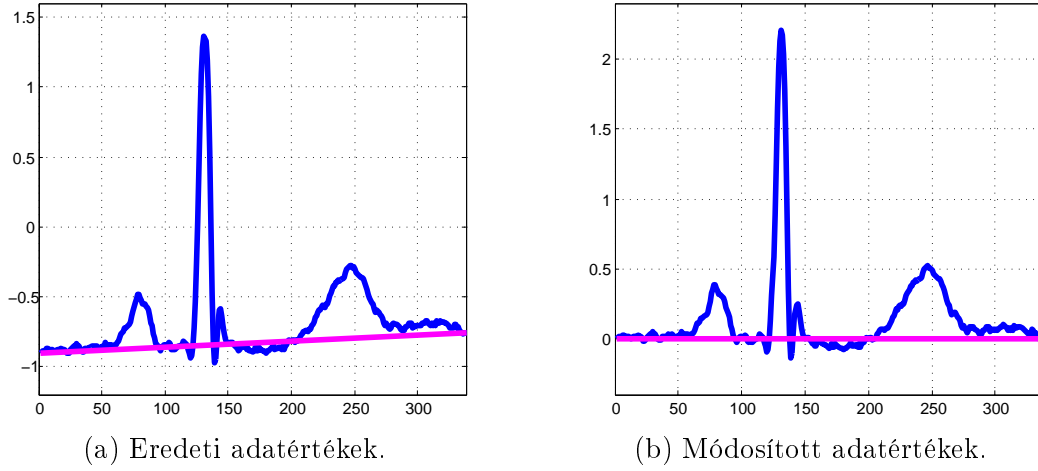
$$\sum_{i=-k+2}^{m-1} c_i^l \cdot B_{i,k,\tau^l}(x_j) = \bar{y}_j, \quad j = 2, \dots, N-1. \quad (3.10)$$

Annak érdekében, hogy elkerüljük az együtthatók költséges újraszámolását egy-egy alappont elhagyás után, egy QR-felbontásra épülő eljárást alkalmazunk. A szóban forgó algoritmus igen hatékony, ha a közelítési kívánt adatok ( $\bar{y}_j$  (3.10)-ből) nem változnak az iterációk során. Ez a (3.9) egyenlet alapján sajnos nem teljesül, hiszen az adatsorozat függ az első és utolsó bázisfüggvények konstansszorosától. Ezt a problémát elkerülendő az alábbi lineáris transzformációt alkalmazzuk:

$$\tilde{y}_j := y_j - \frac{y_N - y_1}{x_N - x_1} \cdot x_j - \frac{x_N \cdot y_1 - x_1 \cdot y_N}{x_N - x_1}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.11)$$

Ez a módosítás szemléletesen az  $(x_1, y_1)$  és  $(x_N, y_N)$  pontokat összekötő egyenes levonását jelenti (lásd a 3.1. ábrán). Természetesen az iterációk végeztével, a jel helyre-

állításnál fordítva kell eljárunk, azaz eredményünkhöz hozzá kell adni a fent említett vonalat.



3.1. ábra. A (3.11)-ben alkalmazott transzformáció.

Ennek következtében tehát:

$$\tilde{y}_1 = 0, \quad \tilde{y}_N = 0, \quad (3.12)$$

valamint  $\tilde{y}_j$ -t használva az eredeti adatértékek helyett (3.7) a következőre módosul

$$c_{-k+1}^l = 0, \quad c_m^l = 0. \quad (3.13)$$

Behelyettesítve ezen értékeket (3.9)-be az alábbiakat kapjuk:

$$\bar{y}_j = \tilde{y}_j, \quad j = 2, \dots, N - 1. \quad (3.14)$$

Ekkor (3.10) az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldására redukálódik:

$$E_l \cdot c_l = \tilde{y}, \quad (3.15)$$

ahol

$$E_l := \begin{pmatrix} B_{-k+2,k,\tau^l}(x_2) & \cdots & B_{m-1,k,\tau^l}(x_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-k+2,k,\tau^l}(x_{N-1}) & \cdots & B_{m-1,k,\tau^l}(x_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$c_l := \begin{pmatrix} c_{-k+2}^l \\ \vdots \\ c_{m-1}^l \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} := \begin{pmatrix} \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Ettől fogva, mivel az  $E_l$  mátrix teljesrangú, valamint túlhatározott, a 2.3.2-ben bemutatott Gauss-féle normálegyenlettel megkaphatóak a kívánt együtthatók. A B-spline függvények tulajdonságai miatt azonban érdemes a következők szerint eljárni. Tegyük fel, rendelkezésünkre áll az  $E_l$  mátrix QR-felbontása:

$$E_l = Q_l \cdot R_l = Q_l \cdot \begin{pmatrix} R_{l1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

ahol  $Q_l$  ortogonális mátrix,  $R_{l1}$  pedig egy  $m+k-2$  rendű négyzetes felső háromszög-mátrix. Legyen továbbá

$$z_l = \begin{pmatrix} z_{l1} \\ z_{l2} \end{pmatrix} := Q_l^T \cdot \tilde{y}, \quad (3.19)$$

ahol  $z_{l1}$  szintén  $m+k-2$  elemet tartalmaz. Ily módon a meghatározni kívánt  $c_l$  vektort egyszerű visszahelyettesítésekkel kapjuk, a következő egyenletből:

$$R_{l1} \cdot c_l = z_{l1}. \quad (3.20)$$

Ez a módszer azért hasznos, mert az  $E_{l+1}$  mátrix faktorizációja könnyedén megkapható az  $E_l$  mátrix faktorizációjából. Az  $E_{l+1}$  mátrix már az új  $B_{i,k,\tau^{l+1}}(x)$  bázisokat tartalmazza, melyek a  $\tau^{l+1} = \tau^l \setminus \{t_p^l\}$  alappont vektoron vannak értelmezve. A 2.1.12. tétel állítása szerint visszatérhetünk az előző bázisra. Ennek segítségével kapjuk  $E_{l+1}$ -et. Mátrixos alakban megfogalmazva (2.29)-at, a következőkhöz jutunk:

$$E_{l+1} = E_l \cdot B, \quad (3.21)$$

ahol

$$B = \begin{pmatrix} I_{p-2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{m-p-1} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

melyben  $I_{p-2}$  és  $I_{m-p-1}$  a megfelelő  $p-1$  illetve  $m-p-1$  méretű egységmátrixokat

jelölik, valamint  $B_{22}$  a következő bidiagonális mátrixot:

$$B_{22} = \begin{pmatrix} \lambda_{p-1} & \cdots & 0 \\ \mu_{p-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_{p+k-2} \\ 0 & \cdots & \mu_{p+k-2} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

ahol

$$\lambda_i = \frac{t_p^l - t_{i-k+1}^l}{t_{i+1}^l - t_{i-k+1}^l}, \text{ valamint } \mu_i = \frac{t_{i+2}^l - t_p^l}{t_{i+2}^l - t_{i-k+2}^l}. \quad (3.24)$$

Így az  $E_{l+1}$  mátrix faktorizációját megkaphatjuk a következő lépésekben:

$$E_{l+1} = E_l \cdot B = Q_l \cdot R_l \cdot B = Q_l \cdot \hat{R}. \quad (3.25)$$

Ahhoz, hogy megkapjuk a  $Q_{l+1}$  illetve  $R_{l+1}$  mátrixokat, az  $\hat{R}$  mátrixot kell felső háromszögmátrix alakúra transzformálnunk. Vegyük észre, hogy  $\hat{R}$  oszlopai vagy  $R_l$  oszlopaival egyeznek meg változatlanul, vagy pedig ezen mátrix két egymást követő oszlopainak lineáris kombinációival. Az  $\hat{R}$  mátrix szerkezete tehát majdnem felső háromszög (úgynevezett felső Hessenberg<sup>10</sup>), így a főátló alatti  $\hat{r}_{p,p-1}, \dots, \hat{r}_{m+k-2,m+k-3}$  nem kívánt elemeket, Givens-forgatások segítségével kinullázhatjuk. Ennek következtében:

$$G_{m+k-3} \cdot \dots \cdot G_{p-1} \cdot \hat{R} = R_{l+1}, \quad (3.26)$$

ahol  $G_i$  az  $i$ -edik és  $i+1$ -edik sorokat változtatja, az alábbiaknak megfelelően:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \hat{r}_{i,j} & \hat{r}_{i,j+1} & \hat{r}_{i,j+2} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{r}_{i+1,j} & \hat{r}_{i+1,j+1} & \hat{r}_{i+2,j+2} & \cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \quad (3.27)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & r_{i,j} & r_{i,j+1} & r_{i,j+2} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & r_{i+1,j+1} & r_{i+1,j+2} & \cdots \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

A megfelelő elemeket (2.39) és (2.40) alapján a következők szerint számoljuk:

$$q := \sqrt{\hat{r}_{i,j}^2 + \hat{r}_{i+1,j}^2}, \quad c := \frac{\hat{r}_{i,j}}{q}, \quad s := -\frac{\hat{r}_{i+1,j}}{q}, \quad (3.29)$$

---

<sup>10</sup>Karl Hessenberg német matematikus, mérnök (1904 – 1959).

és így

$$\begin{aligned}
r_{i,j} &:= q, \\
r_{i,h} &:= \hat{r}_{i,h} \cdot c - \hat{r}_{i+1,h} \cdot s, \quad h = j + 1, \dots, \\
r_{i+1,h} &:= \hat{r}_{i,h} \cdot s + \hat{r}_{i+1,h} \cdot c, \quad h = j + 1, \dots
\end{aligned} \tag{3.30}$$

A  $z_l$  vektorra ugyanezeket a transzformációkat kell végrehajtani, ezért akár  $\hat{R}$  egy extra oszlopaként is tekinthetünk rá. A  $Q_l$  mátrixot nem szükséges frissítenünk. Eképpen a  $c_{l+1}$  együtthatók vektorát ismételten az alábbi egyenletből nyerjük:

$$R_{l+1} \cdot c_{l+1} = z_{l+1}, \tag{3.31}$$

mely előjeltől eltekintve egyértelmű lesz.

A módszer tovább gyorsítható, amennyiben figyelembe vesszük  $E_l$  kötött struktúráját. Az  $E_l$  mátrix ugyanis soronként maximum  $k$  darab szomszédos nemnulla elemet tartalmaz. Következésképp  $R_l$ -nek és  $\hat{R}$ -nak is hasonló szerkezete van, soronként  $k$  szomszédos nemzérus elemmel. Ez tovább csökkenti a számítási igényt, ugyanis a Givens-forgatások ezáltal megszoríthatóak a  $k + 1$  hosszúságú vektorokra.

### 3.3. Alappontok rangsorolása

Az alábbiakban azzal foglalkozunk, miként lehet egy-egy belső alappont fontosságát megbecsülni illetve ez alapján eldöntjük, melyik alappontot hagyjuk el az egyes iterációkban. Csakúgy, mint eddig, legyen

$$g_l(x) = \sum_{i=-k+1}^m c_i^l \cdot B_{i,k,\tau^l}(x), \tag{3.32}$$

mely a  $\tau^l = \{t_{-k+1}^l, \dots, t_{m+k}^l\}$  alappontrendszerre illeszkedik. A következőkben tegyük fel, hogy a  $z := t_p^l$  pontot hagyjuk el. Ekkor az új  $h(x)$  spline, melyet az előző pontban leírtak szerint számolunk, már a  $\tau^* = \{t_{-k+1}^*, \dots, t_{m+k-1}^*\} = \tau^l \setminus \{z\}$  alappontokon lesz értelmezve:

$$h(x) = \sum_{i=-k+1}^{m-1} d_i \cdot B_{i,k,\tau^*}(x). \tag{3.33}$$

Természetesen adódik az az ötlet, mely szerint mérjük a  $g_l$  és  $h$  közötti átlagos

négyzetes eltéréssel,

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N (g_l(x_j) - h(x_j))^2 \quad (3.34)$$

a  $g_l$ -t reprezentáló  $t_p^l$  alappont fontosságát. Ehhez tehát a  $d_i$  értékekre van szükségünk  $i = -k + 1, \dots, m - 1$ , melyeket egy  $N$  egyenletből álló túlhatározott egyenletrendszer általános megoldásaként kapunk. Ezen elgondolás szerint, az egyes iterációkban, minden belső alappont elhagyására megoldunk egy-egy legkisebb négyzetes problémát, majd kiszámítjuk a fenti eltérést. A legkisebb hibával rendelkező pontot végül elhagyjuk. Ez rengeteg időt jelent, így a komplikált számítások elkerülése végett ismét egy másik módszerhez folyamodunk. A 2.1.12. tételt használva írjuk fel  $h$ -t a  $\tau^l$  bázisban (bővebben lásd [1]):

$$h(x) = \sum_{i=-k+1}^{m-1} \tilde{d}_i \cdot B_{i,k,\tau^l}(x), \quad (3.35)$$

ahol

$$\tilde{d}_i = \begin{cases} d_i, & \text{ha } i \leq p - k, \\ \alpha_i \cdot d_i + (1 - \alpha_i) \cdot d_{i-1}, & \text{ha } p - k + 1 \leq i \leq p - 1, \\ d_{i-1}, & \text{ha } p \leq i \leq m, \end{cases} \quad (3.36)$$

illetve

$$\alpha_i = \frac{z - t_i^*}{t_{i+k-1}^* - t_i^*}. \quad (3.37)$$

Ezzel az átírással az átlagos négyzetes eltérés így számolható:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=-k+1}^m (c_i^l - \tilde{d}_i) \cdot B_{i,k,\tau^l}(x_j) \right)^2. \quad (3.38)$$

Ezek után a legtöbb  $d_i$ ,  $i = -k + 1, \dots, m - 1$  megválasztható olyannak, hogy  $c_i^l = \tilde{d}_i$  teljesüljön, és így a legtöbb összeadandó a fenti szummában nulla legyen. A (3.36) összefüggés alapján

$$d_i := \begin{cases} c_i^l, & \text{ha } i \leq p - k, \\ c_{i+1}^l, & \text{ha } p - 1 \leq i \leq m - 1. \end{cases} \quad (3.39)$$

A maradék együtthatókhoz kétféle helyettesítéssel élhetünk (3.36)-nak megfelelően.

$$d_i := \frac{c_i^l - (1 - \alpha_i) \cdot d_{i-1}}{\alpha_i}, \quad i = p - k + 1, \dots, p - 2 \quad (3.40)$$

vagy

$$d_i := \frac{c_i^l - \alpha_i \cdot d_i}{1 - \alpha_i}, \quad i = p - 1, \dots, p - k + 2. \quad (3.41)$$

Behelyettesítve (3.39)-et és (3.40)-et (3.36)-ba kapjuk, hogy  $c_i^l = \tilde{d}_i$  minden  $i$ -re, kivéve  $i = p - 1$ . Ha (3.41)-et használjuk (3.40) helyett, akkor pedig az  $i = p - k + 1$  kivételével minden  $i$ -re  $c_i^l = \tilde{d}_i$  teljesül. Ezen két alternatíva szerint az átlagos négyzetes eltéréseket az alábbi két érték adja:

$$\varepsilon_p^1 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N \left( (c_{p-1}^l - \tilde{d}_{p-1}) \cdot B_{p-1,k,\tau^l}(x_j) \right)^2, \quad (3.42)$$

illetve

$$\varepsilon_p^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N \left( (c_{p-k+1}^l - \tilde{d}_{p-k+1}) \cdot B_{p-k+1,k,\tau^l}(x_j) \right)^2. \quad (3.43)$$

A  $t_p^l$  alappont súlyának a két epszilon minimumát fogjuk választani.

$$w_p := \min(\varepsilon_p^1, \varepsilon_p^2). \quad (3.44)$$

Ez a  $w_p$  súly tehát azt hivatott jelezni, hogy mekkora jelentőséggel bír a  $t_p^l$  alappont a  $g_l$  spline reprezentációjában. A súlyokat ezért minden egyes belső alappontra  $t_1, t_2, \dots, t_m$  meghatározzuk, végül azt a pontot töröljük, melynek súlya a legkisebb.

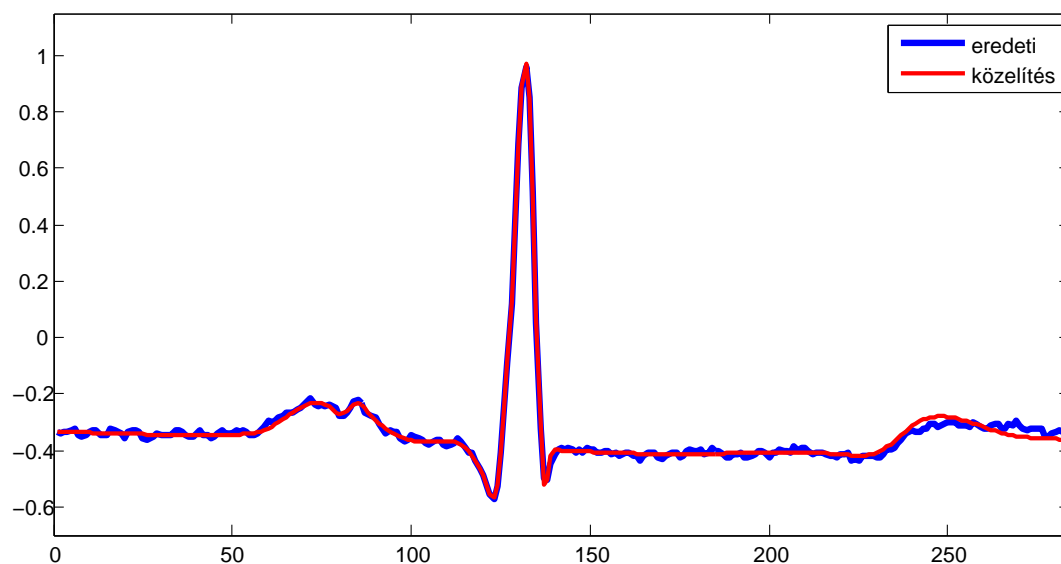
Ezen felül  $\varepsilon_p^1$  és  $\varepsilon_p^2$  számítása még tovább gyorsítható, ha figyelembe vesszük a B-spline függvények tartójának tulajdonságait. Nevezetesen (3.42)-ben  $B_{p-1,k,\tau^l}$  csak a  $[t_{p-1}, t_{p+k-1}]$ -beli  $x_j$  pontokban fog nemnulla értéket felvenni. Hasonló mondható el (3.43) esetén, ekkor a  $[t_{p-k+1}, t_{p+1}]$  tartományra szűkíthetünk.

### 3.4. Tesztek, eredmények

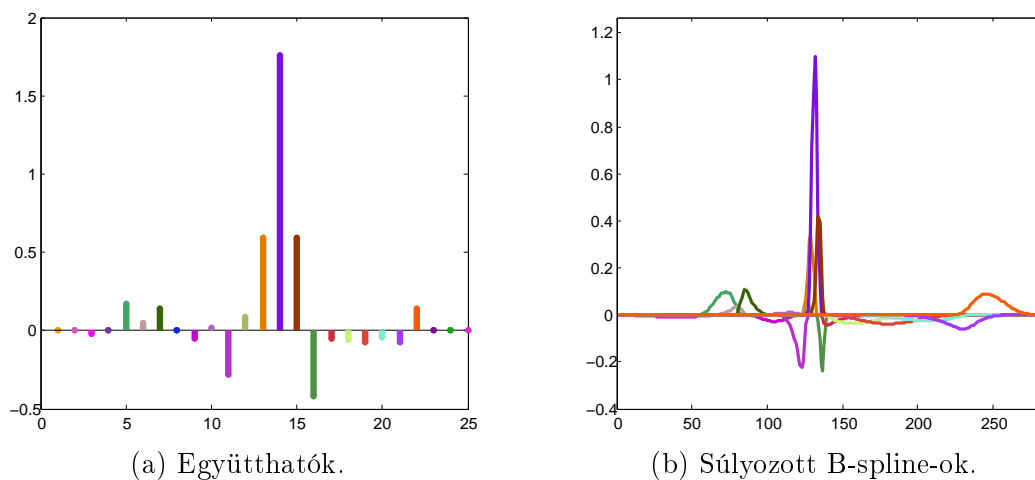
A bemutatott eljárást az MIT-BIH [15] aritmia adatbázisából vett két mérésen teszteltem. Az adatbázis bárki számára elérhető a [physionet.org](http://physionet.org) honlapon keresztül. Mindkét minta esetén az első elvezetés adatsorát vizsgáltam, 360 Hz mintavételezési rátával, 11 bites felbontásban. A mérések egyaránt félórás terjedelműek.



A tömörítéshez köbös spline-okat ( $k = 4$ ) használtam. Kezdetben az összes mintavételezési pontot alappontnak választottam, melyek közül lépésenként egyet-egyet hagytam el. Egy szívütésre kapott végeredményt tekinthet meg az Olvasó a 3.2. és 3.3. ábrákon. Az eredeti jel, mely kék színnel látható, 284 mintaelemből állt. Az algoritmus addig futott, amíg a belső alappontok száma el nem érte a 25-öt. Ennek megfelelően a rekonstruált (piros) jelhez csak a 25 alappont és 25 együttható ismerete szükséges, szemben az eredeti 284 adattal.



3.2. ábra. Szívütés és approximációja.



3.3. ábra. A fenti közelítést reprezentáló együtthatók és spline-ok.

Vegyük észre, hogy a közelítés eredménye egy sima, zajmentes függvény. Tehát az eljárás zajszűrésre is használható. Ez látható a 3.2. ábrán is. Végeredményben

egy olyan függvényt kaptam, amely egyrészt jól átlátható, másrészt jól alkalmazkodik az EKG-jel változékony természetéhez, és így az orvosok számára még beszédesebb marad. Ez alatt természetesen azt értem, hogy az orvos képes ugyanazon diagnózis felállítására, mint az eredeti jel esetén.

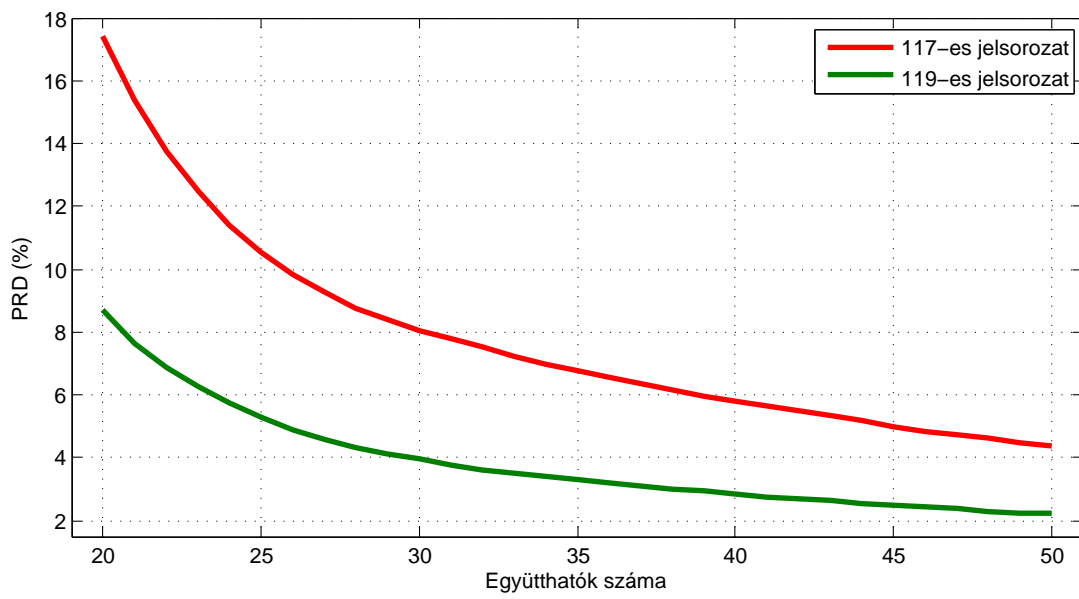
A közelítés illetve tömörítés „jóságának” mérésére két objektív értéket vezetünk be. Ezek a CR-rel jelölt tömörítési arány (Compression Ratio) és a PRD-vel jelzett approximációs hiba (Percentage Root-mean-square Difference):

$$\text{CR} := \frac{\text{együtthatók száma} + \text{belső alappontok száma}}{\text{eredeti adatok száma}} \cdot 100\%, \quad (3.45)$$

$$\text{PRD} := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2}{\sum_{j=1}^N (y_j - \bar{y})^2}} \cdot 100\%, \quad (3.46)$$

ahol  $y_j$  jelöli az eredeti mérési értékeket,  $\hat{y}_j$  a rekonstruált jel megfelelő értékeit és  $\bar{y}$  az  $y_j$ -k átlagát ( $j = 1, \dots, N$ ). A tömörítési arány a tömörített adat méretét igyekszik mutatni a tömörítetlenhez képest. A fenti példa esetén ez  $\frac{50}{284} \cdot 100\% \approx 17,6\%$ , ez elég jónak mondható, hiszen az eredeti adathoz képest körülbelül hatod akkora memórián tudunk tárolni, a jel különösebb torzítása nélkül. A PRD ezt a torzítást próbálja megfogni és jellemezni. Akár a tömörítés minőségéeként is hivatkozhatnánk rá.

A 117-es és 119-es mérésekre ezeket a PRD értékeket számoltam ki szívütésenként, a teljes félórás jelsorozatra, különböző számú (50, 49, ..., 20 darab) belső alappont esetén, majd átlagoltam a kapott értékeket, az alappontoknak megfelelően. A választás azért esett erre a két rekordra, mert [3] alapján ezek igen nehezen tömöríthető adatsokaságok. A 3.4. grafikonon az látható, miként függ az approximáció hibája a meghagyott alappontok számától. Mindkét esetben a szívütések átlagosan körülbelül 400 mintaelemből álltak. Megállapítható, hogy a tesztelt jeleknél, 25 alappont alatt a hiba gyorsan nő, 30 alappont felett azonban alig változik. Tehát nem érdemes 30-nál több alappontot meghagyni, hiszen nem javít jelentősen a közelítés hibáján. Például a 119-es rekordnál a hiba 30 alappontra 4%, 40-re viszont 3% körüli, azaz csak 1%-os javulás érhető el, noha 10-zel több bázisfüggvénnyel dolgoztunk.



3.4. ábra. Az átlagos PRD alakulása a meghagyott együtthatók számának függvényében.

## 4. fejezet

# Összefoglalás

A dolgozat fő motivációja a periodikus jelek tömörítésének ismertetése és implementációja volt. Ebben kiemelt szerepet kapott a [12]-es és [13]-as cikkekben bemutatott approximáló algoritmus.

Az eljárás teljes körű megértéséhez azonban számos numerikus analízisbeli fogalom, tétel, módszer ismerete volt szükséges. Ennek okán mutattuk be a szakaszonként polinom, spline függvényeket, melyeket kedvező tulajdonságai miatt nem csak a dolgozatban, de például a számítógépes modellalkotásban is előszeretettel alkalmaznak. A Curry-Schoenberg-tétel (2.1.10.) lehetőséget biztosított arra, hogy ezen spline függvényeket, a B-spline függvények reprezentációjaként tárgyaljuk, mely eredményt jelentősen ki is használtunk a tömörítő algoritmus során. Szintén erősen támaszkodtunk a 2.1.12. tételre, mely az egyes iterációkban biztosította a régi és új bázisfüggvények közötti kapcsolatot. Ezen kívül az egyes numerikus módszerek (legkisebb négyzetes közelítés, Givens-forgatások, QR-felbontás) egyaránt a bemutatott eljárás alapjait képezték.

A harmadik fejezetben ismertettük az EKG-jel feldolgozásának problémáját. Az EKG-méréseket igen hosszú diszkrét adatsorozat formájában kaptuk, melyet előbb szívtütemként „feldaraboltunk”, majd az egyes részekre spline-interpolációt alkalmaztunk. Az alappontok egymás utáni elhagyásával újabb approximációkat nyertünk, melyeket a már meglévő közelítéseinkből számoltunk, felhasználva a korábban említett 2.1.12. tételt illetve Givens-forgatásokat. Érdemes kiemelni az alappontok rangsorolását is, mellyel jelentősen gyorsítottunk az algoritmus futásán. Itt ugyanis a naív megoldás szerint alappontonként egy-egy  $N$  egyenletből álló legkisebb négyzetes feladatot kellett megoldanunk. Például a 2.3.2-ben bemutatott Gauss-egyenlettel ennek a feladatnak a műveletigénye  $\mathcal{O}(N^3)$ . Ez nagyon sok időt jelent, szemben a rangsoro-

lással, ahol alappontonként csupán az  $\varepsilon^1, \varepsilon^2$  értékeket kellett meghatároznunk, mely  $\mathcal{O}(N)$  művelettel elvégezhető.

A szakdolgozat részét képezi az implementáció is, mely a CD mellékleten található. Az algoritmus megvalósításához a MATLAB környezetet választottam, részben a beépített matematikai modellek, részben a mátrixműveletek hatékony számítása miatt. A programkód futtatásához szükséges egy speciális toolbox is. Ez és minden további instrukció szintén mellékelve van a lemezen.

Kitekintésként elmondható, hogy jelen dolgozat további kutatómunka alapjául is szolgálhat. Megvizsgálható például, hogy az egyes periódusokban miként változnak az alappontok illetve az együtthatók. Ennek megfelelően detektálhatók lehetnének bizonyos betegségek, és alkalmazhatók osztályozó algoritmusok azok beazonosítására.

# Függelék

# Algoritmusok

---

**Algorithm 1** Givens-forgatás, lásd:[7]

---

```
function [c,s]=givens(a,b)
if b = 0 then
    c = 1;    s = 0;
else
    if |b| > |a| then
        ρ = -a/b;    s = 1/√(1 + ρ2);    c = s · ρ
    else
        ρ = -b/a;    c = 1/√(1 + ρ2);    s = c · ρ
    end if
end if
```

---

---

**Algorithm 2** QR-felbontás Givens-forgatásokkal, lásd:[7]

---

```
for j = 1 : m do
    for i = n : -1 : j + 1 do
        [c, s] = givens(A(i - 1, j), A(i, j))
        A(i - 1 : i, j : m) =  $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot A(i - 1 : i, j : m)$ 
    end for
end for
```

---

# Irodalomjegyzék

- [1] W. Boehm, *Inserting new knots into B-spline curves*, in Computer-Aided Design, vol. 12, no. 4, pp. 199–201, July 1980.
- [2] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines (Revised Edition)*, in Applied Mathematical Sciences, vol. 27, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [3] H. H. Chou, Y. J. Chen, Y. C. Shiau, T. S. Kuo, *An effective and efficient compression algorithm for ECG signals with irregular periods*, in IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 53, no. 6, pp. 1198–1205, 2006.
- [4] G. D. Clifford, F. Azuaje, P. E. McSharry, *Advanced Methods and Tools for ECG Data Analysis*, Artech House, Inc., Norwood, Massachusetts, USA, 2006.
- [5] I. Faragó, R. Horváth, *Numerikus módszerek*, Typotex Kiadó, Budapest, 2011.
- [6] L. Gergó, *Numerikus módszerek*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2010.
- [7] G.H. Golub, C.F. van Loan, *Matrix Computations, 3rd. Ed.*, Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- [8] G. Hämmerlin, K-H. Hoffmann, *Numerical Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [9] Cs. Hegedűs, *Numerikus Analízis, egyetemi jegyzet*, ELTE-IK, 2008.
- [10] S. M. S. Jalaleddine, C. G. Hutchens, R. D. Strattan, W. A. Coberly, *ECG data compression techniques – a unified approach*, in IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 37, no. 4, pp. 329–343, April 1990.
- [11] I. Juhász, *Számítógépi geometria és grafika*, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1993.



- [12] M. Karczewicz, M. Hämläinen, M. Gabbouj, *Multiple knot spline approximation for ECG data compression*, in Proc. IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, Neos-Marmaras, Halkidiki, Greece, pp. 487–490, 20–22 June 1995.
- [13] M. Karczewicz, M. Gabbouj, *ECG data compression by spline approximation*, in Signal Processing, vol. 59, pp. 43–59, 1997.
- [14] A. Krebsz, *A Numerikus analízis tárgy 2. és 3. féléves anyaga, egyetemi jegyzet* ELTE-IK.
- [15] Massachusetts Institute of Technology, *The MIT-BIH Arrhythmia Database*, August 1980.
- [16] L. Piegl, W. Tiller, *The NURBS Book, 2nd. Ed.*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [17] G. Stoyan, G. Takó, *Numerikus módszerek I.*, Typotex Kiadó, Budapest, 2005.